КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, М.М. КАРЧЕВСКИЙ

ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
Издание второе переработанное
и дополненное

КАЗАНЬ

2016

Оглавление

Предисловие 6

Глава 1. **Комплексные числа и полиномы** 7
§ 1. Комплексные числа. Основные операции и формулы 7
§ 2. Алгебраические операции над полиномами 16
§ 3. Корни полиномов и их свойства 19
§ 4. Формулы Вьета 23
§ 5. Многочлены с действительными коэффициентами 23

Глава 2. **Системы линейных уравнений, матрицы, определители** . 26
§ 1. Перестановки 26
§ 2. Определители и их основные свойства 29
§ 3. Правило Крамера 38
§ 4. Основные операции над матрицами 43
§ 5. Обратная матрица 51
§ 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений 55
§ 7. Определитель произведения матриц 61
§ 8. Основные классы матриц 62
§ 9. Блочные матрицы. 64

Глава 3. **Введение в аналитическую геометрию** 68
§ 1. Векторы. Алгебраические операции над векторами 68
§ 2. Скалярное произведение векторов 73
§ 3. Векторное произведение 76
§ 4. Смешанное произведение векторов 79
§ 5. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры 81
§ 6. Различные формы уравнения прямой на плоскости 84
§ 7. Задачи о взаимном расположении прямых и точек на плоскости . 86
§ 8. Различные формы уравнения плоскости 88
§ 9. Уравнения прямой в пространстве 91
§ 10. Задачи о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей . . 92

Глава 4. **Линейные пространства** 97
§ 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ 97
§ 2. Общие линейные пространства 99
§ 3. Линейная зависимость векторов 102
§ 4. Линейно независимые системы векторов 104
§ 5. Ранг системы векторов 106
§ 6. Конечномерные линейные пространства. Базисы 107
§ 7. Замена базиса 109

Глава 5. **Евклидовы пространства** 112
§ 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением 112
§ 2. Общие евклидовы пространства 114
§ 3. Неравенство Коши — Буняковского 116
§ 4. Матрица Грама 118
§ 5. Ортогональные системы векторов 119
§ 6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта 120
§ 7. Разложение вектора по базису евклидова пространства 122
§ 8. Вычисление скалярного произведения 123
§ 9. Взаимный базис 124
§ 10. Примеры ортогональных базисов 124

Глава 6. **Подпространства** 128
§ 1. Сумма и пересечение подпространств 128
§ 2. Размерность суммы подпространств 131
§ 3. Ортогональная проекция вектора на подпространство 132
§ 4. Ортогональное разложение евклидова пространства 137

Глава 7. **Линейные операторы и матрицы** 139
§ 1. Основные определения. Действия над операторами. 139
§ 2. Обратный оператор 141
§ 3. Оператор разложения по базису 142
§ 4. Изоморфизм конечномерных пространств 143
§ 5. Матрица оператора 144
§ 6. Матрица обратного оператора 149
§ 7. Линейное пространство операторов 149
§ 8. Дефект и ранг линейного оператора. 150
§ 9. Ранг матрицы. 151
§ 10. Элементарный метод вычисления ранга матрицы 153

Глава 8. **Линейные уравнения** 156
§ 1. Общее решение линейного уравнения 156
§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений. Условия разрешимости 157
§ 3. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений . . 159

Глава 9. **Собственные числа и собственные векторы оператора** . . 163
§ 1. Инвариантные подпространства 163
§ 2. Собственных числа и собственные векторы. Характеристический полином 165
§ 3. Операторы простой структуры 172
§ 4. Инварианты оператора 174
§ 5. Инвариантные функции операторного аргумента 176
§ 6. Инвариантные подпространства оператора в вещественном пространстве 179
§ 7. Нильпотентный оператор 181
§ 8. Треугольная форма матрицы оператора 181
§ 9. Вещественная форма Шура 187

Глава 10. **Операторы в евклидовом пространстве** 188
§ 1. Линейные функционалы 188
§ 2. Сопряженный оператор 189
§ 3. Линейные уравнения в евклидовом пространстве 191
§ 4. Псевдорешение. Метод регуляризации Тихонова 192
§ 5. Самосопряженный и косоэрмитов операторы 195
§ 6. Неотрицательный и положительно определенный операторы . . . 197
§ 7. Унитарный оператор 198
§ 8. Нормальный оператор 199
§ 9. Корень из самосопряженного неотрицательного оператора 204
§ 10. Конгруэнтные эрмитовы операторы 205
§ 11. Вариационные свойства собственных чисел эрмитова оператора . 206
§ 12. Применения вариационного описания собственных чисел 210
§ 13. Евклидово пространство операторов 215

Глава 11. **Операторы в вещественном евклидовом пространстве** . 218
§ 1. Общие сведения 218
§ 2. Вещественное евклидово пространство операторов 219
§ 3. Структура нормального оператора 221
§ 4. Структура ортогонального оператора 223

Глава 12. **Квадратичные формы и квадратичные функции** 226
§ 1. Канонический вид квадратичной формы 226
§ 2. Закон инерции квадратичных форм 229
§ 3. Положительно определенные квадратичные формы 230
§ 4. Квадратичная функция и ее инварианты 230
§ 5. Приведенная форма квадратичной функции 232

Глава 13. **Кривые второго порядка** 238
§ 1. Приведение уравнения кривой к простейшему виду 238
§ 2. Геометрические свойства кривых второго порядка 242

Глава 14. **Поверхности второго порядка** 250
§ 1. Приведение уравнения поверхности к простейшему виду 250
§ 2. Геометрические свойства поверхностей второго порядка 252
§ 3. Гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$ 265

Глава 15. **Канонические формы и разложения** 268
§ 1. Сингулярное разложение оператора 268
§ 2. Полярное разложение оператора 272
§ 3. Псевдообратный оператор 274
§ 4. Элементы теории мажоризации 275
§ 5. Некоторые оценки собственных и сингулярных чисел 279
§ 6. Каноническая форма Жордана 285
§ 7. Корневые и циклические подпространства 291
§ 8. Вещественная форма Жордана 293
§ 9. Степенные матричные ряды 295

Глава 16. **Матричные пучки** 299
§ 1. Определения. Основные свойства. 299
§ 2. Квазидиагональная форма пучка 302
§ 3. Каноническая форма Вейерштрасса 304
§ 4. Специальные матричные пучки 305
§ 5. Сингулярные пучки. Теорема о приведении 306
§ 6. Каноническая форма Кронекера 311
§ 7. Приложения к системам дифференциальных уравнений 313

Глава 17. **Нормы векторов и матриц** 318
§ 1. Основные неравенства 318
§ 2. Нормы на пространстве $\mathbb{C}^n$ 320
§ 3. Теорема Хана — Банаха. Дуальные нормы 323
§ 4. Нормы на пространстве матриц 327
§ 5. Раствор подпространств (пары проекторов) 337

Глава 18. **Элементы теории возмущений** 341
§ 1. Задача на собственные значения для эрмитовой матрицы 341
§ 2. Сингулярные числа и сингулярные базисы 346
§ 3. Характеристические числа произвольной матрицы 347
§ 4. Возмущения и обратимость матрицы 351
§ 5. Устойчивость систем линейных уравнений 353
§ 6. Возмущения псевдорешения 356

Глава 19. **Неотрицательные матрицы** 360
§ 1. Простейшие свойства неотрицательных матриц 360
§ 2. Положительные матрицы 362
§ 3. Неотрицательные матрицы 364
§ 4. Неразложимые неотрицательные матрицы 365

Глава 20. **Введение в численные методы линейной алгебры** 369
§ 1. Прямые методы решения систем уравнений 369
§ 2. Итерационные методы Якоби и Зейделя 376
§ 3. Элементы общей теории итерационных методов 379
§ 4. Итерационные методы вариационного типа 387
§ 5. Метод Якоби решения задач на собственные значения 399

Предметный указатель 403

Литература 409

Предисловие

Книга представляет собой существенно переработанное и расширенное изложение курса лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии, которые читаются для студентов первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, обучающихся по направлениям прикладной математики и и информатики.

Помимо вопросов, традиционно включаемых в курсы алгебры и геометрии для студентов физико-математических специальностей, книга содержит изложение ряда разделов, которые могут быть полезны при чтении специальных курсов и для семинарских занятий по тем разделам линейной алгебры, которые находят разнообразные применения в различных приложениях. На наш взгляд, эти материалы могут оказаться интересными и для научных работников, специализирующихся в указанных областях.

Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедр прикладной и вычислительной математики КФУ. Авторы приносят им свою искреннюю признательность.

Мы благодарны всем читателям, приславшим свои отклики на первоначальный вариант книги. Особую признательность выражаем Ю.А. Альпину, В.Б. Андрееву, А.В. Гулину, А.С. Ильинскому, Ю.Г. Смирнову, С.И. Соловьеву, Е.Л. Столову, М.Р. Тимербаеву, Е.В. Чижонкову, указавшим на ряд неточностей и недостатков, которые мы постарались устранить.

Глава 1

Комплексные числа и полиномы

§ 1. Комплексные числа. Основные операции и формулы

1. Хорошо известно, что не всякое квадратное уравнение имеет вещественные решения. Самый простой пример — уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Очевидно, никакое вещественное x не может быть корнем этого уравнения. Ситуация меняется, если ввести в рассмотрение новое число, так называемую *мнимую единицу*. Будем обозначать ее через i и полагать, что

$$i^2 = -1.$$

Тогда уравнение (1.1) будет иметь корень $\alpha_1 = i$. Естественно положить, что $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Тогда и число $\alpha_2 = -i$ является корнем уравнения (1.1), т. е. уравнение (1.1), как и аналогичное уравнение

$$x^2 - 1 = 0,$$

имеет два различных корня. Рассматривая уравнение

$$x^2 + q = 0,$$

где $q > 0$, естественно принять, что оно имеет два корня

$$\alpha_1 = i\sqrt{q} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -i\sqrt{q}.$$

Числа вида ib, где b — вещественное число, называют *мнимыми*.

Рассмотрим теперь общее квадратное уравнение, записывая его для удобства в приведенном виде:

$$x^2 - 2px + q = 0. \tag{1.2}$$

Элементарные преобразования дают

$$(x - p)^2 + q - p^2 = 0.$$

Будем считать, что $q - p^2 > 0$, т. е. дискриминант уравнения (1.2) отрицателен.

Теперь естественно положить, что корнями уравнения (1.2) являются числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}. \tag{1.3}$$

Это числа новой природы. Они имеют вид $a + ib$, где a и b — вещественные числа. Их называют *комплексными числами*. В частном случае, когда $b = 0$, считают, что комплексное число $a + ib$ совпадает с вещественным числом a, а при $a = 0$ — с мнимым числом ib.

Как правило, комплексное число будем обозначать буквой z:

$$z = x + iy.$$

Говорят, что x — *вещественная часть* комплексного числаz, а y — его *мнимая часть*.z Обозначим x через $\operatorname{Re} z$, а y — через $\operatorname{Im} z$. Таким образом, можно написать, что

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

По определению два комплексных числа *равны*, если совпадают соответственно их вещественные и мнимые части.

2. Естественно теперь попытаться проверить, что числа α_1, α_2, определенные в (1.3), — корни уравнения (1.2), т. е. при подстановке их в равенство (1.2) последнее обращается в тождество. Для этого надо уметь выполнять *алгебраические операции* над комплексными числами. Дадим соответствующие определения.

Под *суммой* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ понимается комплексное число $z = x + iy$, где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2.$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется число

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ясно, что если z — разность комплексных чисел z_1 и z_2, то $z_2 + z = z_1$.

Например, сумма комплексных чисел $z_1 = 1 + i2$ и $z_2 = 3 + i4$ равна числу

$$z = (1 + i2) + (3 + i4) = (1 + 3) + i(2 + 4) = 4 + i6,$$

а их разность — числу

$$z = (1 + i2) - (3 + i4) = (1 - 3) + i(2 - 4) = -2 - i2.$$

Комплексное число вида $0 + i\,0$ называется *нулевым*. Будем обозначать его символом 0. Для любого комплексного числа z справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad 0 + z = z.$$

Определяя *произведение* комплексных чисел, будем действовать как при перемножении обычных двучленов, учитывая при этом, что $i^2 = -1$. Получаем, таким образом,

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

т. е. по определению

$$\mathrm{Re}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Re}\,z_1 \mathrm{Re}\,z_2 - \mathrm{Im}\,z_1 \mathrm{Im}\,z_2, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Im}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Re}\,z_1 \mathrm{Im}\,z_2 + \mathrm{Re}\,z_2 \mathrm{Im}\,z_1. \tag{1.5}$$

Вычислим, например, произведение чисел $z_1 = 1 + i2$ и $z_2 = 3 + i4$:

$$z_1 z_2 = (1 + i2) \cdot (3 + i4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + i(1 \cdot 4 + 3 \cdot 2) = -5 + i10.$$

Для любого комплексного числа z

$$z0 = 0z = 0.$$

Упражнение. Убедиться, что определенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — *коммутативность*, или *перестановочность*,

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ — *ассоциативность*, или *сочетательность*,

3) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ — *дистрибутивность*, или *распределительность*.

Упражнение. Непосредственной подстановкой показать, что формулы (1.3) дают корни уравнения (1.2).

Комплексное число z назовем *частным* от *деления* комплексного числа z_1 на z_2, если

$$z z_2 = z_1. \tag{1.6}$$

Покажем, что если $z_2 \neq 0$, то z как решение уравнения (1.6) существует и определяется единственным образом. В самом деле, используя формулы (1.4), (1.5), запишем (1.6) более подробно:

$$x x_2 - y y_2 + i(x y_2 + x_2 y) = x_1 + i y_1. \tag{1.7}$$

Приравнивая соответственно вещественные и мнимые части, получим

$$xx_2 - yy_2 = x_1, \tag{1.8}$$

$$xy_2 + yx_2 = y_1. \tag{1.9}$$

Единственно возможным решением этой системы уравнений будет

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{1.10}$$

$$y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.11}$$

Формулы (1.10), (1.11) определяют правило *деления* комплексных чисел.

Разделим, например, комплексное число $z_1 = 1 + i2$ на $z_2 = 3 + i4$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + i\,\frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{11}{25} + i\,\frac{2}{25}.$$

По определению $z^n = zz \cdots z$ для натурального n, где сомножитель z повторяется n раз, $z^0 = 1$, $z^{-n} = (1/z)^n$.

Важно подчеркнуть, что все введенные нами операции в случае, когда операнды вещественны, совпадают с соответствующим операциями над вещественными числами (проверьте!).

Таким образом, множество комплексных чисел можно считать расширением множества вещественных чисел.

3. Число $\overline{z} = x - iy$ называют *сопряженным* по отношению к комплексному числу $z = x + iy$ (часто говорят, что числа z и $\overline{z}$ *комплексно сопряжены*). Ясно, что

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2. \tag{1.12}$$

Отметим также, что

$$z + \overline{z} = 2x, \quad z - \overline{z} = i2y, \quad z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

Вещественное неотрицательное число $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Очевидно, что

$$\text{если } |z| = 0, \text{ то } x = 0,\ y = 0, \text{ т. е. } z = 0. \tag{1.13}$$

Элементарные вычисления показывают, что для любых двух комплексных чисел z_1, z_2 справедливо равенство

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|. \tag{1.14}$$

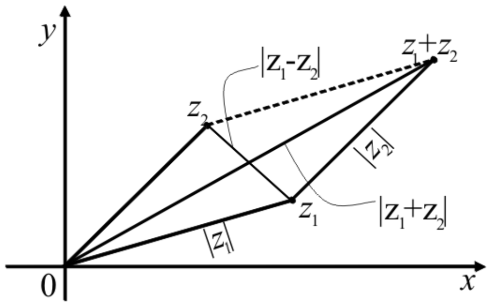


Рис. 1. К неравенствам (1.15), (1.16)

Упражнение. Используя хорошо известное неравенство

$$2|xy| \leqslant (x^2 + y^2),$$

справедливое для любых вещественных чисел x, y, убедиться, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1.15}$$

Соотношения (1.13) – (1.15) показывают, что с модулем комплексного числа можно оперировать так же, как и с абсолютной величиной вещественного числа.

Заметим, что $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$, следовательно,

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Точно так же

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Таким образом,

$$||z_2| - |z_1|| \leqslant |z_1 - z_2|. \tag{1.16}$$

4. Напомним, что с каждым вещественным числом x можно связать точку на числовой прямой. Аналогичная (но более сложная) геометрическая интерпретация полезна и для комплексных чисел.

Введем на плоскости декартову систему координат (x, y) и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ точку с координатами (x, y).

При этом модуль комплексного числа — это расстояние от точки (x, y) до начала координат (сделайте рисунок!).

Взаимно сопряженные числа симметричны относительно оси x (сделайте рисунок!).

Напомним, что при сложении векторов их одноименные координаты складываются. Поэтому суммирование чисел $z_1 = x_1 + iy_1$

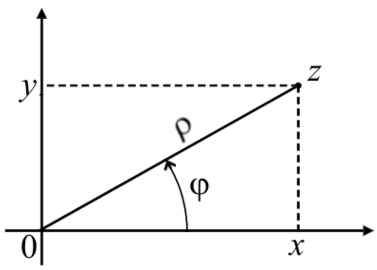


Рис. 2. К тригонометрической форме комплексного числа

и $z_2 = x_2 + iy_2$ соответствует сложению векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (сделайте рисунок!).

Неравенства (1.15), (1.16) можно интерпретировать теперь как хорошо известные неравенства для сторон треугольника (см. рис. 1).

5. Каждое комплексное число (кроме нуля) можно однозначно охарактеризовать двумя параметрами: модулем и углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси x против часовой стрелки (см. рис. 2). Угол φ меняется в пределах от 0 до 2π и называется *аргументом* комплексного числа z. Часто используют обозначения $\varphi = \arg z$,

$$\rho = |z|. \tag{1.17}$$

Получим явное выражение z через $|z|$ и $\arg z$. Имеем

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right).$$

При этом (см. рис. 2)

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{|z|} = \sin\varphi, \tag{1.18}$$

т. е.

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.19}$$

Соотношения (1.17)–(1.19) дают так называемое *тригонометрическое представление* комплексного числа.

6. Тригонометрическая запись комплексных чисел позволяет поновому взглянуть на алгебраические операции над ними и получить ряд полезных формул.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Перемножая эти числа и используя известные тригонометрические соотношения, получим

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \tag{1.20}$$

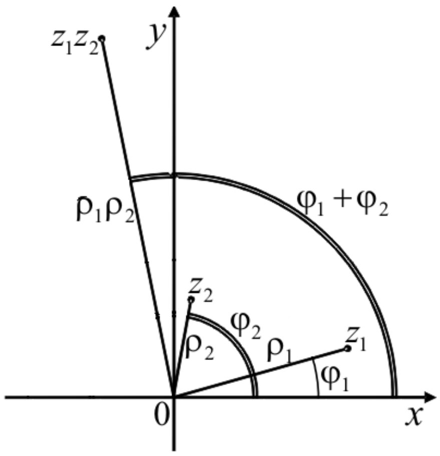


Рис. 3. К умножению комплексных чисел

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (см. рис. 3).

Вычислим, например, произведение чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле (1.20) имеем

$$z_1z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Здесь нужно отметить, что число $\varphi_1 + \varphi_2$ может выйти из отрезка $[0, 2\pi]$, но вследствие периодичности тригонометрических функций мы можем отождествлять их аргументы, отличающиеся на величину, кратную 2π. Это замечание дает возможность корректно определить аргумент произведения двух любых комплексных чисел. Аналогичное относится и к другим операциям над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Запишем уравнение (1.6), используя тригонометрическое представление комплексных чисел и формулу (1.20):

$$\rho\rho_2(\cos(\varphi + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_2)) = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1). \tag{1.21}$$

Отсюда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \tag{1.22}$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Разделим, например, комплексное число

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{на} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле (1.22) имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Получим формулу для вычисления степеней комплексного числа. Используя (1.20), непосредственно получаем, что

$$z^2 = zz = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

и, вообще, для любого целого числа n (включая нуль и отрицательные целые числа)

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.23}$$

Формулу (1.23) называют *формулой Муавра*[1].

Возведем, например, комплексное число

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

в третью степень:

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 27\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Обратимся к задаче извлечения корня степени n, $n \geqslant 1$ — целое, из комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, т. е. к отысканию такого числа $\tilde{z} = \tilde{\rho}(\cos\tilde{\varphi} + i\sin\tilde{\varphi})$, что

$$\tilde{z}^n = \tilde{\rho}^n(\cos n\tilde{\varphi} + i\sin n\tilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.24}$$

Понятно, что поставленная задача будет решена, если положить

$$\tilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где под корнем из ρ понимается арифметическое значение корня из неотрицательного числа. Таким образом, показано, что числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right), \ \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.25}$$

являются *корнями* степени n из числа z. Придавая k значения, большие, чем $n-1$, в силу периодичности тригонометрических функций мы будем повторять циклически уже найденные значения корней.

Например, корни четвертой степени из комплексного числа

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

[1] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre; 1667 — 1754) — английский математик французского происхождения.

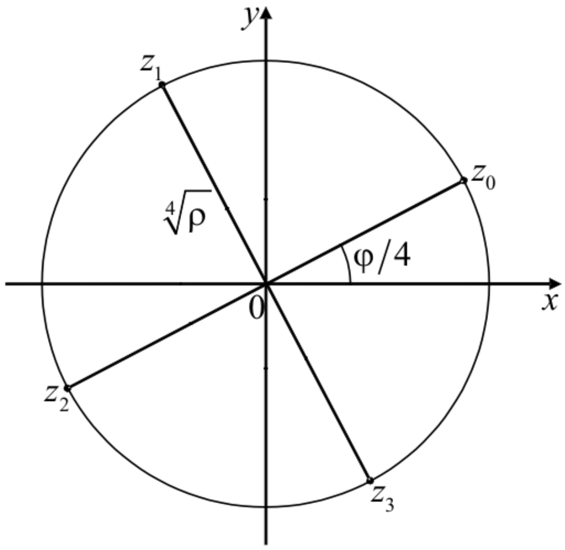


Рис. 4. К вычислению корня степени n из комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь $n = 4$, $z_k = \sqrt[4]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $\varphi_k = \varphi/4 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$

вычисляются по формулам

$$z_k = \sqrt[4]{3}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{8} + k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Итак, у любого комплексного числа (кроме нуля) существует n различных корней степени $n \geqslant 1$. Все они расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей (см. рис. 4).

Естественно поставить вопрос, можно ли указать корни из числа z, отличные от найденных. Ответ отрицательный. Чтобы убедиться в этом, надо обратиться к пункту 3, с. 22, трактуя при этом (1.24) как уравнение для отыскания корней полинома степени n.

Формулу (1.25) часто записывают в несколько иной форме. Положим

$$q_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Очевидно, $q_k^n = 1$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. q_k — корни степени n из единицы. Нетрудно проверить, что

$$z_k = z_0 q_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, вычислив корень

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\varphi/n + i\sin\varphi/n\right),$$

все остальные можно получить последовательными сдвигами на угол $2\pi/n$ по окружности.

§ 2. Алгебраические операции над полиномами

1. *Многочленом* (*полиномом*) называют функцию вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n. \tag{2.1}$$

Здесь $a_0, \ldots, a_n$ — фиксированные комплексные числа, называемые *коэффициентами* многочлена. Если a_n не нуль, то целое число $n \geqslant 0$ называют *порядком* или *степенью* многочлена, a_n называется *старшим коэффициентом* многочлена, переменная z может принимать любые комплексные значения.

Многочлены $P_n(z)$, $Q_n(z)$ равны, когда все их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают.

Многочлен равен нулю, если все его коэффициенты — нули. Иначе говоря, это — постоянная, равная нулю. Такому многочлену нельзя приписать никакой степени. Мы будем называть его *нулевым* и обозначать символом 0.

Сумма многочленов $P_n(z) + Q_m(z)$ — многочлен, причем степень его не больше максимального из чисел m и n, или это — нулевой многочлен.

Произведение многочленов $P_n(z)Q_m(z)$ — многочлен, степень которого есть сумма степеней, т. е. $m + n$.

Сложение любого многочлена с нулевым не меняет этого многочлена. Произведение двух многочленов — нулевой многочлен тогда и только тогда, когда один из сомножителей — нулевой многочлен.

Введем и исследуем операцию деления многочленов.

Теорема 1. *Для любых двух многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ можно найти многочлены $q(z)$ и $r(z)$, где $r(z)$ имеет степень, меньшую степени многочлена $Q(z)$, или является нулевым многочленом, такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z). \tag{2.2}$$

Многочлены $q(z)$ и $r(z)$, удовлетворяющие указанным условиям, определяются по многочленам $P(z)$, $Q(z)$ однозначно.

Доказательство. Предположим сначала, что $P(z)$ — нулевой многочлен или его степень меньше степени многочлена $Q(z)$. В этом случае равенство (2.2), очевидно, может быть выполнено лишь при условии, что $q(z)$ — нулевой многочлен, а $r(z) = P(z)$.

Положим теперь, что многочлен $P(z)$ имеет степень n, многочлен $Q(z)$ имеет степень m, причем $n \geqslant m$. Для упрощения записей будем считать, что старший коэффициент многочлена Q равен единице. Случай, когда этот коэффициент — произвольное ненулевое число, требует очевидных изменений в выписываемых ниже формулах.

Итак, пусть

$$\begin{aligned}
&P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,\\
&Q(z) = z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0,\\
&q(z) = c_{n-m} z^{n-m} + c_{n-m-1} z^{n-m-1} + \cdots + c_0,\\
&r(z) = d_{m-1} z^{m-1} + d_{m-2} z^{m-2} + \cdots + d_0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты многочленов $P(z)$, $Q(z)$ даны, а коэффициенты многочленов $q(z)$, $r(z)$ требуется найти. Проводя элементарные выкладки, соберем коэффициенты при одинаковых степенях z в правой части (2.2) и приравняем их соответствующим коэффициентам многочлена P:

$$\begin{aligned}
&a_n = c_{n-m},\\
&a_{n-1} = c_{n-m-1} + c_{n-m} b_{m-1},\\
&a_{n-2} = c_{n-m-2} + c_{n-m-1} b_{m-1} + c_{n-m} b_{m-2},\\
&\dots\dots\dots\\
&a_m = c_0 + c_1 b_{m-1} + c_2 b_{m-2} + \cdots + c_m b_0,\\
&a_{m-1} = d_{m-1} + c_0 b_{m-1} + c_1 b_{m-2} + \cdots + c_{m-1} b_0,\\
&\dots\dots\dots\\
&a_0 = d_0 + c_0 b_0.
\end{aligned}$$

Полученные соотношения представляют собой систему уравнений относительно коэффициентов многочленов $q(z)$, $r(z)$. Эта система легко решается и однозначно определяет коэффициенты искомых полиномов. Сначала находятся коэффициенты c_j, последовательно, в порядке убывания индексов:

$$\begin{aligned}
&c_{n-m} = a_n,\\
&c_{n-m-1} = a_{n-1} - c_{n-m} b_{m-1},\\
&c_{n-m-2} = a_{n-2} - c_{n-m-1} b_{m-1} - c_{n-m} b_{m-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_0 = a_m - c_1 b_{m-1} - c_2 b_{m-2} - \cdots - c_m b_0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Затем с использованием уже найденных значений c_j вычисляются коэффициенты d_j:

$$\begin{aligned}
&d_{m-1} = a_{m-1} - c_0 b_{m-1} - c_1 b_{m-2} - \cdots - c_{m-1} b_0,\\
&d_{m-2} = a_{m-2} - c_0 b_{m-2} - c_1 b_{m-3} - \cdots - c_{m-2} b_0,\\
&\dots\dots\dots\\
&d_0 = a_0 - c_0 b_0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что c_{n-m} не равен нулю, поскольку a_n не равен нулю, а коэффициенты полинома $r(z)$, вообще говоря, могут быть нулями. $\square$

Здесь и далее символ $\square$ обозначает конец доказательства.

Описанный в ходе доказательства теоремы способ вычисления коэффициентов многочленов q, r называется *схемой Горнера*[1]. Она широко применяется на практике.

Формула (2.2) определяет операцию *деления* многочлена P на многочлен Q; q — *частное* от деления, r — *остаток*. В случае, когда многочлен r оказывается равным нулю, говорят, что многочлен P *делится* на многочлен Q (иногда говорят, что *делится нацело*).

Замечание. Из формул, полученных в ходе доказательства теоремы 1, очевидно, следует, что если P, Q являются многочленами с действительными коэффициентами, то коэффициенты многочленов q, r — действительные числа.

Пример. В качестве примера применения схемы Горнера разделим

$$P_4(z) = 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 \quad \text{на} \quad Q_2(z) = z^2 - 3z + 1,$$

т. е. найдем такие многочлены

$$q_2(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad \text{и} \quad r(z) = d_1 z + d_0,$$

что выполняется равенство

$$P_4(z) = Q_2(z) q_2(z) + r(z).$$

В нашем примере $n = 4$, а $m = 2$. Сначала по формулам (2.3) вычислим коэффициенты c_2, c_1 и c_0:

$$\begin{aligned} &c_2 = a_4 = 2, \\ &c_1 = a_3 - c_2 b_1 = -3 - 2(-3) = 3, \\ &c_0 = a_2 - c_1 b_1 - c_2 b_0 = 4 - 3(-3) - 2 \cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

Затем по формулам (2.4) найдем коэффициенты d_1 и d_0:

$$\begin{aligned} &d_1 = a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = -5 - 11(-3) - 3 \cdot 1 = 25, \\ &d_0 = a_0 - c_0 b_0 = 6 - 11 \cdot 1 = -5. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$q_2(z) = 2z^2 + 3z + 11, \quad r(z) = 25z - 5.$$

2. Естественно поставить вопрос: будут ли коэффициенты полиномов $P_n(z)$, $Q_n(z)$ совпадать, если значения этих полиномов совпадают при всех z, иными словами, будут ли все коэффициенты многочлена равны нулю, если сам многочлен тождественно равен нулю. Это действительно так, но доказательство удобно будет выполнить несколько позже. Как ни странно, наиболее просто оно проводится при изучении систем линейных алгебраических уравнений (см. §3, с. 42).

[1] Уильям Джордж Горнер (William George Horner; 1786 — 1837) — английский математик.

§ 3. Корни полиномов и их свойства

1. *Корнем* многочлена $P_n(z)$ называется такое число α, вообще говоря, комплексное, что $P_n(\alpha) = 0$.

Теорема 1 (Безу[1]). *Пусть $n \geqslant 1$, α — произвольное комплексное число. Тогда многочлен $P_n(z) - P_n(\alpha)$ делится на $z - \alpha$.*

Доказательство. По теореме 1, с. 16,

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha) + r,$$

где r — число (многочлен нулевой степени). Полагая в этом равенстве $z = \alpha$, получим, что $r = 0$, т. е.

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha). \ \Box$$

Из теоремы Безу очевидным образом вытекает

Следствие. *Многочлен P_n тогда и только тогда делится на $z - \alpha$, когда α — корень этого многочлена.*

Число α называется корнем *кратности* $k \geqslant 1$ многочлена P_n, если $P_n(z)$ делится на $(z - \alpha)^k$:

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k q_{n-k}(z),$$

а $q_{n-k}(z)$ не делится на $(z - \alpha)$, т. е. α не является корнем многочлена $q_{n-k}(z)$.

Если кратность корня равна единице, то корень называют *простым.*

2. Исследуя свойства корней полинома, для упрощения записей обычно переходят к *приведенному* (часто говорят *нормированному*) полиному, получающемуся делением всех коэффициентов исходного полинома на его старший коэффициент.

Очевидно, что любой корень исходного полинома является корнем приведенного полинома и, наоборот, любой корень приведенного полинома — корень исходного полинома.

Теорема 2 (основная теорема алгебры). *Всякий полином*

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad n \geqslant 1,$$

имеет хотя бы один корень.

---

[1] Этьен Безу (Etienne Bezout; 1730 — 1783) — французский математик.

Доказательство. Будем обозначать декартовы координаты точек на плоскости через x_1, x_2. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — точка на плоскости, $z = x_1 + ix_2$ — соответствующее ей комплексное число.

Равенство $f(x) = |P_n(z)|$ определяет функцию f двух вещественных переменных. Эта функция неотрицательна при всех x.

Если удастся доказать, что существует точка $x = (x_1, x_2)$ такая, что $f(x) = 0$, то число $z = x_1 + ix_2$ будет корнем полинома P_n.

Докажем, прежде всего, что функция f непрерывна на всей плоскости. Для любых двух точек x, $\tilde{x}$ вследствие (1.16), с. 11, имеем

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = ||P_n(\tilde{z})| - |P_n(z)|| \leqslant |P_n(\tilde{z}) - P_n(z)|.$$

Здесь $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$. Положим $h = \tilde{z} - z$. Тогда

$$P_n(\tilde{z}) = P_n(z+h) = (z+h)^n + a_{n-1}(z+h)^{n-1} + \dots + a_1(z+h) + a_0. \quad (3.1)$$

По формуле бинома Ньютона[1)] для любого целого $k \geqslant 1$

$$(z+h)^k = z^k + C_k^1 z^{k-1}h + \dots + C_k^{k-1} z h^{k-1} + h^k.$$

Приводя подобные в правой части (3.1), найдем, что

$$P_n(z+h) = P_n(z) + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_{n-1}h^{n-1} + h^n, \quad (3.2)$$

причем коэффициенты $c_1, \dots, c_{n-1}$ зависят только от z и коэффициентов полинома P_n. Применяя (1.14), (1.15), с. 11, нетрудно получить, что

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = |P_n(z+h) - P_n(z)| \leqslant L(|h| + |h|^2 + \dots + |h|^n), \quad (3.3)$$

где L зависит только от $|z|$ и модулей коэффициентов полинома P_n. Выбирая точку $\tilde{x}$ достаточно близкой к x, правую часть неравенства (3.3) можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа. Это и означает непрерывность функции f.

Можно считать, что $f(0) = |a_0| > 0$. В противном случае нуль — корень полинома. Построим круг B_R радиуса R с центром в начале координат. Обозначим через S_R окружность, границу круга B_R. Пусть $x \in S_R$. Запишем $f(x)$ в виде $f(x) = |z^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0)|$. Вследствие (1.16), с. 11, отсюда вытекает, что

$$f(x) \geqslant |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_0| = R^n - |a_{n-1}|R^{n-1} - \dots - |a_0| = \\ = R^n(1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \dots - |a_0|R^{-n}).$$

[1)] Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1643 — 1727) — английский физик, математик и астроном.

Правая часть полученного неравенства стремится к бесконечности при $R \to \infty$. Поэтому, выбирая R достаточно большим, можно добиться того, что
$$f(x) \geqslant 2f(0) \quad \forall\, x \in S_R. \tag{3.4}$$
По доказанному выше функция f непрерывна на всей плоскости, значит, по теореме Вейерштрасса[1)] она достигает минимального значения в некоторой точке x^1 на замыкании круга B_R. Очевидно, $f(x^1) \leqslant f(0)$, но тогда вследствие оценки (3.4) точка x^1 не может лежать на S_R, следовательно, она — внутренняя точка области B_R. Будем считать, что $f(x^1) > 0$. В противном случае точка x^1 соответствует корню полинома P_n.

Пусть $h = h_1 + ih_2$. Если модуль h достаточно мал, то точка
$$x^2 = (x_1^1 + h_1, x_2^1 + h_2)$$
лежит внутри B_R. По определению $f(x^2) = |P_n(z^1 + h)|$. Используя (3.2), получим, что $P_n(z^1 + h) = P_n(z^1) + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + h^n$, причем коэффициенты $c_1, \dots, c_{n-1}$ зависят только от z^1 и коэффициентов полинома P_n. По предположению $P_n(z^1)$ не нуль, поэтому
$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + d_1 h + \dots + d_n h^n.$$
Среди чисел $d_1, \dots, d_n$ хотя бы одно не нуль, по крайне мере, последнее таково. Пусть $d_k \neq 0$, а все числа d_j с меньшими номерами — нули. Тогда для любого $c \neq 0$
$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + \frac{d_k}{c^k}(ch)^k + \frac{d_{k+1}}{c^{k+1}}(ch)^{k+1} + \dots + \frac{d_n}{c^n}(ch)^n. \tag{3.5}$$
Выберем c так, чтобы $c^k = -d_k$. Положим $v = ch$. Тогда
$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} = \frac{|P_n(z^1 + h)|}{|P_n(z^1)|} = |1 - v^k + v^k b(v)|,$$
где $b(v) = \dfrac{d_{k+1}}{c^{k+1}} v + \dots + \dfrac{d_n}{c^n} v^{n-k}$. Выберем теперь h так, что v — вещественное положительное число, меньшее единицы, а $|b(v)| \leqslant 1/2$. При таком v, очевидно,
$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} \leqslant 1 - \frac{v^k}{2} < 1,$$

[1)] См. курс математического анализа. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass; 1815 — 1897) — немецкий математик.

а этого быть не может, так как x^1 — точка минимума функции f на замыкании B_R. Получили противоречие. Остается принять, что $f(x^1) = 0$, т. е. $z^1 = x_1^1 + ix_2^1$ — корень полинома P_n. □

Теорема 3. *Всякий полином степени n имеет n корней (с учетом их кратности).*

Доказательство. Пусть $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $n \geqslant 1$. По основной теореме алгебры полином P_n имеет корень. Обозначим его через α_1. Пусть этот корень имеет кратность $k_1 \geqslant 1$. Тогда

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} q_{n-k_1}(z).$$

Если $k_1 = n$, то, очевидно, $q_{n-k_1} = 1$. В противном случае полином $q_{n-k_1}(z)$ имеет корень. Обозначим его через α_2. Понятно, что α_2 является корнем полинома P_n, причем по построению отличным от α_1. Пусть кратность α_2 (как корня полинома q_{n-k_1}) равна k_2. Тогда

$$q_{n-k_1}(z) = (z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_1-k_2}(z),$$

следовательно,

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_1-k_2}(z).$$

Ясно, что k_2 — кратность α_2 как корня полинома P_n. Продолжая этот процесс, получим, что

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \cdots (z - \alpha_m)^{k_m}, \tag{3.6}$$

где $k_1,\ k_2, \ldots, k_m$ — целые числа, не меньшие единицы, и такие, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. □

Теорема 4. *Полином P_n степени $n \geqslant 1$ не может иметь больше чем n корней.*

Доказательство. В самом деле, пусть $P_n(\alpha) = 0$ и α не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, определенных в предыдущем пункте. По следствию из теоремы Безу имеем $P_n(z) = (z - \alpha)q_{n-1}(z)$, откуда на основании (3.6) получаем, что

$$(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \cdots (z - \alpha_m)^{k_m} = (z - \alpha)q_{n-1}(z).$$

Правая часть этого равенства при $z = \alpha$ равна нулю, а левая не равна нулю. Полученное противоречие означает, что никакое число, отличное от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, не может быть корнем полинома P_n. □

§ 4. Формулы Вьета

Пусть $Q_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ — произвольный полином степени n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — корни полинома Q_n, $k_1,\ k_2, \ldots, k_m$ — их кратности, причем $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Вследствие результатов, полученных в пункте 3, полином Q_n можно представить в виде $Q_n(z) = A(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_m)^{k_m}$, где A — некоторая постоянная.

Занумеруем корни полинома P_n целыми числами от 1 до n, повторяя каждый корень столько раз, какова его кратность, и запишем (3.6) в виде $P_n(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$. Раскрывая скобки в правой части равенства, приводя подобные и приравнивая коэффициенты при степенях z соответствующим коэффициентам в левой части, получим формулы, выражающие коэффициенты полинома P_n через его корни:

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$
$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_0 = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Закономерность образования этих формул очевидна: в каждой последующей строке количество сомножителей увеличивается на единицу, складываются всевозможные произведения различных сомножителей.

Полученные формулы называются *формулами Вьета*[1)].

§ 5. Многочлены с действительными коэффициентами

Пусть все коэффициенты полинома

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ \ldots\ + a_0$$

есть вещественные числа, тогда если α — корень этого полинома, то и сопряженное число $\overline{\alpha}$ — корень полинома P_n.

Доказательство этого утверждения сразу вытекает из формулы

$$\overline{P}_n(z) = \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ \ldots\ + a_0,$$

получающейся непосредственным применением соотношений (1.12), с. 10, и того очевидного факта, что если $P_n(\alpha) = 0$, то и $\overline{P_n(\alpha)} = 0$.

[1)] Франсуа Виет (Francois Viete; 1540 — 1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — все вещественные корни полинома P_n. Обозначим через $k_1, k_2, \ldots, k_s$ их кратности. Положим

$$r = k_1 + k_2 + \cdots + k_s, \quad Q_r(z) = (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_s)^{k_s}.$$

Тогда

$$P_n(z) = Q_r(z)R_{n-r}(z). \tag{5.1}$$

Очевидно, что все коэффициенты многочлена Q_r вещественны, поэтому и все коэффициенты многочлена R_{n-r} вещественны (см. замечание на с. 18). По построению многочлен R_{n-r} может иметь только комплексные корни. Заметим, что при любых z, α

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 + pz + q,$$

где $p = -\alpha - \overline{\alpha} = -2\operatorname{Re}\alpha$, $q = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ — вещественные числа. Поэтому, если α — комплексный корень полинома P_n, а следовательно, и корень полинома R_{n-r}, то из (5.1) вытекает равенство

$$P_n(z) = Q_r(z)(z^2 + pz + q)R_{n-r-2}(z),$$

причем числа p, q вещественны, значит, полином R_{n-r-2} имеет только вещественные коэффициенты. Продолжая этот процесс, получим, что

$$P_n(z) = (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_s)^{k_s}(z^2+p_1z+q_1)\cdots \\ \cdots(z^2+p_tz+q_t). \tag{5.2}$$

Здесь s — количество различных вещественных корней полинома P_n, а t — количество пар комплексно сопряженных корней этого полинома.

Из представления (5.2) сразу же вытекает, что у полинома с вещественным коэффициентами **нечетного** порядка существует по крайней мере один вещественный корень.

Полагая, что z в равенстве (5.2) — вещественное число, можно сказать, что полином с вещественными коэффициентами допускает представление в виде произведения линейных и квадратичных вещественных сомножителей.

Пример. Нетрудно видеть, что одним из корней полинома

$$P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = z^3 - 6z + 9$$

является число $\alpha = -3$. Разделим многочлен $P_3(z)$ на

$$Q_1(z) = z + b_0 = z + 3,$$

т. е. найдем такой многочлен

$$q_2(z) = c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

что выполняется равенство

$$P_3(z) = Q_1(z)q_2(z).$$

Вычисления проведем с помощью схемы Горнера. Их удобно оформить в виде таблицы:

$b_0 = 3$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -6$	$a_0 = 9$
		$c_2 b_0 =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	$c_1 b_0 =$ $= (-3)3 = -9$	$c_0 b_0 =$ $= 3 \cdot 3 = 9$
	$c_2 = a_3 =$ $= 1$	$c_1 = a_2 - c_2 b_0 =$ $= -3$	$c_0 = a_1 - c_1 b_0 =$ $= 3$	$r_0 = a_0 - c_0 b_0 =$ $= 0$

Итак,

$$q_2(z) = z^2 - 3z + 3,$$

а остаток r_0 равен нулю, поскольку многочлен $P_3(z)$ нацело делится на $z + 3$:

$$P_3(z) = (z + 3)\left(z^2 - 3z + 3\right).$$

Очевидно, число $\alpha = -3$ не является корнем полинома $q_2(z)$. Поэтому α — простой корень полинома $P_3(z)$. Для того, чтобы найти оставшиеся два его корня, надо решить квадратное уравнение

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен -3, следовательно, оно не имеет вещественных корней. Таким образом, полином третьего порядка $P_3(z)$ с вещественными коэффициентами мы представили в виде произведения линейного и квадратичного вещественных сомножителей.

Глава 2

Системы линейных уравнений, матрицы, определители

§ 1. Перестановки

1. Рассмотрим множество n целых чисел: $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой*. Например, возможны перестановки:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \tag{1.1}$$

$$2, 1, 3, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Вообще, перестановку будем записывать в виде

$$n_1, n_2, \ldots, n_n. \tag{1.3}$$

Каждая перестановка определяет взаимнооднозначное отображение множества M_n на себя. При этом отображении числу 1 соответствует число n_1, числу 2 соотвествует n_2 и т. д.

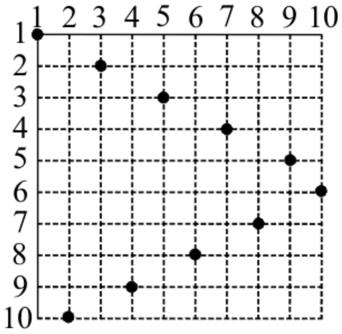
Можно построить график такого отображения. Он будет представлять собой n точек, расположенных в узлах целочисленной решетки. Причем на каждой вертикальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика, и на каждой горизонтальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика (см. рис. 1, a). Понятно, что перестановка однозначно определяется ее графиком и, наоборот, задание графика однозначно определяет перестановку (запишите перестановку, изображенную на рис. 1, a!).

Количество всех перестановок множества M_n принято обозначать символом P_n. Покажем, что

$$P_n = 123 \cdots n. \tag{1.4}$$

Здесь записано произведение всех первых n членов натурального ряда. Принято обозначение $123 \cdots n = n!$ (читается *n-факториал*).

Для $n = 1$ и $n = 2$ формула (1.4), очевидно, справедлива. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что равенство $P_{n-1} = (n-1)!$ верно. Возьмем теперь некоторую перестановку множества M_{n-1} и добавим к ней элемент n. Его можно



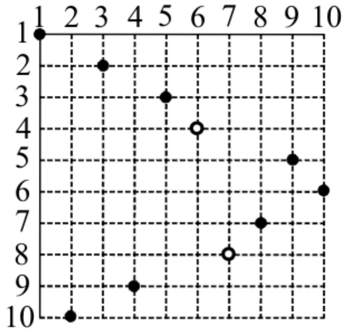


Рис. 1. Пример перестановки из десяти элементов (a). Перестановка b получена из перестановки a транспозицией (4,8)

поставить первым, вторым, и, наконец, последним, т. е. n-ым. Понятно, что таким образом можно создать n перестановок по каждой перестановке множества M_{n-1} и, поскольку по индуктивному предположению $P_{n-1} = (n-1)!$, то формула (1.4) доказана.

2. Будем говорить, что элементы n_i, n_j, $i < j$, перестановки (1.3) образуют *инверсию*, если $n_i > n_j$. Например, в перестановке (1.1) нет инверсий, а в перестановке (1.2) только одна инверсия, ее образуют элементы n_1, n_2. Полезно отметить, что если соединить отрезком на графике перестановки точки (i, n_i) и (j, n_j), то он будет иметь отрицательный наклон для точек, образующих инверсию.

Количество всех инверсий данной перестановки обозначается как $\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)$ и называется *сигнатурой* перестановки.

Перестановка называется *четной*, если ее сигнатура — четное число (нуль, как обычно, полагаем четным числом). В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Таким образом, все перестановки разбиваются на два непустых класса: четные перестановки и нечетные перестановки. Например, перестановка (1.1) четная, а перестановка (1.2) нечетная.

Говорят, что в перестановке выполнена *транспозиция*, если поменяли местами два ее элемента. Для того, чтобы определить транспозицию данной перестановки, нужно задать номера двух переставляемых элементов. Например, можно сказать, что перестановка (1.2) получена из перестановки (1.1) транспозицией (1,2). Еще один пример транспозиции показан на рис. 1.

Теорема 1. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что количества инверсий в перестановках

$$n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \ldots, n_n, \tag{1.5}$$

$$n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_j, n_{i+1}, \ldots, n_{j-1}, n_i, n_{j+1}, \ldots, n_n \tag{1.6}$$

различаются на нечетное число. Введем в рассмотрение множества

$$B_1 = \{n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}\},\ B_2 = \{n_{i+1}, \ldots, n_{j-1}\},\ B_3 = \{n_{j+1}, \ldots, n_n\}.$$

Обозначим через B_{ks}^+ количество элементов множества B_k, больших n_s, через B_{ks}^- — количество элементов множества B_k, меньших n_s, $s = i, j$. Ясно, что $B_{ks}^+ + B_{ks}^- = \operatorname{card}(B_k)$, где $\operatorname{card}(B_k)$ — количество элементов множества B_k, при любых $k = 1, 2, 3$, $s = i, j$. Достаточно подсчитать количество инверсий в перестановках (1.5), (1.6), отвечающих парам, содержащим, либо n_i, либо n_j, так как остальные пары при переходе от (1.5) к (1.6) не меняются. Количество указанных инверсий в перестановке (1.5), очевидно, равно

$$B_I = B_{1i}^+ + B_{2i}^- + B_{3i}^- + B_{1j}^+ + B_{2j}^+ + B_{3j}^- + I(n_i, n_j),$$

где $I(n_i, n_j)$ — количество инверсий пары n_i, n_j, а для перестановки (1.6) оно есть

$$B_{II} = B_{1j}^+ + B_{2j}^- + B_{3j}^- + B_{1i}^+ + B_{2i}^+ + B_{3i}^- + I(n_j, n_i).$$

Очевидно, что $B_I - B_{II} = B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- + I(n_i, n_j) - I(n_j, n_i) =$

$$= B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- \pm 1 = B_{2i}^- - B_{2i}^+ + B_{2j}^+ - B_{2j}^- \pm 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1 =$$
$$= B_{2i}^- + B_{2i}^+ + B_{2j}^+ + B_{2j}^- - 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1 =$$
$$= 2\operatorname{card}(B_2) - 2(B_{2i}^+ + B_{2j}^-) \pm 1.$$

Таким образом, $B_I - B_{II}$ — нечетное число. □

Теорема 2. *При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы вытекает, что всякую четную перестановку можно превратить в нечетную, поменяв местами каких-либо два ее элемента. Справедливо и обратное. Это означает, что между множеством всех четных перестановок и множеством всех нечетных перестановок (множества M_n) можно установить взаимнооднозначное соответствие. Эти два множества конечны, поэтому имеют равные количества элементов. □

§ 2. Определители и их основные свойства

1. *Квадратной матрицей* порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — числа, вообще говоря, комплексные.

Определителем матрицы A назовем величину

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}. \tag{2.2}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1, n_2, \dots, n_n$ четная, и со знаком минус в противоположном случае.

Вследствие теоремы 2 количество слагаемых в (2.2) со знаком плюс равно количеству слагаемых со знаком минус.

Отметим также, что элементы матрицы, участвующие в слагаемом определителя, соответствующем перестановке $n_1, n_2, \dots, n_n$, изображаются точками графика этой перестановки (см. рис. 1, с. 27).

Говорят, что элементы $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{nn_n}$ составляют *диагональ* матрицы. Диагональ называют *четной*, если перестановка $n_1, \dots, n_n$ четная, и *нечетной* в противном случае.

Упражнение. Докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Поясним, что слева — определитель порядка n, а справа — порядка $n-1$.

Пусть a_k есть k-ю строка матрицы A, т. е. $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$. Сумма двух строк $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ по определению есть строка

$$f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_n + g_n).$$

Произведением числа α и строки f называется строка

$$\alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_n).$$

Нулевой будем называть строку, все элементы которой нули

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Часто оказывается полезным трактовать определитель как функцию его строк

$$\Delta = \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Аналогично, можно считать определитель функцией его столбцов.

2. Переходим к описанию основных свойств определителей.

1. Если одна из строк (или один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю. Доказательство сразу же следует из того, что каждая диагональ матрицы A содержит в этом случае нулевой элемент.

2. Определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу), т. е.

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_k + b_k, \ldots, a_n) = \\ = \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n) + \Delta(a_1, a_2, \ldots, b_k, \ldots, a_n),$$

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, \alpha a_k, \ldots, a_n) = \alpha \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n),$$

где α — любое число. Справедливость этого утверждения сразу же вытекает из формулы (2.2).

3. Если в определителе две строки (или два столбца) совпадают, то он равен нулю. Пусть совпадают строки с номерами k и l, $k < l$. Множество всех диагоналей матрицы A можно представить в виде объединения множества пар

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, a_{kn_k}, \ldots, a_{ln_l}, \ldots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, a_{kn_l}, \ldots, a_{ln_k}, \ldots, a_{nn_n}.$$

Диагонали каждой такой пары имеют противоположные четности, так как соответствующие им перестановки получены одна из другой при помощи транспозиции (k, l). Произведения же элементов этих диагоналей совпадают, так как по предположению

$$a_{kn_k} = a_{ln_k}, \quad a_{kn_l} = a_{ln_l}.$$

Это означает, что слагаемые в (2.2), отвечающие каждой такой паре, в сумме дают нуль, следовательно, $|A| = 0$. Доказательство равенства нулю определителя, у которого два столбца совпадают, проводится аналогично.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак. Для упрощения записей будем полагать, что меняются местами первая и вторая строки. Для двух произвольных строк все выкладки полностью аналогичны. Вследствие свойства 3 имеем $\Delta(a_1+a_2, a_1+a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$. С другой стороны, последовательно применяя свойство 2, а затем, вновь свойство 3, получим

$$\begin{gathered}0 = \Delta(a_1 + a_2, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n) = \Delta(a_1, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n)+ \\ \Delta(a_2, a_1+a_2, a_3, \dots, a_n) = \Delta(a_1, a_1, a_3, \dots, a_n)+\Delta(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)+ \\ \Delta(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) + \Delta(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) = \\ \Delta(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + \Delta(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n),\end{gathered}$$

т. е. $\Delta(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = -\Delta(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n)$.

5. Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов определителя. Будем, как и выше, считать, что речь идет о первых двух строках определителя. Тогда по свойствам 2, 3 будем иметь

$$\begin{aligned}&\Delta(a_1 + \alpha a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) = \\ &\qquad = \Delta(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + \alpha\Delta(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) = \\ &\qquad\qquad = \Delta(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n).\end{aligned}$$

6. Выведем так называемую формулу разложения определителя по строке, часто используемую в теоретических выкладках. Введем обозначение

$$i_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}).$$

Такую строку будем называть единичной. Используя свойство 2, нетрудно получить следующее равенство:

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\Delta(i_k, a_2, a_3, \ldots, a_n). \tag{2.5}$$

Определитель $\Delta(i_k, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{1k} и обычно обозначается через A_{1k}. Если использовать это обозначение, то формула (2.5) принимает вид

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}A_{1k}.$$

Совершенно аналогично устанавливается формула разложения определителя по произвольной строке

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}, т. е. определитель, получающийся из $\Delta(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ заменой i-й строки k-й единичной строкой.

Заметим теперь, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{lk} = 0$ при $l \neq i$. Действительно, на выражение в правой части последнего равенства можно смотреть как на разложение определителя, у которого строки с номерами i и l совпадают, но такой определитель, как мы знаем равен нулю. Мы пришли, таким образом к общей формуле, справедливой для любого определителя

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{lk} = |A|\delta_{il}, \tag{2.6}$$

где

$$\delta_{il} = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l, \end{cases} \tag{2.7}$$

так называемый *символ Кронекера*[1)].

Определителю A_{lk} можно придать форму, которая зачастую оказывается более удобной .

Упражнение. Покажите, что $A_{lk} = (-1)^{k+l}M_{lk}$, где M_{lk} — определитель порядка $n-1$, получающийся из $|A|$ вычеркиванием l-й строки и k-го столбца.

[1)]Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker; 1823 — 1891) — немецкий математик.

Указание. Переставляя строки и столбцы, приведите определитель A_{lk} к виду определителя, стоящего в левой части равенства (2.4).

Определитель M_{lk} называется минором элемента a_{lk}.

Отметим, что справедлива и формула *разложения определителя* по столбцу:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kl} = |A|\delta_{il}, i,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.8}$$

Пример. Вычислим определитель пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Сначала добьемся того, чтобы все элементы третьего столбца, кроме последнего, были нулями. Для этого умножим последнюю строку на три и прибавим ко второй, а затем умножим последнюю строку на четыре и вычтем из четвертой строки. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по третьему столбцу, получим

$$\Delta = (-1)^{3+5}(-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем теперь определитель так, чтобы все элементы первого столбца, кроме второго, были нулями. С этой целью умножим вторую строку на два и прибавим к первой, затем умножим вторую строку на три и вычтем из третьей и, наконец, умножим вторую строку на два и вычтем из последней, получим:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, будем иметь

$$\Delta = -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель третьего порядка, разложив его по третьей строке:

$$\Delta = 36\begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33)\begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24)\begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} =$$

$$= 36(-72) - (-33)(-104) + (-24)(-208) = -1032.$$

7. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к A. Поясним, что матрицы A и A^T состоят из одних и тех же элементов. Первая строка матрицы A^T составлена из элементов первого столбца матрицы A, вторая строка — из элементов второго столбца матрицы A и т. д.

Определители матриц A и A^T совпадают.

Докажем это утверждение индукцией по порядку определителя. Для определителя второго порядка равенство $|A| = |A^T|$ выполняется очевидным образом. Предположим справедливость этого равенства для произвольного определителя порядка $n-1$ и покажем, что тогда оно верно и для произвольного определителя порядка n. Представим $|A|$ в виде разложения по первой строке:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}. \tag{2.10}$$

Определитель $|A^T|$ разложим по первому столбцу:

$$|A^T| = a_{11}M^T_{11} - a_{12}M^T_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M^T_{n1}. \tag{2.11}$$

Здесь M^T_{ij} — минор определителя $|A^T|$, соответствующий элементу этого определителя, находящегося в позиции i, j. По предположению индукции имеем, что $M^T_{ij} = M_{ji}$, следовательно, $|A^T| = |A|$.

8. Будем говорить, что строки матрицы A *линейно зависимы*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0. \tag{2.12}$$

В противном случае строки матрицы будем называть *линейно независимыми*. Очевидно, что если строки матрицы линейно независимы, то ни одна строка матрицы не может оказаться нулевой. Аналогично, можно ввести понятие линейной зависимости столбцов матрицы.

Для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно зависимы. Обоснуем это утверждение.

Предположим, что строки матрицы A линейно зависимы и пусть для определенности равенство (2.12) выполнено при $\alpha_1 \neq 0$. Используя свойство линейности определителя по первой строке, а затем свойства 5, 1, нетрудно получить, что

$$\alpha_1 \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Delta(\alpha_1 a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \Delta(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Мы приняли, что $\alpha_1 \neq 0$, следовательно, $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.

Докажем обратное утверждение, т. е. докажем, что если строки матрицы линейно независимы, то определитель матрицы не равен нулю. Пусть $|A|$=0. Рассмотрим все определители порядка $n-1$, которые получаются вычеркиванием одной строки и одного столбца из матрицы A.

Если все они окажутся равными нулю, перейдем к определителям порядка $n-2$ и т. д. В конце концов, либо все элементы матрицы A окажутся равными нулю, и тогда доказываемое утверждение будет выполнено тривиальным образом, либо найдется определитель порядка $k \geqslant 1$, отличный от нуля и полученный вычеркиванием $n-k$ строк и столбцов матрицы A, а все определители большего порядка будут нулями. Поскольку при перестановке строк и при перестановке столбцов меняется лишь знак определителя, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что этот определитель (обозначим его через d_k) составлен из элементов первых k строк и первых k столбцов матрицы A.

Рассмотрим определитель d_{k+1}, составленный из первых $k+1$ строк и первых $k+1$ столбцов матрицы A. По предположению он равен нулю. Разложив этот определитель по элементам последнего столбца, получим, что

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \cdots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0. \qquad (2.13)$$

Подчеркнем, что $d_k \neq 0$, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца определителя d_{k+1}. Важно отметить, что они зависят только от элементов первых k столбцов определителя d_{k+1}.

Переставляя столбцы определителя $|A|$, мы можем составить последний столбец определителя d_{k+1} из элементов

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{kj},\ a_{k+1j}, \quad j = k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n.$$

По предположению этот определитель равен нулю. Выполняя разложение по его последнему столбцу, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n. \qquad (2.14)$$

Наконец, поместив на место $k+1$ столбца определителя $|A|$ его же столбец с номером $j \leqslant k$, мы получим нулевой определитель (как определитель с равными столбцами). По той же причине и определитель d_{k+1} будет равен нулю. Вновь выполняя разложение по последнему столбцу этого определителя, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.15)$$

Теперь можно написать:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} + 0 \cdot a_{k+2j} + \dots + 0 \cdot a_{nj} = 0,$$

где $j = 1, 2, \dots, n$; $d_k \neq 0$, т. е. строки матрицы A линейно зависимы.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, то, очевидно, для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно зависимы.

3. Приведем примеры вычисления определителей, часто возникающих в различных разделах алгебры.

1) Определитель треугольной матрицы. Матрицу A называют *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Матрицу A называют *нижней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Если матрица A треугольная, то

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (2.16)$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Справедливость формулы (2.16) для нижней треугольной матрицы A сразу вытекает из того, что $|A| = |A^T|$ и A^T — верхняя треугольная матрица.

Для матриц первого и второго порядков формула (2.16), очевидно, справедлива. Для доказательства этой формулы при произвольном n используем метод математической индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу, получим

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К определителю, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, поэтому

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

2) *Определитель Вандермонда*[1]. Так называют определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что при любом $n \geqslant 2$ определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leqslant j < i \leqslant n$:

$$d = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула, очевидно, справедлива при $n = 2$. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Рассмотрим определитель d. Умножим предпоследнюю строку на a_1 и вычтем из последней. Затем вычтем из $(n-1)$-й строки строку с номером $(n-2)$, умноженную на a_1, и так далее. Наконец, умножим первую строку на a_1 и вычтем из второй. В результате такой последовательности преобразований получим

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

[1] Александр Теофил Вандермонд (Alexandre-Theophile Vandermonde; 1735 — 1796) — французский музыкант и математик.

Разлагая определитель d по первому столбцу, получим определитель $(n-1)$-го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца является $a_2 - a_1$, общим множителем всех элементов второго столбца является $a_3 - a_1$ и т. д. Поэтому

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда $(n-1)$-го порядка. Следовательно,

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

§ 3. Правило Крамера

1. В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

составленная из коэффициентов уравнений, называется *матрицей системы* (3.1). Будем предполагать, что $|A| \neq 0$. В этом случае систему уравнений (3.1) называют *крамеровской*. Набор чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ называют *столбцом правой части* (или просто *правой частью*) системы (3.1). Если правая часть системы нулевая, т. е. $b_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то система называется *однородной*. Однородная система уравнений всегда имеет решение. Например, можно положить $x_1, x_2, \ldots, x_n = 0$. Такое решение называют *тривиальным*.

Теорема 1. *Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых по крайней мере одно не равно нулю, справедливы равенства

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array} \tag{3.3}$$

Это показывает, что столбцы матрицы A линейно зависимы, т. е. ее определитель равен нулю, но по условию теоремы определитель $|A|$ не равен нулю. Значит, предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы уравнений неверно. $\square$

Для того, чтобы система (3.3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A был равен нулю. Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из замечания на с. 36.

Теорема 2. *При любой правой части крамеровская система уравнений не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Предположим противное и пусть

$$x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$$

и

$$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы (3.1), т. е.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ a_{21}x_1^1 + a_{22}x_2^1 + \ldots + a_{2n}x_n^1 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n \end{array} \tag{3.4}$$

и

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_n^2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{array} \tag{3.5}$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем (3.4), (3.5). В результате получим, что x_1, x_2, …, x_n — решение однородной системы (3.3). Но тогда по теореме 1 имеем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т. е. предположение о наличии двух различных решений системы (3.1) неверно. □

Теорема 3. *Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.*

Доказательство. Фактически, мы сконструируем решение системы (3.1), опираясь на формулу (2.6), с. 32. Будем разыскивать решение системы (3.1) в виде

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

где коэффициенты c_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, подлежат определению. Подставляя выражения (3.6) в уравнения системы (3.1) и собирая в левых частях этих уравнений коэффициенты при одинаковых b_i, получим

$$\begin{aligned} b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) &+ \\ + b_2(a_{i1}c_{12} + a_{i2}c_{22} + \dots + a_{in}c_{n2}) &+ \cdots \\ \cdots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}) &+ \cdots \\ \cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) &= b_i \end{aligned} \tag{3.7}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Понятно, что если выбрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \tag{3.8}$$

где i, $k = 1, 2, \ldots, n$, δ_{ik} — символ Кронекера, то формулы (3.6) будут давать решение системы (3.1). Сравнивая соотношения (3.8) с формулами (2.6), с. 32, нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.9}$$

то условия (3.8) будут выполнены. Подставляя найденные выражения для c_{ik} в (3.6), получим следующие формулы для решения системы (3.1):

$$x_i = (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)/|A|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения (3.10) можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается заменой i-го столбца определителя Δ правой частью системы (3.1). □

Формулы (3.11) называют *формулами Крамера.*

Пример. Решим при помощи формул Крамера систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Подсчитаем соответствующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = -1, \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = -2, \quad x_4 = \Delta_4/\Delta = 1.$$

Замечание. В вычислительной практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода исключения неизвестных (метода Гаусса) или итерационные методы. Подробнее по этому поводу см. с. 55, с. 376.

2. В качестве примера применения теории крамеровских систем построим так называемую интерполяционную формулу Лагранжа.

Теорема 4. *Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — попарно различные числа, $h_0, h_1, \ldots, h_n$ — произвольные числа. Тогда существует, и притом только один, полином $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ такой, что*
$$P_n(z_j) = h_j, \ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Доказательство. Условия (3.12) представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома P_n. Определитель этой системы — определитель Вандермонда (см. с. 37). Он, очевидно, не равен нулю, поэтому система уравнений (3.12) имеет единственное решение при любой правой части. □

Теперь ясно, что если полином степени n всюду (на самом деле, по крайней мере в $n + 1$ различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

Нетрудно построить в явном виде полином, удовлетворяющий условиям (3.12), а именно, решение задачи дает *интерполяционная формула Лагранжа*[1)]
$$P_n(z) = h_0 \Phi_0(z) + h_1 \Phi_1(z) + \cdots + h_n \Phi_n(z), \tag{3.13}$$
где Φ_j — полином степени n, удовлетворяющий условиям
$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n, \tag{3.14}$$
$$\Phi_j(z_j) = 1, \tag{3.15}$$
для $j = 0, 1, 2 \ldots, n$.

Как показано в п. 3, с. 22, полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя, следовательно,
$$\Phi_j(z) = A_j (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n).$$
Используя (3.15), найдем значение постоянной:
$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$
т. е.
$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$
где $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

[1)] Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange; 1736 — 1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

§ 4. Основные операции над матрицами

1. Выше было введено понятие квадратной матрицы. *Прямоугольной матрицей* A размера $m \times n$ называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Элементами таблицы служат числа a_{ij} (вообще говоря, комплексные). Иногда будем явно указывать размеры матрицы A и обозначать ее через $A(m, n)$.

Отметим некоторые частные случаи. При $m = n$ получаем квадратную матрицу. Ее размер (говорят также *порядок*) будем обозначать одной буквой n. Множество всех прямоугольных матриц размера $m \times n$ будем обозначать через $M_{m,n}$. Для обозначения множества всех квадратных матриц порядка n будем использовать символ M_n.

Если $m = 1$, а n произвольно, получаем *матрицу-строку* (или, просто, *строку*)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{4.2}$$

Говорят, что эта строка имеет *длину* n.

Если $n = 1$, а m произвольно, получаем *матрицу-столбец* (или, просто, *столбец*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Говорят, что этот столбец имеет *длину* m. Подчеркнем, что при записи строк и столбцов второй индекс обычно не пишут. Столбцы или строки часто будем называть *векторами*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы — нули. Нулевая матрица обозначается символом 0.

2. Опишем некоторые специальные виды квадратных матриц.

2.1. Говорят, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A. Квадратная матрица D называется *диагональной*, если $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, или, подробнее,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Для диагональной матрицы будем использовать также обозначение

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}).$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если $d_{ii} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Единичную матрицу будем обозначать буквой I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

2.2. Матрица P_{ik} называется *матрицей перестановки*, если она получена из единичной матрицы перестановкой строк с номерами i, k. Например, матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Напомним, что квадратная матрица L называется нижней треугольной, если все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

квадратная матрица U называется верхней треугольной, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

2.4. Квадратная матрица

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

называется *элементарной нижней треугольной.* Поясним, что эта матрица отличается от единичной матрицы лишь элементами k-го столбца.

3. Умножение матрицы на число, сложение матриц. *Произведением матрицы* A *и числа* α называется матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(все элементы матрицы A умножаются на число α).

Суммой двух матриц A, B одинаковых размеров называется матрица C того же размера с элементами $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. Пишут: $C = A+B$.

Упражнение. Убедиться, что введенные операции обладают следующим свойствами:

1) $A + 0 = A$,
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3) $A + B = B + A$,
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Отметим, что сумма двух нижних (верхних) треугольных матриц — нижняя (верхняя) треугольная матрица.

4. Умножение строки на столбец. По определению *произведение строки* x *и столбца* y одинаковой длины n есть число

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{4.9}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10.$$

5. Умножение матрицы на вектор. *Произведением матрицы* A размера $m \times n$ *и вектора* x длины n называется вектор y длины m с элементами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Символически это записывают так:

$$y = Ax.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поясним, что умножение матрицы на вектор выполняется следующим образом: столбец x последовательно накладывается на строки матрицы A, соответствующие элементы попарно перемножаются, а затем полученные n величин суммируются. В результате получаются элементы вектора y.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел α, β и для любых векторов x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \tag{4.10}$$

Говорят поэтому, что операция умножения матрицы на вектор *линейна*.

6. Умножение строки на матрицу. *Произведением строки* x длины m *и матрицы* A размера $m \times n$ называется строка y длины n с элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Символически это записывают так:

$$y = xA.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\big(y_1, y_2, \ldots, y_n\big) = \big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение строки на матрицу выполняется следующим образом: столбцы матрицы A последовательно накладываются на строку x, соответствующие элементы попарно перемножаются, а затем полученные m величин суммируются. В результате получаются элементы строки y.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел α, β и для любых строк x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha x A + \beta y A. \tag{4.11}$$

Говорят поэтому, что операция умножения строки на матрицу *линейна.*

7. С использованием введенных операций система n линейных уравнений с n неизвестными (3.1) может быть записана так:

$$Ax = b, \tag{4.12}$$

где A — заданная квадратная матрица, b — заданный вектор, x — искомый вектор, или в виде

$$xA^T = b, \tag{4.13}$$

где b — заданная строка, x — искомая строка. В дальнейшем мы чаще будем пользоваться формой записи (4.12).

8. Умножение прямоугольных матриц. Пусть A — матрица размера $m \times n$, B — матрица размера $n \times p$. Матрица C размера $m \times p$ называется *произведением матриц* A, B, если ее элементы определяются по правилу

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, p. \tag{4.14}$$

Пишут $C = AB$, или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \hdotsfor{4} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Полезно пояснить, что элементы каждого столбца матрицы C вычисляются как результат умножения матрицы A на соответствующий столбец матрицы B. Точно так же элементы каждой строки матрицы C получаются как результат умножения соответствующей строки матрицы A на матрицу B. Отметим также, что элемент c_{ij} есть результат умножения i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц зависит от порядка сомножителей. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называют *перестановочными*, если $AB = BA$. Перестановочные матрицы существуют. Например,

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы A

$$AI = IA = A.$$

Отметим следующие свойства операции умножения матриц:

1) $(A + B)C = AC + BC$,

2) $C(A+B) = CA + CB$,
3) $A(BC) = (AB)C$.

Понятно, что размеры участвующих здесь матриц должны быть согласованы так, чтобы все операции имели смысл.

Элементарно проверяется, что 1), 2) следуют из (4.11), (4.10) соответственно. Для доказательства свойства 3) заметим, что элементы матрицы $D = A(BC)$ есть числа вида $d_{ij} = a_i(Bc_j)$, где a_i — i-ая строка матрицы A, c_j — j-й столбец матрицы C. Элементы матрицы $F = (AB)C$ — это числа $f_{ij} = (a_iB)c_j$. Поэтому достаточно доказать, что $x(By) = (xB)y$ для любой строки x и любого столбца y. Понятно, что их длины должны быть согласованы с размерами матрицы B. Будем полагать, что матрица B имеет m строк и n столбцов. Элементарные вычисления дают

$$x(By) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j, \tag{4.16}$$

аналогично,

$$(xB)y = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i y_j. \tag{4.17}$$

Суммы (4.16), (4.17) отличаются лишь порядком следования слагаемых и потому совпадают.

Упражнения.

1) Пусть P_{ik} — матрица перестановки (см. с. 44). Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перестановкой элементов с номерами i, k.

2) Как следствие показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k.

3) Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы, то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

4) Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению элементарных нижних треугольных матриц L_k (см. (4.8)), т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

Указание. Проведите вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок: $L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n) \dots)$, т. е. сначала перемножьте $L_{n-1}L_n$, результат умножьте слева на L_{n-2} и т. д.

5) Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

6) Показать, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A. \tag{4.18}$$

Решение. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — вектор. Элементарные вычисления дают

$$L_k a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ l_{k,k} a_k \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Такой вид будут иметь столбцы матрицы $L_k A$. Полученное равенство показывает, что определитель $\det(L_k A)$ можно преобразовать следующим образом: из k-ой строки вынести общий множитель l_{kk}, затем умножить эту строку на l_{jk} и вычесть из j-ой строки последовательно для всех $j = k+1,\ k+2,\ \dots,\ n$. В результате, получим равенство (4.18).

7) Опираясь на предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы (см. с. 36), показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \ \det A. \tag{4.19}$$

Показать, что если R — верхняя треугольная матрица, то

$$\det(RA) = \det R \ \det A. \tag{4.20}$$

Транспонирование матриц. Определенная на с. 34 операция транспонирования квадратных матриц естественным образом распространяется на прямоугольные матрицы.

Понятно, что при транспонировании размеры матрицы меняются местами. В частности, матрица-строка становится матрицей-столбцом.

Отметим основные свойства операции транспонирования.

1) Для любой матрицы A справедливо равенство $(A^T)^T = A$.

2) Для любых чисел α, β и любых матриц A, B одинаковых размеров

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$

(поэтому говорят, что операция транспонирования *линейна*).

3) Если операция умножения матриц AB имеет смысл, то: а) операция умножения $B^T A^T$ также имеет смысл; б) $(AB)^T = B^T A^T$.

Все сформулированные здесь утверждения, кроме утверждения 3, б), непосредственно вытекают из определений, и их проверка предлагается читателю.

Докажем утверждение 3, б). Элемент с номерами i, j матрицы $(AB)^T$ — это результат умножения j-й строки матрицы A на i-й столбец матрицы B. Элемент с номерами i, j матрицы $B^T A^T$ — это результат умножения i-й строки матрицы B^T и j-го столбца матрицы A^T. Элементы i-й строки матрицы B^T совпадают с элементами i-го столбца матрицы B, а элементы j-го столбца матрицы A^T совпадают с элементам j-ой строки матрицы A. Последнее замечание завершает доказательство утверждения 3, б).

§ 5. Обратная матрица

В этом параграфе мы будем широко использовать результаты § 3.

1. Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица A называется *невырожденной*.

При обосновании двух последующих утверждений будем опираться на п. 1, с. 39.

2. Если A, B — невырожденные матрицы, матрица $C = AB$ также невырождена. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что однородная система линейных уравнений

$$ABx = 0 \tag{5.1}$$

имеет только тривиальное решение. Последнее верно, так как, поскольку матрица A невырождена, то $Bx = 0$, а поскольку B невырождена, то $x = 0$.

3. Если одна из матриц A, B вырождена, то матрица $C = AB$ также вырождена. Действительно, в этом случае достаточно установить, что система (5.1) имеет нетривиальное решение. Пусть матрица B вырождена. Тогда существует вектор $x \neq 0$ такой, что $Bx = 0$, значит $ABx = 0$.

Пусть теперь A вырождена, а B невырождена. Существует вектор $y \neq 0$ такой, что $Ay = 0$. Так как B невырождена, существует единственный вектор x такой, что $Bx = y$, причем x не равен нулю, так как $y \neq 0$. Вновь получаем, что $ABx = 0$ при $x \neq 0$.

4. Матрица X называется *правой обратной* к квадратной матрице A, если
$$AX = I. \tag{5.2}$$
Матрица Y называется *левой обратной* к квадратной матрице A, если
$$YA = I. \tag{5.3}$$

Вырожденная матрица не имеет правой обратной матрицы. Действительно, если правая обратная матрица X существует, то
$$\det(AX) = \det(I) = 1.$$
С другой стороны, $\det(AX) = 0$, так как A вырождена. Точно так же доказывается невозможность существования левой обратной у вырожденной матрицы.

5. Если $\det(A) \neq 0$, то правая обратная к матрице A существует и определяется единственным образом. Действительно, обозначим через x^k столбцы матрицы X, а через i^k — столбцы матрицы I. Уравнение (5.2) распадается на совокупность систем уравнений
$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.4}$$
Поскольку матрица A невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение.

Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

6. На самом деле, правая и левая обратные матрицы совпадают. Действительно, если $YA = I$, то $YAX = X$, но $AX = I$, т. е. $Y = X$.

7. В соответствии с вышесказанным матрицу X будем называть *обратной матрицей* к матрице A, если $AX = I$. Обратную матрицу к матрице A обозначают через A^{-1}.

8. Укажем явный вид матрицы A^{-1}. Введем в рассмотрение так называемую *присоединенную* к матрице A *матрицу*
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$
Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Формулы (2.6), с. 32, можно записать в матричном виде
$$A\tilde{A} = |A|I. \tag{5.5}$$

Отсюда вытекает, что если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = |A|^{-1} \tilde{A} \tag{5.6}$$

есть матрица, обратная матрице A.

Пример. Построим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала определитель матрицы A, разлагая его по первой строке:

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь подсчитаем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

По формуле (5.6)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

9. Отметим некоторые свойства обратной матрицы.

1) Матрица A^{-1} невырождена, $(A^{-1})^{-1} = A$. Это утверждение — очевидное следствие равенства $AA^{-1} = I$.

2) Если матрицы A, B невырождены, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действительно, $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$.

3) Если матрица A невырождена, то матрица A^T невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Невырожденность матрицы A^T — следствие равенства $|A^T| = |A|$. Используя свойство 3 б), с. 50, можем написать

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

т. е. матрица $(A^{-1})^T$ обратна к A^T.

Упражнения.

1) Пусть матрицы A_1, $A_2, \ldots, A_p$ невырождены. Показать, что

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

2) Пусть P_{ik} — матрица перестановки. Показать, что $P_{ik}^{-1} = P_{ik}$.

3) Пусть L_k есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{kk} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 1/l_{k,k} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей. Показать, что аналогичное верно и для верхней треугольной матрицы.

5) Пусть квадратная матрица A имеет обратную, B — произвольная квадратная матрица того же порядка. Показать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матрица $A + \varepsilon B$ также имеет обратную.

Решение. Пусть x — решение системы уравнений

$$Ax + \varepsilon Bx = 0. \tag{5.7}$$

Тогда x — решение системы уравнений

$$x = -\varepsilon A^{-1} Bx. \tag{5.8}$$

Пусть $x \neq 0$ и $|x_i| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, где n — порядок матрицы A. Положим $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n = A^{-1}B$. Из (5.8) очевидным образом получаем

$$|x_i| \leqslant |x_i| \varepsilon \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}|.$$

Пусть ε выбрано так, что

$$\varepsilon \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}| < 1. \tag{5.9}$$

Тогда $|x_i| < |x_i|$, что нелепо. Значит, при выполнении условия (5.9) система (5.7) может иметь лишь тривиальное решение, следовательно, матрица $A + \varepsilon B$ невырождена для всех достаточно малых ε.

§ 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

1. В основе метода Гаусса, как, впрочем, и многих других методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{6.1}$$

лежит следующее утверждение.

Пусть матрица B невырождена. Тогда система уравнений

$$BAx = Bb \tag{6.2}$$

эквивалентна системе (6.1), т. е. решение системы (6.2) — решение системы (6.1) и, наоборот, решение системы (6.1) — решение системы (6.2).

Действительно, пусть x — решение системы (6.2). Тогда

$$B(Ax - b) = 0,$$

но матрица B невырождена, следовательно, $Ax - b = 0$. Обратное утверждение очевидно.

Матрица B выбирается так, чтобы матрица BA была проще матрицы A и решение системы (6.2) находилось легче, чем решение системы (6.1).

В методе Гаусса матрица B конструируется при помощи элементарных нижних треугольных матриц так, чтобы матрица BA была верхней треугольной. Тогда решение системы (6.2) становится тривиальной задачей.

2. Переходим к описанию *метода Гаусса* решения крамеровских систем. Выберем среди элементов первого столбца матрицы A максимальный по модулю. Пусть это есть элемент a_{i1}. Он не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы A — нули и, значит, $|A| = 0$, но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы A не нуль.

Умножим обе части уравнения на матрицу перестановки P_{i1}. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через P_1 (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A есть a_{11}). Получим

$$A_1 x = b^1, \tag{6.3}$$

где $A_1 = P_1 A$, $b^1 = P_1 b$. Поясним, что матрица A_1 получается из матрицы A перестановкой первой и i-й строк, столбец b^1 получается из столбца b перестановкой первого и i-го элементов. Элементы матрицы A_1 обозначим через $a_{kl}^{(1)}$, элементы столбца b^1 — через b_k^1. По построению $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

Умножим обе части уравнения (6.3) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ l_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

где $l_{11} = 1/a_{11}^{(1)}$, $l_{21} = -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$, $\dots$, $l_{n1} = -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$. Получим

$$A_2 x = b^2, \tag{6.5}$$

где $A_2 = L_1 A_1$, $b^2 = L_1 b^1$. Вычисляя произведение $L_1 A_1$, найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Умножение L_1 на A_1 равносильно следующему преобразованию матрицы A_1: все элементы первой строки матрицы A_1 делятся на $a_{11}^{(1)}$, затем для всех $i = 2, \dots, n$ первая строка умножается на $a_{i1}^{(1)}$ и вычитается из i-й строки матрицы A_1. Аналогично, элементы столбца b^2 вычисляются по формулам $b_1^2 = b_1^1/a_{11}^{(1)}$, $b_i^2 = b_i^1 - b_1^2 a_{i1}^{(1)}$, где $i = 2, \dots, n$.

Подчеркнем, что все элементы первого столбца матрицы A_2, кроме первого, оказываются при этом равными нулю.

Выберем среди элементов $a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)}$ максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть $a_{i2}^{(2)}$. Он не может равняться нулю. Действительно, если он равен нулю, то все числа $a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)}$ — нули и тогда, вычисляя $\det(A_2)$ разложением по первому столбцу, получим, что $\det(A_2) = 0$. С другой стороны, используя то, что L_1 — элементарная нижняя треугольная матрица, а P_1 — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11} \det(P_1 A) = \det(P_1 A)/a_{11}^{(1)} = \pm \det(A)/a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения (6.5) на матрицу $P_2 = P_{2i}$, т. е. поменяем местами вторую и i-ю строки матрицы A_2. Получим

$$\tilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b, \tag{6.7}$$

где

$$\tilde{A}_2 = P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(2)} & \tilde{a}_{n3}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения (6.7) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & l_{n-1,2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & l_{n,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $l_{22} = 1/\tilde{a}_{22}^{(2)}$, $l_{32} = -\tilde{a}_{32}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}$, $\dots$, $l_{n2} = -\tilde{a}_{n2}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}$. Получим

$$A_3 x = L_2 P_2 L_1 P_1 b,$$

где $A_3 = L_2 \tilde{A}_2 = L_2 P_2 L_1 P_1 A$. Нетрудно убедиться, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы A_3, кроме первых двух, — нули.

Продолжая этот процесс, в конце концов, получим систему уравнений

$$Ux = f \tag{6.8}$$

(очевидно, эквивалентную исходной), где

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A, \tag{6.9}$$

$$f = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 b,$$

причем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

есть треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Решение системы (6.8) не вызывает затруднений. Из последнего уравнения этой системы находим $x_n = f_n$, из предпоследнего имеем

$$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n \tag{6.11}$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \dots - a_{1,n}^{(2)} x_n. \tag{6.12}$$

Таким образом, реализация метода Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе, называемом *прямым ходом метода Гаусса*, исходная система преобразуется к системе с треугольной матрицей. На втором этапе, называемом *обратным ходом метода Гаусса*, решается система с треугольной матрицей.

Замечание. Выбор максимального по модулю элемента столбца при выполнении прямого хода метода Гаусса минимизирует влияние ошибок округления в расчетах на компьютере. Если не заботиться об ошибках округления, то на очередном шаге прямого хода метода Гаусса можно выбирать любой ненулевой элемент столбца.

3. Метод Гаусса можно применять и для вычисление определителя матрицы. Из (6.9), используя формулы из упражнений на с. 54, получаем

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U, \tag{6.13}$$

откуда, используя формулы из упражнений на с. 49, будем иметь

$$\det A = \det(P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \\ = \pm \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1}. \tag{6.14}$$

При этом мы учли, что $\det U = 1$. Нетрудно убедиться (см. упражнение 3 на с. 54), что

$$\det L_i^{-1} = \tilde{a}_{ii}^{(i)},$$

следовательно,

$$\det A = \pm a_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \cdots \tilde{a}_{nn}^{(n)}. \tag{6.15}$$

Знак здесь определяется количеством перестановок строк, выполненных в ходе реализации прямого хода метода Гаусса. Если оно четно, выбирается знак плюс. В противном случае — минус. Таким образом, определитель матрицы A может быть вычислен в ходе реализации метода Гаусса.

4. Оценим количество арифметических операций, требуемых для решения системы уравнений методом Гаусса.

На первом шаге прямого хода метода Гаусса строится матрица L_1. Это требует выполнения n операций. Затем матрица L_1 умножается на матрицу A_1. Нетрудно проверить, что умножение матрицы L_1 на столбец требует $2(n-1)+1 = 2n-1$ операций. Всего столбцов n. Значит, умножение матрицы L_1 на A_1 требует $2n^2 - n$ операций.

Кроме того, матрица L_1 умножается на столбец $P_1 b$.

Таким образом, реализация первого шага прямого хода метода Гаусса требует $2n^2 + n - 1$ операций.

На втором шаге, т. е. при умножении матриц L_2, $\tilde{A}_2$, как нетрудно убедиться, мы фактически имеем дело с матрицами порядка $n-1$. Поэтому реализация второго шага прямого хода метода Гаусса требует

$$2(n-1)^2 + (n-2)$$

операций.

Это означает, что реализация прямого хода метода Гаусса требует $2(1^2 + 2^2 + \ \ldots n^2) + (1 + 2 + \ \ldots \ + (n-2))$ операций. Хорошо известно, что

$$1 + 2 + \ \ldots \ + n - 2 = (n-1)(n-2)/2,$$
$$1^2 + 2^2 + \ \ldots \ + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

Таким образом, прямой ход метода Гаусса можно выполнить, затратив

$$n(n+1)(2n+1)/3 + (n-1)(n-2)/2 \approx 2n^3/3$$

арифметических операций (мы пренебрегаем слагаемыми порядка n^2, считая n достаточно большим).

Нетрудно также видеть, что вычисления по формулам (6.11), (6.12) требуют

$$2(n-1)+2(n-2)+\ \dots\ +2=2(1+\ \dots\ +n-1)=n(n-1)\approx n^2$$

операций.

Итак, решение системы линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса требует порядка $2n^3/3$ операций. Это существенно меньше, чем при использовании формул Крамера. Их непосредственное применение требует, очевидно, $n^2n!$ арифметических операций. Нетрудно подсчитать, что если, например, $n=20$, то $n^2n!\approx 9,7\cdot 10^{20}$, а $2n^3/3\approx 5,3\cdot 10^3$.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+6x_2+15x_3&=60,\\ 3x_1+2x_2+\ \ 9x_3&=34,\\ 9x_1+6x_2-\ \ 3x_3&=12. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу системы уравнений и столбец правой части

$$A=\begin{pmatrix}3&6&15\\3&2&9\\9&6&-3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}60\\34\\12\end{pmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A есть $a_{31}=9$. В соответствии с описанным выше алгоритмом матрица A_1 и столбец b^1 равны соответственно

$$A_1=\begin{pmatrix}9&6&-3\\3&2&9\\3&6&15\end{pmatrix},\quad b^1=\begin{pmatrix}12\\34\\60\end{pmatrix}$$

(поменяли местами первую и третью строки матрицы A, первый и последний элементы столбца b). Делим первую строку матрицы A_1 на 9, умножаем ее на 3 и вычитаем из второй и третьей срок; делим первый элемент столбца b^1 на 9, затем умножаем его на 3 и вычитаем из второго и третьего элементов столбца b^1. В результате получаем

$$A_2=\begin{pmatrix}1&2/3&-1/3\\0&0&10\\0&4&16\end{pmatrix},\quad b^2=\begin{pmatrix}4/3\\30\\56\end{pmatrix}.$$

Максимальным из чисел $a_{22}^{(2)}$, $a_{32}^{(2)}$ является $a_{32}^{(2)}$, поэтому меняем местами вторую и третью строки матрицы A^2, а также второй и третий элемент столбца b^2. Получим

$$\tilde{A}_2=\begin{pmatrix}1&2/3&-1/3\\0&4&16\\0&0&10\end{pmatrix},\quad \tilde{b}^2=\begin{pmatrix}4/3\\56\\30\end{pmatrix}.$$

Делим вторую строку матрицы $\tilde{A}_2$ и второй элемент столбца $\tilde{b}^2$ на 4. Получаем

$$\tilde{\tilde{A}}_2=\begin{pmatrix}1&2/3&-1/3\\0&1&4\\0&0&10\end{pmatrix},\quad \tilde{\tilde{b}}^2=\begin{pmatrix}4/3\\14\\30\end{pmatrix}.$$

Наконец, делим последнюю строку матрицы $\tilde{\tilde{A}}_2$ и последний элемент столбца $\tilde{\tilde{b}}^2$ на 10. Получаем

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Теперь выполняем обратный ход метода Гаусса. Последовательно находим $x_3 = 3$, $x_2 = 14 - 3 \cdot 4 = 2$, $x_1 = 4/3 - (2/3) \cdot 2 + (1/3) \cdot 3 = 1$.

В ходе реализации метода Гаусса мы, фактически, подсчитали и определитель матрицы A. По формуле (6.15) его абсолютная величина равна произведению *ведущих* элементов метода Гаусса, т. е. тех чисел, на которые приходилось выполнять деление при приведении матрицы A к треугольному виду. В рассматриваемом примере — это $9, 4, 10$. Было выполнено две перестановки строк, следовательно, определитель равен произведению ведущих элементов: $\det(A) = 360$.

§ 7. Определитель произведения матриц

Теорема 1. *Определитель произведения произвольных квадратных матриц A и B равен произведению их определителей:*

$$\det(AB) = \det A \det B. \tag{7.1}$$

Доказательство. Если матрица A вырождена, то, как было установлено выше (см. п. 3, с.51), матрица AB также вырождена, и в этом случае равенство (7.1) тривиально выполняется. Если матрица A невырождена, то, применяя (6.13), получим

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U B.$$

В этом произведении каждый сомножитель, кроме B, есть либо матрица перестановки, либо треугольная матрица, следовательно,

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det(U) \det B =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det B,$$

но (см. (6.14))

$$\prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство (7.1) доказано. □

Из формулы (7.1), очевидно, вытекает, что если матрица A невырождена, то $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

§ 8. Основные классы матриц

В этом параграфе будут описаны классы матриц, часто возникающих в различных задачах линейной алгебры. Мы приведем и некоторые простейшие свойства этих матриц. Более подробное исследование различных классов матриц будет проведено в последующих главах.

1. Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица $A^* = (\bar{A})^T$ называется *сопряженной* по отношению к матрице A. Поясним, что элементы матрицы $\bar{A}$ комплексно сопряжены по отношению к элементам матрицы A. Нетрудно видеть, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

2. Квадратная матрица A называется *эрмитовой*[1)] (*самосопряженной*), если $A = A^*$. Квадратная матрица A называется *косоэрмитовой*, если $A = -A^*$.

Определитель эрмитовой матрицы — вещественное число. В самом деле, поскольку $\det(A^*) = \det((\overline{A})^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$, то для эрмитовой матрицы $\det(A) = \overline{\det(A)}$.

3. Любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = H_1 + iH_2, \tag{8.1}$$

здесь H_1, H_2 — эрмитовы матрицы, i — мнимая единица. Матрицы H_1, H_2 однозначно определяются матрицей A. Возможность представления (8.1) вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

Если предположить, что наряду с (8.1) возможно представление

$$A = \widetilde{H}_1 + i\widetilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, то

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

[1)] Шарль Эрмит (Charles Hermite; 1822 — 1901) — французский математик.

Переходя к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) - i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два последних равенства, будем иметь, что $H_1 = \widetilde{H}_1$, но тогда и $H_2 = \widetilde{H}_2$, т. е. представление (8.1) однозначно.

4. Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

Вещественная эрмитова матрица A называется *симметричной.* Для такой матрицы $A = A^T$.

Вещественная матрица A называется *кососимметричной*, если $A = -A^T$.

5. Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2, \tag{8.2}$$

где A_1 — симметричная, A_2 — кососимметричная матрицы. Такое представление единственно,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

6. Квадратная матрица A называется *унитарной*, если $AA^* = I$, иными словами, если $A^{-1} = A^*$. Из этого определения сразу следует, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице. Произведение унитарных матриц является унитарной матрицей (докажите!).

Важным примером унитарной матрицы является диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, равных единице по модулю, n — порядок матрицы. Проверка унитарности этой матрицы элементарна и поручается читателю.

Пусть A — унитарная матрица порядка n. Иногда унитарной будем называть и прямоугольную матрицу B, составленную из m, $m < n$, столбцов матрицы A. Очевидно, что $B^*B = I_m$, где I_m — единичная матрица порядка m.

7. Вещественная унитарная матрица называется *ортогональной* матрицей. Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице. Примеры ортогональных матриц: матрица перестановки P_{kl}, матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число.

8. Квадратная матрица A называется *нормальной*, если она перестановочна с матрицей A^*, т. е. $AA^* = A^*A$. Нетрудно убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы.

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов.

§ 9. Блочные матрицы.

1. Во многих случаях оказывается полезным «разрезать» матрицу на блоки, т. е. представить ее в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

где элементы A_{ij}, в свою очередь, являются матрицами.

Размеры блоков предполагаются согласованными, т. е. все блоки, стоящие в одной строке, должны иметь одинаковое число строк, все блоки, стоящие в одном столбце, должны иметь одинаковое число столбцов. Одна и та же матрица может быть разбита на блоки различными способами (см. рис. 2).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Рис. 2. Примеры разбиения матрицы на блоки

Нетрудно убедиться, что с блочными матрицами можно действовать по тем же формальным правилам, что и с обычными. Так, если наряду с матрицей (9.1) ввести в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

причем такую, что для любой пары индексов i, j размеры блоков A_{ij}, B_{ij} совпадают, то матрица $C = A+B$ может быть представлена как блочная с блоками $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Если

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{np} \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

то матрица $C = AB$ может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} A_{iq}B_{qj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, p. \tag{9.4}$$

При этом, конечно, требуется, чтобы все произведения $A_{iq}B_{qj}$ имели смысл, т. е. горизонтальные и вертикальные размеры перемножаемых блоков должны быть согласованы.

2. Получим некоторые полезные формулы для вычисления определителей блочных матриц.

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

есть блочная 2×2 матрица, I — единичная матрица, A_{22} — квадратная матрица, A_{12} — прямоугольная, вообще говоря, матрица. Тогда

$$|A| = |A_{22}|. \tag{9.6}$$

Справедливость равенства (9.6) легко устанавливается разложением по первому столбцу. Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

где A_{11} — квадратная матрица, то $|A| = |A_{11}|$.

Теорема 1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

где A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|. \tag{9.9}$$

Доказательство. Покажем сначала, что если матрица A_{11} вырождена, то $|A| = 0$. Обозначим через n_1 порядок матрицы A_{11}, через n_2 — порядок матрицы A_{22}. Если $|A_{11}| = 0$, то существует вектор x^1 длины n_1, не равный нулю, и такой, что $A_{11}x^1 = 0$. Тогда для ненулевого вектора $x = (x^1, 0, \dots, 0)$ длины $n_1 + n_2$, очевидно, имеем $Ax = 0$, следовательно, $|A| = 0$. Таким образом, показано, что если $|A_{11}| = 0$, то равенство (9.9) выполняется тривиальным образом. Пусть теперь $|A_{11}| \neq 0$. Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

и, следовательно,

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться результатами предыдущего пункта. □

Упражнения.

1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

есть блочно треугольная матрица, A_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы. Доказать, что $|A| = |A_{11}||A_{22}| \cdots |A_{nn}|$.

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная матрица, A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы, причем $|A_{11}| \neq 0$. Показать, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \tag{9.12}$$

Указание. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замечание. Равенство (9.12) можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.

Блочную матрицу вида (9.11) будем называть верхней квазитреугольной матрицей, блочную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы будем называть квазидиагональной матрицей. В этом случае будем также использовать обозначение

$$A = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}).$$

Глава 3
Введение в аналитическую геометрию

§ 1. Векторы. Алгебраические операции над векторами

1. В этой главе мы будем использовать только вещественные числа. Рассматривается трехмерное евклидово[1] пространство. Вводится *декартова*[2] *система координат.* Это означает следующее. Фиксируется некоторая точка пространства (в дальнйшем она всегда будет обозначатся символом 0 (ноль)). Она называется *началом системы координат.* Задаются три попарно ортогональные прямые, проходящие через точку 0. Задается единица длины и направление отсчета от точки 0 на каждой прямой.

Положение точек на этих прямых будем определять вещественными числами x_1, x_2, x_3 (т. е. будем интерпретировать эти прямые как вещественные оси). Будем называть их в дальнейшем *осями координат.*

Понятно, что теперь положение каждой точки в пространстве взаимно однозначно определяется заданием трех чисел x_1, x_2, x_3, называемых *координатами точки* (геометрический смысл координат поясняется на рис. 1, a).

Точки пространства будем обозначать малыми латинскими буквами: x, y, z, ... Будут использоваться и обозначения с явным указанием координат, например $x = (x_1, x_2, x_3)$. Иногда нам придется нумеровать различные точки пространства. В этом случае номер (индекс) будем писать сверху, например, $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.

Как обычно, направленные отрезки будем называть *векторами.* На рисунках (при необходимости) направление вектора будем указывать стрелкой. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются *равными* (см. рис. 2, a). С каждой точкой x пространства взаимно однозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 1, b). Концом этого вектора считается точка x.

Вектор, соответствующий точке 0, будем называть *нулевым.*

---

[1] Евклид или Эвклид (ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик. Мировую известность приобрел благодаря сочинению по основам математики «Начала».

[2] Рене Декарт (Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезий; 1596 — 1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

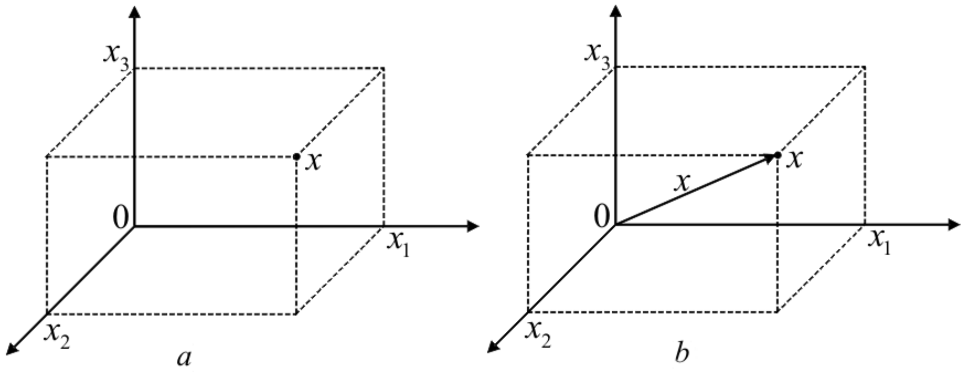


Рис. 1. Декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ (a). Вектор x (b)

Векторы будем обозначать теми же символами, что и соответствующие им точки пространства.

Координаты точки x будем называть *декартовыми координатами вектора* x. Геометрический смысл декартовых координат вектора очевиден. Это длины проекций вектора x (с учетом знака) на соответствующие оси координат.

Длину вектора x часто называют *модулем* и обозначают через $|x|$. Лишь один вектор имеет нулевую длину. Это вектор 0. Из теоремы Пифагора сразу же вытекает, что для любого вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

2. Определим теперь так называемые *алгебраические операции над векторами*. Будем опираться при этом на знакомые из школьного курса физики правила действия с силами, приложенными к материальной точке.

1) *Умножение вектора на число.* Пусть заданы вещественное число α и вектор x. Вектор y называется произведением α и x (пишет-

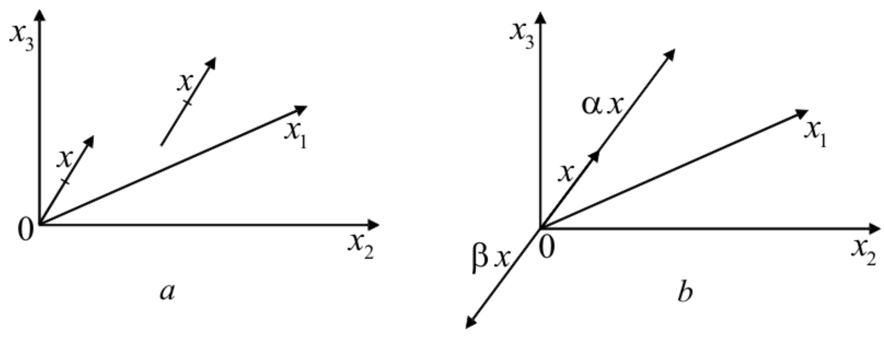


Рис. 2. Равные векторы (a). Коллинеарные векторы, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (b)

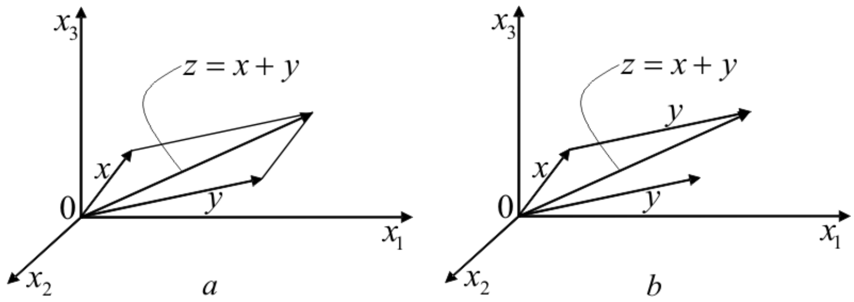


Рис. 3. Сложение векторов. Правило параллелограмма (a) и правило треугольника (b)

ся $y = \alpha x$), если $|y| = |\alpha||x|$, а направление y совпадает с направлением вектора x при положительном α и противоположно направлению x при отрицательном α.

Поясним, что умножение любого вектора на нуль дает нулевой вектор, умножение любого числа на нулевой вектор также дает нулевой вектор.

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными* (см. рис. 2, b). Понятно, при любых α и x векторы $y = \alpha x$ и x коллинеарны. Наоборот, если векторы x, y коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, x), то найдется такое число α, что $y = \alpha x$.

2) *Сложение векторов.* Вектор z называется суммой векторов x и y (пишется $z = x+y$), если он образует диагональ параллелограмма, построенного на векторах x, y (см. рис. 3, a).

Нетрудно видеть, что $x + y = y + x$, т. е., как говорят, операция сложения векторов *коммутативна* (*перестановочна*).

Упражнение. Интерпретируйте правило сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

Иногда удобнее описывать то же самое правило сложения век-

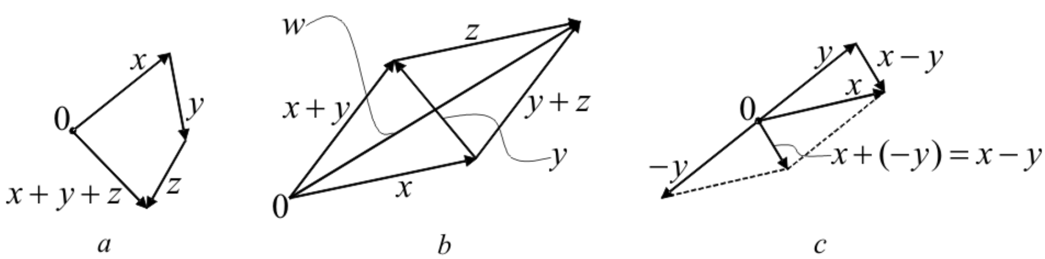


Рис. 4. Сложение векторов: (a) сумма трех векторов; (b) к правилу ассоциативности $w = x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$; ($c$) вычитание векторов, $x + (-y) = x - y$, $x = y + (x - y)$

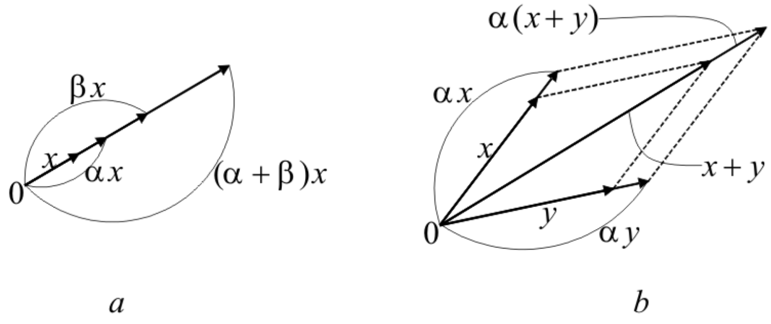


Рис. 5. К дистрибутивности умножения на скаляр (a) и по сложению векторов (b)

торов иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник (см. рис. 3, b).

Аналогично можно описать правило сложения нескольких векторов (см. рис. 4, a).

Нетрудно видеть, что операция сложения векторов *ассоциативна* (см. рис. 4, b), т. е. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Вектор z называется *разностью* векторов x и y (см. рис. 4, c), если $x = z + y$. Понятно, что $z = x + (-1)y = x + (-y)$.

Из рис. 5 сразу усматриваются следующие свойства, связывающие операции сложения векторов и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Эти свойства называют свойствами *дистрибутивности* (*распределительности*).

3. Базис. Разложение вектора по базису. Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем

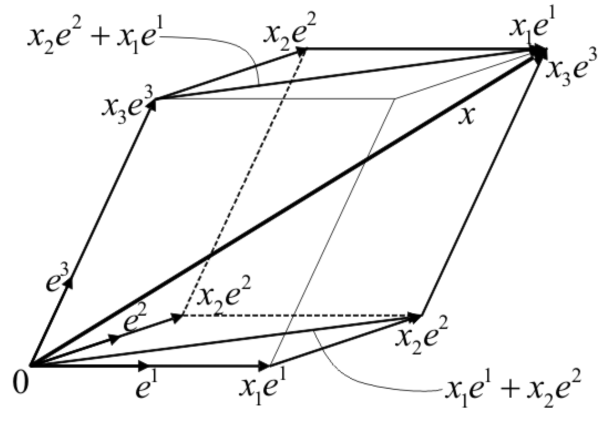


Рис. 6. Разложение вектора по базису, $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$

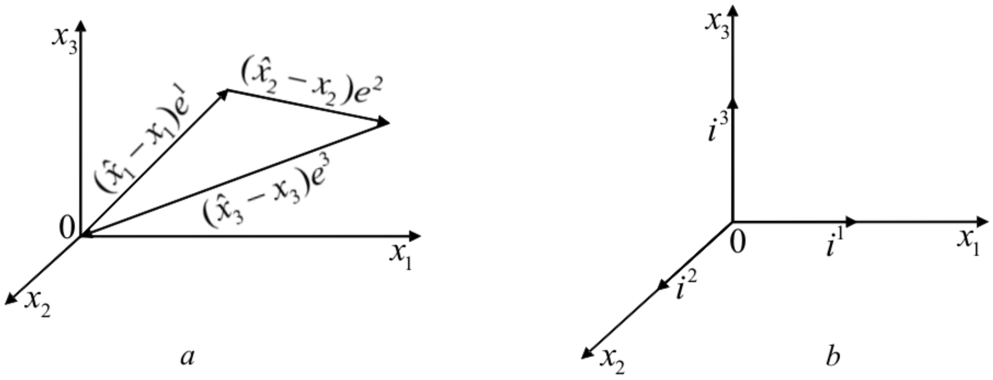


Рис. 7. К доказательству единственности разложения вектора по неортогональному базису (a). Декартов базис (b)

произвольным образом три некомпланарных вектора. Обозначим их через e^1, e^2, e^3. Очевидно, что любой вектор x можно представить в виде (см. рис. 6)

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют *базис* пространства. Числа x_1, x_2, x_3 называют *координатами вектора в* этом *базисе*. Они однозначно определяются вектором x (если базис фиксирован). Действительно, если предположить, что возможно еще одно разложение

$$x = \widehat{x}_1 e^1 + \widehat{x}_2 e^2 + \widehat{x}_3 e^3,$$

то

$$(\widehat{x}_1 - x_1)e^1 + (\widehat{x}_2 - x_2)e^2 + (\widehat{x}_3 - x_3)e^3 = 0.$$

Следовательно, векторы $(\widehat{x}_1 - x_1)e^1$, $(\widehat{x}_2 - x_2)e^2$, $(\widehat{x}_3 - x_3)e^3$ образуют треугольник и, значит, лежат в одной плоскости (см. рис. 7, a), чего не может быть, так как по условию векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны.

Особую роль играет базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины (см. рис. 7, b). Они образуют так называемый *декартов базис*. Мы будем обозначать его через i^1, i^2, i^3. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

Базис, составленный из трех произвольных некомпланарных векторов, иногда называют *обобщенным декартовым базисом*.

Далее в этом параграфе под координатами вектора понимаются обобщенные декартовы координаты. Случаи, когда используются декартовы координаты, оговариваются особо.

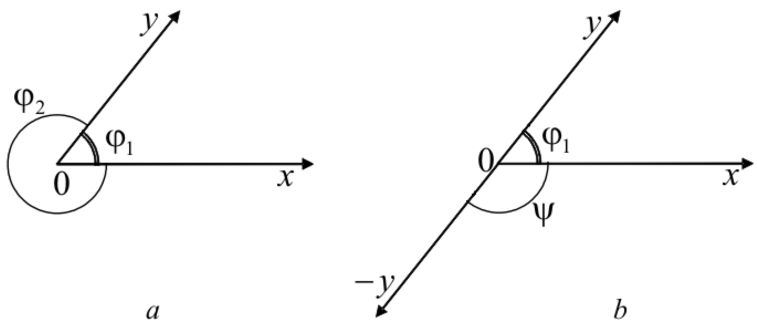


Рис. 8. Угол φ_1 между векторами x и y (a). Угол $\psi = \pi - \varphi_1$ между векторами x и $-y$ (b)

4. Представление алгебраических операций через координаты. Пусть α — произвольное число. Используя свойство дистрибутивности, получим

$$\alpha x = (\alpha x_1)e^1 + (\alpha x_2)e^2 + (\alpha x_3)e^3,$$

т. е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число. Будем также писать

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Далее, пусть $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$, $y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3$. Тогда, опираясь на свойства ассоциативности и дистрибутивности, получим

$$x + y = (x_1 + y_1)e^1 + (x_2 + y_2)e^2 + (x_3 + y_3)e^3,$$

т. е. при сложении векторов их компоненты складываются.

Будем также писать

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Например, даны векторы $x = (1, 2, 4)$, $y = (5, 6, 7)$. Вычислим координаты вектора $z = 2x - y$. Получим $z = (2 - 5, 4 - 6, 8 - 7) = (-3, -2, 1)$.

§ 2. Скалярное произведение векторов

1. *Скалярным произведением векторов* x и y называется число

$$(x, y) = |x||y|\cos(x, y).$$

Здесь $\cos(x, y)$ — косинус угла между векторами x, y. Под углом между двумя векторами подразумевают тот угол, который не превосходит π (см. рис. 8, a).

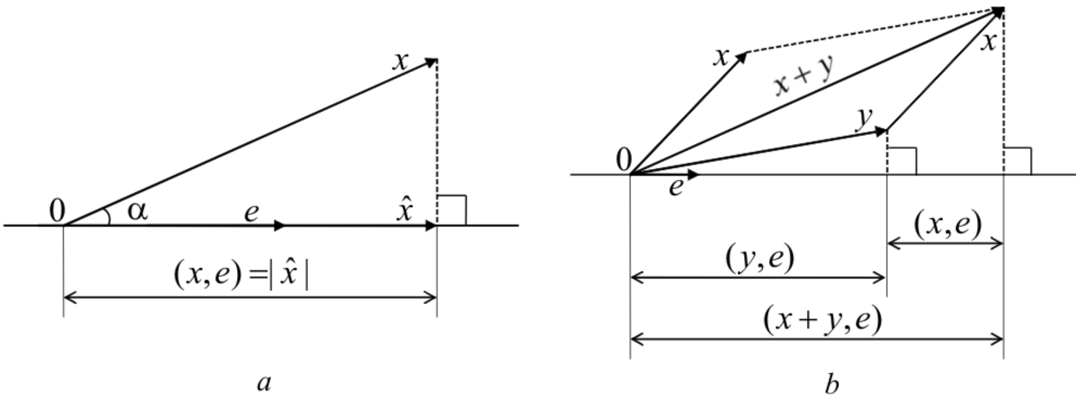


Рис. 9. Проекция вектора (a). К доказательству аддитивности скалярного произведения (b)

Понятие скалярного произведения векторов возникает, например, в физике при проектировании силы на заданное направление.

Длина *проекции* (с учетом знака) вектора x на прямую, параллельную вектору e единичной длинны, равна скалярному произведению (x, e) (см. рис. 9, a):

$$(x, e) = |x||e| \cos(x, e) = |x||e| \cos \alpha = |x| \cos \alpha.$$

Очевидно, что для *ортогональности* двух ненулевых векторов необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Если один из сомножителей — нуль, то и скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов x, y — *симметрия*,

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых векторов x, y и для любого вещественного числа α — *однородность*,

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых векторов x, y, z — *аддитивность*,

4) $(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ — *положительная определенность*.

Заметим, что из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов x, y, z и для любых вещественных чисел α, β. Это свойство часто называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–4).

Свойство 1) — непосредственное следствие определения.

Свойство 2) при $\alpha \geqslant 0$ очевидно, а при $\alpha < 0$ надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до π и, стало быть, меняет знак косинуса угла (см. рис. 8, b).

Если $z = 0$, то свойство 3), очевидно, выполняется для любых x и y. Если $z \neq 0$, то, используя свойство 2), получим

$$(x + y, z) = |z|(x + y, e),$$

где $e = |z|^{-1}z$, причем, очевидно, $|e| = 1$. Теперь достаточно доказать равенство

$$(x + y, e) = (x, e) + (y, e).$$

Слева в этом равенстве — проекция вектора $x + y$ на прямую, параллельную вектору e, а справа — сумма проекций векторов x и y на эту же прямую (см. рис. 9, b). Понятно, что две эти величины совпадают.

Свойство 4) выполняется очевидным образом.

Отметим еще, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|.$$

Это неравенство называют *неравенством Коши*[1)]. Очевидно также, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

называемое *неравенством треугольника* (см. рис. 3, b).

2. Укажем формулу вычисления скалярного произведения векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ через их координаты. Воспользовавшись установленными только что свойствами скалярного произведения, получим

$$(x, y) = (x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (e^k, e^l). \quad (2.1)$$

Использованные здесь символы означают суммирование по всем значениям индексов $k, l = 1, 2, 3$ (всего — девять слагаемых).

Полученная формула показывает, что для вычисления скалярного произведения двух любых векторов надо знать скалярные произведения всех (шести) пар базисных векторов.

[1)] Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789 — 1857) — французский математик.

Проще всего вычисляется скалярное произведение векторов по их декартовым координатам. Действительно, в этом случае $(e^k, e^l) = \delta_{kl}$, следовательно,

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{2.2}$$

Приведем в заключение очевидную, но полезную, формулу, выражающую косинус угла между векторами через их декартовы координаты:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Пример. Треугольник xyz задан декартовыми координатами вершин (сделайте рисунок!):

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0). \tag{2.3}$$

Требуется найти угол α при вершине x. Сначала находим векторы

$$y - x = (1, 1, 0) \quad \text{и} \quad z - x = (1, 0, 1).$$

Затем вычисляем их длины $|y-x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|z-x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, скалярное произведение $(y-x, z-x) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1$ и, наконец, косинус угла при вершине x:

$$\cos\alpha = \frac{(y - x, z - x)}{|y - x||z - x|} = \frac{1}{2},$$

следовательно, $\alpha = \pi/3$.

§ 3. Векторное произведение

1. *Векторное произведение векторов* естественным образом возникает в физике, например, при введении понятия момента силы относительно данной точки.

Пусть в пространстве фиксирована некоторая базисная система векторов e^1, e^2, e^3. Введем понятие *ориентации базиса.* Будем говорить, что тройка базисных векторов e^1, e^2, e^3 имеет *правую ориентацию*, если с конца вектора e^3 кратчайший поворот от e^1 к e^2 совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка имеет *левую ориентацию* (см. рис. 10, *а*).

Векторным произведением вектора x на вектор y называется вектор z, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $|z| = |x||y|\sin(x, y)$ [1)],

2) вектор z ортогонален каждому из векторов x и y,

[1)] Последний множитель — синус угла (минимального) между векторами x и y.

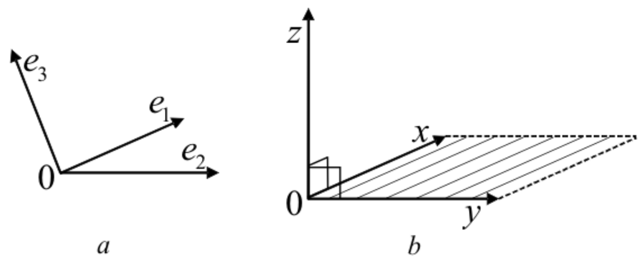


Рис. 10. К определению векторного произведения: левый базис (a), $z = [x, y]$ (b)

3) вектор z направлен так, что тройка векторов x, y, z имеет ту же ориентацию, что и фиксированный выше базис пространства (см. рис. 10, b).

Векторное произведение векторов x, y будем обозначать через $[x, y]$.

Отметим, что $|[x, y]|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах x, y (см. рис. 10, b).

Ясно, что необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $[x, y] = -[y, x]$ для любых векторов x, y — *антисимметричность* (*кососимметричность*),

2) $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$ для любых векторов x, y и любого вещественного числа α — *однородность* по первому аргументу,

3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ для любых векторов x, y — *аддитивность* по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–3). Проверка свойств 1), 2) аналогична проверке свойств 1), 2) скалярного произведения. При этом надо учесть, что если в тройке векторов поменять местами первые два вектора, то тройка меняет ориентацию на противоположную; если умножить первый вектор на отрицательное число, то тройка также меняет ориентацию на противоположную.

Для проверки третьего свойства заметим, что при $z = 0$ оно выполняется тривиальным образом. Если $z \neq 0$, то, поделив равенство 3) на $|z|$ и используя затем свойство 2), нетрудно убедиться, что достаточно доказать справедливость равенства

$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e], \tag{3.1}$$

где e — произвольный вектор единичной длины. Построение векторного произведения $[x, e]$ можно описать следующим образом. Сначала вектор x проектируется на плоскость, ортогональную вектору e. Затем полученный вектор поворачивается в этой плоскости так, чтобы он стал ортогональным вектору x и при этом получилась тройка

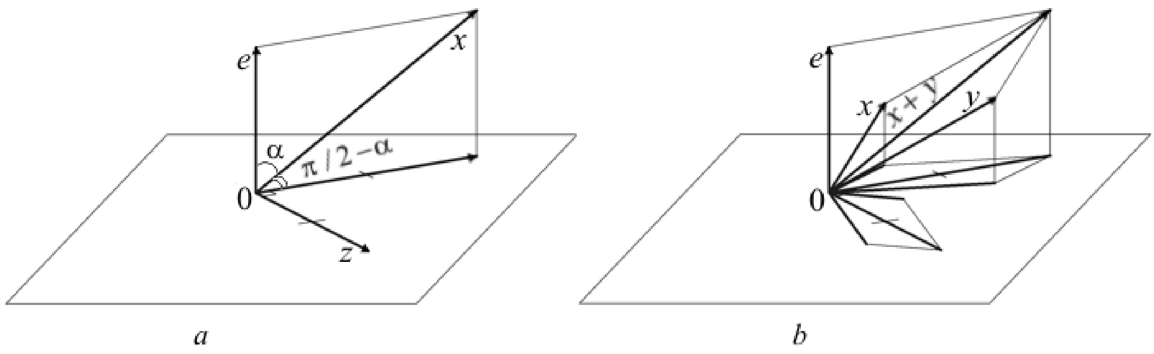


Рис. 11. К доказательству аддитивности векторного произведения. Произведение вектора x на вектор e единичной длины, $z = [x, e]$, $|z| = |x| \sin\alpha = |x| \cos(\pi/2 - \alpha)$ (a). К доказательству равенства $[x + y, e] = [x, e] + [y, e]$ (b)

нужной ориентации (см. рис. 11, a). Заметим, что возможность такого описания построения векторного произведения обеспечивается хорошо известным равенством $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$. После выполнения указанных геометрических построений равенство (3.1) становится очевидным (см. рис. 11, b).

2. Получим теперь выражение для векторного произведения векторов $x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$, $y = y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3$ через их координаты. Последовательно используя свойства 1)–3) и учитывая, что $[z, z] = 0$ для любого вектора z, можно написать

$$\begin{aligned}[x, y] = x_1[e^1, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] + x_2[e^2, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] +\\ + x_3[e^3, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] = -x_1[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^1] -\\ - x_2[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^2] - x_3[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^3] =\\ = (x_1 y_2 - x_2 y_1)[e^1, e^2] + (x_1 y_3 - x_3 y_1)[e^1, e^3] +\\ + (x_2 y_3 - x_3 y_2)[e^2, e^3]. \quad (3.2)\end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить векторное произведение произвольных векторов, нужно уметь строить векторные произведения векторов базиса.

Проще всего вычисляются векторные произведения векторов декартова базиса. Непосредственно из определения вытекает (см. рис. 7, b), что $[i^1, i^2] = i^3$, $\quad [i^1, i^3] = -i^2$, $\quad [i^2, i^3] = i^1$, следовательно, в декартовых координатах

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i^1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) i^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i^3. \qquad (3.3)$$

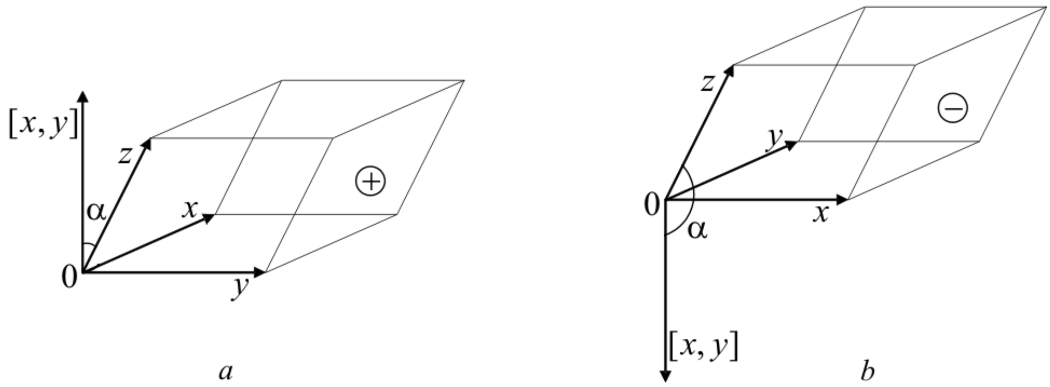


Рис. 12. Смешанное произведение векторов (x, y, z). Угол α между векторами $[x, y]$ и z острый (a), тупой (b)

Для запоминания этого равенства полезна следующая запись:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Если (формально) разложить этот определитель по первой строке, получим (3.3).

Пример. Декартовы координаты векторов x, y, z заданы равенствами (2.3). Найдем векторное произведение векторов $y-x$, $z-x$ (сделайте рисунок!). По формуле (3.4)

$$[y - x, z - x] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^1 - i^2 - i^3,$$

или $[y - x, z - x] = (1, -1, -1)$.

§ 4. Смешанное произведение векторов

1. *Смешанным произведением векторов* x, y, z называется число $(x, y, z) = ([x, y], z)$. Поясним, что сначала строится вектор $[x, y]$, затем этот вектор скалярно умножается на вектор z.

Смешанное произведение векторов имеет отчетливый геометрический смысл. Если векторы $[x, y]$ и z образуют острый угол, это — объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z. В противном случае — объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z, взятый со знаком минус (см. рис. 12).

Отсюда сразу вытекает, что при перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например,

$$(x, y, z) = -(y, x, z), \quad (x, y, z) = -(x, z, y).$$

Ясно, что необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

2. Получим выражение для смешанного произведения векторов

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3,\ y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,\ z = z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3$$

через их координаты. Используя формулу (3.2), можем написать

$$(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3).$$

Раскроем здесь скобки, используя линейность и симметрию скалярного произведения, описанное выше правило изменения знака смешанного произведения, а также тот очевидный факт, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю. Получим

$$(x, y, z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1)\}(e^1, e^2, e^3).$$

Выражение в фигурных скобках — разложение определителя третьего порядка по последней строке. Поэтому

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1, e^2, e^3).$$

Поскольку $(e^1, e^2, e^3) \neq 0$ (векторы базиса некомпланарны), то отсюда сразу вытекает, что необходимое и достаточное условие компланарности векторов x, y, z есть равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

составленного из компонент векторов относительно любого базиса.

Если базис декартов, то, очевидно, $(e^1, e^2, e^3) = 1$, т. е. в декартовых координатах

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Вычислим, например, смешанное произведение векторов x, y, z, декартовы кооординаты которых заданы равенствами (2.3), с. 76. Имеем (сделайте рисунок!)

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Упражнение. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны. Положим $Q = (e^1, e^2, e^3)$,

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 некомпланарны, причем $(e_k, e^l) = \delta_{kl}$.

Говорят, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют *взаимный базис*. Базис e^1, e^2, e^3 называют при этом *основным*. Равенство (3.2), фактически, дает правило вычисления компонент вектора $[x, y]$ при разложении его по взаимному базису, если известны компоненты векторов x, y при разложении их по основному базису.

Упражнение. Вычислить скалярное произведение (x, y), разлагая вектор x по основному базису, а y — по взаимному.

§ 5. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры

1. *Расстояние между двумя точками.* Даны точки

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Найти расстояние между ними.

Искомое расстояние равно длине вектора $y - x$. Но, как мы знаем, $y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, и по формуле (2.1) получаем

$$|y - x| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l)}. \qquad (5.1)$$

В декартовых координатах

$$|y - x| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

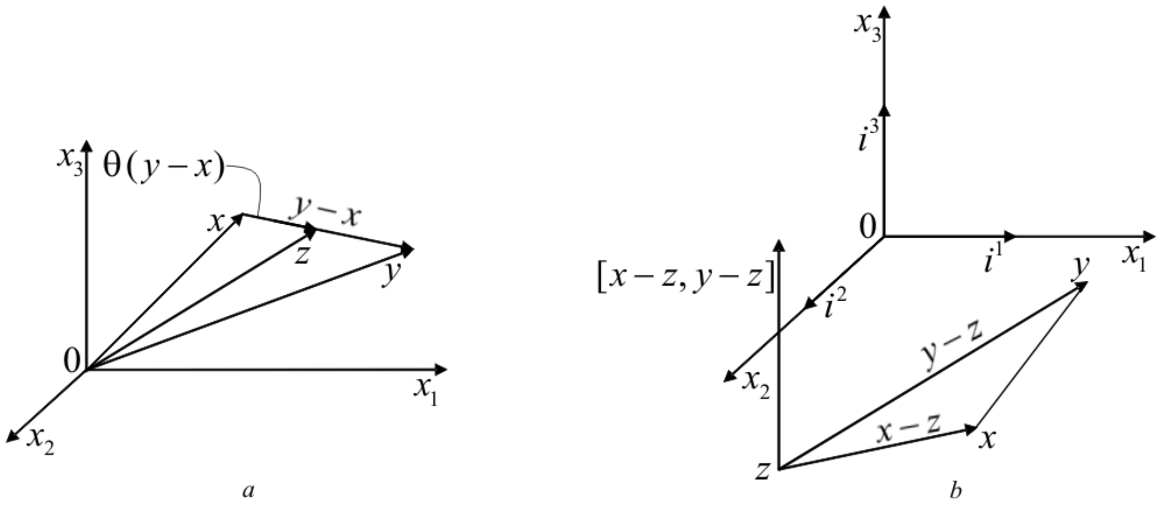


Рис. 13. К уравнению отрезка прямой, $z = x + \theta(y - x)$ (a). К вычислению площади треугольника xyz (b)

2. *Уравнение сферы.* Написать уравнение сферы радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, x_3^0, x_3^0)$.

По определению сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от данной. Следовательно, для любой точки x, лежащей на сфере

$$|x - x^0|^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение сферы. Запишем его в координатной форме. Используя формулу (5.1), получаем

$$\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)(e^k, e^l) = R^2.$$

В декартовых координатах

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = R^2.$$

3. *Уравнение отрезка прямой. Деление отрезка в данном отношении.* Рассмотрим две точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Положим

$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что при изменении θ от нуля до единицы, точка z пробегает отрезок прямой, соединяющий точки x и y (см. рис. 13, a). Говорят, что (5.2) — уравнение отрезка прямой (в пространстве).

Ясно, что $|z - x| = \theta|y - x|$, т. е. точка z (при данном θ) делит отрезок в отношении $\theta : (1 - \theta)$. В частности, при $\theta = 1/2$ отрезок делится пополам. Запишем уравнение (5.2) в координатной форме

$$z_i = x_i + \theta(y_i - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

При $\theta = 1/2$ получаем координаты середины отрезка

$$z_i = (x_i + y_i)/2, \quad i = 1, 2, 3.$$

4. *Площадь треугольника.* Рассмотрим плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2, и на этой плоскости треугольник с вершинами $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ (см. рис. 13, *b*).

Поставим задачу: выразить площадь треугольника через координаты его вершин. Нам будет удобно трактовать плоскость x_1, x_2 как координатную плоскость $x_3 = 0$ трехмерной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3.

Построим векторы $x-z$, $y-z$ (см. рис. 13, *b*) и составим их векторное произведение. Получим вектор, направленный вдоль оси x_3. Длина этого вектора будет равна удвоенной площади треугольника xyz. Координаты вектора $[x-z, y-z]$ определим по формуле (3.3). Понятно, что среди них только одна, третья, будет отлична от нуля. Она, очевидно, будет равна

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, с точностью до знака $|[x - z, y - z]|$ совпадет с величиной этого определителя. Отсюда вытекает, что с точностью до знака площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Часто используют и такую форму записи:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $x = (1, 1)$, $y = (2, 2)$, $z = (-1, 3)$. Используем формулу (5.4), а затем выполним очевидные элементарные преобразования определителя:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4/2 = 2.$$

Упражнение. Покажите, что определители (5.3), (5.4) совпадают.

4.1. Для любых векторов x, y положим

$$G(x, y) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix}.$$

Упражнение. Докажите, что

$$G(x, y) = S^2, \tag{5.5}$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y.

Из (5.5) вытекает, что $G(x, y) \geqslant 0$ для любых векторов x, y, причем $G(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы x, y коллинеарны.

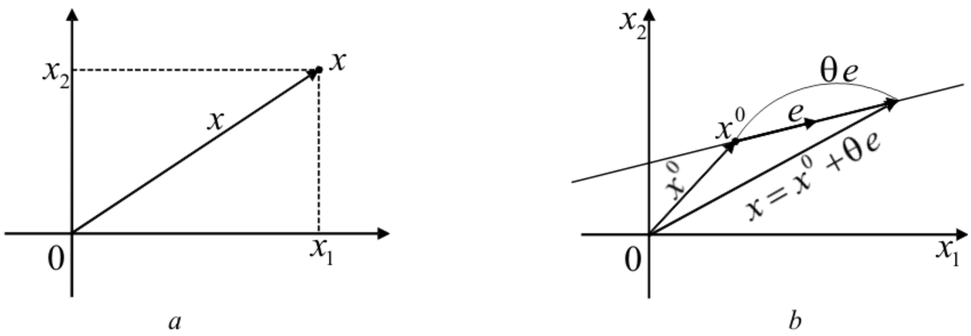


Рис. 14. Декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2)$ и вектор x (a). К уравнению прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e (b)

§ 6. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Отнесем плоскость к декартовой системе координат x_1, x_2. Как и ранее, точки $x = (x_1, x_2)$ будут отождествляться с векторами (см. рис. 14, a).

1. *Прямую l, проходящую через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ параллельно вектору $e = (e_1, e_2)$*, зададим уравнением (см. рис. 14, b)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{6.1}$$

2. В каком-то смысле альтернативный способ описания: прямая — это множество всех векторов, ортогональных данному вектору p (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат (см. рис. 15), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \tag{6.2}$$

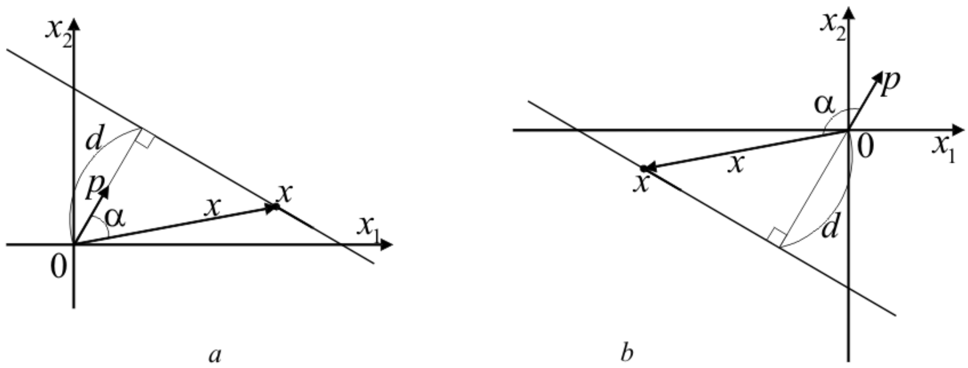


Рис. 15. К нормальному уравнению прямой: $d > 0$, угол α между векторами p и x острый (a); $d < 0$, угол α между векторами p и x тупой (b)

где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины. Поясним, что d — проекция x на направление p, одна и та же для всех точек прямой. Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг (см. рис. 15). Уравнение (6.2) называют *нормальной формой уравнения прямой.* Нужно напомнить, что поскольку мы пользуемся декартовыми координатами, то $(x, p) = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

3. Записывая уравнения (6.1), (6.2) в координатах, получаем уравнения прямой в формах, знакомых из школьной математики:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \quad k = e_2/e_1, \tag{6.3}$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{6.4}$$

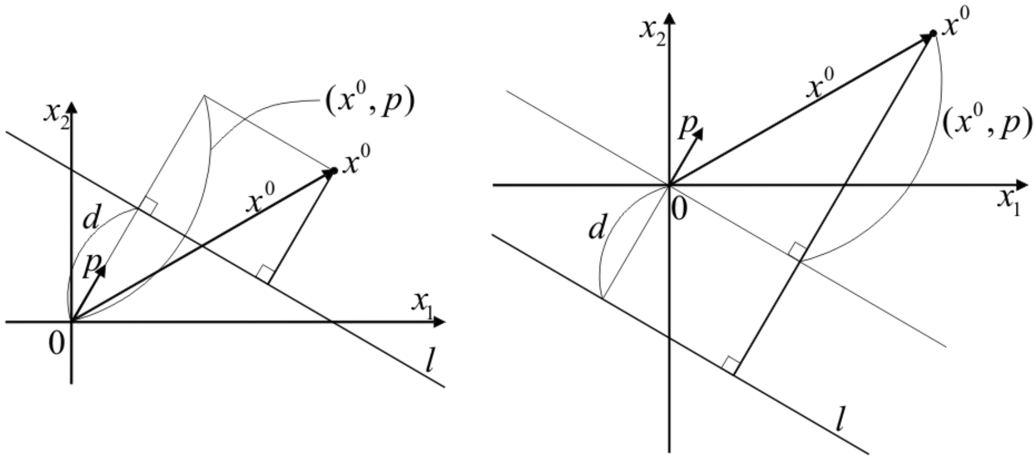
$$x_2 = kx_1 + b. \tag{6.5}$$

Геометрический смысл участвующих в (6.3) – (6.5) коэффициентов также хорошо знаком читателю. Напомним только, что k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

4. Из уравнения прямой в любой из форм (6.3) – (6.5) элементарными эквивалентными преобразованиями нетрудно получить уравнение в форме (6.1) или (6.2). Получим, например, нормальное уравнение прямой из уравнения в так называемой *общей форме* (6.4). Для этого поделим обе части уравнения (6.4) на $\sqrt{a^2 + b^2}$ и положим

$$p_1 = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad p_2 = b/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = -c/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Поскольку $p_1^2 + p_2^2 = 1$, то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.



a *b*

Рис. 16. К вычислению расстояния от точки до прямой: $d > 0$ (a), $d < 0$ (b)

§ 7. Задачи о взаимном расположении прямых и точек на плоскости

1. Определим *расстояние от точки* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *до прямой* l.

Проще всего эта задача решается, когда прямая l задана нормальным уравнением (6.2). Действительно, поскольку $|p| = 1$, то (x^0, p) — величина проекции вектора x^0 на прямую, параллельную p, следовательно, величина $\delta = (x^0, p) - d$ есть отклонение точки x^0 от прямой l (см. рис. 16). Причем знак δ показывает, по какую сторону от прямой l расположена точка x^0. Расстояние от точки x^0 до прямой l равно $|(x^0, p) - d|$.

Пример. Найти расстояние от точки $x^0 = (1, -2)$ до прямой $3x_1 - 4x_2 - 26 = 0$ (сделайте рисунок!). Сначала приведем прямую к нормальному виду: $\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{26}{5} = 0$, т. е. $p = (3/5, -4/5)$, $d = 26/5$. Теперь вычислим $\delta = 3/5 + 8/5 - 26/5 = -3$. Расстояние от точки до прямой равно трем.

2. Даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Требуется исследовать *взаимное расположение* этих *прямых*, т. е. выяснить, пересекаются ли эти прямые, и указать точку их пересечения.

Эта задача была нами полностью решена в **??**, с. **??**. Действительно, фактически, поставленная задача эквивалентна исследованию условий разрешимости системы линейных уравнений (7.1). Здесь надо различать три случая.

1) Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Тогда система уравнений (7.1) имеет единственное решение x_1, x_2 при любых b_1, b_2. Точка $x = (x_1, x_2)$ — точка пересечения прямых.

2) Определитель Δ равен нулю, но определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

а следовательно, и определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Тогда система (7.1) не имеет решений, т. е. прямые l_1, l_2 параллельны.

3) Все три определителя Δ, Δ_1, Δ_2 — нули. Это условие эквивалентно существованию числа $\alpha \neq 0$ такого, что

$$a_{21} = \alpha a_{11}, \quad a_{22} = \alpha a_{12}, \quad b_2 = \alpha b_1.$$

Система (7.1) имеет бесконечное множество решений (фактически, уравнения системы совпадают). Прямые l_1, l_2 совпадают.

3. Найдем *угол между прямыми* $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ (см. рис. 17). Так как $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\,\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

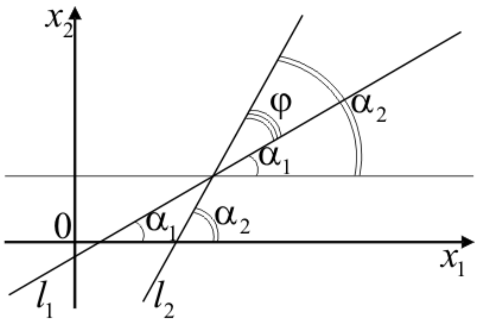


Рис. 17. Угол между прямыми

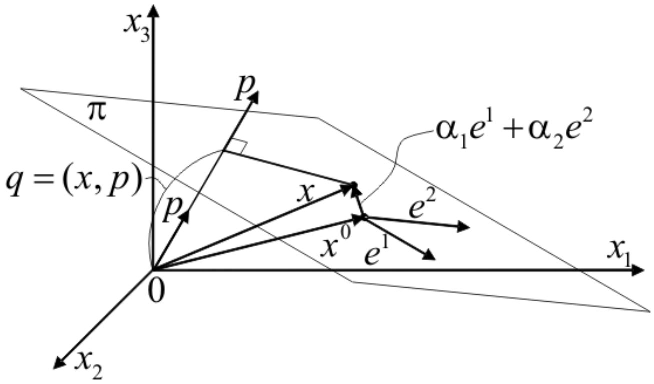


Рис. 18. К уравнению плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2; а также к нормальному уравнению плоскости $(x, p) - q = 0$

Упражнения.

1) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (6.1).

2) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (6.2).

3) Используя выражение для тангенса угла между прямыми, покажите, что при $k_1 = k_2$ прямые параллельны, а при $k_1 k_2 = -1$ ортогональны.

§ 8. Различные формы уравнения плоскости

Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Пусть e^1 и e^2 — неколлинеарные векторы в трехмерном пространстве, а x^0 — произвольный вектор. Уравнение

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, \tag{8.1}$$

определяет *плоскость* π, *проходящую через точку* x_0. Говорят, что эта плоскость *натянута на векторы* e^1, e^2 (см. рис. 18).

Пусть p — единичный вектор. Уравнение

$$(x, p) - q = 0 \tag{8.2}$$

определяет множество векторов, концы которых принадлежат плоскости, ортогональной вектору p и отстоящей от начала координат на расстояние q (см. рис. 18). Знак q определяет направление сдвига плоскости (по отношению к направлению вектора p). Уравнение (8.2) называют *нормальным уравнением плоскости*. Напомним, что нормальное уравнение прямой (6.2) имеет аналогичный вид.

Запишем уравнение (8.1) в координатной форме (здесь и далее до конца главы используются только декартовы координаты)

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2, \tag{8.3}$$

$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2, \tag{8.4}$$

$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2. \tag{8.5}$$

Полагая, что $x \neq x^0$, рассмотрим определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix}.$$

Равенства (8.3) – (8.5) означают, что если точка x принадлежит плоскости π, то столбцы этого определителя линейно зависимы, следовательно, он равен нулю. Наоборот, равенство нулю этого определителя означает, что его столбцы линейно зависимы и, поскольку векторы e^1, e^2 линейно независимы, то выполнены равенства (8.3)–(8.5).

Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.6}$$

есть *уравнение плоскости* (в координатной форме), *проходящей через точку* x^0 *и натянутой на векторы* e^1, e^2. Раскрывая определитель $\Delta(x)$ (например, по первому столбцу), запишем уравнение плоскости π в виде

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{8.7}$$

Здесь числа a, b, c, d очевидным образом выражаются через координаты векторов e^1, e^2, x^0. Уравнение вида (8.7) называют *общим уравнение плоскости.*

Аналогично уравнению прямой уравнения (8.1), (8.2), (8.7) можно эквивалентно преобразовывать из одной формы в другую.

Упражнения.

1) Преобразовать уравнение (8.7) к нормальному виду.
Ответ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2) Показать, анализируя общее уравнение плоскости, что:

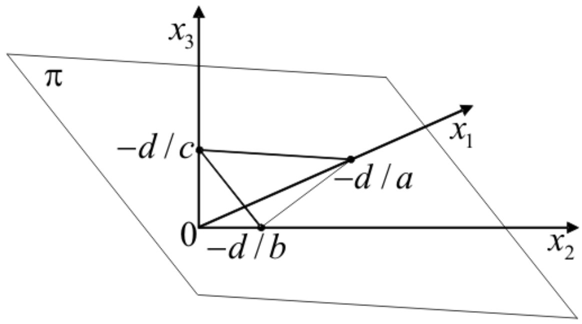


Рис. 19. Точки пересечения плоскости с осями координат

если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости x_1x_2;

если $a = 0$, то плоскость параллельна оси x_1;

если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

3) Показать, что $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$, $\gamma = -d/c$ — координаты точек пересечения плоскости с осями x_1, x_2, x_3 (см. рис. 19), проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

4) Показать, что косинус угла φ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{8.8}$$

5) Используя уравнение (8.6), написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Проанализировать случай, когда эти точки лежат на одной прямой.

6) Используя нормальное уравнение плоскости (8.2), найти отклонение данной точки x^0 от плоскости.

Пример. Даны плоскости π_1 и π_2, описываемые уравнениями

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0, \tag{8.9}$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0, \tag{8.10}$$

и точка $x^0 = (1, 1, 8)$. Определить величину того угла между плоскостями π_1, π_2, которому принадлежит точка x^0.

Приведем уравнения (8.9), (8.10) к нормальному виду. Имеем

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3, \quad \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7,$$

следовательно, нормальный вид уравнения (8.9) есть

$$(p^1, x) - q_1 = 0,$$

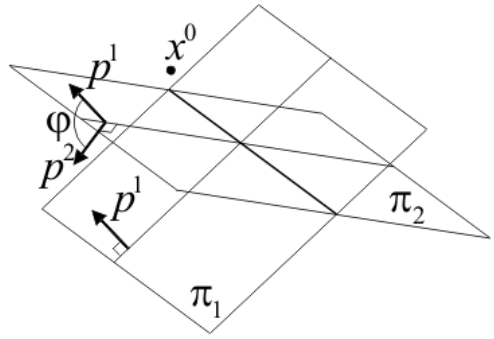


Рис. 20. Плоскости π_1, π_2

где $p^1 = \dfrac{1}{3}(2, -1, 2)$, $q_1 = 1$, а для уравнения (8.10) получаем

$$(p^2, x) - q_2 = 0,$$

где $p^2 = \dfrac{1}{7}(6, 2, -3)$, $q_2 = -8/7$. Заметим далее, что

$$(p^1, x^0) - q_1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 3) = \frac{14}{3} > 0,$$

$$(p^2, x^0) - q_2 = \frac{1}{7}(6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 8 + 8) = -\frac{8}{7} < 0.$$

Поэтому конец вектора p^1 и точка x^0 лежат по одну сторону от плоскости π_1, а конец вектора p^2 и точка x^0 лежат по разные стороны от плоскости π_2 и, следовательно, точка принадлежит углу φ (см. рис. 20). Угол φ равен углу между векторами p^1, p^2. Используя формулу (8.8), получим

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}, \quad \varphi \approx 0,44\pi.$$

§ 9. Уравнения прямой в пространстве

Уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty, \tag{9.1}$$

определяет *прямую, проходящую через точку* x^0 *параллельно вектору* $e = (e_1, e_2, e_3)$ (см. рис. 21).

Запишем уравнение (9.1) в координатах

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1, \tag{9.2}$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2, \tag{9.3}$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3. \tag{9.4}$$

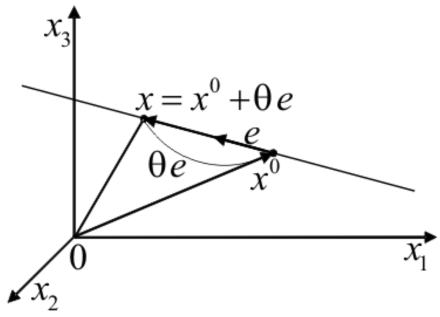


Рис. 21. Прямая в пространстве

Исключая из этих уравнений параметр θ, получим

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{9.5}$$

Множество всех точек $x = (x_1, x_2, x_2)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям (9.5), образуют прямую, проходящую через точку x^0 параллельно вектору e. Уравнения (9.5) называют *каноническими уравнениями прямой.*

Упражнение. Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в (9.5) обращается в нуль.

§ 10. Задачи о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей

1. Найти расстояние d от прямой l, заданной уравнением (9.1), до точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.

Искомым расстоянием является длина перпендикуляра, опущенного из точки x^1 на прямую l (см. рис. 22, *а*). Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах e и $x^1 - x^0$. Площадь этого параллелограмма равна $|[e, x^1 - x^0]|$, следовательно, $d = |[e, x^1 - x^0]|/|e|$. Для того, чтобы выразить входящие сюда величины через координаты точек x^0, x^1 и компоненты вектора e, нужно, в частности, воспользоваться формулой (3.3), с. 78, для компонент векторного произведения.

2. Найти расстояние d между непараллельными прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

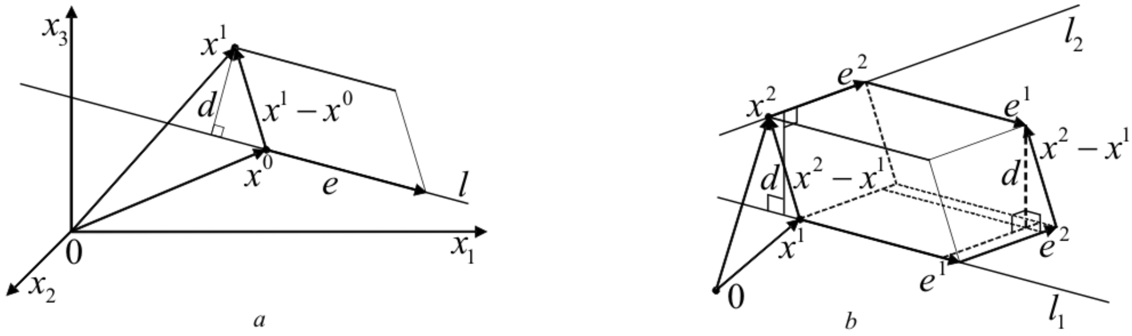


Рис. 22. К вычислению расстояния от точки до прямой (a) и между прямыми (b)

Искомое расстояние, очевидно, есть длина отрезка прямой, который ортогонален l_1 и l_2, концы его лежат на l_1 и l_2 (см. рис. 22, b). Построим параллелепипед на векторах e^1, e^2 и $x^2 - x^1$. Понятно, что d — высота этого параллелепипеда и, следовательно, d есть отношение его объема к площади основания.

Таким образом, $d = |(e^1, e^2, x^2 - x^1)|/|[e^1, e^2]|$. Осталось выразить все входящие в эту формулу величины через координаты точек x^1, x^2 и компоненты векторов e^1, e^2 (см. (3.3), с. 78, и (4.1), с. 80).

3. Найти угол φ между прямой l, заданной уравнением (9.1), и плоскостью π, заданной нормальным уравнением (8.2).

Угол φ является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором прямой e и нормальным вектором плоскости p, следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \cos(e, p) = \frac{(e, p)}{|e|} = \frac{e_1p_1 + e_2p_2 + e_3p_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}}.$$

4. Определить общие точки прямой l, заданной уравнением (9.1), и плоскости π, заданной уравнением (8.7).

Подставим значения x_1, x_2, x_3 из (9.2)–(9.4) в уравнение (8.7). После элементарных преобразований получим

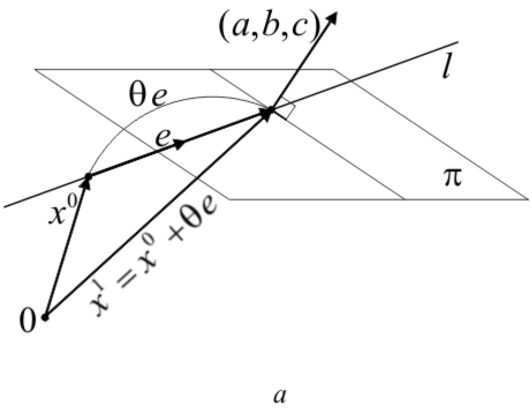
$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d + \theta(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0. \qquad (10.1)$$

Возможны следующие случаи.

1) $ae_1 + be_2 + ce_3 \neq 0$. Это означает, что прямая l не параллельна плоскости π (почему?). Из уравнения (10.1) находим

$$\theta = \theta_1 = -\frac{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}{ae_1 + be_2 + ce_3}.$$

Точка $x^1 = x^0 + \theta_1 e$ — точка пересечения прямой и плоскости (см. рис. 23, a).



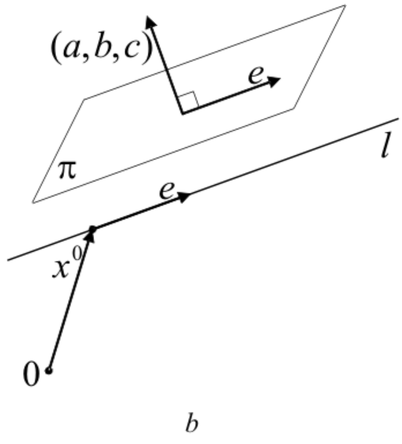


Рис. 23. К определению точки пересечения прямой и плоскости (a). Прямая l, параллельная плоскости π (b)

2) $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, но $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d \neq 0$. Уравнение (10.1) не имеет решений. Прямая l проходит через точку x^0, не принадлежащую плоскости π, параллельно плоскости π (см. рис. 23, b).

3) $ae_1+be_2+ce_3 = 0$, $ax_1^0+bx_2^0+cx_3^0+d = 0$. Любое $\theta \in (-\infty, \infty)$ — решение уравнения (10.1). Прямая l лежит в плоскости π.

5. Выяснить условия, при которых две прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$
$$x = x^2 + \theta e^2, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$

лежат в одной плоскости.

Если прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то векторы $x^2 - x^1$, e^1, e^2 лежат в одной плоскости (см. рис. 24, a), иначе говоря, компланарны. Обратно, если векторы $x^2 - x^1$, e^1, e^2 компланарны, то прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости. Используя результаты § 4, непосредственно получаем, что для принадлежности прямых l_1, l_2 одной и той же плоскости необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение $(x^2 - x^1, e^1, e^2)$ равнялось нулю.

6. Написать уравнение прямой l, являющейся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей π_1, π_2, задаваемых уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0. \qquad (10.2)$$

Найдем сначала какую-либо точку, принадлежащую обеим плоскостям (см. рис. 24, b). Иными словами, найдем какое-то реше-

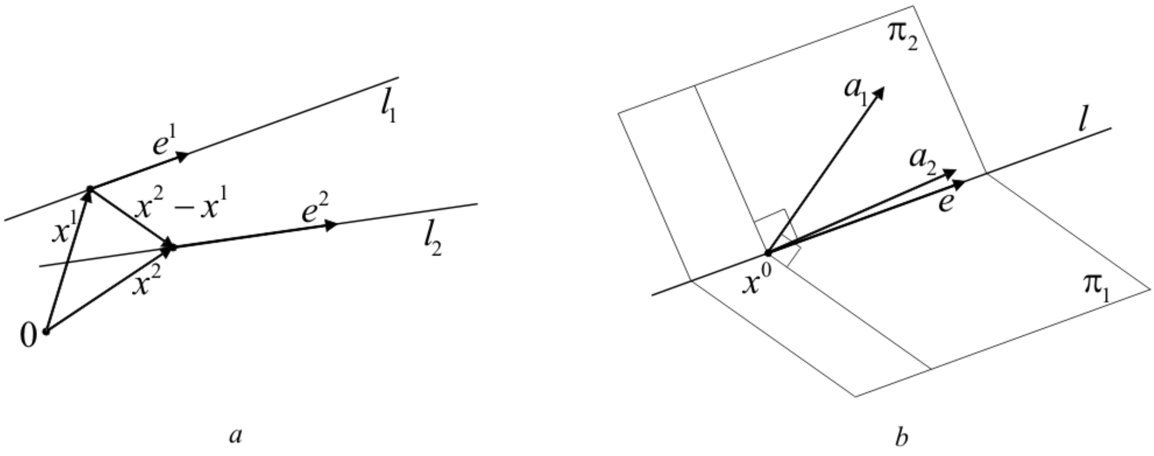


Рис. 24. К компланарности прямых l_1 и l_2 (a). К построению уравнения прямой, по которой пересекаются две плоскости (b)

ние x_1, x_2, x_3 системы уравнений (10.2). По условию плоскости не параллельны, следовательно, векторы

$$a^1 = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{и} \quad a^2 = (a_2, b_2, c_2),$$

нормальные к ним, не коллинеарны. Значит не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Примем для определенности, что $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Положим $x_3 = 0$, тогда из (10.2) получаем

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= -d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= -d_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, приходим к выводу, что точка

$$x^0 = \left(\frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ 0 \right)$$

принадлежит прямой l, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2.

Найдем теперь направляющий вектор e этой прямой. Вектор e ортогонален каждому из векторов a^1 и a^2, следовательно, можно взять вектор e, равным их векторному произведению:

$$e = [a^1, a^2] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{10.3}$$

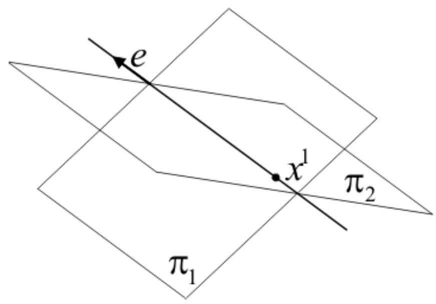


Рис. 25. К выводу уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2

Таким образом, найдены точка x^0, принадлежащая прямой l, и вектор e, параллельный этой прямой, следовательно, уравнение прямой l можно записать, например, в виде (9.1).

Пример. Найдем уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2, определяемые уравнениями (8.9), (8.10) (см. рис. 25).

Положим $x_3 = 0$ в уравнениях (8.9), (8.10), получим систему уравнений для отыскания первых двух координат точки, принадлежащей пересечению плоскостей π_1, π_2:

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы: $x_1 = -1/5$, $x_2 = -17/5$, т. е. точка $x^1 = (-1/5, -17/5, 0)$ принадлежит пересечению плоскостей (8.9), (8.10). Вектор e, параллельный искомой прямой, определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \tag{10.4}$$

или $e = (-1, 18, 10)$. По формуле (9.1) множество точек искомой прямой описывается уравнением $x = (-1/5, -17/5, 0) + \theta(-1, 18, 10)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$. Более подробно,

$$x_1 = -1/5 - \theta, \quad x_2 = -17/5 + 18\theta, \quad x_3 = 10\theta, \quad \theta \in (-\infty, \infty).$$

Глава 4
Линейные пространства

При изучении операций над векторами трехмерного евклидова пространства (см. § 1, гл. 3) было показано, что, фиксируя в пространстве некоторый базис, можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами и упорядоченными тройками вещественных чисел (координатами вектора в этом базисе). При этом операции над векторами могут быть, фактически, заменены операциями над их координатами.

Аналогичная ситуация возникает и во многих других разделах математики и ее приложений, когда приходится иметь дело с объектами, описываемыми конечными наборами вещественных, а зачатую и комплексных, чисел. При этом естественным образом возникает понятие многомерного координатного пространства как множества упорядоченных наборов чисел с введенными на этом множестве алгебраическими операциями.

В этой главе мы будем систематически заниматься конструированием и изучением такого рода пространств. Сначала будет введено пространство $\mathbb{R}^n$, представляющее собой множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел, потом пространство $\mathbb{C}^n$, состоящее из упорядоченных наборов комплексных чисел. Мы ограничимся при этом лишь определениями и описанием простейших свойств этих пространств, поскольку в дальнейшем будут введены и изучены более общие линейные пространства. Результаты, которые будут получены для этих пространств, распространяются и на пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

§ 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$

1. Пространство $\mathbb{R}^n$. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вещественных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *векторами*, или *точками*, числа x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — *компонентами* вектора x. Два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем считать *равными* тогда и только тогда, когда $x_k = y_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *ну-*

левым и обозначать символом 0. Вектор

$$i^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}),$$

у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным.* В пространстве $\mathbb{R}^n$ есть ровно n единичных векторов: i^1, i^2, $\ldots$, i^n.

На множестве $\mathbb{R}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на вещественные числа* (скаляры) и *сложение векторов.*

Именно, по определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Отметим следующие свойства введенных операций. Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и для любых вещественных чисел α, β:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) $x + 0 = x$ — *нейтральность* нулевого вектора;

4) $x+(-x) = 0$, где по определению $-x = (-1)x$, — существование для каждого вектора единственного *противоположного*;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Тождества 1)–8) называются *аксиомами линейного пространства.* Их справедливость очевидным образом вытекает из определения линейных операций над элементами $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно заметить, что аксиомы 1)–8) в точности соответствуют знакомым читателям из курса геометрии свойствам линейных операций над векторами трехмерного евклидова пространства.

Важно иметь в виду, что $\mathbb{R}^1$ одновременно является и линейным пространством, и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{R}^1$ через $\mathbb{R}$.

2. Пространство $\mathbb{C}^n$ *Пространство* $\mathbb{C}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ комплексных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число.

Элементы пространства $\mathbb{C}^n$ будем называть *векторами*, или *точками*, числа x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — *компонентами* вектора x.

Два вектора $x, y \in \mathbb{C}^n$ будем считать *равными* тогда и только тогда, когда $x_k = y_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом 0.

Вектор i^k, у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным*. В пространстве $\mathbb{C}^n$ есть ровно n единичных векторов: $i^1, i^2, \ldots, i^n$.

На пространстве $\mathbb{C}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на комплексные числа* (скаляры) и *сложение векторов*.

Именно, по определению для любого комплексного числа α и любого $x \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Отметим, что, фактически, мы уже встречались с таким линейным пространством, а именно, множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц (см. п. 3, с. 45) естественно интерпретировать как пространство $\mathbb{C}^{mn}$ векторов длины mn. Векторы записывались в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения выполнения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

Для линейных операций, введенных на пространстве $\mathbb{C}^n$, также справедливы свойства, выраженные равенствами 1)–8) с. 98.

Важно иметь в виду, что $\mathbb{C}^1$ одновременно является и линейным пространством, и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{C}^1$ через $\mathbb{C}$.

§ 2. Общие линейные пространства

Во многих разделах математики широко используются более общие конструкции, чем пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Говорят, что множество $\mathbf{X}$ является *линейным пространством над полем вещественных чисел*, или просто *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент $z = x + y \in \mathbf{X}$, называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент $\alpha x \in \mathbf{X}$, называемый *произведением* α и x.

Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*, аналогичные свойствам пространства $\mathbb{R}^n$ (см. 1)–8) с. 98):

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbf{X}$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbf{X}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\mathbf{X}$;

4) для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x+x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x[1)];

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Если при определении пространства $\mathbf{X}$ допускается умножение на комплексные числа, то $\mathbf{X}$ называется *линейным пространством над полем комплексных чисел*, или *комплексным линейным пространством.* При этом предполагается, что выполняются аксиомы 1)–8).

Элементы линейного пространства $\mathbf{X}$ часто будем называть *векторами*, а само пространство — *векторным.*

Упражнение. Докажите, что для любого линейного пространства $\mathbf{X}$:

1) $-0 = 0$ (здесь 0 — нулевой элемент $\mathbf{X}$);

2) $\alpha 0 = 0$ для любого скаляра α;

3) $0x = 0$ для любого вектора $x \in \mathbf{X}$;

4) если $\alpha x = 0$, $x \in \mathbf{X}$, то хотя бы один из сомножителей — нуль;

5) $-x = (-1)x$ для любого $x \in \mathbf{X}$;

6) $y + (x - y) = x$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$, здесь и далее по определению $x - y = x + (-y)$.

В дальнейшем на протяжении всей книги буквами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ будем обозначать линейные пространства. Если не оговорено противное, пространства будут предполагаться комплексными. По большей части, определения и результаты очевидным образом переносятся на

[1)] Обычно элемент x' обозначают через $-x$.

вещественные пространства. Те случаи, когда возникают хоть какие-то различия при переходе к вещественным пространствам, рассматриваются особо.

Упражнение. Проверить, что вводимые ниже множества являются линейными пространствами, т. е. для определенных на них операций выполняются аксиомы 1)–8). В некоторых случаях делаются необходимые указания.

1) Множество всех векторов $\mathbf{V}_3$ трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов.

2) Множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

3) Множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через $C[a, b]$. При проверке того, что $C[a, b]$ — линейное пространство, надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

4) Множество всех функций из пространства $C[a, b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a, b]$, — вещественное линейное пространство.

5) Множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

6) Множество $\mathbf{Q}_n$, состоящее из всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$, есть фиксированное целое число, и нулевого многочлена, является комплексным линейным пространством. Здесь надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых.

Упражнения.

1) Рассмотрим множество всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций f и g как их произведение, а операцию умножения функции f на число α как возведение ее в степень α. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

2) Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$. Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

§ 3. Линейная зависимость векторов

1. Векторы a, b из линейного пространства $\mathbf{X}$ будем называть *коллинеарными* (*пропорциональными*, *линейно зависимыми*), если существуют числа α, β, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что в этом случае либо $a = \gamma b$, либо $b = \delta a$, где γ, δ — некоторые числа.

Примеры.

1) Единичные векторы i^k, i^l пространства $\mathbb{C}^n$ при $k \neq l$ неколлинеарны (докажите).

2) Векторы $x^1 = (1+i, 3, 2-i, 5)$, $x^2 = (2, 3-3i, 1-3i, 5-5i) \in \mathbb{C}^4$ пропорциональны, так как $2/(1+i) = (3-3i)/3 = (1-3i)/(2-i) = (5-5i)/5 = 1-i$.

2. В предыдущем пункте было введено понятие линейной зависимости двух векторов пространства $\mathbf{X}$. Обобщая это понятие, будем говорить, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ \ldots, a^m\}$, $m \geqslant 1$, *линейно зависима*, если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0. \tag{3.1}$$

Пример. Система векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

из пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависима, так как, положив

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 2,$$

получим

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Полезно отметить, что это не единственный набор коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4, при котором линейная комбинация $x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4$ обращается в нуль. Например,

$$2a^1 + a^2 - a^3 = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0,$$

$$3a^2 + a^3 - 2a^4 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ — упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$; для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m.$$

Можно сказать тогда, что векторы a^1, $a^2, \dots$, a^m *линейно зависимы*, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0.$$

Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{X}$ *линейно выражается* через векторы b^1, b^2, …, b^p, $p \geqslant 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \dots + x_p b^p, \tag{3.2}$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

Линейная комбинация векторов (3.2) называется *нетривиальной*, если хотя бы одно из чисел x_1, x_2, $\dots x_p$ отлично от нуля.

Упражнения.

1) Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

2) Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

3. Говорят, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно выражается* через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, если существует матрица $X(p,m)$ такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m). \tag{3.3}$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{j,k} b^j, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

3.1. Свойство *транзитивности*: если система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, а та, в свою очередь, — через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$, то система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$.

Действительно, по определению имеем

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_q Y(q,p).$$

Подставляя в первое из этих равенств выражение для $\mathcal{B}_p$, получим

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{C}_q Z(q,m),$$

где

$$Z(q,m) = Y(q,p)X(p,m).$$

3.2. Системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ и $\{b^i\}_{i=1}^p$ называются *эквивалентными*, если существуют матрицы $X(p,m)$, $Y(m,p)$ такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m,p), \tag{3.4}$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

Упражнение. Используя свойство транзитивности, показать, что если вектор $x \in \mathbf{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он линейно выражается и через эквивалентную ей систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$.

§ 4. Линейно независимые системы векторов

Будем говорить, что система векторов $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно независима*, если из равенства $\mathcal{A}_m x = 0$ вытекает, что $x = 0$.

Линейно независимые системы векторов существуют. Приведем простые примеры.

1) Любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора.

2) Единичные векторы i^1, i^2, $\ldots$, $i^m \in \mathbb{C}^n$, $m \leqslant n$, линейно независимы. Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^m$ вектор $x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

3) Система векторов $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\ldots$, $\varphi_k(z) = z^k$, где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима

в пространстве полиномов. Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что если полином равен нулю, то все его коэффициенты — нули (см. п. 4, с. 42).

Непосредственно из упражнения 1), с. 103 вытекает

Теорема 1. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов* $\{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно независима.*

Теорема 2. *Любая система* a^1, a^2, $\dots$, a^n, $b \in \mathbb{C}^n$ *из* $n+1$ *вектора линейно зависима.*

Доказательство. Пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно зависима. Тогда доказываемое утверждение верно. Если векторы $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно независимы, то система уравнений

$$Ax = b, \tag{4.1}$$

где A — матрица, столбцами которой являются компоненты векторов a^k, $k = 1, 2, \dots, n$, крамеровская, и потому имеет решение x при любой правой части b, значит,

$$x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = b,$$

т. е. система векторов a^1, a^2, $\dots$, a^n, b линейно зависима. □

Как очевидное следствие только что доказанного утверждения получаем, что любая система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^n$, $m > n$, линейно зависима.

Теорема 3. *Пусть система векторов* $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$ *пространства* $\mathbf{X}$ *линейно независима и линейно выражается через систему* $\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p$. *Тогда* $m \leqslant p$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $m > p$. По определению существует матрица X размера $p \times m$ такая, что $\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X$. Как следствие, для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ имеем $\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y$. Столбцы матрицы X — векторы из пространства $\mathbb{C}^p$. Их количество $m > p$, следовательно, они линейно зависимы. Поэтому существует вектор $y \in \mathbb{C}^m$, не равный нулю и такой, что $Xy = 0$, но тогда и $\mathcal{A}_m y = 0$, т. е. вопреки предположению векторы a^1, a^2, $\dots$, a^m линейно зависимы. □

Следствие 1. *Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют равные количества векторов.*

Теорема 4. *Пусть* $\{a^k\}_{k=1}^m$ *— линейно независимые векторы. Пусть система векторов* $\{b^k\}_{k=1}^m$ *линейно выражается через систему векторов* $\{a^k\}_{k=1}^m$, *т. е. существует квадратная матрица* X *по-*

рядка m такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.

Упражнение. Следуя рассуждениям пункта 3, доказать теорему 4.

Важно отметить, что матрица X, фигурирующая в теореме 4, однозначно определяется по системам векторов $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$. В самом деле, если существует матрица $\widetilde{X} \neq X$ такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m \widetilde{X}$, то $\mathcal{A}_m(\widetilde{X} - X) = 0$, но это вследствие линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_m$ невозможно, если $\widetilde{X} \neq X$.

§ 5. Ранг системы векторов

1. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}$ некоторую систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых векторов, называется *максимальной*, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе.

Пример. Рассмотрим систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. Векторы a^1, a^2, очевидно, линейно независимы и образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -6 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -15 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 \\ -2 & 9 & 7 \\ -0 & -15 & -15 \end{vmatrix},$$

составленные из компонент векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соответственно, равны нулю, и, следовательно, векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы.

Вообще говоря, система $\{a^i\}_{i=1}^m$ может содержать несколько максимальных линейно независимых подсистем, однако, справедлива

Теорема 1. *Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ содержат одно и то же количество векторов.*

Доказательство. Заметим, что из определения максимальной линейно независимой подсистемы непосредственно вытекает, что любой вектор из $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через векторы ее максимальной линейно независимой подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$. Вследствие очевидного равенства

$$a^{i_k} = a^{i_k} + \sum_{i=1, i\neq i_k}^{m} 0a^i$$

справедливо и обратное, т. е. система $\{a^i\}_{i=1}^m$ и любая ее максимальная линейно независимая подсистема эквивалентны. Но тогда, очевидно, эквивалентны и любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$. Отсюда в силу следствия 1, с. 105, вытекает, что любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ имеют равные количества векторов. $\square$

2. Полученный результат позволяет ввести следующее определение. *Рангом системы векторов* пространства $\mathbf{X}$ называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Например, ранг системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4, приведенной на с. 106, равен двум.

Количество линейно независимых векторов пространства $\mathbb{C}^n$ не превосходит n. Поэтому ранг любой системы векторов из $\mathbb{C}^n$ не превосходит n.

Ясно, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ любого линейного пространства $\mathbf{X}$ линейно независима тогда и только тогда, когда ее ранг равен m.

§ 6. Конечномерные линейные пространства. Базисы

1. Базисы в пространстве $\mathbb{C}^n$. Всякая линейно независимая система $\{e^k\}_{k=1}^n$ (состоящая из n векторов) называется *базисом* пространства $\mathbb{C}^n$. Единичные векторы $\{i^k\}_{k=1}^n$ образуют так называемый *естественный базис* пространства $\mathbb{C}^n$.

Из свойства 2 определителей (см. с. 34) вытекает, что для того, чтобы система $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ была базисом, необходимо и достаточно, чтобы матрица, столбцами которой служат векторы e^1, e^2, $\ldots$, e^n, была невырожденной.

При доказательстве теоремы 2, с. 105, было показано, что если $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{C}^n$, то любой вектор $x \in \mathbb{C}^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n. \tag{6.1}$$

Коэффициенты линейной комбинации (6.1) однозначно определяются по вектору x и удовлетворяют крамеровской системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n \xi = x. \tag{6.2}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — столбец коэффициентов разложения вектора x по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$.

2. Конечномерные пространства. Линейное пространство $\mathbf{X}$ называется *конечномерным*, если существуют векторы

$$\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}, \tag{6.3}$$

образующие линейно независимую систему в пространстве $\mathbf{X}$, и такие, что любой вектор $x \in \mathbf{X}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n. \tag{6.4}$$

Говорят в этом случае, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют *базис* пространства $\mathbf{X}$. Число n называют *размерностью* пространства $\mathbf{X}$. Линейное пространство $\mathbf{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbf{X}_n$. Коэффициенты разложения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называют *координатами* вектора x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

Координаты любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно определяются по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$. Действительно, пусть наряду с разложением (6.4) существует разложение $x = \mathcal{E}_n \tilde{\xi}$, тогда, очевидно, $\mathcal{E}_n(\xi - \tilde{\xi}) = 0$, откуда вследствие линейной независимости системы векторов $\{e^k\}_{k=1}^n$ получаем, что $\xi = \tilde{\xi}$.

Теорема 1. *В n-мерном линейном пространстве $\mathbf{X}_n$ любая система $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$, состоящая из n линейно независимых векторов, является базисом.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что любой вектор $x \in \mathbf{X}_n$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}. \tag{6.5}$$

По определению n-мерного пространства в нем существует базис $\mathcal{E}_n$. Следовательно, любой вектор из $\tilde{\mathcal{E}}_n$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}_n$, иными словами, существует квадратная матрица T порядка n такая, что $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$. Матрица T невырождена (см. п. 4, с. 105). Поскольку $\mathcal{E}_n$ — базис, существует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что $x = \mathcal{E}_n \xi$. Поскольку матрица T невырождена, можно найти вектор $\tilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$ такой, что $\xi = T\tilde{\xi}$. В результате, получим соотношение $x = \mathcal{E}_n T\tilde{\xi} = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}$ вида (6.5). $\square$

Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным.*

3. Приведем примеры конечномерных и бесконечномерных пространств.

1) Любые три некомпланарных вектора пространства $\mathbf{V}_3$ образуют базис. Пространство $\mathbf{V}_3$ трехмерно.

2) Пространства $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, очевидно, конечномерны. Их размерность равна n.

3) Пространство $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n конечномерно. Его размерность равна $n+1$. Базисом в пространстве полиномов степени не выше n является, например, система векторов $\{1, z, \ldots, z^n\}$, где z — комплексная переменная.

4) Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов $\{1, z, \ldots, z^k\}$ при любом, сколь угодно большом, целом k.

5) Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

§ 7. Замена базиса

1. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — базисы пространства $\mathbf{X}_n$. Как уже говорилось, $\mathcal{E}_n$, $\tilde{\mathcal{E}}_n$ — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы T, $\widetilde{T}$ порядка n такие, что

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T. \tag{7.1}$$

Матрицу T называют *матрицей перехода* от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$. Матрицы T и $\widetilde{T}$ взаимно обратны. Действительно, подставляя выражение для $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из второго равенства (7.1) в первое, получим, что $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T\widetilde{T}$. Отсюда вследствие линейной независимости векторов базиса вытекает (см. п. 4, с. 105), что

$$T\widetilde{T} = I. \tag{7.2}$$

Пусть известны коэффициенты ξ разложения некоторого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$, и пусть задана матрица перехода T к базису $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Получим формулу для вычисления коэффициентов $\tilde{\xi}$ разложения того же вектора x по базису $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. В соответствии с (6.4) имеем $x = \mathcal{E}_n\xi$, но $\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n\widetilde{T} = \widetilde{\mathcal{E}}_nT^{-1}$ (см. (7.1), (7.2)), следовательно, $x = \widetilde{\mathcal{E}}_nT^{-1}\xi$, а это означает, что

$$\tilde{\xi} = T^{-1}\xi. \tag{7.3}$$

Пример. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис в трехмерном пространстве $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned}
\tilde{e}^1 &= 5e^1 - e^2 - 2e^3,\\
\tilde{e}^2 &= 2e^1 + 3e^2,\\
\tilde{e}^3 &= -2e^1 + e^2 + e^3.
\end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T$, где $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3\}$, $\mathcal{E} = \{e^1, e^2, e^3\}$,

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det T = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

следовательно, матрица T невырождена. Поэтому векторы $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3$ также образуют базис пространства $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим вектор $a = e^1 + 4e^2 - e^3$. Координатами этого вектора в базисе $\mathcal{E}$ являются числа $\xi_1 = 1, \xi_2 = 4, \xi_3 = -1$, т. е. $a = \mathcal{E}\xi$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Найдем координаты того же вектора, но в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$. Вычислим матрицу T^{-1}. Получим

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -3\\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\tilde{\xi} = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -3\\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13\\ 6\\ -27 \end{pmatrix},$$

т. е. $a = -13\tilde{e}^1 + 6\tilde{e}^2 - 27\tilde{e}^3$. Мы нашли, таким образом, представление вектора a в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$.

2. Отметим, что в пространстве $\mathbf{X}_n$ существует сколько угодно базисов. Действительно, если $\mathcal{E}_n$ — базис, то система векторов $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_nT$, где T — произвольная невырожденная матрица, также является базисом (см. теорему 4, с. 105).

3. Приведем примеры часто используемых базисов в линейном пространстве полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n.

1) *Естественным базисом* в этом пространстве называют базис, составленный из степеней независимой переменной $\{1, z, \ldots, z^n\}$.

2) Как показано на с. 42, полиномы

$$\Phi_j(z) = \frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{j-1})(z-z_{j+1})\cdots(z-z_n)}{(z_j-z_0)(z_j-z_1)\cdots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\cdots(z_j-z_n)},$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, n$, где z_0, z_1, $\ldots$, z_n — произвольные попарно различные комплексные числа, также образуют базис в пространстве полиномов. Этот базис принято называть *базисом Лагранжа.*

3) Покажем, что полиномы

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) \equiv 1,\ \varphi_1(z) = (z-z_0),\ \varphi_2(z) = (z-z_0)(z-z_1),\ \ldots,&\\ \varphi_n(z) = (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}),&\end{aligned} \tag{7.4}$$

где z_0, z_1, $\ldots$, z_{n-1} — произвольные попарно различные числа, образуют базис. Как и в случае базиса Лагранжа, достаточно установить, что для z_0, z_1, $\ldots$, z_n, где z_n не совпадает ни с одним из чисел z_0, z_1, $\ldots$, z_{n-1}, система уравнений

$$c_0\varphi_0(z_j) + c_1\varphi_1(z_j) + \cdots + c_n\varphi_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{7.5}$$

имеет единственное решение при любых h_0, h_1, $\ldots h_n$, но это очевидно, так как система (7.5) треугольна:

$$\begin{aligned}&c_0 = h_0,\\ &c_0 + c_1(z_1-z_0) = h_1,\\ &c_0 + c_1(z_2-z_0) + c_2(z_2-z_0)(z_2-z_1) = h_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_0 + c_1(z_n-z_0) + \cdots + c_n(z_n-z_0)(z_n-z_1)\cdots(z_n-z_{n-1}) = h_n,\end{aligned} \tag{7.6}$$

причем коэффициенты, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Базис (7.4) называют *базисом Ньютона.*

Глава 5

Евклидовы пространства

Как уже говорилось, линейные пространства, изучавшиеся в предыдущей главе, по своим свойствам во многом аналогичны трехмерному пространству векторов $\mathbf{V}_3$ (направленных отрезков). Однако, такие важные понятия, как длина вектора, угол между векторами, в них отсутствуют. В трехмерном евклидовом пространстве, зная длины двух векторов и угол между ними, можно вычислить скалярное произведение векторов. Использование скалярного произведения позволяет решать многие геометрические задачи в трехмерном евклидовом пространстве. Для общих линейных пространств понятие скалярного произведения вводится аксиоматически, и на основе скалярного произведения определяются геометрические понятия, аналогичные случаю трехмерного евклидова пространства.

§ 1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

1. Вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) и при этом выполнены так называемые *аксиомы скалярного произведения* (соответствующие свойствам скалярного произведения векторов трехмерного евклидова пространства):

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4) $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Если на пространстве $\mathbb{R}^n$ введено скалярное произведение, то его называют *вещественным евклидовым пространством.*

Существует бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbb{R}^n$, например, можно положить

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Такое скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ называют *стандартным.* Проверка аксиом 1) – 3) для стандартного скалярного произведения не вызывает никаких затруднений.

Укажем еще целый класс скалярных произведений. Фиксируем n положительных чисел $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ и положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k. \tag{1.1}$$

Справедливость аксиом 1) – 3) очевидна. Меняя числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, получаем различные скалярные произведения.

Можно показать, что если определить *длину* (*модуль*) вектора x при помощи соотношения $|x| = \sqrt{(x, x)}$, то длина вектора из $\mathbb{R}^n$ будет обладать свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно[1]:

1) $|x| \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, равенство $|x| = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* (*неравенством Минковского*[2]).

Важно понимать, что, определяя различными способами скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$, мы получаем различные вещественные евклидовы пространства.

Пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением часто называют *n-мерным арифметическим пространством.* Это пространство играет важную роль во многих разделах математики. Например, оно систематически используется в математическом анализе при изучении функций многих вещественных переменных.

2. Комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$. Будем говорить, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $x, y \in \mathbb{C}^n$ поставлено в соответствие число (x, y), вообще говоря, комплексное, и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

---

[1] Обоснование неравенства 3) проведено в п. 2 на с. 117.

[2] Герман Минковский (Hermann Minkowski; 1864 — 1909) — немецкий математик.

1) $(x,x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$, равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$, напомним, что черта означает переход к комплексно сопряженному числу, и отметим, что в отличие от вещественного евклидова пространства скалярное произведение в комплексном пространстве некоммутативно;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Если на пространстве $\mathbb{C}^n$ введено скалярное произведение, то его называют *комплексным евклидовым пространством* (часто говорят также: *унитарное пространство*).

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbb{C}^n$, например, можно положить

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k.$$

Такое скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$ называют *стандартным.* Проверка аксиом 1)–3) не вызывает никаких затруднений. На $\mathbb{C}^n$ также можно ввести скалярное произведение, аналогичное (1.1).

Длину (*модуль*) вектора x определяют при помощи соотношения $|x| = \sqrt{(x,x)}$. При этом выполняются свойства 1)–3), с. 113.

§ 2. Общие евклидовы пространства

1. Определения, примеры. Будем говорить, что на вещественном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие вещественное число (x,y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3) с. 112. Если на линейном вещественном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством.*

Говорят, что на комплексном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие, вообще говоря, комплексное число (x,y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3), с. 114. Если на линейном комплексном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *комплексным евклидовым* (*унитарным*) *пространством.*

Упражнение. Проверить, что в рассматриваемых ниже примерах аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Множество всех векторов трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением — вещественное евклидово пространство.

2) Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $C[a, b]$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f и g пространства $C[a, b]$ по формуле

$$(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx. \tag{2.1}$$

3) Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \bar{b}_j,$$

где ρ_0, ρ_1, ..., ρ_n — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbf{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством.

2. Любое конечномерное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ можно превратить в евклидово пространство. Действительно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e^k$ — элементы пространства $\mathbf{X}_n$. Примем в качестве скалярного произведения элементов x, y величину

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \bar{\eta}_k. \tag{2.2}$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

§ 3. Неравенство Коши — Буняковского

1. Тождество Пифагора[1]. Пусть a, b — векторы трехмерного евклидова пространства $\mathbf{V}_3$, причем векторы $a-b$ и b ортогональны, т. е. $(a-b,b)=0$[2]. Тогда по теореме Пифагора

$$|a|^2 = |a-b|^2 + |b|^2. \tag{3.1}$$

Пусть теперь a, b — векторы произвольного евклидова пространства $\mathbf{X}$ такие, что $(a-b,b)=0$. Тождество (3.1) (*тождество Пифагора*) справедливо и в этом случае, если положить, что $|v| = \sqrt{(v,v)}$ для любого вектора $v \in \mathbf{X}$. Действительно, проводя элементарные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned}|a|^2 = (a,a) = (a-b+b,a-b+b) = \\ = (a-b,a-b) + (b,b) + (a-b,b) + (b,a-b) = \\ = (a-b,a-b) + (b,b) + (a-b,b) + \overline{(a-b,b)} = \\ = (a-b,a-b) + (b,b) = |a-b|^2 + |b|^2.\end{aligned}$$

Теорема 1 (Коши — Буняковского). *Пусть $\mathbf{X}$ — евклидово пространство. Для любых векторов $x,y \in \mathbf{X}$ справедливо неравенство*

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y). \tag{3.2}$$

Равенство в (3.2) достигается тогда и только тогда, когда векторы x,y пропорциональны.

Неравенство (3.2) обычно называют неравенством Коши — Шварца

Доказательство. Если $y=0$, то неравенство (3.2) превращается в тривиальное равенство, и при любом $x \in \mathbf{X}$ векторы x, y пропорциональны, так как $0x+y=0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $y \neq 0$. Положим $e = |y|^{-1}y$. Очевидно, что $(e,e)=1$, а $(x-(x,e)e,(x,e)e)=0$, значит, в тождестве (3.1) можно положить $a=x$, $b=(x,e)e$ и получить, что $|x|^2 = |x-(x,e)e|^2 + |(x,e)|^2$. Отсюда следует, что $|x|^2 \geqslant |(x,e)|^2$. Последнее неравенство эквивалентно (3.2). Пусть $|x|^2 = |(x,e)|^2$, т. е. неравенство (3.2) превращается в равенство. Тогда $|x-(x,e)e|^2=0$, откуда вытекает,

[1] Пифагор Самосский (570 — 490 гг. до н. э.) — древнегреческий философ и математик.

[2] Можно сказать, что вектор b получен проектированием вектора a на прямую, параллельную вектору b.

что $x = (x, e)e$, или $x = ((x, y)/|y|^2)y$, следовательно, векторы x, y пропорциональны. Обратно, если векторы x, y пропорциональны, то, как нетрудно убедиться, левая и правая части (3.2) совпадают. $\square$

2. Величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора x. Неравенство (3.2) часто записывают в виде

$$|(x, y)| \leqslant |x||y| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}. \tag{3.3}$$

Введенное понятие длины обладает свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно:

1) $|x| \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbf{X}$, равенство $|x| = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$.

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* (*неравенством Минковского*).

Справедливость утверждений 1), 2) очевидна. Покажем, что неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши — Шварца. В самом деле,

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = |x|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + |y|^2.$$

Вследствие (3.3) справедливо неравенство $|\mathrm{Re}(x, y)| \leqslant |x||y|$, откуда получаем, что

$$|x + y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству 3).

3. По аналогии с трехмерным евклидовым пространством $\mathbf{V}_3$ векторы x, y естественно называть *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Пример. Векторы i^k, $i^l \in \mathbb{C}^n$ при $k \neq l$ ортогональны относительно стандартного скалярного произведения.

Из неравенства (3.3) вытекает, что если $\mathbf{X}$ — вещественное евклидово пространство, то $(x, y)/|x||y| \in [-1, 1]$ для любых не равных нулю векторов $x, y \in \mathbf{X}$. Это дает возможность ввести понятие *угла между векторами* x, y, а именно, принимают, что косинус этого угла равен $(x, y)/|x||y|$.

§ 4. Матрица Грама

Пусть $\{a^i\}_{i=1}^m$ — система векторов евклидова пространства $\mathbf{X}$. Построим квадратную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \dots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \dots & (a^m, a^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \dots & (a^m, a^m) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

порядка m. Матрица G называется *матрицей Грама*[1] системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$.

Отметим, что поскольку $(a^k, a^l) = \overline{(a^l, a^k)}$, то матрица Грама любой системы векторов — эрмитова матрица (см. с. 62).

Теорема 1. *Для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной.*

Доказательство. Пусть матрица Грама G невырождена. Тогда система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима. Действительно, если

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0,$$

то

$$(x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Записывая эти равенства более подробно, получаем

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \dots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{4.2}$$

Система (4.2) — однородная система уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_m с матрицей G. Поскольку матрица Грама G невырождена, система имеет только тривиальное решение, следовательно, x_1, x_2, $\dots$, $x_m = 0$. Обратно, пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима. Составим линейную комбинацию столбцов матрицы G с некоторым коэффициентами x_1, x_2, $\dots$, x_m. Приравнивая эту линейную комбинацию нулю, получим

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \dots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{4.3}$$

Умножим почленно равенство с номером k на $\overline{x}_k$, затем сложим почленно полученные равенства. После элементарных преобразований сможем написать, что

$$\left(\sum_{k=1}^m x_k a^k, \sum_{k=1}^m x_k a^k \right) = 0,$$

[1] Йорген Педерсен Грам (Jorgen Pedersen Gram; 1850 — 1916) — датский математик.

следовательно,
$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0. \tag{4.4}$$
Поскольку система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима, то из (4.4) вытекает, что $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m = 0$. Таким образом, мы получили, что если линейная комбинация столбцов матрицы G обращается в нуль, то все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Это означает, что столбцы матрицы G линейно независимы, т. е. матрица G невырождена. $\square$

Пример. Исследуем на линейную зависимость векторы
$$x^1 = (1,3,3,1,-2), \quad x^2 = (3,3,1,-3,2), \quad x^3 = (1,3,-1,1,3)$$
пространства $\mathbb{R}^5$. Введем на этом пространстве стандартное скалярное произведение и составим матрицу Грама третьего порядка $G = \{(x^i, x^j)\}_{i,j=1}^3$. Выполняя элементарные вычисления, получим
$$G = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 2 \\ 8 & 32 & 14 \\ 2 & 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad \det(G) = 2^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 0 & -40 & -125 \\ 0 & -\ 6 & -\ 35 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot 650,$$
т. е. векторы x^1, x^2, x^3 линейно независимы.

§ 5. Ортогональные системы векторов

1. Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортогональной*, если все векторы a^i, $i = 1, 2, \dots, m$, не нули и $(a^i, a^k) = 0$ при $i \neq k$.

Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Очевидно, ортогональная система линейно независима.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если $(a^i, a^k) = \delta_{ik}$ для $i, k = 1, 2, \dots, m$.

Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

2. Матрица T перехода от любого ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ к другому ортонормированному базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ является унитарной. В самом деле, записывая равенство
$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T \tag{5.1}$$
более подробно, получим $\tilde{e}^k = \sum\limits_{j=1}^n t_{jk} e^j$, $k = 1, 2, \dots, n$. Вследствие ортонормированности базиса $\tilde{\mathcal{E}}_n$ отсюда получаем, что
$$\left(\sum_{j=1}^n t_{jk} e^j, \sum_{j=1}^n t_{jl} e^j \right) = (\tilde{e}^k, \tilde{e}^l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Преобразуя левую часть последнего равенства с учетом ортонормированности базиса $\mathcal{E}_n$, будем иметь, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jk}\bar{t}_{jl} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

а это и означает, что матрица T унитарна (см. с. 63).

Важно отметить, что, как следует из только что выполненных выкладок, справедливо и обратное утверждение, а именно, если базис $\mathcal{E}_n$ ортонормирован, а матрица T унитарна, то базис $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$ также ортонормирован.

§ 6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

Теорема 1 (Грам — Шмидт[1]). *Всякая линейно независимая система $\{a^i\}_{i=1}^m$ эквивалентна некоторой ортонормированной системе $\{b^i\}_{i=1}^m$, причем вектор b^1 можно выбрать пропорциональным вектору a^1.*

Доказательство. Положим $h^1 = a^1$, $h^2 = x_{2,1}h^1 + a^2$. Вектор h^1 не нуль, поскольку вектор a^1 как элемент линейно независимой системы не нуль. При любом значении $x_{2,1}$ вектор h^2 также не нуль, поскольку h^2 — линейная комбинация линейно независимых векторов, причем один из коэффициентов этой линейной комбинации не равен нулю (он равен единице). Выберем теперь число $x_{2,1}$ так, чтобы вектор h^2 был ортогонален вектору h^1. Записывая это условие, получим $0 = x_{2,1}(h^1, h^1) + (a^2, h^1)$, откуда $x_{2,1} = -(a^2, h^1)/(h^1, h^1)$. Итак, построены векторы h^1, h^2 такие, что $(h^1, h^2) = 0$, h^1, $h^2 \neq 0$. Предположим теперь, что построены векторы h^1, h^2, $\ldots$, h^k такие, что h^1, h^2, $\ldots$, $h^k \neq 0$ и $(h^i, h^j) = 0$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$. Будем разыскивать вектор h^{k+1} в виде

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1}. \qquad (6.1)$$

При любых значениях коэффициентов $x_{k+1,1}$, $\ldots$, $x_{k+1,k}$ вектор h^{k+1} не нуль. В самом деле, по построению векторы h^1, h^2, $\ldots$, h^k линейно выражаются через векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$, причем так, что в выражение для вектора h^j входят векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ с номерами, не превосходящими j. Отсюда вытекает, что вектор h^{k+1} есть линейная комбинация линейно независимых векторов a^1, a^2, $\ldots$, a^{k+1},

[1] Эрхард Шмидт (Erhard Schmidt; 1876 — 1959) — немецкий математик.

причем вектор a^{k+1} входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом, равным единице.

Выберем числа $x_{k+1,1}$, $x_{k+1,2}$, $\ldots$, $x_{k+1,k}$ так, чтобы вектор h^{k+1} был ортогонален уже построенным векторам h^1, h^2, $\ldots$, h^k. Последовательно выполняя эти условия, найдем $x_{k+1,1} = -(a^{k+1}, h^1)/(h^1, h^1)$, $x_{k+1,2} = -(a^{k+1}, h^2)/(h^2, h^2)$, $\ldots$, $x_{k+1,k} = -(a^{k+1}, h^k)/(h^k, h^k)$.

Продолжая описанный процесс, построим ортогональную систему ненулевых векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$. Полагая затем

$$b^i = (|h^i|)^{-1} h^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.2}$$

получим ортонормированную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^m$.

Как было установлено выше, система векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Формула (6.1) показывает, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$, формула (6.2) показывает, что системы $\{b^i\}_{i=1}^m$, $\{h^i\}_{i=1}^m$ эквивалентны. Таким образом, все три рассматриваемые системы векторов попарно эквивалентны.

Заметим, наконец, что векторы a^1, b^1 пропорциональны, так как по построению $b^1 = (|a^1|)^{-1} a^1$. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 1 конструктивно. Оно содержит описание способа построения по любой линейно независимой системе эквивалентной ортонормированной системы. Этот метод называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта.* Следует, однако, иметь в виду, что в вычислительной практике процесс ортогонализации Грама — Шмидта используется очень редко, так как обычно он подвержен сильному влиянию погрешностей округления.

Пример. Даны полиномы $Q_0(x) \equiv 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построим полиномы P_0, P_1, P_2 нулевой первой и второй степени соответственно, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Проводя вычисления в соответствии с методом Грама — Шмидта, получим $\tilde{P}_0 = Q_0 \equiv 1$,

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) - \tilde{P}_0(x) \int_{-1}^{1} Q_1(x) \tilde{P}_0 dx \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} = x,$$

$$\tilde{P}_2(x) = Q_2(x) - \tilde{P}_0(x) \int_{-1}^{1} Q_2(x) \tilde{P}_0 dx \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} -$$

$$- \tilde{P}_1(x) \int_{-1}^{1} Q_2(x)\tilde{P}_1 dx \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2(x)dx \right)^{-1} = x^2 - 1/3,$$

$$P_0(x) = \tilde{P}_0(x) \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x)dx \right)^{-1/2} = 1/\sqrt{2}, \quad P_1(x) = \tilde{P}_1(x) \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2(x)dx \right)^{-1/2} = x\sqrt{3/2},$$

$$P_2(x) = \tilde{P}_2(x) \left(\int_{-1}^{1} \tilde{P}_2^2(x)dx \right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Аналогично можно строить полиномы более высоких степеней $P_3(x), \ \dots, \ P_n(x)$, применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта к полиномам $1, x, x^2, \dots, x^n$ при произвольном целом положительном n. Полиномы $P_0(x), P_1(x), \ \dots, P_n(x), \ \dots$ называют *полиномами Лежандра*[1)]. Справедлива так называемая *формула Родрига*[2)]

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{k!2^k} \frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{6.3}$$

Упражнение. Используя формулу Родрига и формулу интегрирования по частям, показать, что

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = 0 \quad \text{при} \ \ k \neq l, \ k, l = 0, 1, 2, \dots \tag{6.4}$$

Пусть e — произвольный ненулевой вектор евклидова пространства $\mathbf{X}_n$, $n > 1$. Понятно, что существует некоторый вектор f_2, непропорциональный e, затем можно указать вектор f_3 так, чтобы векторы $e, \ f_2, \ f_3$ были линейно независимы. Продолжая этот процесс, получим базис пространства $\mathbf{X}_n$, включающий в себя вектор e. Применяя затем процесс ортогонализации Грама — Шмидта, можно построить ортогональный базис пространства $\mathbf{X}_n$, содержащий вектор, коллинеарный вектору e.

§ 7. Разложение вектора по базису евклидова пространства

В евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$ вычисление коэффициентов разложения вектора $x \in \mathbf{X}_n$ по любому базису $\{e^k\}_{k=1}^n$ можно свести к решению крамеровской системы линейных алгебраических уравнений с эрмитовой матрицей. Действительно, умножим обе части равенства

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n = x$$

1) Адриен Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre; 1752 — 1833) — французский математик.

2) Бенжамен Оленд Родриг (Benjamin Olinde Rodrigues; 1794 — 1851) — французский математик.

скалярно на вектор e^1, затем на вектор e^2 и т. д. и, наконец, на вектор e^n. Получим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
(e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \dots + (e^n, e^1)\xi_n = (x, e^1),\\
(e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \dots + (e^n, e^2)\xi_n = (x, e^2),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \dots + (e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),
\end{gathered}
$$

матрицей которой служит матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$. Наиболее просто эта система решается в случае, когда базис ортогонален, т. е. когда матрица Грама диагональна. В этом случае получаем

$$\xi_k = (x, e^k)/(e^k, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{7.1}$$

Коэффициенты (7.1) называются *коэффициентами Фурье*[1)] вектора x относительно ортогональной системы $\{e^k\}_{k=1}^n$. Отметим, что если базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, то для любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e^k) e^k. \tag{7.2}$$

§ 8. Вычисление скалярного произведения

1. Пусть x, y — векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$, и пусть известны векторы ξ, $\eta \in \mathbb{C}^n$ коэффициентов разложений x, y по базису $\mathcal{E}_n$, т. е. $x = \mathcal{E}_n \xi$, $y = \mathcal{E}_n \eta$. Тогда

$$(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^k \Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k, e^l) = (G\xi, \eta), \tag{8.1}$$

где G — матрица Грама базиса $\mathcal{E}_n$, а скобками в правой части равенства обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$. Следовательно, для вычисления скалярного произведения (x, y) достаточно знать коэффициенты разложения векторов x, y по базису и матрицу Грама этого базиса.

[1)] Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768 — 1830) — французский математик и физик.

2. В случае, когда базис ортонормирован, получаем

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k. \tag{8.2}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

§ 9. Взаимный базис

Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Нетрудно убедиться, что уравнения

$$(\tilde{e}^i, e^j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.1}$$

однозначно определяют линейно независимые векторы $\tilde{e}^1$, $\tilde{e}^1$, …, $\tilde{e}^n$. Базис $\mathcal{E}_n$ принято называть *основным*, а базис $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — *взаимным*. Понятно, что основной и взаимный базисы совпадают тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис.

Пусть G — матрица Грама базиса $\mathcal{E}_n$, а $\widetilde{G}$ — матрица Грама базиса $\tilde{\mathcal{E}}_n$. Элементарно проверяется справедливость следующих равенств: $\mathcal{E}_n = G\tilde{\mathcal{E}}_n$, $\tilde{\mathcal{E}}_n = \widetilde{G}\mathcal{E}_n$, откуда вытекает, что $\widetilde{G} = G^{-1}$. Пусть, далее, $x = \mathcal{E}_n\xi$, $y = \tilde{\mathcal{E}}_n\tilde{\eta}$. Тогда $\xi_k = (x, \tilde{e}^k)$, $\tilde{\eta}_k = (y, e^k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \bar{\tilde{\eta}}_k$. Числа ξ_1, ξ_2, …, ξ_n принято называть *контравариантными* компонентами вектора x, числа $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$, …, $\tilde{\eta}_n$ — *ковариантными* компонентами вектора y.

§ 10. Примеры ортогональных базисов

1. Примеры ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}^n$.

1) Естественный базис $\{i^k\}_{k=1}^n$. Он ортонормирован относительно стандартного скалярного произведения (докажите!).

2) *Базис Фурье.* Нам удобно будет нумеровать сейчас компоненты вектора и базисные векторы от 0 до $n-1$. Пусть

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

есть корни степени k из единицы, i — мнимая единица (см. § 6, гл. 1). Введем в рассмотрение систему векторов $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, компоненты которых вычисляются по формулам

$$\varphi_j^k = q_k^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{10.1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Покажем, что векторы $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$ образуют ортогональную систему относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{C}^n$. Заметим прежде всего, что $q_k = q_1^k$, $\overline{q}_k = q_1^{-k}$. Поэтому, вычисляя скалярное произведение (φ^k, φ^l), получим

$$(\varphi^k, \varphi^l) = \sum_{j=0}^{n-1} q_1^{(k-l)j} = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \cdots + (q_1^p)^{n-1}, \tag{10.2}$$

где $p = k - l$. При $k = l$, т. е. при $p = 0$, справедливо равенство $(\varphi^k, \varphi^k) = n$. Если $p \neq 0$, то сумма в правой части (10.2) есть геометрическая прогрессия со знаменателем q_1^p. Причем, поскольку $|p| = |k-l| < n$, то $q_1^p \neq 1$. Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} (q_1^p)^j = \frac{(q_1^p)^n - 1}{q_1^p - 1}, \tag{10.3}$$

но $(q_1^n)^p = q_1^{pn} = 1$, следовательно, $(\varphi^k, \varphi^l) = 0$ при $k \neq l$.

Коэффициенты Фурье ξ разложения любого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ по базису (10.1),

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k q_k^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{10.4}$$

в соответствии с (7.1) вычисляются, таким образом, по формулам

$$\xi_k = (x, \varphi_k)/(\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j q_k^{-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10.5}$$

Базис $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$ принято называть *базисом Фурье*. Он широко используется, например, при цифровой обработке сигналов (звуковых, видео).

В реальных задачах n (это длина обрабатываемого сигнала) велико, в связи с чем используются специальные приемы экономного вычисления сумм вида (10.4), (10.5), называемые алгоритмами быстрого дискретного преобразования Фурье (FFT, Fast Fourier Transformation).

2. Примеры ортогональных базисов в пространстве $\mathbf{P}_n$ полиномов с вещественными коэффициентами. Рассматривается множество всех полиномов вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, где коэффициенты a_0, a_0, $\ldots$, a_n — произвольные вещественные числа, x может принимать произвольные вещественные значения, $n \geqslant 0$ — фиксированное целое число. Очевидно, что указанное множество полиномов есть вещественное линейное пространство, если понимать операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число обычным образом.

2.1. Полиномы Лежандра. Определим в пространстве $\mathbf{P}_n$ скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f, g \in \mathbf{P}_n. \tag{10.6}$$

Тогда полиномы Лежандра P_0, P_1, $\ldots$, P_n (см. (6.3), (6.4), с. 122) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbf{P}_n$.

2.2. Полиномы Чебышева[1)]. Определим теперь скалярное произведение в пространстве $\mathbf{P}_n$ при помощи соотношения

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \forall\, f, g \in \mathbf{P}_n. \tag{10.7}$$

Введем в рассмотрение *полиномы Чебышева.* Так называют полиномы, вычисляемые при помощи следующих рекуррентных формул:

$$T_0(x) \equiv 1,\ T_1(x) = x, \tag{10.8}$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x),\ k = 1, 2, \ldots \tag{10.9}$$

Здесь k — степень полинома.

Нам потребуется явная формула для полиномов Чебышева. Будем разыскивать значение $T_k(x)$ в виде $T_k(x) = \lambda^k$. Используя это представление в рекуррентной формуле (10.9), получим

$$\lambda^{k+1} = 2x\lambda^k - \lambda^{k-1},$$

откуда, предполагая, что $\lambda \neq 0$, приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$$

[1)]Пафнутий Львович Чебышев (произносится как «Чебышёв»; 1821 — 1894) — русский математик и механик.

для определения λ. Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

поэтому функции $T_k^{(1)}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^k$, $T_k^{(2)}(x) = (x - \sqrt{x^2 - 1})^k$, а следовательно, и функции

$$T_k(x) = c_1 T_k^{(1)}(x) + c_2 T_k^{(2)}(x),$$

$k = 0, 1, \ldots,$ где c_1, c_2 — произвольные постоянные, удовлетворяют рекуррентному соотношению (10.9). Выберем c_1, c_2 так, чтобы были выполнены условия (10.8):

$$c_1 + c_2 = 1,$$
$$(c_1 + c_2)x + (c_1 - c_2)\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

Отсюда получаем $c_1 = c_2 = 1/2$, т. е. полиномы

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.10}$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению (10.9) и условиям (10.8). При $|x| \leqslant 1$ полиномам Чебышева можно придать более компактный вид. Положим в этом случае $x = \cos\varphi$. Тогда

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^k + \frac{1}{2}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)^k,$$

откуда, используя формулу Муавра (см. (1.23), с. 14), получим, что $T_k(x) = \cos k\varphi$, или

$$T_k(x) = \cos(k\arccos x). \tag{10.11}$$

Полиномы Чебышева ортогональны в смысле скалярного произведения (10.7). Действительно, используя представление (10.11), можем написать, что

$$(T_k, T_l) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(k\arccos x)\cos(l\arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Полагая $x = \cos\varphi$, нетрудно подсчитать, что при $k \neq l$

$$(T_k, T_l) = \int\limits_0^{\pi} \cos k\varphi \cos l\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (\cos(k + l)\varphi + \cos(k - l)\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Таким образом, полиномы Чебышева T_0, T_1, $\ldots$, T_n образуют ортогональный базис в смысле скалярного произведения (10.7) в пространстве $\mathbf{P}_n$ полиномов с вещественными коэффициентами.

Глава 6

Подпространства

§ 1. Сумма и пересечение подпространств

1. Множество L векторов линейного пространства $\mathbf{X}$ называется *подпространством*, если из того, что векторы x, y принадлежат L, вытекает, что вектор $\alpha x + \beta y$ при любых комплексных числах α, β также принадлежит множеству L.

Тривиальные примеры подпространств: все пространство $\mathbf{X}$ является подпространством; множество, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством.

Поскольку по определению наряду с вектором x подпространству должен принадлежать и вектор $0x$, то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

Упражнения.

1) Пусть a^1, a^2, $\ldots$, a^m, $m \geqslant 1$, — произвольным образом фиксированные векторы пространства $\mathbf{X}$. Докажите, что множество всех линейных комбинаций $x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m$ — подпространство. Говорят, что это подпространство *натянуто на векторы* a^1, a^2, $\ldots$, a^m.

2) Пусть a^1, a^2 — векторы пространства $\mathbf{X}$, причем $a_2 \neq 0$. Множество L векторов вида $a^1 + \alpha a^2$, где α пробегает множество всех комплексных чисел, называется *прямой*, проходящей через точку a^1 в направлении вектора a^2. Показать, что множество L является подпространством тогда и только тогда, когда векторы a^1, a^2 линейно зависимы.

2. Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства $\mathbf{X}$. Множество L всех векторов вида $a^1 + a^2$, где $a^1 \in L_1$, $a^2 \in L_2$, называется *суммой подпространств* L_1, L_2. Используют обозначение: $L = L_1 + L_2$.

Так определенное множество L — подпространство. Действительно, пусть векторы x, $y \in L$. Это означает, что существуют векторы a^1, $b^1 \in L_1$, a^2, $b^2 \in L_2$ такие, что $x = a^1 + a^2$, $y = b^1 + b^2$. Пусть α, β — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\alpha x + \beta y = \alpha(a^1 + a^2) + \beta(b^1 + b^2) = (\alpha a^1 + \beta b^1) + (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Поскольку L_1 — подпространство, вектор $\alpha a^1 + \beta b^1$ принадлежит L_1. Точно так же, вектор $\alpha a^2 + \beta b^2$ принадлежит L_2, следовательно, вектор $\alpha x + \beta y$ принадлежит L.

3. *Пересечение подпространств* L_1, L_2, т. е. множество всех векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2, также является подпространством. Действительно, пусть векторы $x, y \in L_1 \cap L_2$. Для любого комплексного числа α вектор αx принадлежит как L_1, так и L_2, т. е. $\alpha x \in L_1 \cap L_2$. Аналогично, для любого β вектор $\beta y \in L_1 \cap L_2$, но тогда, очевидно, и $\alpha x + \beta y \in L_1 \cap L_2$.

4. Система векторов $\{e^k\}_{k=1}^m \subset L$ называется *базисом подпространства* L, если она линейно независима и любой вектор $x \in L$ представим в виде линейной комбинации векторов из $\{e^k\}_{k=1}^m$. Число m при этом будем называть *размерностью подпространства.* Размерность подпространства L обозначают через $\dim(L)$.

Подпространству, состоящему только из нулевого вектора, будем приписывать размерность, равную нулю. Это подпространство будем обозначать через $\{0\}$ и называть *нулевым подпространством.*

Упражнение. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства $\mathbf{V}_3$.

5. Для того, чтобы подпространство L конечномерного пространства $\mathbf{X}_n$ совпадало с $\mathbf{X}_n$, необходимо и достаточно выполнения равенства $\dim(L) = n$. Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что любые n линейно независимых векторов пространства $\mathbf{X}_n$ образуют его базис (см. теорему 1, с. 108).

6. Очевидно, что базис $\{e^k\}_{k=1}^m$ любого подпространства L из $\mathbf{X}_n$ можно дополнить до базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ всего пространства $\mathbf{X}_n$. Точно так же, если L_1 и L_2 — подпространства и $L_1 \subset L_2$, то $\dim(L_1) \leqslant \dim(L_2)$, и базис подпространства L_1 можно дополнить до базиса подпространства L_2.

7. Сумма подпространств L_1 и L_2 называется *прямой*, если для любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ его составляющие $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Прямая сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается через $L_1 \dotplus L_2$.

Теорема 1. *Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства*

$$x^1 + x^2 = 0$$

для $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.

Доказательство. Пусть из равенства $x^1 + x^2 = 0$ для $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ следует, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Покажем, что тогда для любого $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ составляющие $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Предположим, что существует еще одно разложение вектора x, т. е. $x = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$, $\tilde{x}_1 \in L_1$, $\tilde{x}_2 \in L_2$. Тогда, очевидно, $(x^1 - \tilde{x}^1) + (x^2 - \tilde{x}^2) = 0$. Поскольку $x^1 - \tilde{x}^1 \in L_1$, $x^2 - \tilde{x}^2 \in L_2$, то $x^1 - \tilde{x}^1 = 0$, $x^2 - \tilde{x}^2 = 0$, следовательно, $x^1 = \tilde{x}^1$, $x^2 = \tilde{x}^2$. Обратно, пусть составляющие любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ определяются однозначно, и пусть $x^1 + x^2 = 0$ для каких-то $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$. Поскольку $0 + 0 = 0$, то отсюда вытекает, что $x^1 = x^2 = 0$. $\square$

Теорема 2. *Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, $x^1 + x^2 = 0$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$. Поскольку $x^1 = -x^2$, то $x^1 \in L_2$, значит, $x^1 \in L_1 \cap L_2$, следовательно, $x^1 = 0$, но тогда, очевидно, и $x^2 = 0$. Обратно, пусть $x \in L_1 \cap L_2$. Тогда $x \in L_1$, $x \in L_2$, кроме того, очевидно, $x + (-x) = 0$, а так как сумма L_1 и L_2 прямая, то вследствие теоремы 1 получаем, что $x = 0$, следовательно, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. $\square$

Упражнение. Пусть L — произвольное подпространство конечномерного линейного пространства $\mathbf{X}_n$. Докажите, что существует подпространство $M \subset \mathbf{X}_n$ такое, что $\mathbf{X}_n = L \dotplus M$.

8. Будем говорить, что подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства *ортогональны* (пишут $L_1 \perp L_2$), если $(x, y) = 0$ для всех $x \in L_1$, $y \in L_2$. Сумму ортогональных подпространств будем называть *ортогональной* и обозначать через $L_1 \oplus L_2$.

Ортогональная сумма является прямой. В самом деле, пусть $L_1 \perp L_2$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ и $x^1 + x^2 = 0$. В силу ортогональности x^1, x^2, очевидно, $|x^1 + x^2|^2 = |x^1|^2 + |x^2|^2$, поэтому $|x^1|^2 + |x^2|^2 = 0$, следовательно, $x^1 = x^2 = 0$.

9. Понятия прямой и ортогональной сумм естественным образом переносятся на случай любого конечного числа подпространств. Так, сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$ называется ортогональной, если она есть множество всех элементов вида $x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k$, $x^j \in L_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и $L_i \perp L_j$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Теорема 1 легко обобщается на случай любого конечного числа подпространств.

Упражнения.

1) Покажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой, т. е. составляющие $x^j \in L_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяются по любому x однозначно.

2) Верно ли утверждение: сумма подпространств $L_1+L_2+\cdots+L_k$, $k>2$, является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

§ 2. Размерность суммы подпространств

Теорема 1. *Пусть* $L=L_1\dot{+}L_2\dot{+}\cdots\dot{+}L_k$ *— прямая сумма конечномерных подпространств* L_1, $L_2, \dots, L_k$ *линейного пространства* $\mathbf{X}$. *Тогда*

$$\dim(L)=\dim(L_1)+\dim(L_2)+\cdots+\dim(L_k). \tag{2.1}$$

Доказательство. Проведем его для случая $k=2$. Для произвольного k рассуждения полностью аналогичны. Пусть

$$f^1, f^2, \dots, f^p; \quad g^1, g^2, \dots, g^q \tag{2.2}$$

есть базисы подпространств L_1 и L_2, соответственно. Тогда объединение этих систем векторов есть базис подпространства $L_1\dot{+}L_2$. Действительно, для любого $x\in L_1\dot{+}L_2$ справедливо представление $x=x^1+x^2$, где

$$x^1=\alpha_1 f^1+\alpha_2 f^2+\cdots+\alpha_p f^p\in L_1, \quad x^2=\beta_1 g^1+\beta_2 g^2+\cdots+\beta_q g^q\in L_2,$$

причем, если $x=0$, то $x^1=0$, $x^2=0$, поскольку сумма $L_1\dot{+}L_2$ прямая. Вследствие того, что $\{f^k\}_{k=1}^p$, $\{g^k\}_{k=1}^q$ — базисы, отсюда вытекает, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ — нули. Таким образом, система векторов (2.2) линейно независима. Теперь совершенно ясно, что $\dim(L_1\dot{+}L_2)= p+q$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* L_1, L_2 *— произвольные конечномерные подпространства линейного пространства* $\mathbf{X}$. *Тогда*

$$\dim(L_1+L_2)=\dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пространство $G=L_1\cap L_2$, очевидно, конечномерно. Пусть $\mathcal{G}_l=\{g^i\}_{i=1}^l$ — базис G, и пусть векторы $\mathcal{F}_k=\{f^i\}_{i=1}^k$ дополняют его до базиса пространства L_1, а векторы $\mathcal{H}_m=\{h^i\}_{i=1}^m$ — до базиса пространства L_2. Обозначим через F подпространство пространства $\mathbf{X}$, натянутое на векторы $\mathcal{F}_k$, а через H — натянутое на векторы $\mathcal{H}_m$. Покажем, что

$$L_1+L_2=F+G+H. \tag{2.4}$$

Действительно, если $x\in L_1+L_2$, то $x=x^1+x^2$, где $x^1\in L_1$, $x^2\in L_2$. Ясно, что $x^1=f+g^-$, $x^2=h+g^+$, где $f\in F$, $h\in H$, $g^+, g^-\in G$,

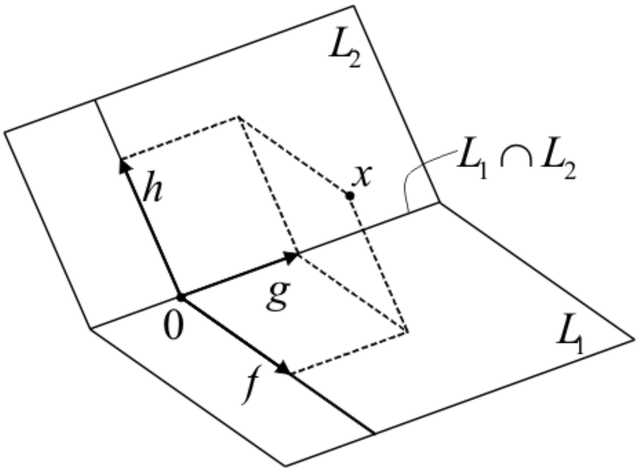


Рис. 1. К теореме 2

следовательно, $x = f + g + h$, где $g = g^+ + g^- \in G$. Таким образом, $x \in F + G + H$. Еще проще доказывается, что если $x \in F + G + H$, то $x \in L_1 + L_2$. Сумма в правой части равенства (2.4) прямая. В самом деле, пусть $f + g + h = 0$, где $f \in F$, $g \in G$, $h \in H$. Покажем, что тогда $f, g, h = 0$. Имеем $f + g = -h$. Ясно, что $-h \in L_2$, а $f + g \in L_1$, следовательно, $f + g \in G$, $h \in G$. Положим $h + g = \widetilde{g}$. Получаем $f + \widetilde{g} = 0$, причем $\widetilde{g} \in G$. Поскольку система векторов $\mathcal{F}_k \cup \mathcal{G}_l$ линейно независима, отсюда вытекает, что $f = 0$, $\widetilde{g} = 0$. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что $h = 0$, $g = 0$. По теореме 1 теперь имеем, что $\dim(L_1 + L_2) = \dim(F \dotplus G \dotplus H) = k + l + m$, но $\dim L_1 = k + l$, $\dim L_2 = l + m$, $\dim(L_1 \cap L_2) = l$. Остается заметить, что $k + l + m = (k + l) + (l + m) - l$. $\square$

Следствие 1. *Пусть L_1, L_2 — подпространства n-мерного пространства $\mathbf{X}_n$, причем $\dim L_1 + \dim L_2 > n$. Тогда $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$.*

Доказательство. Поскольку $L_1 + L_2$ — подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, то $\dim(L_1 + L_2) \leqslant n$, но тогда (см. (2.3))

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) \geqslant 1. \ \square$$

§ 3. Ортогональная проекция вектора на подпространство

1. Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$, x — вектор из $\mathbf{X}$. Вектор $y \in L$ назовем *наилучшим приближением* к вектору x, если

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого } z \in L. \tag{3.1}$$

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbf{X}$ в любом конечномерном подпространстве $L \subset \mathbf{X}$ существует единственное наилучшее приближение.*

Доказательство. Если $L = \{0\}$, то единственным наилучшим приближением к x будет нулевой вектор. Поэтому далее полагаем, что $L \neq \{0\}$. Пусть $y, z \in L$. Представим z в виде $z = y + h$, $h \in L$. Тогда

$$(x - z, x - z) = (x - y - h, x - y - h) = \\ = (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h).$$

Отсюда очевидным образом получаем, что если $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$, то (3.1) выполнено. Обратно, если выполнено (3.1), то

$$-(x - y, h) - (h, x - y) + (h, h) \geqslant 0 \quad \forall\, h \in L.$$

Заменив h на $h_1 = ((x - y, h)/|h|^2)h$, получим $-|(x - y, h)|^2/|h|^2 \geqslant 0$, следовательно, $(x - y, h) = 0$. Итак, для того, чтобы вектор $y \in L$ был наилучшим приближением к вектору $x \in \mathbf{X}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x - y, h) = 0 \quad \text{для любого} \quad h \in L. \tag{3.2}$$

Иными словами, вектор $x - y$ должен быть ортогонален подпространству L. Геометрически этот вывод вполне очевиден (см. рис. 2). Вектор y, удовлетворяющий условию (3.2), если он существует, одно-

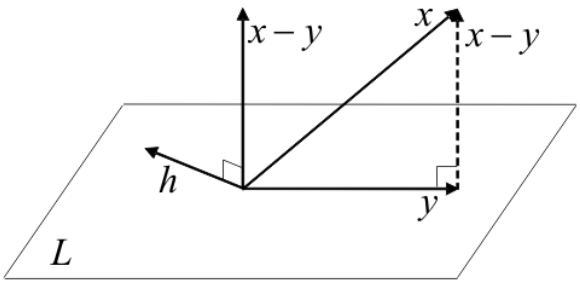


Рис. 2. К доказательству теоремы 1

значно определяется по вектору x. В самом деле, пусть существует еще один вектор $\tilde{y} \in L$ такой, что $(x - \tilde{y}, h) = 0$ для любого $h \in L$. Тогда $(y - \tilde{y}, h) = 0$ для любого $h \in L$. Полагая $h = y - \tilde{y}$, получим, что $y = \tilde{y}$. Докажем теперь, что существует вектор $y \in L$, удовлетворяющий условию (3.2). Пусть $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Условие (3.2) эквивалентно тому, что

$$(x - y, e^k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.3}$$

Будем искать y в виде разложения по базису: $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i e^i$. Тогда из (3.3) получаем, что

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \eta_i e^i, e^k\Big) = (x, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Более подробная запись этих условий дает систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{3.4}$$

для отыскания $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$. Матрица этой системы — матрица Грама, соответствующая базису $\{e^k\}_{k=1}^m$. Эта матрица невырождена (см. теорему 1, с. 118), следовательно, система (3.4) однозначно разрешима при любом $x \in \mathbf{X}$, т. е. условие (3.2) однозначно определяет вектор y. $\square$

Замечание. Вектор y вычисляется наиболее просто, когда базис $\{e^k\}_{k=1}^m$ подпространства L ортонормирован, а именно, в этом случае $y = \sum\limits_{k=1}^{m} (x, e^k) e^k$.

2. Вектор y, удовлетворяющий условию (3.2), естественно назвать *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L, вектор $z = x - y$ — *перпендикуляром*, опущенным из точки x на подпространство L (см. рис. 2).

Заметим, что $(x - y, y) = 0$, поскольку $y \in L$, следовательно, справедливо тождество Пифагора (см. п. 1, с. 116)

$$|x|^2 = |x - y|^2 + |y|^2. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что $|y|^2 \leqslant |x|^2$. Это — так называемое *неравенство Бесселя*[1)], показывающее, что длина проекции вектора не превосходит длины вектора (см. рис. 2).

3. Если система векторов $\{e^k\}_{k=1}^m$ ортонормирована, то неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, e^k)|^2 \leqslant |x|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{3.6}$$

[1)] Фридрих Вильгельм Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel; 1784–1846) — немецкий математик и астроном.

Равенство в (3.6) достигается тогда и только тогда, когда $x \in L$, т. е. когда $x = \sum\limits_{k=1}^{m} (x, e^k) e^k$.

4. Отметим, что неравенство Коши — Шварца (3.2), с. 116, можно трактовать как частный случай неравенства Бесселя (3.6), когда ортонормированная система векторов состоит только из одного вектора $e^1 = |y|^{-1} y$, $y \neq 0$.

Пример. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы $a^1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a^2 = (1, 4, 3, 2)$, $a^3 = (2, 2, -2, -2)$. Найдем ортогональную проекцию вектора $x = (14, -3, -6, -7)$ на подпространство L и перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

Векторы a^1, a^2 линейно независимы (не пропорциональны), вектор a^3 — линейная комбинация векторов a^1, a^2, а именно, $a^3 = (-1/2)a^1 + (1/2)a^2$. Поэтому векторы a^1, a^2 можно принять за базис подпространства L. Компоненты η_1, η_2 вектора y — проекции вектора x на L в базисе a^1, a^2 — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\eta_1 (a^1, a^1) + \eta_2 (a^2, a^1) = (x, a^1), \tag{3.7}$$

$$\eta_1 (a^1, a^2) + \eta_2 (a^2, a^2) = (x, a^2). \tag{3.8}$$

Вычисляя скалярные произведения, получим $(a^1, a^1) = 9 + 49 + 36 = 94$, $(a^2, a^1) = 30$, $(a^2, a^2) = 30$, $(x, a^1) = -126$, $(x, a^2) = -30$. Решая систему (3.7), (3.8), найдем, что $\eta_1 = -3/2$, $\eta_2 = 1/2$, т. е. $y = (-3/2)a^1 + (1/2)a^2 = (5, 2, -9, -8)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство L, $z = x - y = (9, -5, 3, 1)$ — перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

5. Неудачный выбор базиса может вызвать большие вычислительные трудности при фактическом построении элемента наилучшего приближения.

Приведем соответствующий пример. В линейном пространстве функций $C[0, 1]$ введем скалярное произведение по формуле (2.1), с. 115, полагая, что $p(x) \equiv 1$. Рассмотрим в этом пространстве пятимерное подпространство, натянутое на базис, образованный функциями $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\varphi_3(x) = x^3$, $\varphi_4(x) = x^4$, и найдем наилучшее приближение к функции $\varphi(x) = x^5$.

Матрица Грама в этом случае вычисляется элементарно:

$$\int\limits_0^1 \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 1/(k + l + 1). \tag{3.9}$$

Столбец правой части системы (3.4), очевидно, состоит из чисел $1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$, $1/10$.

Будем считать, что при вычислении последнего элемента столбца правой части допущена ошибка, и заменим число $1/10$ на $(1/10) + \varepsilon$.

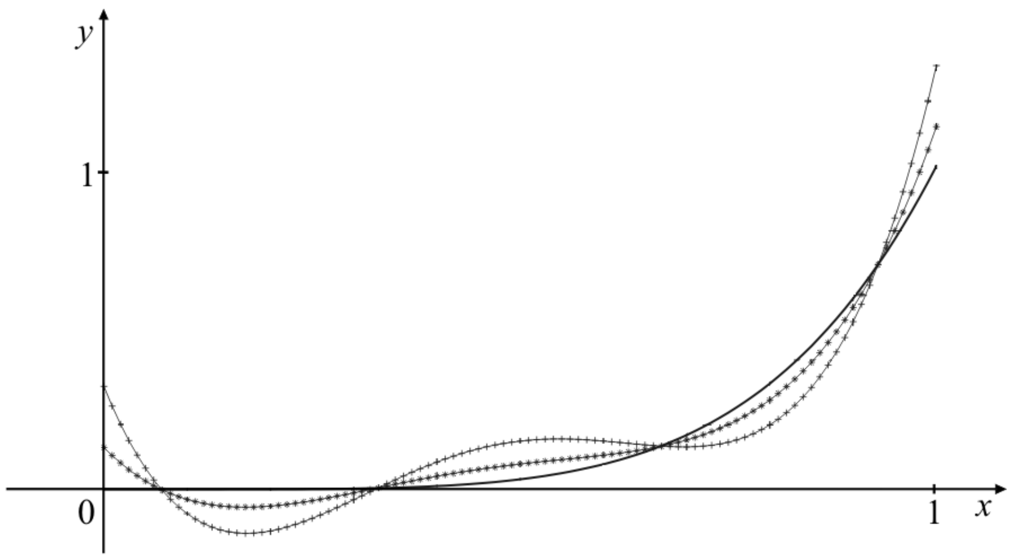


Рис. 3. К примеру почти линейно зависимого базиса: сплошная линия — функция φ, символом «+» помечен график приближающего полинома при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, символом «∗» — при $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$

На рис. 3 показаны графики функции $\varphi(x)$ и приближающего ее полинома $P_4(x) = 1 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 + \eta_4 x^4$ при различных значениях ε. Видно, что малым погрешностям, допущенным при вычислении правой части (неизбежным на практике), соответствуют значительные погрешности приближения функции φ.

Причина кроется в том, что выбранный нами базис степеней независимой переменной на самом деле состоит из функций, почти линейно зависимых. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на графики функций x^p, $p = 1, 2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$. Даже при не очень больших p эти графики близки. Поэтому матрица системы (3.4) оказалась в данном случае близкой к вырожденной или, как говорят, плохо обусловленной.

Матрица с элементами (3.9), т. е. матрица вида

$$H_n = \left\{ \frac{1}{i + j - 1} \right\}_{i,j=1}^{n}$$

называется *матрицей Гильберта*[1]. Она часто встречается в различных разделах математики. Уже при $n > 10$ эта матрица оказывается настолько плохо обусловленной, что решить на компьютере систему линейных уравнений с такой матрицей практически невозможно.

Замечание. Обычно, приближая функции полиномами, используют ортогональные базисы, например, полиномы Лежандра или Че-

[1] Давид Гильберт (David Hilbert; 1862 — 1943) — немецкий математик.

бышева (см. с. 122, с. 126). В этом случае система (3.4) становится диагональной.

§ 4. Ортогональное разложение евклидова пространства

Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$. Множество всех векторов из $\mathbf{X}$, ортогональных L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L и обозначается через $L^{\perp}$. Понятно, что $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Упражнение. Докажите, что $L^{\perp}$ — подпространство пространства $\mathbf{X}$.

Теорема 1 (об ортогональном разложении). *Пусть L — конечномерное подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$, $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства L. Тогда*

$$\mathbf{X} = L \oplus L^{\perp}. \tag{4.1}$$

Доказательство. По теореме 1, с. 133, для любого $x \in \mathbf{X}$ существует $y \in L$ такой, что $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$, следовательно, $z = x - y \in L^{\perp}$ и $x = y + z$, что означает (см. п. 8, с. 130) справедливость (4.1). $\square$

Пусть $e \in \mathbf{X}$, $e \neq 0$. Обозначим через π_e множество всех векторов пространства $\mathbf{X}$, ортогональных e. Нетрудно убедиться, что π_e — подпространство пространства $\mathbf{X}$. Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору e.

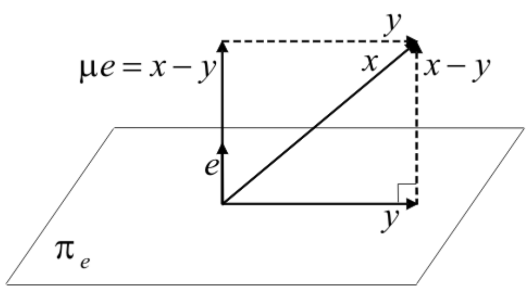


Рис. 4. К теореме 2

Теорема 2. *Пусть x — произвольный, e — ненулевой векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Существуют вектор $y \in \pi_e$ и число μ такие, что*

$$x = \mu e + y, \tag{4.2}$$

причем μ *и* y *однозначно определяются по вектору* x. *Кроме того,*

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \textit{для любого} \quad z \in \pi_e, \tag{4.3}$$

т. е. y *— элемент наилучшего приближения к вектору* x *из подпространства* π_e *(см. рис. 4).*

Упражнение. Следуя доказательству теоремы 1, докажите теорему 2.

Глава 7
Линейные операторы и матрицы

§ 1. Основные определения. Действия над операторами.

1. Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — линейные пространства. Будем говорить, что задано *отображение* φ пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{Y}$ (пишут $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$), если каждому вектору x из $\mathbf{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbf{Y}$. Говорят также в этом случае, что на пространстве $\mathbf{X}$ задана *функция* φ со значениями в пространстве $\mathbf{Y}$. Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbf{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbf{X}$.

Отображение φ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y). \tag{1.1}$$

В линейной алгебре, почти исключительно, рассматриваются линейные отображения. Обычно, их называют *линейными операторами* (или просто операторами) и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут. Так, равенство (1.1) применительно к оператору $\mathcal{A}$ запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y.$$

Из определения линейного отображения сразу вытекает, что

$$\mathcal{A}0 = 0$$

для любого оператора $\mathcal{A}$.

Если оператор действует из пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}$, то говорят, что он действует в пространстве $\mathbf{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbf{X}$.

2. Полезно отметить, что если в пространстве $\mathbf{X}_n$ фиксирован некоторый базис $\{e^j\}_{j=1}^n$, то определяя на $\mathbf{X}_n$ линейный оператор $\mathcal{A}$, достаточно описать его действие на векторы базиса, так как для любого вектора $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e^j$ имеем $\mathcal{A}x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A}e^j$.

3. Действия над операторами. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ — линейные операторы; α, β — числа. Оператор $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, называемый *линейной комбинацией* операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, определяется соотношением

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x = \alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы. Оператор $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$, определяемый соотношением

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \tag{1.3}$$

называется *произведением операторов* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Упражнение. Показать, что отображения $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}$ — линейные операторы.

Аналогично (1.3) можно определить произведение любого числа операторов.

Упражнение. Показать, что если произведение операторов $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ определено, то

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

4. Примеры операторов.

4.1. Нулевой оператор. Этот оператор переводит все векторы пространства $\mathbf{X}$ в нулевой вектор пространства $\mathbf{Y}$. *Нулевой* оператор обозначают символом 0, так что $0x = 0$ для всех $x \in \mathbf{X}$.

4.2. Единичный (тождественный) оператор. Оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}$, называется *единичным*, если он оставляет без изменения все векторы пространства $\mathbf{X}$. Единичный оператор будем обозначать через I.

4.3. Оператор проектирования. Пусть линейное пространство $\mathbf{X}$ есть прямая сумма подпространств L и M. Каждый вектор $x \in \mathbf{X}$ представим в виде $x = x^1 + x^2$, $x^1 \in L$, $x^2 \in M$, причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{P}$, действующий из $\mathbf{X}$ в L, полагая $\mathcal{P}x = x^1$. Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть оператор *проектирования* пространства $\mathbf{X}$ на подпространство L (параллельно подпространству M). Если $\mathbf{X}$ — евклидово пространство и оно представлено как ортогональная сумма подпространств L и M, то оператор $\mathcal{P}$ называют оператором *ортогонального проектирования*.

Докажем, что оператор $\mathcal{P}$ линеен. Пусть $x, y \in \mathbf{X}$ и $x = \mathcal{P}x + x^2$, $y = \mathcal{P}y + y^2$ (здесь $x^2, y^2 \in M$). Тогда для любых чисел α, β, очевидно, справедливо равенство

$$\alpha x + \beta y = \alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Вследствие того, что L, M есть подпространства, получаем, что $\alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y \in L$, $\alpha x^2 + \beta y^2 \in M$, поэтому $\mathcal{P}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{P}x + \beta\mathcal{P}y$.

Точно так же можно ввести оператор $\mathcal{Q}$, проектирующий пространство $\mathbf{X}$ на подпространство M. Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств: $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$, $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$, $\mathcal{Q}\mathcal{P} = 0$, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$. Вообще, если пространство $\mathbf{X}$ — прямая сумма нескольких подпространств

$$\mathbf{X} = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_k,$$

а $\mathcal{P}_i$ — оператор проектирования на L_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_k = I, \quad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i,\ \mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0 \text{ при } i \neq j, \tag{1.4}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, k$.

4.4. Умножение матрицы на вектор. Пусть $A(m, n)$ — прямоугольная матрица. Поставим в соответствие каждому вектору $x \in \mathbb{C}^n$ вектор $y \in \mathbb{C}^m$ при помощи равенства (см. п. 5, с. 46)

$$y = Ax. \tag{1.5}$$

Операция умножения матрицы на вектор — линейная операция, поэтому соотношение (1.5) определяет линейный оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

§ 2. Обратный оператор

Будем говорить, что линейный оператор $\mathcal{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ имеет *обратный*, если существует такой оператор $\mathcal{B}: \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, что

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B}y = y \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}. \tag{2.2}$$

Обратный оператор, если он существует, также является линейным оператором. В самом деле, пусть y^1, $y^2 \in \mathbf{Y}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$. Положим $x^1 = \mathcal{B}y^1$, $x^2 = \mathcal{B}y^2$. Тогда $\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^1 = y^1$, $\mathcal{A}x^2 = \mathcal{A}\mathcal{B}y^2 = y^2$. Отсюда

$$\mathcal{B}(\alpha y^1 + \beta y^2) = \mathcal{B}(\alpha \mathcal{A} x^1 + \beta \mathcal{A} x^2) = \\ = \mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha \mathcal{B} y^1 + \beta \mathcal{B} y^2.$$

Если оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный, то он осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Действительно, пусть $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$, $x^1 \neq x^2$. Тогда и $\mathcal{A}x^1 \neq \mathcal{A}x^2$. В самом деле, если предположить, что $\mathcal{A}x^1 = \mathcal{A}x^2$, то $\mathcal{B}\mathcal{A}x^1 = \mathcal{B}\mathcal{A}x^2$ и, значит, $x^1 = x^2$. Далее, если $y \in \mathbf{Y}$, то, полагая $x = \mathcal{B}y$, получим, что $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{B}y = y$, т. е. всякий вектор из $\mathbf{Y}$ является результатом действия оператора $\mathcal{A}$ на некоторый вектор из $\mathbf{X}$.

Упражнение. Покажите, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

Обратный к оператору $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{A}^{-1}$. Непосредственно из определения вытекает, что если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует, то $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$. Оператор, имеющий обратный, будем называть *обратимым*.

Примеры.

1) Единичный оператор имеет обратный, причем $I^{-1}=I$.

2) Нулевой оператор, очевидно, не имеет обратного.

3) Оператор проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство L при условии, что подпространство L не совпадает со всем пространством $\mathbf{X}$, не имеет обратного (докажите!).

4) Всякая квадратная матрица A порядка n определяет линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Если матрица A невырождена, то этот оператор имеет обратный и он порождается матрицей A^{-1} (см. §5, с. 51).

Упражнение. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ — обратимые операторы. Показать, что тогда и оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ обратим, причем $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

§ 3. Оператор разложения по базису

Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$. Определим оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbf{X}_n$, при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n. \tag{3.1}$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через $\mathcal{E}$.

Поскольку $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис, то каждому $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно соответствует элемент $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e^k$. Указанное соответствие порождает *оператор разложения по базису*, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbb{C}^n$. Будем обозначать этот оператор через $\mathcal{E}^{-1}$.

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$ вытекает, что

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е. операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$ взаимно обратны.

Замечание. Вычисление коэффициентов разложения вектора по базису часто приводит к необходимости решения крамеровских систем линейных алгебраических уравнений (см. примеры на с. 107, 122, 111). Наиболее просто коэффициенты разложения вектора вычисляются для ортонормированных базисов в евклидовых пространствах (см. (7.2), с. 123, а также примеры на с. 124, 126).

§ 4. Изоморфизм конечномерных пространств

1. Линейные пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ называются *изоморфными*, если существует обратимый линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Иными словами, линейные пространства изоморфны, если между ними можно установить линейное взаимнооднозначное соответствие.

Понятно, что отношение изоморфизма обладает свойством транзитивности, и, значит, если пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ изоморфны пространству $\mathbf{Z}$, то они изоморфны друг другу.

Теорема 1. *Все конечномерные линейные комплексные пространства одной и той же размерности изоморфны.*

Доказательство. Отношение изоморфизма транзитивно. Поэтому достаточно установить, что любое комплексное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$. Как следует из § 3, линейное взаимнооднозначное соответствие пространств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbb{C}^n$ осуществляет оператор разложения по любому фиксированному базису $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$. □

Точно так же доказывается, что все вещественные линейные пространства $\mathbf{X}_n$ изоморфны пространству $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Если конечномерные пространства* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *изоморфны, то их размерности совпадают.*

Доказательство. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}$, а линейный оператор $\mathcal{A}$ осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{A} e^k = 0$ вытекает, что $\mathcal{A} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e^k = 0$. Действуя на обе части последнего равенства оператором $\mathcal{A}^{-1}$, будем иметь $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e^k = 0$, откуда получаем, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$, т. е. векторы $\{\mathcal{A} e^k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, и размерность пространства $\mathbf{Y}$ не меньше чем n. Меняя в этом рассуждении местами пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, приходим к тому, что их размерности совпадают $\square$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для того, чтобы конечномерные комплексные (или вещественные) пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.*

2. Если установлен изоморфизм пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то с точки зрения выполнения линейных операций над их элементами они оказываются эквивалентными. Так, линейные операции над элементами любого конечномерного пространства путем введения какого-либо базиса всегда можно свести к линейным операциям на пространством числовых строк ($\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$).

§ 5. Матрица оператора

1. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в пространстве $\mathbf{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$.

Представим каждый вектор $\mathcal{A} e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A} e^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

(коэффициенты разложения вектора $\mathcal{A}e^i$ по базису $\mathcal{Q}_m$ образуют i-й столбец матрицы A_{eq}). Матрицу A_{eq} называют *матрицей оператора* $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

Оператор и соответствующую ему матрицу будем обозначать одной и той же буквой, но набранной в разных шрифтах. Нижние индексы в обозначении матрицы оператора указывают на базисы, использованные для ее построения.

Соотношения (5.1) можно записать более кратко:

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}. \tag{5.3}$$

2. Пусть $x = \mathcal{E}_n\xi \in \mathbf{X}_n$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. Представим $\mathcal{A}x$ в виде разложения по базису: $\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m\eta$, $\eta \in \mathbb{C}^m$. Тогда, используя (5.3), получим

$$\mathcal{Q}_m\eta = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\mathcal{E}_n\xi = \mathcal{Q}_m A_{eq}\xi,$$

следовательно,

$$\eta = A_{eq}\xi. \tag{5.4}$$

Формула (5.4) показывает, как связаны коэффициенты разложения векторов x и $\mathcal{A}x$ по базисам пространств $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$, соответственно.

Из (5.4) вытекает, что если матрица A_{eq} оператора $\mathcal{A}$ известна, то по заданному вектору $x \in \mathbf{X}_n$ вектор $\mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$ можно построить следующим образом.

1) Найти вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ коэффициентов разложения x по базису $\mathcal{E}_n$. Это можно представить в операторном виде: $\xi = \mathcal{E}^{-1}x$.

2) Умножив матрицу A_{eq} на вектор ξ, получить вектор $\eta \in \mathbb{C}^m$ коэффициентов разложения элемента $y = \mathcal{A}x \in \mathbf{Y}_m$ по базису $\mathcal{Q}_m$.

3) Вычислить элемент y по найденному вектору η, что опять можно записать в операторной форме: $y = \mathcal{Q}\eta$.

3. Сказанное выше означает, что, используя операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$, порожденные базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, соотношение (5.3) можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \quad \text{или} \quad \mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}. \tag{5.5}$$

Поясним, что

$$A_{eq}\xi = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{A}x = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{5.6}$$

Равенства (5.5), (5.6) иллюстрируют следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_n \arrow[r, "\mathcal{A}"] & \mathbf{Y}_m \arrow[d, "\mathcal{Q}^{-1}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[u, "\mathcal{E}"] \arrow[r, "A_{eq}"'] & \mathbb{C}^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_n \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\mathcal{E}^{-1}"'] & \mathbf{Y}_m \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "A_{eq}"'] & \mathbb{C}^m \arrow[u, "\mathcal{Q}"']
\end{tikzcd}$$

Таким образом, если в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ фиксированы некоторые базисы $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, то всякому линейному оператору $\mathcal{A}$, действующему из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$, однозначно соответствует линейный оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$ (оператор умножения на матрицу A_{eq} оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах), и, наоборот, всякой матрице A размера $m \times n$ однозначно соответствует оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$ и определяемый по формуле $\mathcal{A} = \mathcal{Q}A\mathcal{E}^{-1}$.

4. Если $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, то

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n A_e, \tag{5.7}$$

или

$$A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}, \tag{5.8}$$

где A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_n$.

5. Отметим два очевидных случая, когда матрица оператора не зависит от выбора базиса: 1) нулевой оператор, его матрица при любом выборе базисов в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ нулевая; 2) тождественный оператор, его матрица — единичная матрица в любом базисе пространства $\mathbf{X}_n$.

В дальнейшем (см. теорему 1, с. 148) будет доказано, фактически, обратное утверждение: если матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ не зависит от выбора базиса, то существует такое число α, что $\mathcal{A} = \alpha I$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ — это оператор умножения на число (*скалярный* оператор).

6. Из определения матрицы оператора сразу же вытекает, что для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ и для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha A + \beta B)_{eq} = \alpha A_{eq} + \beta B_{eq}, \tag{5.9}$$

т. е. линейным операциям над операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

7. Аналогичное при определенных условиях справедливо и для произведения операторов. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$, $\mathcal{B} : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{Z}_p$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы. Будем считать, что в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$, $\mathbf{Z}_p$ заданы базисы $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$, $\{r^k\}_{k=1}^p$, соответсвенно; A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$, B_{qr} — матрица оператора $\mathcal{B}$, $(BA)_{er}$ — матрица оператора $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Z}_p$. Покажем, что

$$(BA)_{er} = B_{qr} A_{eq}, \tag{5.10}$$

т. е. матрица произведения операторов равна произведению матриц операторов. Действительно, применяя формулы (5.5), получим

$$(BA)_{er} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}B_{qr}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E} = B_{qr}A_{eq}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь при определении матриц операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ использовался один и тот же базис $\{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$. Указанное согласование базисов обычно предполагается выполненным.

8. Примеры.

1) Определим оператор $\mathcal{A} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ при помощи соотношения

$$\mathcal{A}x = (x_2, x_1, x_3 + x_4, x_4)$$

для любого $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$. Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе (см. с. 107, 99) пространства $\mathbb{C}^4$. Имеем $\mathcal{A}i^1 = (0,1,0,0) = i^2$, $\mathcal{A}i^2 = (1,0,0,0) = i^1$, $\mathcal{A}i^3 = (0,0,1,0) = i^3$, $\mathcal{A}i^4 = (0,0,1,1) = i^3 + i^4$, следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) В трехмерном линейном пространстве $\mathbf{Q}_2$ всех полиномов степени не выше двух с комплексными коэффициентами определим оператор $\mathcal{T}$ при помощи соотношения $\mathcal{T}q_2(z) = q_2(z+h)$ для любого элемента $q_2 \in \mathbf{Q}_2$. Здесь h — фиксированное комплексное число (сдвиг). Построим матрицу оператора $\mathcal{T}$, принимая за базис пространства $\mathbf{Q}_2$ полиномы $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = z^2$. Имеем $\mathcal{T}\varphi_0 = \varphi_0$, $\mathcal{T}\varphi_1 = h\varphi_0 + \varphi_1$, $\mathcal{T}\varphi_2 = h^2\varphi_0 + 2h\varphi_1 + \varphi_2$, следовательно, матрица оператора $\mathcal{T}$ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $q_2(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, то $\mathcal{T}q_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$, где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ha_1 + h^2 a_2 \\ a_1 + 2ha_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ определяется заданием базисов пространств $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$. Выясним, как она изменяется при изменении базисов. Пусть наряду с базисами $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$ заданы базисы $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{q}^k\}_{k=1}^m$ и $A_{\tilde{e}\tilde{q}}$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах. Будем считать известными матрицы T, R перехода к новым базисам, так что (см. § 7, с. 109)

$$\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_m = \mathcal{Q}_m R. \tag{5.11}$$

Согласно (5.5), с. 145, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}$, $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{E}}$, следовательно, $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}}$. На основании (5.11) для любого $\xi \in \mathbb{C}^n$

имеем $\tilde{\mathcal{E}}_n\xi = \mathcal{E}_n T\xi$, поэтому $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T$, откуда получаем, что $\mathcal{E}^{-1}\widetilde{\mathcal{E}} = T$. Аналогично, $\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\mathcal{Q} = R^{-1}$. Таким образом,

$$A_{\tilde{e}\tilde{q}} = R^{-1}A_{eq}T. \tag{5.12}$$

Матрицы A, B, связанные соотношением вида $A = CBD$, где C, D — невырожденные матрицы, принято называть *эквивалентными.*

10. В важном частном случае, когда оператор $\mathcal{A}$ отображает пространство $\mathbf{X}_n$ в себя, получаем

$$A_{\tilde{e}} = T^{-1}A_eT. \tag{5.13}$$

Квадратные матрицы B, C, связанные соотношением

$$B = D^{-1}CD, \tag{5.14}$$

где D — невырожденная матрица, называют *подобными.* Говорят еще, что матрица B получена из матрицы C при помощи *преобразования подобия.*

Соотношение (5.13) показывает, что матрицы одного и того же оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ в разных базисах подобны.

Теорема 1. *Если матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$, то существует такое число α, что $\mathcal{A} = \alpha I$.*

Доказательство. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Поскольку матрицы одного и того же оператора в различных базисах подобны, то $A = BAB^{-1}$ и, следовательно, $AB = BA$ для любой невырожденной матрицы B. Пусть E_{ik} — матрица, у которой элемент в позиции (i, k) равен единице, а все остальные элементы — нули. Матрица $E_{ik}+I$ — треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали и потому обратима. Значит, $A(E_{ik} + I) = (E_{ik} + I)A$, следовательно, $AE_{ik} = E_{ik}A$. Будем считать, что $i \neq k$. В левой части последнего равенства, как нетрудно видеть, — матрица, у которой только k-й столбец отличен от нуля и он состоит из элементов a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}. В матрице, записанной в правой части этого же равенства, только i-я строка отлична от нуля и она состоит из элементов a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn}. Поэтому указанное равенство может быть выполнено лишь в случае, когда $a_{ii} = a_{kk}$, а все участвующие здесь элементы с различающимися индексами равны нулю. Вследствие произвольности номеров i, k это означает, что матрица A диагональна и все ее диагональные элементы совпадают между собой, т. е. $A = \alpha I$, но тогда, очевидно, и $\mathcal{A} = \alpha I$. $\square$

§ 6. Матрица обратного оператора

1. Поскольку $\det(D^{-1}) = 1/\det(D)$ для любой невырожденной матрицы D, то определители подобных матриц совпадают. В связи с этим можно назвать *определителем оператора* $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ определитель матрицы этого оператора. Такая характеристика оператора не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$, т. е. является *инвариантом* оператора. Определитель оператора $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\det(\mathcal{A})$.

2. Будем называть оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *невырожденным*, если $\det(\mathcal{A}) \neq 0$. Для любого невырожденного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный. Действительно, фиксируем некоторый базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и определим оператор $\mathcal{B}$ соотношением

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}.$$

Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$, то $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E} I \mathcal{E}^{-1} = I$, значит, оператор $\mathcal{B}$ — обратный оператор к оператору $\mathcal{A}$.

3. Как, фактически, следует из предыдущих рассуждений, в любом базисе пространства $\mathbf{X}_n$ матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора.

Теорема 1. *Если оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имеет обратный, то он невырожден.*

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имело только тривиальное решение $x = 0$.*

Упражнение. Докажите теоремы 1, 2.

§ 7. Линейное пространство операторов

Рассмотрим множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$. Как показано в п. 3, с. 140, на этом множестве можно ввести операции сложения линейных операторов и умножения оператора на число. Нетрудно убедиться, что эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Таким образом, множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$, само можно рассматривать как *линейное пространство*. Из результатов п. 5, с. 144, вытекает, что это пространство изоморфно пространству всех прямоугольных матриц размера $m \times n$. Соответствующее линейное отображение задается соотношением (5.3), с. 145. Размерность пространства всех линейных операторов, действующих из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$, равна mn.

Если пространства $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{Y}_m$ вещественны и допускается умножение операторов только на вещественные числа, мы приходим к *вещественному* линейному пространству операторов.

§ 8. Дефект и ранг линейного оператора.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий из линейного пространства $\mathbf{X}$ в линейное пространство $\mathbf{Y}$.

Множество всех векторов y из пространства $\mathbf{Y}$ таких, что $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in \mathbf{X}$, называется *областью значений или образом* оператора и обозначается через $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$.

Множество всех векторов $x \in \mathbf{X}$ таких, что $\mathcal{A}x = 0$, называется *ядром* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$.

Теорема 1. *Множество* $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ *— линейное подпространство пространства* $\mathbf{Y}$.

Доказательство. Пусть $y^1, y^2 \in \operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Тогда существуют $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$ такие, что $y^1 = \mathcal{A}x^1$, $y^2 = \mathcal{A}x^2$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ отсюда получаем, что $\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha\mathcal{A}x^1 + \beta\mathcal{A}x^2$. Оператор $\mathcal{A}$ линеен, следовательно, $\alpha y^1 + \beta y^2 = \mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2)$, потому $\alpha y^1 + \beta y^2 \in \operatorname{Im}(\mathcal{A})$. $\square$

Упражнение. Покажите, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$.

Размерность подпространства $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Y}_m$ называется *рангом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

Размерность ядра оператора $\mathcal{A}$ называется *дефектом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{def}(\mathcal{A})$.

Теорема 2. *Для любого линейного оператора* $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) + \operatorname{def}(\mathcal{A}) = n. \tag{8.1}$$

Доказательство. Обозначим через M подпространство пространства $\mathbf{X}_n$ такое, что $\mathbf{X}_n = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \dotplus M$ (см. упражнение 2, с. 130). По теореме 1, с. 131, имеем $n = \operatorname{def}(\mathcal{A}) + \dim(M)$. Теперь с учетом теоремы 3, с. 144, достаточно установить, что пространства M и $\operatorname{Im}(A)$ изоморфны. Для произвольного $x \in \mathbf{X}_n$ имеем $x = x^0 + x^1$, где $x^0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, $x^1 \in M$, следовательно, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x^1$. Таким образом, всякий элемент из $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ — образ некоторого элемента из M. Осталось доказать, что если $\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$ для $x', x'' \in M$, то $x' = x''$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет взаимнооднозначное отображение M на $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Равенство $\mathcal{A}(x' - x'') = 0$ означает, что $x' - x'' \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$. С другой стороны, M — подпространство, поэтому $x' - x'' \in M$. По теореме 2, с. 130, отсюда получаем, что $x' - x'' = 0$. $\square$

§ 9. Ранг матрицы.

1. Пусть $A(m,n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов (см. § 5, с. 106) назовем *рангом матрицы* $A(m,n)$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\operatorname{rank}(A)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$*,* A_{eq} *— матрица оператора* $\mathcal{A}$ *относительно произвольным образом фиксированных базисов* $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$*,* $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$*. Тогда* $\operatorname{rank}(A_{eq}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $x = \mathcal{E}_n\xi \in \mathbf{X}_n$. Тогда $\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m\eta$, где $\eta = A_{eq}\xi$ (см. п. 2, с. 145). Понятно, что вектор η принадлежит подпространству пространства $\mathbb{C}^m$, натянутому на столбцы матрицы A_{eq} и, следовательно, имеющему размерность, равную $\operatorname{rank}(A_{eq})$. Поскольку линейный оператор $\mathcal{Q}$ обратим, то, очевидно, указанное подпространство изоморфно $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, следовательно, в силу теоремы 3, с. 144, размерность $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ равна $\operatorname{rank}(A_{eq})$. $\square$

Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

2. Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Ранг этой системы строк обозначим через r_s.

Справедлива следующая, на первый взгляд, неожиданная

Теорема 2. *Для любой матрицы* $A(m,n)$ *выполнено равенство* $r_s = \operatorname{rank}(A(m,n))$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что первые r_s строк матрицы $A(m,n)$ линейно независимы, а каждая из последующих линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m,n)$. Пусть $A(r_s,n)$ — матрица, состоящая из первых r_s строк матрицы $A(m,n)$. Используем для преобразования матрицы $A(r_s,n)$ алгоритм, совпадающий, фактически, с прямым ходом метода Гаусса (см. с. 55). Выберем в первой строке матрицы $A(r_s,n)$ ненулевой элемент. Это возможно, так как ни одна строка матрицы $A(r_s,n)$ не может быть нулевой. Переставим столбцы матрицы $A(r_s,n)$ так, чтобы столбец, содержащий указанный ненулевой элемент оказался первым. Сохраним за преобразованной таким образом матрицей прежнее обозначение. Умножим первую строку на $-a_{21}/a_{11}$ и сложим со второй. Затем аналогичные преобразования проделаем со всеми последующими строками матрицы $A(r_s, n)$. В результате получим матрицу, у которой все элементы первого столбца, кроме элемента a_{11}, равны нулю, причем $a_{11} \neq 0$. Вторая строка преобразованной матрицы есть нетривиальная линейная комбинация первых двух строк, поэтому она отлична от нуля. Поменяв местами при необходимости второй столбец преобразованной матрицы с одним из последующих, мы получим матрицу, у которой элемент a_{22} не нуль. Умножим вторую строку на $-a_{32}/a_{22}$ и сложим с третьей. Аналогичные преобразования проделаем и с последующими строками матрицы $A(r_s, n)$. Продолжая такие преобразования, мы, в результате, придем к матрице, которую можно представить в блочном виде

$$(\tilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)), \tag{9.1}$$

где $\tilde{A}(r_s, r_s)$ — верхняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали. Описанные выше преобразования не могут «сорваться», так как в ходе указанных вычислений каждый раз возникает строка, которая является нетривиальной линейной комбинацией предыдущих строк матрицы $A(r_s, n)$, и потому не может оказаться нулевой. Очевидно, что, не ограничивая общности рассуждений, можно считать что первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ таковы, что выполняя описанные выше преобразования и не прибегая к перестановке столбцов, мы придем к матрице вида (9.1). Ясно, что $\det(\tilde{A}(r_s, r_s)) \neq 0$, поэтому первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ линейно независимы. Но тогда, и первые r_s столбцов матрицы $A(m, n)$ линейно независимы. Покажем, что добавление к ним любого столбца матрицы $A(m, n)$ приводит к линейно зависимой системе. Пусть Δ_{r_s} — *главный минор*[1] порядка r_s матрицы $A(m, n)$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\Delta_{r_s} \neq 0$, поэтому система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij} x_j = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, r_s, \tag{9.2}$$

имеет решение при любом $k = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку каждая строка матрицы $A(m, n)$ с номером, большим r_s, линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m, n)$, то вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_s})$, являющийся решением системы (9.2), удовлетворяет и соотношениям

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij} x_j = a_{ik}, \quad i = r_s + 1, \ldots, m.$$

[1] *Главным минором* порядка r называется минор, образованный элементами матрицы, стоящими на пересечении ее первых r строк и первых r столбцов.

Таким образом, каждый столбец матрицы $A(m,n)$ есть линейная комбинация ее первых r_s столбцов, следовательно, $\mathrm{rank}(A(m,n)) = r_s$. $\square$

3. Из определения ранга матрицы сразу же следует, что что для любой матрицы $A(m,n)$ справедливо неравенство $\mathrm{rank}(A) \leqslant \min(m,n)$. Если $\mathrm{rank}(A) = \min(m,n)$, то матрица $A(m,n)$ называется *матрицей полного ранга.*

4. Квадратная матрица порядка n невырождена тогда и только тогда, когда ее ранг равен n.

5. Любая перестановка строк или столбцов матрицы, очевидно, не меняет ее ранга. Более того, имеет место

Теорема 3. *Пусть $A(m,n)$ есть произвольная матрица, $B(m,m)$ и $C(n,n)$ — квадратные невырожденные матрицы. Тогда*

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA), \tag{9.3}$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AC). \tag{9.4}$$

Доказательство. Для проверки справедливости равенства (9.3) достаточно заметить, что если матрица B невырождена, то для линейной независимости системы столбцов $Ba^1, \ldots, Ba^p$ необходимо и достаточно линейной независимости столбцов $a^1, \ldots, a^p$ (проверьте!). Справедливость (9.4) устанавливается затем переходом к транспонированным матрицам. $\square$

Упражнение. Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство

$$\mathrm{rank}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

§ 10. Элементарный метод вычисления ранга матрицы

Из рассуждений, выполненных при доказательстве теоремы 2 предыдущего параграфа, следует, что если матрица A имеет ранг равный r, то можно так переставить столбцы и строки этой матрицы, что главный минор Δ_r порядка r полученной матрицы будет отличен от нуля. Указанный минор принято называть *базисным минором* матрицы A. Сформулируем и докажем в некотором смысле обратное утверждение. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица, Δ_r — ее главный минор порядка r. Назовем главный минор Δ_{r+1} *окаймляющим* минором для минора Δ_r. Переставляя строки и столбцы матрицы A с номерами, большими чем r, можно построить различные окаймляющие миноры для минора Δ_r.

Лемма 1. *Пусть главный минор Δ_r матрицы A не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы A равен r.*

Доказательство. Поскольку $\Delta_r \neq 0$, первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Покажем, что любой столбец матрицы A с номером, большим чем r, линейно выражается через ее первые r столбцов. Это и будет означать, что $\operatorname{rank}(A) = r$. Предположим противное. Тогда, присоединяя к первым r столбцам матрицы A некоторый столбец с большим номером, мы получим, что образованная таким образом матрица имеет ранг $r + 1$. Поэтому она имеет $r + 1$ линейно независимую строку. Причем первые ее r строк линейно независимы, так как $\Delta_r \neq 0$. Значит, найдется строка с номером, большим чем r, которая не выражается линейно через первые r строк. Делая указанную строку $(r + 1)$-й строкой матрицы A, получим, что $\Delta_{r+1} \neq 0$, чего по условию леммы быть не может. □

Доказательство леммы 1 приводит к следующему способу вычисления ранга матрицы[1)].

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они — нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2) Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент a_{11}, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов (например, элементы второй строки и второго столбца). Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит, ранг матрицы равен единице.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида Δ_2 (образованный элементами, стоящими на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т. д.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель Δ_r, не равный нулю, а все определители порядка $r + 1$, построенные его окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен r.

[1)] В реальной вычислительной практике обычно применяют способ отыскания ранга матрицы, описанный в п. 1, с. 268.

Понятно, что описанный процесс зачастую может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то r строк и каких-то r столбцов матрицы, не равен нулю. Строим окаймлением этого определителя определители порядка $r+1$. Если среди них есть ненулевой, процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен r.

Пример. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в матрице A содержится минор

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

не равный нулю. Минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d, не равен нулю, однако, оба минора четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

окаймляющие минор d', очевидно, равны нулю, поэтому ранг матрицы A равен трем.

Глава 8
Линейные уравнения

§ 1. Общее решение линейного уравнения

В этом параграфе будем считать, что уравнение

$$\mathcal{A}x = y, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий из линейного пространства $\mathbf{X}_n$ в линейное пространство $\mathbf{Y}_m$, y — заданный элемент пространства $\mathbf{Y}_m$, x — искомый элемент пространства $\mathbf{X}_n$, имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, иными словами, получим представление *общего* решения уравнения (1.1).

Пусть x^1, x^2 — решения уравнения (1.1) при одной и той же правой части y. Тогда, очевидно, $\mathcal{A}(x^1 - x^2) = 0$, т. е. $x^1 - x^2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Отсюда вытекает, что если фиксировать некоторое решение уравнения (1.1) (обозначим его через x^0 и будем называть *частным* решением неоднородного уравнения), то любое другое решение (1.1) имеет вид $x = x^0 + \tilde{x}$, где $\tilde{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Пусть φ^1, φ^2, ..., φ^p — некий базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Тогда

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k. \tag{1.2}$$

Таким образом, представление общего решения уравнения (1.1) получено. Меняя в (1.2) коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_p$, можно получить любое решение этого уравнения.

Векторы $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p$ принято называть *фундаментальной системой решений* однородного уравнения

$$\mathcal{A}x = 0, \tag{1.3}$$

а $\tilde{x} = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \varphi^k$ — *общим решением* однородного уравнения. Итак, общее решение уравнения (1.1) есть сумма его какого-либо частного решения уравнения (1.1) и общего решения однородного уравнения (1.3).

§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений. Условия разрешимости

1. При фактическом построении решений уравнения

$$\mathcal{A}x = y. \tag{2.1}$$

нужно ввести некоторые базисы $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$ в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ и перейти к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ξ разложения вектора x по базису $\mathcal{E}_n$, считая известными коэффициенты η разложения вектора y по базису $\mathcal{Q}_m$. В результате (см. п. 2, с. 145), получим

$$A_{eq}\xi = \eta, \tag{2.2}$$

где A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$.

Более подробная запись уравнения (2.2) дает

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(eq)}\xi_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.3}$$

Подчеркнем, что коэффициенты $a_{ij}^{(eq)}$ этой системы уравнений (элементы матрицы оператора $\mathcal{A}$) и столбец правой части η_1, η_2, …, η_m предполагаются известными, а числа ξ_1, ξ_2, …, ξ_n требуется найти.

В отличие от рассматривавшихся ранее систем линейных алгебраических уравнений (см. § **??**, гл. 1) у системы уравнений (2.3) количество уравнений и число неизвестных, вообще говоря, различны.

Задачи (2.1), (2.2) эквивалентны в том смысле, что если ξ — решение уравнения (2.2), то $x = \mathcal{E}_n\xi$ — решение уравнения (2.1) при $y = \mathcal{Q}_m\eta$, и наоборот, если x — решение уравнения (2.1), то коэффициенты разложения векторов x, y по соответствующим базисам связаны соотношением (2.2).

2. Получим необходимые и достаточные условия разрешимости системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{2.4}$$

где $A = A(m, n)$ — заданная прямоугольная матрица с комплексными, вообще говоря, элементами, b — заданный вектор из $\mathbb{C}^m$.

Обозначим через (A, b) матрицу размера $m \times (n+1)$, получающуюся присоединением к матрице A столбца b. Матрицу (A, b) принято называть *расширенной матрицей* системы (2.4).

Теорема 1 (Теорема Кронекера — Капелли[1]). *Для того, чтобы система уравнений (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A и (A, b) совпадали.*

Доказательство. Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы, и, очевидно, что ранг сохраняется тогда и только тогда, когда b есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Последнее эквивалентно тому, что существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, являющийся решением системы (2.4). $\square$

Теорема 2 (матричная теорема Фредгольма[1]). *Для того, чтобы система линейных уравнений (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения однородной системы уравнений $zA = 0$ выполнялось равенство $zb = 0$.*

Поясним, что здесь b интерпретируется как вектор столбец, а z — как вектор строка.

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $r = \operatorname{rank}(A)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первые r строк матрицы A линейно независимы, Понятно, что тогда и первые r строк матрицы (A, b) линейно независимы. Если k-я строка матрицы A линейно выражается через ее первые r строк, то существует ненулевой вектор z такой, что $zA = 0$. Тогда по условию теоремы $zb = 0$, но это означает, что k-я строка матрицы (A, b) линейно выражается через ее первые r строк. Таким образом, ранги матриц A и (A, b) совпадают, и по теореме Кронекера — Капелли система (2.4) имеет решение. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система уравнений (2.4) имеет решение, т. е. существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такой, что $Ax = b$. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}^m$ справедливо равенство $zAx = zb$. Очевидно, что если $zA = 0$, то $zb = 0$. $\square$

3. Приведем пример использования матричной теоремы Фредгольма. Дана симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Альфредо Капелли (Alfredo Capelli; 1858 — 1916) — итальянский математик.
[1] Эрик Ивар Фредгольм (Erik Ivar Fredholm; 1866 — 1927) — шведский математик.

порядка n. Требуется найти ранг матрицы A и описать условия на вектор $b \in \mathbb{R}^n$, необходимые и достаточные для разрешимость системы линейных уравнений

$$Ax = b. \tag{2.5}$$

Будем трактовать матрицу A как линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^n$. Опишем его ядро. Рассматривая однородную систему уравнений

$$Ax = 0, \tag{2.6}$$

заметим, что ее i-е уравнение, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, записывается так: $-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1} = 0$, или $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$. Отсюда, очевидно, вытекает, что если вектор x — решение системы (2.6), то

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n,$$

т. е. ядро оператора A — одномерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ векторов вида $x^1 = c(1, \ldots, 1)$, где c — произвольное вещественное число. Отсюда вследствие теоремы 2, с. 150, получаем, что $\operatorname{rank}(A) = n - 1$. Далее, поскольку матрица A симметрична, то применяя матичную теорему Фредгольма, получаем, что для разрешимости системы (2.5) необходимо и достаточно выполнения условия $(x^1)^T b = 0$, где x^1 — любое решение уравнения (2.6). Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (2.5) является равенство $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$.

§ 3. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Опишем элементарный способ, который можно применять для построения общего решения системы линейных алгебраических уравнений[1)]

$$Ax = b. \tag{3.1}$$

Будем опираться при этом на результаты § 1. В дальнейшем будем предполагать, что система (3.1) разрешима и обозначать через r ранг расширенной матрицы этой системы.

1. Начнем с построения частного решения уравнения (3.1). Используя описанные в пункте 1, с. 154, приемы вычисления ранга матрицы, приведем матрицу (A, b) к такому виду, что главный минор

[1)]В реальной вычислительной практике обычно применяют методы основанные на построении так называемых сингулярных базисов оператора (см. п. 1, с. 268).

порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, b), начиная с $(r+1)$-й, есть линейные комбинации первых r строк.

Выполняемые указанным способом преобразования приводят, очевидно, к системе линейных уравнений, эквивалентной системе (3.1), т. е. каждое решение системы (3.1) — решение преобразованной системы, и, наоборот, каждое решение преобразованной системы есть решение системы (3.1). При этом последние $m-r$ уравнений преобразованной системы — следствия первых r уравнений.

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с $(r+1)$-й до n-й (эти переменные принято называть *свободными*), в правую часть.

Придадим свободным переменным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ любые значения (чаще всего нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем x_1, x_2, $\ldots$, x_r. Таким образом будет построен вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, являющийся решением системы (3.1).

Пример. Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \tag{3.2}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \tag{3.3}$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20. \tag{3.4}$$

Определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

находящийся в левом верхнем углу матрицы системы уравнений, не равен нулю. Определители

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix},$$

окаймляющие определитель Δ_2, — нули. Поэтому ранг основной матрицы системы уравнений равен двум, и ранг расширенной матрицы системы уравнений равен двум. Система совместна, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений системы. Таким образом, чтобы найти частное решение системы (3.2) – (3.4), достаточно решить систему двух уравнений (3.2) – (3.3), придавая x_3, x_4 произвольные значения. Полагая $x_3 = x_4 = 0$, находим $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, следовательно, вектор $x = (6, 2, 0, 0)$ — решение системы (3.2) – (3.4).

2. Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0 \tag{3.5}$$

с матрицей размера $m \times n$. Пусть $\operatorname{rank}(A) = r$. Вследствие теоремы 2, с. 150, достаточно построить любые $n-r$ линейно независимых решений однородной системы уравнений (3.5). Будем, естественно, предполагать, что $n > r$.

Выполнив те же действия, что и в п. 1, приведем систему уравнений (3.5) к эквивалентной системе вида

$$A(r,r)x(r,1) + B(r,n-r)y(n-r,1) = 0. \tag{3.6}$$

Здесь $A(r,r)$ — невырожденная матрица, столбец $y((n-r),1)$ соответствует свободным переменным. Выберем векторы

$$y^1((n-r),1),\ y^2((n-r),1),\ \dots, y^{n-r}((n-r),1) \tag{3.7}$$

так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^{n-r}$). По этим векторам из уравнений

$$A(r,r)x^k(r,1) + B(r,(n-r))y^k((n-r),1) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, n-r$, однозначно определятся векторы

$$x^1(r,1),\ x^2(r,1),\ \dots, x^{n-r}(r,1).$$

Образуем теперь векторы $z^k(n,1)$, приписывая к компонентам векторов $x^k(r,1)$ компоненты векторов $y^k((n-r),1)$:

$$z^k(n,1) = (x^k(r,1), y^k((n-r),1)), \quad k = 1, 2, \dots, n-r.$$

По построению $Az^k = 0$ для $k = 1, \dots, n-r$, кроме того, очевидно, векторы z^k, $k = 1, \dots, n-r$, линейно независимы, так как векторы системы (3.7) линейно независимы. Таким образом, векторы z^k, $k = 1, 2, \dots, n-r$, образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений (3.5).

Пример. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \tag{3.8}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \tag{3.9}$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \tag{3.10}$$

соответствующей системе (3.2)–(3.4). Ранг матрицы этой системы, как было показано при решении предыдущего примера, равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых (непропорциональных) решения системы (3.8)–(3.10). Как уже было установлено, последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ в уравнениях (3.8), (3.9), получим

$$x_1 - x_2 + 1 = 0, \tag{3.11}$$

$$x_1 + x_2 + 2 = 0, \tag{3.12}$$

откуда $x_1 = -3/2$, $x_2 = -1/2$. Полагая же $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ в уравнениях (3.8), (3.9), будем иметь $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. Поэтому векторы $x^1 = (-3/2, -1/2, 1, 0)$, $x^2 = (-1, -2, 0, 1)$ образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (3.8) – (3.10). Любой вектор

$$x = c_1(-3/2, -1/2, 1, 0) + c_2(-1, -2, 0, 1), \tag{3.13}$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, — решение системы (3.8) – (3.10), и наоборот, любое решение системы уравнений (3.8) – (3.10) представимо в виде (3.13) при некоторых c_1, c_2. Таким образом, общее решение системы (3.2)–(3.4) можно представить в виде

$$x = (6, 2, 0, 0) + c_1(-3/2, -1/2, 1, 0) + c_2(-1, -2, 0, 1),$$

где c_1, c_2 — произвольные вещественные числа.

Глава 9

Собственные числа и собственные векторы оператора

§ 1. Инвариантные подпространства

1. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — линейный оператор. Подпространство $L \subset \mathbf{X}$ называется *инвариантным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, если оператор $\mathcal{A}$ отображает всякий вектор x из L в вектор, также принадлежащий подпространству L.

Тривиальные подпространства, т. е. $L = \{0\}$ и $L = \mathbf{X}$, являются инвариантными подпространствами любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

Пусть пространство $\mathbf{X}$ — прямая сумма подпространств L и M, $\mathcal{P}$ — оператор проектирования на подпространство L параллельно подпространству M. Тогда $\mathcal{P}x = x$ для любого $x \in L$ и $\mathcal{P}x = 0$ для любого $x \in M$, т. е. L и M — инвариантные подпространства оператора $\mathcal{P}$.

Приведем пример оператора, не имеющего нетривиальных инвариантных подпространств.

Пусть $\mathbf{X}_2$ — двумерное вещественное евклидово пространство. Нетрудно убедиться, что если L — нетривиальное подпространство $\mathbf{X}_2$, то L — множество векторов вида αe, где e — фиксированный ненулевой вектор, а α пробегает все множество вещественных чисел (можно сказать, что L — прямая на плоскости, проходящая через начало координат). Введем в $\mathbf{X}_2$ ортонормированный базис e^1, e^2. Пусть $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_2$ — оператор, отображающий каждый вектор $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ в вектор $y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2$. Векторы x, y ортогональны, и поэтому ясно, что если L — нетривиальное подпространство $\mathbf{X}_2$, то для $x \in L$ вектор $\mathcal{Q}x \in L^\perp$ и, следовательно, $\mathcal{Q}x \notin L$, если $x \neq 0$, т. е. оператор $\mathcal{Q}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

2. Если известен базис инвариантного подпространства, то вид матрицы оператора может быть упрощен. Именно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, L — подпространство $\mathbf{X}_n$, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$ и имеющее размерность m. Пусть векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ принадлежат L. Тогда $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L

(докажите!) и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j,\ k = 1, \dots, m,\ \mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j,\ k = m+1, \dots, n.$$

Эти равенства показывают, что элементы матрицы A_e, стоящие на пересечении первых m столбцов и последних $(n-m)$ строк, — нули, следовательно, матрица A_e может быть записана как блочная 2×2 треугольная матрица:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где A_{11} — квадратная матрица размера m, A_{22} — квадратная матрица размера $n-m$, 0 — нулевая матрица размера $(n-m) \times m$, A_{12} — матрица размера $m \times (n-m)$.

Еще большее упрощение матрицы A_e достигается, когда пространство $\mathbf{X}_n$ представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств L и M оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathbf{X}_n = L \dotplus M$ и базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$ выбран так, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Тогда, как нетрудно видеть, в представлении (1.1) матрица A_{12} будет нулевой, т. е. матрица A_e принимает блочно диагональный вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

2.1. Очевидно, верно и обратное, а именно, если матрица оператора в некотором базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$ имеет блочную структуру вида (1.2), то пространство $\mathbf{X}_n$ представимо как прямая сумма двух подпространств, базисами этих подпространств будут векторы базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ с номерами, совпадающими с номерами строк соответствующих блоков.

2.2. Вообще говоря, и подпространства L и M могут распадаться на прямые суммы инвариантных подпространств меньшей размерности. Тогда количество блоков, стоящих на диагонали матрицы A_e, будет увеличиваться, а их размеры будут уменьшаться.

2.3. Наиболее простым является случай, когда пространство $\mathbf{X}_n$ может быть представлено в виде прямой суммы n одномерных инвариантных подпространств оператора $\mathcal{A}$. Тогда матрица A_e становится диагональной. Однако такое представление возможно лишь для некоторых специальных классов операторов.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *— невырожденный оператор. Пусть* $L \subset \mathbf{X}_n$ *— инвариантное подпространство оператора* $\mathcal{A}$. *Тогда для любого* $x \in L$ *найдется, и при том только один, вектор* $y \in L$ *такой, что* $\mathcal{A}y = x$[1].

Доказательство. Подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, поэтому можно ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{A}_L : L \to L$, полагая $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$ для $x \in L$. Оператор $\mathcal{A}_L$ не вырожден, так как если $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x = 0$, то $x = 0$, поскольку $\mathcal{A}$ не вырожден (см. теорему 2, с. 149). Отсюда вытекает, что уравнение $\mathcal{A}_L y = x$ при любом $x \in L$ имеет единственное решение $y \in L$. $\square$

Оператор $\mathcal{A}_L$, определенный в ходе доказательства леммы 1, называют *сужением оператора* $\mathcal{A}$ на его инвариантное подпространство L.

§ 2. Собственных числа и собственные векторы. Характеристический полином

В предыдущем параграфе была показана особая роль одномерных инвариантных подпространств оператора. С понятием одномерного инвариантного подпространства тесно связано понятие собственного вектора оператора.

1. Будем говорить, что вектор $x \in \mathbf{X}$ — *собственный вектор оператора* $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, если $x \neq 0$ и существует число λ такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \tag{2.1}$$

Число λ при этом называется *собственным числом оператора* $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор x соответствует (отвечает) собственному числу λ. Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют также *собственной парой оператора* $\mathcal{A}$.

2. Пусть x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, т. е. одномерное подпространство пространства $\mathbf{X}$, натянутое на собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

3. Пусть λ — собственное число оператора $\mathcal{A}$. Ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ будем обозначать через L_λ и называть *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$. Понятно, что $L_\lambda \neq \{0\}$. Всякий нену-

[1] Можно сказать, таким образом, что невырожденный оператор осуществляет взаимнооднозначное отображение любого своего инвариантного подпространства на это же подпространство.

левой вектор из L_λ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ.

4. Приведем простые примеры операторов, имеющих собственные векторы.

1) Для нулевого оператора всякий ненулевой вектор пространства $\mathbf{X}_n$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному нулю.

2) Для оператора αI, где $\alpha \in \mathbb{C}$, всякий ненулевой вектор пространства есть собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному α.

3) Пусть пространство $\mathbf{X}$ — прямая сумма подпространств L и M и пусть $\mathcal{P}$ — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}$ на подпространство L параллельно M. Тогда $\mathcal{P}x = x$ для любого вектора x из L, и $\mathcal{P}x = 0$ для любого $x \in M$, т. е. все ненулевые векторы из L — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$ и все они отвечают собственному числу, равному единице, тогда как все ненулевые векторы из M — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$, отвечающие собственному числу, равному нулю.

5. В вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$ не у всякого оператора есть собственные векторы. Так, например, оператор $\mathcal{Q}$, построенный в пункте 1, с. 163, не имеет собственных векторов в вещественном пространстве $\mathbf{X}_2$. Это сразу следует из того, что у оператора $\mathcal{Q}$ нет нетривиальных инвариантных подпространств.

Теорема 1. *Всякий оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет собственные векторы.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что линейное уравнение

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0 \tag{2.2}$$

имеет нетривиальное решение. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0. \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что $\det(A_e - \lambda I)$ — полином порядка n относительно λ. Поэтому уравнение (2.3) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Всякий корень λ_k уравнения (2.3) — собственное число оператора $\mathcal{A}$. В самом деле,

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0 \tag{2.4}$$

есть однородная система линейных уравнений с вырожденной матрицей, следовательно, она имеет нетривиальное решение. Обозначим это решение через ξ^k. Тогда вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$, очевидно, будет не равен нулю и будет решением уравнения $(\mathcal{A} - \lambda_k I)x^k = 0$. $\square$

Упражнение. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Показать, что у оператора $\mathcal{A}$ есть собственный вектор, принадлежащий L.

6. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в линейном пространстве $\mathbf{X}$, называются *перестановочными*, если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — перестановочные преобразования линейного пространства $\mathbf{X}$ и пусть $L_\lambda \subset \mathbf{X}$ — собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Тогда L_λ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $x \in L_\lambda$. Тогда $\mathcal{A}x = \lambda x$, следовательно, $\mathcal{BA}x = \lambda \mathcal{B}x$, но $\mathcal{BA} = \mathcal{AB}$, поэтому $\mathcal{AB}x = \lambda \mathcal{B}x$. Это означает, что вектор $\mathcal{B}x$ принадлежит подпространству L_λ. $\square$

7. Полином $\det(A - \lambda I)$ называется *характеристическим полиномом матрицы* A. Корни характеристического полинома называются *характеристическими (собственными) числами матрицы* A. Множество всех характеристических чисел матрицы A называется ее *спектром* и обозначается через $\sigma(A)$. Как установлено в ходе доказательства теоремы 1, с. 166, для любого числа $\lambda \in \sigma(A)$ существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, не равный нулю, и такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором матрицы* A, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

Теорема 2. *Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть T — невырожденная матрица, матрица $B = T^{-1}AT$ подобна матрице A. Тогда для любого λ из $\mathbb{C}$

$$B - \lambda I = T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T.$$

Поскольку $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$, то $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$. $\square$

Матрицы оператора в различных базисах подобны (см. п. 10, с. 148), поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора.*

Характеристические числа матрицы оператора называются *характеристическими числами этого оператора.* Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

Множество всех характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$ (часто называемое его *спектром*) будем обозначать через $\sigma(\mathcal{A})$. Максимум модуля характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$ называется его спектральным радиусом и обозначается через $\rho(\mathcal{A})$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, понятия характеристического и собственного числа, фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

Любой оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет не более чем n различных собственных чисел.

Теорема 3 (Кэли — Гамильтона[1)]). *Пусть*

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{2.5}$$

есть характеристический полином оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда

$$P_n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \cdots + a_0 I = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Используя формулу (5.5), с. 52, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ получим $(A-\lambda I)(\widetilde{A-\lambda I}) = P_n(\lambda)I$. Каждый элемент матрицы $(\widetilde{A-\lambda I})$, очевидно, есть полином от λ степени не выше $n-1$, поэтому можно написать, что $(\widetilde{A-\lambda I}) = \lambda^{n-1}C_{n-1} + \lambda^{n-2}C_{n-2} + \cdots + C_0$, где C_0, C_1, $\ldots$, C_{n-1} — некоторые квадратные матрицы порядка n, т. е.

$$P_n(\lambda)I = (A-\lambda I)(\lambda^{n-1}C_{n-1} + \lambda^{n-2}C_{n-2} + \cdots + C_0) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях

[1)] Артур Кэли (Arthur Cayley; 1821 — 1895) — английский математик, Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton; 1805 — 1865) — ирландский математик и физик.

равенства (2.7), получим

$$\begin{aligned} AC_0 &= a_0 I, \\ AC_1 - C_0 &= a_1 I, \\ AC_2 - C_1 &= a_2 I, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= a_{n-1} I, \\ -C_{n-1} &= \quad I. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Умножим теперь первое из равенств (2.8) на I, второе слева — на A, третье — на A^2, и так далее, последнее — на A^n, а затем сложим получившиеся равенства. В результате придем к соотношению $P_n(A) = 0$, которое эквивалентно тому, что $P_n(\mathcal{A}) = 0$. $\square$

Из теоремы 3 вытекает простое, но важное для приложений, например, в механике

Следствие 1. *Пусть оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ обратим. Тогда существует полином Q_{n-1}, степени не выше чем $n-1$, такой, что*

$$\mathcal{A}^{-1} = Q_{n-1}(\mathcal{A}).$$

Доказательство этого утверждения поручается читателю.

Теорема 4. *Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_p — собственные числа оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$. Пусть все они попарно различны. Пусть, далее, x^1, x^2, ..., x^p — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k$, $k = 1, 2, \dots, p$. Тогда векторы x^1, x^2, ..., x^p линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы система векторов x^1, x^2, ..., x^p линейно зависима. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что ее максимальную линейно независимую подсистему образуют векторы x^1, x^2, ..., x^r, $r < p$. Обозначим через L_r подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на векторы x^1, x^2, ..., x^r. Оно имеет размерность r и инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}_{L_r}$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_r. Тогда числа λ_1, ..., λ_r — собственные числа оператора $\mathcal{A}_{L_r}$. Все они попарно различны. Ненулевой вектор x^{r+1} принадлежит L_r и $\mathcal{A}_{L_r} x^{r+1} = \mathcal{A}x^{r+1} = \lambda_{r+1} x^{r+1}$, т. е. λ_{r+1} — собственное число оператора $\mathcal{A}_{L_r}$, но оператор $\mathcal{A}_{L_r}$ действует в пространстве размерности r и потому не может иметь больше чем r различных собственных чисел. $\square$

8. Из сказанного выше вытекает, что если у оператора $\mathcal{A}$ все собственные числа оказываются различными, то соответствующие им собственные векторы x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют базис пространства $\mathbf{X}_n$. По построению

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

поэтому матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{x^k\}_{k=1}^n$ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены числа λ_k, $k = 1, 2 \ldots, n$.

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0. \tag{2.9}$$

Очевидно, $\lambda = 1$ — корень этого уравнения. Нетрудно проверить, что

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Корни уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ есть $2 \pm 3i$. Таким образом,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

есть собственные числа матрицы A.

Координаты собственного вектора, отвечающего λ_1, есть решение однородной системы уравнений

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \tag{2.10}$$
$$x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \tag{2.11}$$
$$-4x_1 + 4x_3 = 0. \tag{2.12}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому ранг матрицы системы уравнений (2.10) – (2.12) равен двум и, следовательно, эта система уравнений может иметь лишь одно линейно независимое решение. Положим $x_3 = 1$ и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений (2.10) – (2.11). Получим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Таким образом, вектор $(1, 2, 1)$ — решение системы уравнений (2.10)–(2.12). Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида $c(1, 2, 1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Координаты собственного вектора, отвечающего λ_2, есть решение однородной системы уравнений

$$(2 - 3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \tag{2.13}$$

$$x_1 - (6 + 3i)x_2 + 9x_3 = 0, \quad (2.14)$$
$$-4x_1 + (3 - 3i)x_3 = 0. \quad (2.15)$$

Определитель $\begin{vmatrix} 2-3i & -5 \\ 1 & -(6+3i) \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений (2.13) – (2.14) при $x_3 = 1$. Получим $x_1 = (3 - 3i)/4$, $x_2 = (5 - 3i)/4$. Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_2, есть множество векторов вида $c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_3, есть множество векторов вида $c(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

В рассматриваемом примере все собственные числа различны. Соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства $\mathbb{C}^3$. Это видно и из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3-3i & 5-3i & 4 \\ 3+3i & 5+3i & 4 \end{vmatrix},$$

составленный из их координат, не равен нулю.

В случае, когда характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ имеет кратные корни, соответствующих им линейно независимых векторов может оказаться меньше, чем n, и они не будут базисом пространства $\mathbf{X}_n$.

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение есть $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. Корни этого уравнения есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Система уравнений для отыскания координат собственного вектора имеет, следовательно, вид

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \quad (2.16)$$
$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad (2.17)$$
$$-x_1 - x_3 = 0. \quad (2.18)$$

Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. Поэтому ранг матрицы этой системы равен двум, и линейное пространство решений системы (2.16) – (2.18) одномерно. Нетрудно видеть, что вектор $x = (1, 1, -1)$ — решение системы (2.16) – (2.18). Следовательно, множество всех собственных векторов матрицы — это множество векторов вида $c(1, 1, -1)$, где c — произвольное не равное нулю число. Понятно, что собственные векторы матрицы в рассматриваемом случае не образуют базиса в пространстве $\mathbb{C}^3$.

9. Размерность собственного подпространства оператора $\mathcal{A}$, отвечающего собственному числу λ этого оператора, называется *геометрической кратностью* собственного числа λ.

10. Кратность числа λ как корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ.

Теорема 5. *Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$, геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть L_{λ_0} — собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее его собственному числу λ_0, $\dim(L_{\lambda_0}) = m$, и векторы f^1, f^2, $\ldots$, f^m образуют базис этого подпространства. Дополним произвольно указанный базис векторами g^{m+1}, g^{m+2}, $\ldots$, g^n до базиса пространства $\mathbf{X}_n$. Поскольку $\mathcal{A}f^k = \lambda_0 f^k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то матрицу оператора $\mathcal{A}$ в полученном базисе можно представить в блочном виде (см. п. 2 с. 163)

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

где Λ_0 — диагональная матрица порядка m с элементами λ_0 на диагонали и, следовательно, характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ можно представить так:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^m Q_{n-m}(\lambda),$$

где $Q_{n-m}(\lambda)$ — некоторый полином порядка $n - m$. Теперь совершенно очевидно, что m не может превосходить кратности λ_0 как корня уравнения $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$. $\square$

§ 3. Операторы простой структуры

Говорят, что оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ есть оператор *простой структуры*, если можно указать базис $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$, все векторы которого — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе можно записать в виде

$$A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k),$$

где каждое собственное число оператора $\mathcal{A}$ повторяется столько раз, какова его геометрическая кратность.

Отметим также, что если $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — оператор простой структуры, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $k \leqslant n$, — все попарно различные собственные числа этого оператора, L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$, — соответствующие собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \dotplus L_{\lambda_2} \dotplus \cdots \dotplus L_{\lambda_k}.$$

Пусть $\mathcal{P}_i$ — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\mathcal{A}x = \lambda_1 \mathcal{P}_1 x + \lambda_2 \mathcal{P}_2 x + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k. \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) определяет так называемое *спектральное представление оператора* $\mathcal{A}$. Вследствие (1.4), с. 141, для любого целого неотрицательного j отсюда имеем $\mathcal{A}^j = \lambda_1^j \mathcal{P}_1 + \lambda_2^j \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k^j \mathcal{P}_k$ и, вообще, если Q_m — произвольный полином степени $m \geqslant 0$, то

$$Q_m(\mathcal{A}) = Q_m(\lambda_1)\mathcal{P}_1 + Q_m(\lambda_2)\mathcal{P}_2 + \cdots + Q_m(\lambda_k)\mathcal{P}_k. \tag{3.2}$$

Поскольку все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ попарно различны, то можно определить базисные функции Лагранжа (см. с. 42, с. 111)

$$\Phi_j(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_{j-1})(\lambda - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda - \lambda_k)}{(\lambda_j - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_k)},$$

$j = 1, 2, \ldots, k$. Из (3.2) тогда, очевидно, получаем

$$\mathcal{P}_j = \Phi_j(\mathcal{A}), \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.3}$$

Формулу (3.3) называют *формулой Сильвестра*[1]. Она показывает, что каждый из операторов $\mathcal{P}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, есть полином степени $k - 1$ от оператора $\mathcal{A}$, причем коэффициенты этого полинома зависят лишь от собственных чисел оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного числа оператора $\mathcal{A}$ совпадала с его алгебраической кратностью.*

Упражнения

1) Докажите теорему 1.

2) Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, действующие в пространстве $\mathbf{X}_n$, есть операторы простой структуры и пусть их характеристические полиномы совпадают. Доказать, что тогда существует невырожденный оператор $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ такой, что $\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$.

[1] Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814 — 1897) — английский математик.

§ 4. Инварианты оператора

1. В этом параграфе существенно используется

Лемма 1. *Для любого $x \in \mathbb{C}$ справедливо разложение*

$$d(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} =$$

$$= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n, \quad (4.1)$$

где

$$c_k = \sum_{1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{p_1,p_1} & a_{p_1,p_2} & \dots & a_{p_1,p_k} \\ a_{p_2,p_1} & a_{p_2,p_2} & \dots & a_{p_2,p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_k,p_1} & a_{p_k,p_2} & \dots & a_{p_k,p_k} \end{vmatrix}, \quad (4.2)$$

$k = 1, 2, \dots, n$. *Суммирование в* (4.2) *распространяется на все C_n^k определителей порядка k указанного вида.*

Определители, входящие в правую часть равенства (4.2), называются *диагональными* минорами порядка k матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$c_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \quad c_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство леммы 1. Обозначим через a^1, a^2, …, a^n столбцы матрицы A и будем трактовать определитель матрицы A как функцию ее столбцов, т. е. $\det A = \Delta(a^1, a^2, \dots, a^n)$. Тогда функцию $d(x)$ можно представить в виде

$$d(x) = \Delta(a^1 + xi^1, a^2 + xi^2, \dots, a^n + xi^n),$$

где, как обычно, через i^1, i^2, …, i^n обозначены единичные векторы пространства $\mathbb{C}^n$. Как мы знаем, определитель линеен по каждому из своих столбцов, поэтому, проводя элементарные вычисления, получим

$$\begin{gathered}d(x) = \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n) + \\ + x(\Delta(i^1, a^2, \ldots, a^n) + \Delta(a^1, i^2, \ldots, a^n) + \cdots + \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, i^n)) + \\ + x^2(\Delta(i^1, i^2, a^3 \ldots, a^n) + \cdots + \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^{n-2}, i^{n-1}, i^n)) + \\ + \cdots + x^n \Delta(i^1, i^2, \ldots, i^n). \quad (4.3)\end{gathered}$$

Поясним, что множителем при x^k является сумма C_n^k определителей, каждый из которых получается заменой k столбцов определителя $\Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ на соответствующие единичные векторы. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\Delta(i^1, i^2, \ldots, i^n) = 1$, а заменяя k столбцов в определителе $\Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ на единичные векторы с теми же номерами, мы получаем соответствующий диагональный минор порядка $n - k$ матрицы A. $\square$

2. Характеристический полином матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ с точностью до знака совпадает с $\det(\lambda I - A_e)$. Записывая этот определитель в виде разложения по степеням λ, получим

$$\det(\lambda I - A_e) = P_n(\lambda) = \lambda^n - \mathcal{I}_1 \lambda^{n-1} + \mathcal{I}_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \mathcal{I}_n. \quad (4.4)$$

Как уже отмечалось, коэффициенты полинома P_n являются *инвариантами оператора* $\mathcal{A}$. Все они выражаются через элементы матрицы оператора, но при этом важно помнить, что никакое преобразование базиса их значений не меняет. В связи этим приняты обозначения $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{A})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Используя формулы (4.1), (4.2), нетрудно получить следующие выражения для инвариантов $\mathcal{I}_k(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ через элементы матрицы A_e:

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{A}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a^e_{i_1,i_1} & a^e_{i_1,i_2} & \ldots & a^e_{i_1,i_k} \\ a^e_{i_2,i_1} & a^e_{i_2,i_2} & \ldots & a^e_{i_2,i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^e_{i_k,i_1} & a^e_{i_k,i_2} & \ldots & a^e_{i_k,i_k} \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, в частности,

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = a^e_{11} + a^e_{22} + \cdots + a^e_{nn}, \quad \mathcal{I}_n(\mathcal{A}) = \det A_e, \quad (4.6)$$

причем вследствие формул Вьета (см. п. 23, с. 23)

$$a^e_{11} + a^e_{22} + \cdots + a^e_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \quad \det A_e = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad (4.7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа оператора $\mathcal{A}$. Вообще, $\mathcal{I}_k(\mathcal{A})$ есть сумма всевозможных произведений k различных характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$.

3. Полезно отметить, что, поскольку всякая квадратная матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ порождает линейный оператор (умножения на вектор), действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$, ей можно отнести величины $\mathcal{I}_k(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вычисляемые по формулам вида (4.5) с заменой a_{ij}^e на a_{ij}. Понятно, что эти величины не меняются ни при каком подобном преобразовании матрицы A и потому называются *инвариантами матрицы* A.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда существует положительное число ε_0 такое, что если $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $\varepsilon \neq 0$, то оператор $\mathcal{A} + \varepsilon I$ обратим.*

Доказательство этой теоремы поручается читателю в качестве упражнения.

Величину $\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = a_{11}^e + a_{22}^e + \cdots + a_{nn}^e = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ называют *следом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначают через $\mathrm{tr}(\mathcal{A})$.

Отметим следующие полезные формулы:

$$\mathrm{tr}(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha\,\mathrm{tr}(\mathcal{A}) + \beta\,\mathrm{tr}(\mathcal{B}), \tag{4.8}$$

Здесь $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном линейном пространстве, α, β — произвольные числа.

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_m$, $\mathcal{B} : \mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_n$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{tr}(\mathcal{B}\mathcal{A}). \tag{4.9}$$

Равенство (4.8) непосредственно вытекает из определения следа оператора. Равенство (4.9) легко проверяется переходом к матрицам операторов и прямыми вычислениями величин, записанных в его правой и левой частях.

Упражнение. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном линейном пространстве. Докажите, что характеристические полиномы операторов $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ совпадают.

Указание. Если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, это следует из подобия матриц операторов $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$. В общем случае полезно использовать теорему 1.

§ 5. Инвариантные функции операторного аргумента

1. Функцию f, ставящую в соответствие каждому оператору $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ число, назовем *инвариантной скалярной функцией операторного аргумента на операторе* $\mathcal{A}$, если

$$f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}) = f(\mathcal{A}) \tag{5.1}$$

для любого невырожденного оператора $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$.

Теорема 1. *Для того, чтобы скалярная функция f операторного аргумента была инвариантной на любом операторе простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы она зависела только от инвариантов оператора.*

Доказательство. Характеристические полиномы операторов $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$ и $\mathcal{A}$ при любом невырожденном операторе $\mathcal{Q}$ совпадают. Поэтому, если скалярная функция зависит только от инвариантов оператора, то она инвариантна. Обратно, пусть все инварианты операторов простой структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают. Тогда (см. упражнение 2, с. 173) существует невырожденный оператор $\mathcal{Q}$ такой, что $\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$ и, если функция f инвариантна, то $f(\mathcal{B}) = f(\mathcal{A})$. $\square$

Упражнение. Приведите примеры инвариантных скалярных функций операторного аргумента.

2. Операторную функцию f, т. е. функцию, отображающую линейное пространство операторов в себя, назовем *инвариантной на операторе* $\mathcal{A}$, если

$$f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}) = \mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}$$

для любого невырожденного оператора $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$.

Теорема 2. *Операторная функция f инвариантна на любом операторе $\mathcal{A}$ простой структуры тогда и только тогда, когда для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ простой структуры имеет место представление:*

$$f(\mathcal{A}) = \varphi_0 I + \varphi_1\mathcal{A} + \varphi_2\mathcal{A}^2 + \ldots + \varphi_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}, \qquad (5.2)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(\mathcal{A})$, φ_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, есть инвариантные скалярные функции операторного аргумента.

Доказательство. При любом невырожденном операторе $\mathcal{Q}$ характеристические полиномы, а значит, и инварианты операторов $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}$ и $\mathcal{A}$ совпадают. Очевидно также, что $(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})^p = \mathcal{Q}\mathcal{A}^p\mathcal{Q}^{-1}$ при любом целом неотрицательном p. Поэтому любая функция вида (5.2) инвариантна.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор простой структуры, $\{e_k\}_{k=1}^n$ — его собственные векторы, образующие базис пространства $\mathbf{X}_n$, $\mathcal{A}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Определим оператор $\mathcal{Q}$ равенствами $\mathcal{Q}e_1 = -e_1$, $\mathcal{Q}e_k = e_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}$. Очевидно также, что $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}e_k = \mathcal{A}e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{A}$. Положим $\mathcal{D} = f(\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}$.

По условию теоремы $\mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1} = f(\mathcal{A})$, значит, $\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{D}$, или $\mathcal{Q}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{Q}$. Следовательно,

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}e_1 = -\mathcal{D}e_1. \tag{5.3}$$

С другой стороны, если

$$\mathcal{D}e_1 = d_1e_1 + d_2e_2 + \cdots + d_ne_n, \tag{5.4}$$

то

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}e_1 = -d_1e_1 + d_2e_2 + \cdots + d_ne_n. \tag{5.5}$$

Из равенств (5.3)–(5.5), очевидно, вытекает, что $d_2, d_3, \ldots, d_n = 0$, а это означает, что $\mathcal{D}e_1 = d_1e_1$, т. е. e_1 — собственный вектор оператора $\mathcal{D}$. Аналогично доказывается, что и все остальные векторы системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ — собственные векторы оператора D, т. е. $f(\mathcal{A})e_k = d_ke_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим теперь, что для любого обратимого оператора $\mathcal{Q}$ справедливы равенства $\mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^{-1}g_k = d_kg_k$, где $g_k = \mathcal{Q}e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, следовательно, $f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})g_k = d_kg_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, все собственные числа операторов $f(\mathcal{A})$ и $f(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1})$ совпадают. Это означает, что все собственные числа оператора $f(\mathcal{A})$ — инвариантные скалярные функции оператора $\mathcal{A}$ и потому зависят только от инвариантов оператора $\mathcal{A}$.

Пусть e_1, e_2 — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу: $\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1$, $\mathcal{A}e_2 = \lambda e_2$. Тогда и собственные числа оператора $\mathcal{D}$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2, также совпадают: $\mathcal{D}e_1 = de_1$, $\mathcal{D}e_2 = de_2$. Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение оператор $\mathcal{Q}$, определяемый равенствами $\mathcal{Q}e_1 = e_2$, $\mathcal{Q}e_2 = e_1$, $\mathcal{Q}e_3 = e_3$, …, $\mathcal{Q}e_n = e_n$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{Q}^{-1}$ существует и $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}e_k = \mathcal{A}e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{A}$, а значит, и

$$\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{D}. \tag{5.6}$$

Пусть теперь $e = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$, где β_1, β_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно. В силу (5.6) имеем $\mathcal{Q}\mathcal{D}e = \mathcal{D}\mathcal{Q}e$, или

$$\mathcal{Q}(d_1\beta_1e_1 + d_2\beta_2e_2) = \mathcal{D}(\beta_1e_2 + \beta_2e_1),$$

поэтому

$$d_1\beta_1e_2 + d_2\beta_2e_1 = \beta_1d_2e_2 + \beta_2d_1e_1,$$

откуда вытекает, что $d_1\beta_1 = \beta_1d_2$, $d_2\beta_2 = \beta_2d_1$, следовательно, $d_1 = d_2$. Как нетрудно убедиться, это означает, что кратности всех собственных чисел операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ совпадают и, таким образом, установлено, что если

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_s\mathcal{P}_s, \tag{5.7}$$

$s \leqslant n$, есть спектральное представление оператора $\mathcal{A}$ (см. (3.1), с. 173), то спектральное представление оператора $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = d_1\mathcal{P}_1 + d_2\mathcal{P}_2 + \cdots + d_s\mathcal{P}_s. \tag{5.8}$$

При этом существенно, что операторы проектирования $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, в равенстве (5.7) те же самые, что и в равенстве (5.8). Как показано в § 3, с. 172, каждый из операторов $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, есть полином степени не выше $s - 1$ от оператора $\mathcal{A}$ с коэффициентами, зависящими лишь от собственных чисел оператора $\mathcal{A}$. Отсюда, очевидно, следует справедливость представления (5.2). □

Теорема 3. *Для того, чтобы функция f была линейной и инвариантной на любом операторе простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$f(\mathcal{A}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{A}) I + 2\mu\mathcal{A}, \tag{5.9}$$

где λ, μ — числа.

Доказательство этой теоремы поручается читателю в качестве упражнения.

§ 6. Инвариантные подпространства оператора в вещественном пространстве

1. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$. Матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе $\mathcal{E}_n$ вещественна. Уравнение (2.3), с. 166, т. е. характеристическое уравнение матрицы A_e, — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Оно, вообще говоря, имеет как вещественные, так и комплексные корни.

Если λ — вещественный корень уравнения (2.3), то система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \tag{6.1}$$

имеет нетривиальное вещественное решение ξ, и для вектора $x = \mathcal{E}_n\xi$ выполнено равенство $\mathcal{A}x = \lambda x$, т. е. x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. Таким образом, все вещественные характеристические числа матрицы A_e — собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Если число λ не совпадает ни с одним из вещественных корней уравнения (2.3), то система уравнений (6.1) не может иметь нетривиальных вещественных решений, поэтому, если все корни уравнения (2.3) — комплексные числа, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных векторов.

Таким образом, линейный оператор, действующий в вещественном пространстве, может не иметь одномерных инвариантных подпространств.

2. Каждому комплексному характеристическому числу матрицы A_e соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, если $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное характеристическое число матрицы A_e, то $\det(A_e - \lambda I) = 0$, и система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \tag{6.2}$$

имеет нетривиальное комплексное решение $\xi = \zeta + i\eta$. Поясним, что ζ и η — векторы из $\mathbb{R}^n$. Более подробная запись системы (6.2), с учетом того, что A_e — вещественная матрица, дает

$$A_e\zeta + iA_e\eta = (\alpha + i\beta)(\zeta + i\eta) = \alpha\zeta - \beta\eta + i(\beta\zeta + \alpha\eta),$$

откуда, приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$A_e\zeta = \alpha\zeta - \beta\eta,$$

$$A_e\eta = \beta\zeta + \alpha\eta.$$

Полагая $x = \mathcal{E}_n\zeta$, $y = \mathcal{E}_n\eta$, будем иметь

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y. \tag{6.4}$$

Образуем подпространство L, натянутое на векторы x, y. Пусть вектор $z \in L$. Это означает, что $z = \gamma x + \delta y$ для некоторых $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A}z \in L$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}z = \gamma\mathcal{A}x + \delta\mathcal{A}y = \gamma(\alpha x - \beta y) + \delta(\beta x + \alpha y) = \\ = (\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)y \in L.\end{aligned}$$

Таким образом, L — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$.

Упражнения.

1) Показать, что векторы x, y, удовлетворяющие соотношениям (6.3), (6.4), линейно независимы, т. е подпространство L двумерно.

2) Пусть $\mathbf{X}_n$ — вещественное пространство. Показать, что в любом подпространстве $L_m \subset \mathbf{X}_n$, размерности $m \geqslant 2$, инвариантном относительно оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, оператор $\mathcal{A}$ имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

§ 7. Нильпотентный оператор

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$, называется *нильпотентным*, что $\mathcal{A}^q = 0$. Наименьшее q, для которого выполнено указанное равенство, называется *индексом* нильпотентности оператора $\mathcal{A}$. Аналогичным образом вводится понятие *нильпотентности* квадратной матрицы.

Вследствие (5.8), с. 146, имеем $A_e^q = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}^q\mathcal{E}$, поэтому, если $\mathcal{A}$ — нильпотентный оператор, то и его матрица в любом базисе нильпотентна с тем же индексом нильпотентности и, наоборот, если матрица оператора в некотором базисе нильпотентна, то и оператор нильпотентен с тем же индексом нильпотентности.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были равны нулю.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен и q — индекс его нильпотентности. Пусть λ, x — собственная пара оператора $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = \lambda x$, следовательно, $\mathcal{A}^q x = \lambda^q x$. Мы предположили, что $\mathcal{A}^q = 0$, поэтому $\lambda^q x = 0$, но $x \neq 0$, значит, $\lambda = 0$. Обратно, пусть все собственные числа оператора $\mathcal{A}$ равны нулю. Тогда характеристическое уравнение оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $\lambda^n = 0$, и по теореме 3, с. 168, получаем, что $\mathcal{A}^n = 0$. $\square$

Укажем на очевидное

Следствие 1. *Индекс нильпотентности оператора, действующего в n-мерном пространстве, не может превосходить n.*

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нильпотентный оператор индекса q. Тогда, очевидно, существует вектор $x^0 \in \mathbf{X}_n$ такой, что $\mathcal{A}^{q-1}x^0 \neq 0$.

Упражнение.

Докажите, что векторы x^0, $\mathcal{A}x^0$, …, $\mathcal{A}^{q-1}x^0$ линейно независимы.

§ 8. Треугольная форма матрицы оператора

1. В этом параграфе будет показано, что матрица любого оператора, действующего в конечномерном пространстве за счет специального выбора базиса может быть приведена к треугольному виду. Указаны также некоторые применения этого результата.

Теорема 1. *Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, можно указать такой базис, что мат-*

рица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе треугольна, причем по ее диагонали расположены все собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

В основе доказательства этого утверждения лежит

Теорема 2 (Шур[1]). *Пусть A — квадратная матрица порядка n, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A, занумерованные в некотором порядке. Существует унитарная матрица U такая, что*

$$U^* A U = T, \tag{8.1}$$

где T — верхняя треугольная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Пусть u^1 — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу λ_1. Собственные векторы матрицы определяются с точностью до скалярного множителя, поэтому можно считать, что $|u^1| = 1$ [2].

Построим в пространстве $\mathbb{C}^n$ ортонормированный базис $\{u^k\}_{k=1}^n$ (см. п. 1, с. 122) и обозначим через U_1 матрицу, столбцами которой служат элементы векторов $\{u^k\}_{k=1}^n$.

Вычислим матрицу $U_1^* A U_1$. Учтем при этом, что $Au^1 = \lambda_1 u^1$, а $(u^k, u^1) = 0$ для $k = 2, 3, \ldots, n$. В результате, получим, что

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Справа в этом равенстве — блочная 2×2 матрица. Первый диагональный блок состоит из одного элемента, равного λ_1. Второй диагональный блок — квадратная матрица размера $n - 1$. Блок в позиции (2,1) — нулевой столбец длины $n - 1$. Блок в позиции (1,2) — строка длины $n - 1$ с ненулевыми, вообще говоря, элементами. Обозначения, аналогичные использованным здесь, будут применяться и в дальнейшем.

Матрица $U_1^* A U_1$ подобна матрице A, поэтому (см. теорему 2, с. 167)

$$\sigma(U_1^* A U_1) = \sigma(A).$$

[1] Исай Шур (Issai Schur; 1875 — 1941) — немецкий математик.

[2] Здесь и далее на протяжение этого параграфа под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

С другой стороны, из (8.3) вытекает, что $\sigma(U_1^* A U_1) = \lambda_1 \cup \sigma(A_1)$. Для того, чтобы убедиться в этом, нужно разложить по первому столбцу определитель $\det(\lambda I - U_1^* A U_1)$. Таким образом,

$$\sigma(A_1) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

Рассуждая точно так же, как при построении матрицы U_1, можно построить унитарную матрицу U_2 порядка $n-1$ такую, что

$$U_2^* A_1 U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Положим

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица V_2, как нетрудно убедиться, есть унитарная матрица порядка n. Проводя элементарные вычисления, получим

$$V_2^* U_1^* A U_1 V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что, продолжая этот процесс, можно построить унитарные матрицы $V_3, \ldots, V_{n-1}$ такие, что матрица

$$V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^* A U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$$

есть верхняя треугольная матрица, на главной диагонали которой последовательно стоят числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Положим $U = U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$. Матрица U унитарна как произведение унитарных матриц (см. п. 6, с. 63), причем $U^* = V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^*$, поэтому для матрицы $T = U^* A U$ справедливо равенство (8.2). $\square$

Совершенно аналогично доказывается, что существует унитарная матрица V такая, что

$$V^* A V = L,$$

где L — нижняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены характеристические числа матрицы A.

Замечание 1. Из доказательства теоремы Шура видно, что если матрица A вещественна и все ее характеристические числа (а следовательно, и собственные векторы) вещественны, то матрица U в (8.1) может быть выбрана вещественной и унитарной, иными словами, ортогональной.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, $\mathcal{F}_n = \{f^k\}_{k=1}^n$ — произвольно фиксированный базис в $\mathbf{X}_n$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n A_f$, где A_f — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе (см. (5.3), с. 145). По теореме Шура существует унитарная матрица U такая, что $A_f = UTU^*$, где T — матрица вида (8.2), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A_f, или, что все равно, — собственные числа оператора $\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n UTU^*$, или $\mathcal{A}\mathcal{F}_n U = \mathcal{F}_n UT$. Положим $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_n U$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T$. Таким образом, T — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_n$. $\square$

Замечание 2. Если пространство $\mathbf{X}_n$ унитарно, а базис $\mathcal{F}_n$ ортонормирован, то и базис $\mathcal{E}_n$ также ортонормирован.

Матрицу T, фигурирующую в теореме 1, часто называют *формой Шура* матрицы оператора.

2. Часто оказывается полезным дальнейшее упрощение матрицы оператора.

Теорема 3. *Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n, λ_1, λ_2, ..., λ_k — попарно различные характеристические числа матрицы A кратностей n_1, n_2, ..., n_k, $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$. Существует невырожденная матрица S такая, что*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_k \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

есть квазидиагональная матрица, каждый диагональный блок T_i — верхняя треугольная матрица порядка n_i, все диагональные элементы матрицы T_i равны λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Сначала, используя теорему Шура, приведем унитарным подобием матрицу A к верхнему треугольному виду T. При этом характеристические числа матрицы A будем упорядочивать так, как это сделано в формулировке настоящей теоремы, т. е. сначала на диагонали треугольной матрицы будут расположены n_1 чисел λ_1, затем n_2 чисел λ_2 и т. д. Для того, чтобы завершить доказательство теоремы, нужно построить преобразование подобия, которое «уничтожит лишние» ненулевые элементы верхней треугольной матрицы и приведет ее к виду (8.5). Искомое преобразование будет получено как результат последовательных преобразований подобия.

Обратимся к верхней треугольной матрице T, полученной, как уже говорилось, из матрицы A при помощи теоремы Шура, и запишем ее в блочном виде
$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$
Здесь T_{11} — верхняя треугольная матрица порядка n_1, все диагональные элементы которой равны λ_1, T_{22} — верхняя треугольная матрица порядка $n-n_1$, среди ее диагональных элементов нет чисел равных λ_1. Рассмотрим верхние треугольные матрицы вида
$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & P \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_{n_1} & -P \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$
где I_{n_1}, I_{n-n_1} — единичные матрицы порядков n_1, $n-n_1$ соответственно. Элементарные вычисления показывают, что матрицы (8.6) взаимно обратны. Наша ближайшая цель — подобрать матрицу P так, чтобы выполнялось равенство
$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & P \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & -P \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$
Для этого, как нетрудно убедиться, достаточно, чтобы матрица P была решением уравнения[1)]
$$PT_{22} - T_{11}P = -T_{12}. \tag{8.8}$$
Уравнение (8.8) есть система линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы P. Покажем, что соответствующая однородная система
$$PT_{22} - T_{11}P = 0 \tag{8.9}$$
может иметь только тривиальное решение. Перепишем уравнение (8.9) в эквивалентном виде $P(T_{22} - \lambda_1 I_{n-n_1}) = (T_{11} - \lambda_1 I_{n_1})P$. Матрица $T_{22} - \lambda_1 I_{n-n_1}$, очевидно, обратима, поэтому
$$P = (T_{11} - \lambda_1 I_{n_1})P(T_{22} - \lambda_1 I_{n-n_1})^{-1}.$$
Отсюда вытекает, что
$$P = (T_{11} - \lambda_1 I_{n_1})^q P((T_{22} - \lambda_1 I_{n-n_1})^{-1})^q$$
для любого целого $q \geqslant 1$. Матрица $T_{11} - \lambda_1 I_{n_1}$ по построению нильпотентна, следовательно, найдется такое $q \geqslant 1$, что $(T_{11} - \lambda_1 I_{n_1})^q = 0$,

[1)]Уравнение (8.8) относится к классу так называемых уравнений Сильвестра, см., например, [8], [13] по списку дополнительной литературы.

значит и $P = 0$. Таким образом, преобразование вида (8.7) существует. Дальнейшие рассуждения, приводящие к соотношеню (8.5), выполняются путем последовательного понижения порядка рассматриваемой матрицы. Аналогичные построения уже выполнялись нами при доказательстве теоремы Шура, с. 182. $\square$

Упражнение. Опираясь на теорему 3, докажите, что для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве $\mathbf{X}_n$, существуют такие его инвариантные подпространства M и N, что $\mathbf{X}_n = M \dotplus N$, сужение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство M есть нильпотентный оператор, сужение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство N — обратимый оператор.

3. Приведем простой но полезный пример применения теоремы Шура.

Теорема 4. *Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — произвольная квадратная матрица. Для любого $\varepsilon > 0$ существует обратимая матрица простой структуры $A_m = \{a_{ij}^{(m)}\}_{i,j=1}^n$ такая, что*

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} - a_{ij}^{(m)}| \leqslant \varepsilon. \tag{8.10}$$

Доказательство. По теореме 2 матрица A представима в виде $A = UTU^*$, где U — унитарная матрица, а T — верхняя треугольная матрица. Не ограничивая общности, можно считать, что диагональные элементы матрицы T упорядочены следующим образом: $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_k, \ldots, \lambda_k$. Каждое характеристическое число матрицы A повторено здесь столько раз, какова его кратность. Пусть теперь T_m — верхняя треугольная матрица, отличающаяся от T лишь диагональными элементами, которые примем равными

$$\begin{gathered}\lambda_1 + 1/m, \lambda_1 + 1/2m, \ldots, \lambda_1 + 1/n_1 m,\\ \lambda_2 + 1/m, \lambda_2 + 1/2m, \ldots, \lambda_2 + 1/n_2 m, \ldots,\\ \lambda_k + 1/m, \lambda_k + 1/2m, \ldots, \lambda_k + 1/n_k m,\end{gathered}$$

где n_i — кратность собственного числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $m \geqslant 1$. Пусть $A_m = UT_mU^*$. Нетрудно проверить, что все диагональные элементы матрицы T_m при достаточно большом m отличны от нуля и все они попарно различны, следовательно, все характеристические числа матрицы A_m отличны от нуля и все они попарно различны. Это означает, что при всех достаточно больших m матрицы A_m — обратимые матрицы простой структуры. Далее, $A - A_m = U(T - T_m)U^*$, поэтому, как нетрудно убедиться $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} - a_{ij}^{(m)}| \leqslant c/m$, где c — постоянная, зависящая только от n и элементов матрицы U. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выбирая m достаточно большим, получим (8.10). □

Таким образом, сконструированная нами последовательность матриц $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сходится* к матрице A, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

§ 9. Вещественная форма Шура

Теорема 1. *Пусть A — произвольная вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда существует ортогональная матрица Q такая, что $A = Q^T T Q$, где T — верхняя квазитреугольная матрица. Диагональные блоки матрицы T — квадратные матрицы размера единица или два. Множество всех характеристических чисел двумерных диагональных блоков матрицы T исчерпывает множество всех комплексных характеристических чисел матрицы A.*

Доказательство. Если все характеристические числа матрицы A вещественны, то справедливость теоремы сразу следует из теоремы 2, см. замечание 1. Поэтому будем считать, что среди характеристических чисел матрицы A есть комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$. Как показано в п. 1, ему соответствует двумерное инвариантное подпространство матрицы A в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть векторы q_1, q_2 образуют базис этого подпространства, ортонормированный в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$Aq_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{21}q_2, \quad Aq_2 = \alpha_{12}q_1 + \alpha_{22}q_2. \tag{9.1}$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ и } T_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

подобны, как матрицы одного и того же оператора в разных базисах, поэтому они имеют общие характеристические числа, равные λ, $\bar{\lambda}$. Дополним векторы q_1, q_2 до ортонормированного базиса $\{q_k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть Q — матрица, столбцами которой служат векторы указанного базиса. Элементарные вычисления с учетом равенств (9.1) и ортонормированности векторов q_1, q_2 показывают, что

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Завершение доказательства, фактически, совпадает с соответствующими рассуждениями из доказательства теоремы Шура. □

Глава 10

Операторы в евклидовом пространстве

§ 1. Линейные функционалы

Линейное отображение пространства $\mathbf{X}$ в одномерное пространство $\mathbf{Y} = \mathbb{C}$ называется *линейным функционалом* (*линейной формой*). Подчеркнем, что линейный функционал ставит в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{X}$ число.

Теорема 1 (Рисс[1]). *Пусть l — линейный функционал, заданный на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда существует и при том только один вектор $u \in \mathbf{X}_n$ такой, что*

$$l(x) = (x, u) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{1.1}$$

Доказательство. Убедимся сначала, что вектор u определяется по функционалу l однозначно. Действительно, если предположить, что существует еще один вектор $u^1 \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$l(x) = (x, u^1) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n, \tag{1.2}$$

то, вычитая равенства (1.1), (1.2) почленно, получим, что

$$(x, u^1 - u) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

В частности, в последнем равенстве можно положить $x = u^1 - u$, и тогда $(u^1 - u, u^1 - u) = 0$, т. е. $u^1 = u$.

Для доказательства существования вектора u, определяемого тождеством (1.1), фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$. Тогда вследствие линейности функционал l получаем

$$l(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k l(e^k). \tag{1.3}$$

Положим $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{l(e^k)} e^k$. Применяя формулу (8.2), с. 124, будем иметь, что $l(x) = (x, u)$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$. $\square$

[1]Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes; 1880 — 1956) — венгерский математик.

§ 2. Сопряженный оператор

1. Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства, $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Оператор $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$ называется *сопряженным* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \quad \text{для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m. \tag{2.1}$$

Конечно, в левой части равенства здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Y}_m$, а в правой части — в пространстве $\mathbf{X}_n$.

2. Для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ сопряженный оператор существует. В самом деле, фиксируем вектор $y \in \mathbf{Y}_m$ и будем рассматривать скалярное произведение $(\mathcal{A}x, y)$ как функционал на пространстве $\mathbf{X}_n$. Из линейности оператора $\mathcal{A}$ и линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает, что этот функционал линеен. Значит, по теореме Рисса существует и при том только один вектор $g \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, g) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Таким образом, определено отображение, ставящее в соответствие каждому вектору $y \in \mathbf{Y}_m$ вектор $g \in \mathbf{X}_n$. Обозначим это отображение через $\mathcal{A}^*$. Тогда можно написать, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,\ y \in \mathbf{Y}_m. \tag{2.2}$$

Осталось доказать, что отображение $\mathcal{A}^*$ линейно. Пусть $y^1, y^2 \in \mathbf{Y}_m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) &= \bar\alpha(\mathcal{A}x, y^1) + \bar\beta(\mathcal{A}x, y^2) = \\ &= \bar\alpha(x, \mathcal{A}^* y^1) + \bar\beta(x, \mathcal{A}^* y^2) = (x, \alpha\mathcal{A}^* y^1 + \beta\mathcal{A}^* y^2).\end{aligned} \tag{2.3}$$

С другой стороны, по определению отображения $\mathcal{A}^*$ имеем

$$(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2)). \tag{2.4}$$

Сравнивая (2.3), (2.4) и используя произвольность вектора $x \in \mathbf{X}_n$, получаем

$$\mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha\mathcal{A}^* y^1 + \beta\mathcal{A}^* y^2.$$

Из определения сопряженного оператора, очевидно, вытекает, что $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

Упражнения.

1) Докажите, что каждому оператору соответствует только один сопряженный оператор.

2) Докажите, что если $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейные операторы, то $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^* + \bar{\beta}\mathcal{B}^*$ для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

3) Покажите, что $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

4) Докажите, что если линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*$ также обратим, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

3. Если пространство $\mathbf{Y}_m$ евклидово, можно указать полезную формулу для вычисления матрицы оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$. Именно, пусть $\mathcal{E}_n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, $\mathcal{Q}_m$ — базис пространства $\mathbf{Y}_m$, $G_q = \{(q^j, q^i)\}_{i,j=1}^m$ — матрица Грама, соответствующая базису $\mathcal{Q}_m$, матрица $G_{\mathcal{A}}$ определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1, q^1) & (\mathcal{A}e^2, q^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^1) \\ (\mathcal{A}e^1, q^2) & (\mathcal{A}e^2, q^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}e^1, q^m) & (\mathcal{A}e^2, q^m) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}. \tag{2.5}$$

Действительно, умножая скалярно обе части уравнения (5.1), с. 144, на q^l, получим

$$(\mathcal{A}e^i, q^l) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} (q^j, q^l), \quad i = 1, 2, \dots, n, \ l = 1, 2, \dots, m. \tag{2.6}$$

Формула (2.5) — это матричная запись равенств (2.6). Матрица Грама G_q невырождена, так как $\mathcal{Q}_m$ — базис, следовательно,

$$A_{eq} = G_q^{-1} G_{\mathcal{A}}. \tag{2.7}$$

В случае, когда базис $\mathcal{Q}_m$ ортонормирован, т. е. матрица G_q единичная,

$$A_{eq} = G_{\mathcal{A}}. \tag{2.8}$$

4. Если и пространство $\mathbf{X}_n$ евклидово, $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$ — сопряженный к оператору $\mathcal{A}$, то точно так же, как в предыдущем пункте, получаем, что

$$G_{\mathcal{A}^*} = G_e A_{qe}^*, \tag{2.9}$$

где A^*_{qe} — матрица оператора $\mathcal{A}^*$ относительно базисов $\mathcal{Q}_m$, $\mathcal{E}_n$, G_e — матрица Грама базиса $\mathcal{E}_n$, матрица $G_{\mathcal{A}^*}$ определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}^*q^1, e^1) & (\mathcal{A}^*q^2, e^1) & \dots & (\mathcal{A}^*q^m, e^1) \\ (\mathcal{A}^*q^1, e^2) & (\mathcal{A}^*q^2, e^2) & \dots & (\mathcal{A}^*q^m, e^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}^*q^1, e^n) & (\mathcal{A}^*q^2, e^n) & \dots & (\mathcal{A}^*q^m, e^n) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $(\mathcal{A}^*q^i, e^j) = (q^i, \mathcal{A}e^j) = \overline{(\mathcal{A}e^j, q^i)}$, то матрицы $G_{\mathcal{A}}$ и $G_{\mathcal{A}^*}$ взаимно сопряжены. Поэтому из (2.5) получаем $G_{\mathcal{A}^*} = (A_{eq})^* G_q$, откуда вследствие (2.9) вытекает, что

$$A^*_{qe} = G_e^{-1} (A_{eq})^* G_q. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) устанавливает связь между матрицами операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. В частности, если базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_m$ ортонормированы, то матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно сопряжены.

§ 3. Линейные уравнения в евклидовом пространстве

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ пространство $\mathbf{Y}_m$ допускает следующее ортогональное разложение:*

$$\mathbf{Y}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, $y^1 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$. Тогда существует $x \in \mathbf{X}_n$ такой, что $y = \mathcal{A}x$, следовательно,

$$(y, y^1) = (\mathcal{A}x, y^1) = (x, \mathcal{A}^*y^1) = 0,$$

т. е. y ортогонален $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$. Если же вектор $y \in \mathbf{Y}_m$ ортогонален $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, то $(y, \mathcal{A}x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, и тогда $(\mathcal{A}^*y, x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, поэтому $\mathcal{A}^*y = 0$, т. е. $y \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$. Эти рассуждения показывают, что $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ — ортогональное дополнение $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$, следовательно, по теореме 1, с. 137, равенство (3.1) выполнено. □

Очевидно, что имеет место и следующее представление:

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*). \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из конечномерного евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в конечномерное евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$. Тогда*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}^*). \tag{3.3}$$

Доказательство. Оператор $\mathcal{A}$ осуществляет изоморфизм пространств $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$ и $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$. Действительно, вследствие (3.2) для любого $x \in \mathbf{X}_n$ имеем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x^1$, где $x^1 \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$, т. е. любой элемент $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ — образ некоторого элемента из $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$. Предполагая, что $\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$ для несовпадающих x', x'' из $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$, получим, что $\mathcal{A}(x' - x'') = 0$, следовательно, $(x' - x'') \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$. Поскольку $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$ — линейное подпространство, то $(x' - x'') \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$. Вновь используя (3.2), получаем, что $x' - x'' = 0$. Таким образом, конечномерные пространства $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$ изоморфны, поэтому (см. теорему 3, с. 144) их размерности совпадают. $\square$

Непосредственным следствием теоремы 1 является

Теорема 3 (Теорема Фредгольма). *Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства, $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Для того, чтобы уравнение*

$$\mathcal{A}x = y \tag{3.4}$$

имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению однородного уравнения $\mathcal{A}^*z = 0$.

Упражнения.

1) Докажите теоремы 1, 2, § 2, гл. 8, опираясь на теорему Фредгольма 3.

2) Опираясь на теорему 2, докажите что $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$ для любой матрицы A.

3) Опираясь на представление (1.2), с. 156, покажите, что если уравнение (3.4) разрешимо, то множество его решений содержит единственный элемент наименьшей длины. Этот элемент называется *нормальным решением* уравнения (3.4).

§ 4. Псевдорешение. Метод регуляризации Тихонова

1. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$, y — фиксированный вектор из $\mathbf{Y}_m$, x — произвольный вектор из $\mathbf{X}_n$. Вектор $\mathcal{A}x - y$ называется *невязкой*, соответствующей уравнению

$$\mathcal{A}x = y. \tag{4.1}$$

Вещественная функция

$$F(x) = |\mathcal{A}x - y|^2,$$

определенная на пространстве $\mathbf{X}_n$, называется *функцией (функционалом) невязки*. Если $\mathcal{A}x \neq y$, т. е. вектор x не является решением уравнения (4.1), то $F(x) > 0$. Естественно попытаться найти вектор x, который доставляет минимальное значение функции невязки.

Вектор $x \in \mathbf{X}_n$, минимизирующий функцию невязки, называют *псевдорешением* уравнения (4.1). Если уравнение (4.1) разрешимо, то любое его решение является псевдорешением.

2. Псевдорешение существует при любой правой части уравнения (4.1). В самом деле, в соответствии с разложением (3.1), с. 191, представим вектор y в виде $y = y^1 + y^0$, где $y^1 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, $y^0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$. Тогда для любого $x \in \mathbf{X}_n$ вектор $\mathcal{A}x - y^1$ принадлежит $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, и, следовательно,

$$F(x) = |\mathcal{A}x - y^1|^2 + |y^0|^2.$$

Очевидно, что минимальное значение функции F равно $|y^0|^2$ и достигается на векторе x, являющемся решением уравнения

$$\mathcal{A}x = y^1. \tag{4.2}$$

Поскольку $y^1 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, уравнение (4.2) разрешимо. Нормальное решение x^0 уравнения (4.2) называют *нормальным псевдорешением* уравнения (4.1).

3. При любом $y \in \mathbf{Y}_m$ уравнение

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*y \tag{4.3}$$

разрешимо. Всякое его решение — псевдорешение уравнения (4.1). Действительно, так как $\mathcal{A}^*y^0 = 0$, то уравнение (4.3) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^1) = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) разрешимо, так как каждое решение уравнения (4.2) есть решение уравнения (4.4). Обратно, если x — решение уравнения (4.4), то вектор $\mathcal{A}x - y^1 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$ и, следовательно (см. (3.1), с. 191), ортогонален $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, но, с другой стороны, $\mathcal{A}x - y^1 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, значит $\mathcal{A}x - y^1 = 0$, т. е. x — решение уравнения (4.2).

Уравнение (4.3) называется *трансформацией Гаусса* уравнения (4.1). Трансформация Гаусса любого линейного уравнения приводит к разрешимому уравнению.

4. При фактическом построении нормального псевдорешения можно использовать *метод регуляризации Тихонова*. Рассмотрим наряду с функционалом невязки так называемый *регуляризующий функционал* (*функционал Тихонова*)

$$F_\alpha(x) = F(x) + \alpha|x|^2 = |\mathcal{A}x - y|^2 + \alpha|x|^2. \tag{4.5}$$

Здесь α — положительное число, называемое *параметром регуляризации.*

Теорема 1. *При любом положительном α существует единственный вектор x_α, доставляющий минимальное значение функционалу F_α на пространстве $\mathbf{X}_n$, предел x_α при $\alpha \to 0$ существует и равен x^0.*

Доказательство. Введем в рассмотрение уравнение

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}x + \alpha x = \mathcal{A}^*y. \tag{4.6}$$

Это уравнение имеет единственное решение x_α при любом $y \in \mathbf{X}_n$. В самом деле, если x — решение соответствующего однородного уравнения, то умножая обе части этого уравнения скалярно на x, получим $|\mathcal{A}x|^2 + \alpha|x|^2 = 0$, откуда вследствие положительности α, получаем, что x=0. Выполняя теперь элементарные выкладки, с учетом равенства $\mathcal{A}^*y = \mathcal{A}^*\mathcal{A}x_\alpha + \alpha x_\alpha$ получим

$$F_\alpha(x) = (\mathcal{B}_\alpha(x - x_\alpha), x - x_\alpha) + (y, y) - (\mathcal{B}_\alpha x_\alpha, x_\alpha),$$

где $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha I$. Поскольку $(\mathcal{B}_\alpha(x - x_\alpha), x - x_\alpha) > 0$ при любом $x \neq x_\alpha$, то x_α — единственная точка минимума функционала F_α. Таким образом,

$$F(x_\alpha) = |\mathcal{A}x_\alpha - y^1|^2 + |y^0|^2 + \alpha|x_\alpha|^2 \leqslant |\mathcal{A}x - y^1|^2 + |y^0|^2 + \alpha|x|^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n.$$

Полагая здесь $x = x^0$, получим

$$|\mathcal{A}x_\alpha - y^1|^2 + \alpha|x_\alpha|^2 \leqslant \alpha|x^0|^2, \tag{4.7}$$

поэтому $|x_\alpha| \leqslant |x^0|$ и по теореме Больцано — Вейерштрасса можно указать такую последовательность $\alpha_k \to 0$ и такой вектор $x^* \in \mathbf{X}_n$ что $x_{\alpha_k} \to x^*$ при $\alpha_k \to 0$. Из (4.7) вытекает, что $Ax^* = y^1$, причем $|x^*| \leqslant |x^0|$. Поскольку нормальное псевдорешение единственно, то $x^* = x^0$. Вновь используя единственность нормального псевдорешения, получаем, что $x_\alpha \to x^0$ при любом способе стремления α к нулю. $\square$

§ 5. Самосопряженный и косоэрмитов операторы

1. Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *самосопряженным* (*эрмитовым*), если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, иными словами, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n. \tag{5.1}$$

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *косоэрмитовым*, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, то есть

$$(\mathcal{A}x, y) = -(x, \mathcal{A}y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n. \tag{5.2}$$

Упражнение. Показать, что если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ вещественно для любого $x \in \mathbf{X}_n$; если оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ — мнимое число для любого $x \in \mathbf{X}_n$.

Поскольку в любом ортонормированном базисе матрицы взаимно сопряженных операторов взаимно сопряжены (см. п. 4, с. 190), то матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе эрмитова, матрица косоэрмитова оператора косоэрмитова.

Упражнение. Показать, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

1.1. Примером самосопряженного оператора является оператор ортогонального проектирования[1]. Действительно, пусть $\mathcal{P}$ — оператор ортогонального проектирования евклидова пространства $\mathbf{X}$ на подпространство $L \subset \mathbf{X}$, x, y — произвольные векторы из $\mathbf{X}$. По определению оператора ортогонального проектирования можем написать, что $y = \mathcal{P}y + y^2$, $x = \mathcal{P}x + x^2$, где x^2, y^2 — векторы, ортогональные L. Поэтому $(\mathcal{P}x, y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y)$. Точно так же $(x, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y)$, следовательно, $(\mathcal{P}x, y) = (y, \mathcal{P}x)$.

Упражнение. Докажите, что если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен и $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, то оператор $\mathcal{A}$ есть оператор ортогонального проектирования.

1.2. Рассуждая точно так же, как в п. 3, с. 62, нетрудно убедиться, что любой оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве, однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2, \tag{5.3}$$

[1] См. определение на с. 140.

где i — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

суть самосопряженные операторы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Если*

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n, \tag{5.4}$$

то $\mathcal{A} = 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Тогда для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ справедливо равенство

$$(\mathcal{A}(x+y), x+y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + 2\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, y).$$

Отсюда, используя условие (5.4), получаем, что $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, y) = 0$. Последнее равенство выполнено для любого $y \in \mathbf{X}_n$. Поэтому можно заменить y, на iy, но $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, iy) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}x, y)$. Таким образом, получаем, что $(\mathcal{A}x, y) = 0$ для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$. Полагая $y = \mathcal{A}x$, будем иметь, что $|\mathcal{A}x| = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, т. е. $\mathcal{A} = 0$. Итак, в случае самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ утверждение теоремы доказано. Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольный оператор. Если $(\mathcal{A}x, x) = 0$, то вследствие (5.3) с учетом самосопряженности операторов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ получаем, что $(\mathcal{H}_1 x, x) = 0$, $(\mathcal{H}_2 x, x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, откуда, вновь учитывая самосопряженность операторов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, получим, что $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 = 0$. □

Лемма 1. *Если для оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ вещественно при любом $x \in \mathbf{X}_n$, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен.*

Доказательство. Если $(\mathcal{A}x, x)$ — вещественное число, то

$$(\mathcal{A}^*x, x) = (x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, x),$$

следовательно, $((\mathcal{A}^* - \mathcal{A})x, x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, откуда по теореме 1 получаем, что $\mathcal{A}^* - \mathcal{A} = 0$. □

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 2. *Если для оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ при любом $x \in \mathbf{X}_n$ — мнимое число, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.*

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был самосопряжен необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было вещественным при любом $x \in \mathbf{X}_n$. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был косоэрмитов необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было мнимым при любом $x \in \mathbf{X}_n$.*

§ 6. Неотрицательный и положительно определенный операторы

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ называется *неотрицательным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{6.1}$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ называется *положительно определенным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \mathbf{X}_n. \tag{6.2}$$

Эрмитова матрица A порядка n называется *неотрицательной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{x}_i \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n. \tag{6.3}$$

Эрмитова матрица A порядка n называется *положительно определенной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{x}_i > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \mathbb{C}^n. \tag{6.4}$$

В двух последних определениях скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Упражнения.

1) Покажите что, если $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — положительно определенный оператор, то равенство $(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y)$ определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbf{X}_n$.

2) Покажите, что для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен и неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

3) Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Докажите, что если оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ положительно определен, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

4) Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

5) Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

6) Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

7) Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

§ 7. Унитарный оператор

1. Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *унитарным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I. \tag{7.1}$$

Упражнения.

1) Покажите, что для того чтобы оператор был унитарным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была унитарна (см. с. 63).

2) Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

3) Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

2. Если оператор $\mathcal{A}$ унитарен, то для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ имеем $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y)$, т. е. унитарный оператор не меняет скалярного произведения векторов, и, следовательно, унитарный оператор не меняет длин векторов.

3. Обратно, если линейный оператор не меняет скалярного произведения любых двух векторов из $\mathbf{X}_n$, то он унитарен. В самом деле, из равенства $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ вытекает, что $(x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y)$. Нетрудно убедиться, что, поскольку последнее равенство выполнено для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$, то

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I. \tag{7.2}$$

Докажем, что равенство $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$ также выполняется. Из равенства (7.2) вытекает, что $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный. Умножая обе части равенства (7.2) слева на $\mathcal{A}$, а затем справа на $\mathcal{A}^{-1}$, получим, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$.

Упражнение. Покажите, что если для любого $x \in \mathbf{X}_n$ выполнено равенство $|\mathcal{A}x| = |x|$, то $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

4. Таким образом, оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ является унитарным тогда и только тогда, когда он не меняет длины никакого вектора пространства $\mathbf{X}_n$.

§ 8. Нормальный оператор

1. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, называется *нормальным*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Самосопряженный, косоэрмитов и унитарный операторы, очевидно, — нормальные операторы.

Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была нормальной (см. определение на с. 64).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда* $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}x = 0$. Тогда

$$0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x),$$

следовательно, $\mathcal{A}^*x = 0$. Эти же выкладки показывают, что если $\mathcal{A}^*x = 0$, то $\mathcal{A}x = 0$. $\square$

Из теоремы 1 и теоремы 1, с. 191, немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда*

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*),\ \ \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор, x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}x = \lambda x$. Тогда x, $\bar\lambda$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что если $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, то при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ — также нормальный оператор, причем $(\mathcal{A} - \lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \bar\lambda I$, следовательно, $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^* - \bar\lambda I)$. $\square$

2. Все собственные числа самосопряженного оператора вещественны. Все собственные числа косоэрмитва оператора чисто мнимые. Действительно, всякий самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ является нормальным, поэтому, если x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}x = \lambda x$ и $\mathcal{A}x = \bar{\lambda}x$, следовательно, $(\lambda - \bar{\lambda})x = 0$, но вектор x, как собственный вектор, не равен нулю, значит, $\lambda = \bar{\lambda}$. Аналогично, если x, λ — собственная пара косоэрмитва оператора $\mathcal{A}$, то выполняются равенства $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}x = -\bar{\lambda}x$, следовательно, $\lambda = -\bar{\lambda}$.

3. Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице. В самом деле, если $\mathcal{A}x=\lambda x$, $x \neq 0$, то поскольку для унитарного оператора $|\mathcal{A}x| = |x|$ (см. п. 4, с. 199), то $|\lambda||x| = |\mathcal{A}x| = |x|$, т. е. $|\lambda| = 1$.

Укажем на очевидное, но полезное

Следствие 2. *У всякой эрмитовой матрицы все характеристические числа вещественны; у всякой косоэрмитовой матрицы все характеристические числа чисто мнимые; у всякой унитарной матрицы все характеристические числа по модулю равны единице.*

Упражнение. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число (см. также п. 2, с. 62).

Теорема 3. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $\lambda(x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$. По теореме 2 имеем $\mathcal{A}^* y = \bar{\mu} y$, следовательно, $(x, \mathcal{A}^* y) = \mu(x, y)$, значит, $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$. Поскольку $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. $\square$

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$. Для того, чтобы существовал ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ такой, что $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Матрицы взаимно сопряженных операторов в ортонормированном базисе взаимно сопряжены (см. п. 4, с. 190). Поэтому, если

$$A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

есть матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$, то матрицей оператора $\mathcal{A}^*$ в этом же базисе будет матрица

$$A_e^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n).$$

Матрица произведения операторов есть произведение их матриц (см. п. 7, с. 146), диагональные матрицы, очевидно, перестановочны, следовательно,

$$(A^*A)_e = A_e^* A_e = A_e A_e^* = (AA^*)_e,$$

откуда вытекает, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, т. е. $\mathcal{A}$ — нормальный оператор.

Достаточность. Пусть e^1, λ_1 — собственная пара оператора $\mathcal{A}$. Будем считать, что $|e^1| = 1$. По теореме 2 e^1, $\bar{\lambda}_1$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$. Обозначим через L_{n-1} подпространство всех векторов из $\mathbf{X}_n$ ортогональных e^1. Подпространство L_{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Действительно, если $x \in L_{n-1}$, т. е. $(x, e^1) = 0$, то и $(\mathcal{A}x, e^1) = (x, \mathcal{A}^* e^1) = \lambda_1 (x, e^1) = 0$. Точно так же доказывается, что подпространство L_{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$. Поэтому (см. упражнение на с. 167) существует нормированный вектор $e^2 \in L_{n-1}$ и число λ_2 такие, что $\mathcal{A}e^2 = \lambda_2 e^2$, $\mathcal{A}^* e^2 = \bar{\lambda}_2 e^2$. Пусть теперь L_{n-2} — подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, состоящее из векторов ортогональных одновременно e^1 и e^2. Точно так же, как и раньше, покажем, что существует нормированный вектор $e^3 \in L_{n-2}$ и число λ_3 такие, что $\mathcal{A}e^3 = \lambda_3 e^3$, $\mathcal{A}^* e^3 = \bar{\lambda}_3 e_3$. Продолжая этот процесс, мы построим ортонормированную систему векторов $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ такую, что $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$, $\mathcal{A}^* e^k = \bar{\lambda}_k e^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Замечания.

1) В теореме 4, фактически, утверждается, что для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица принимает диагональный вид, причем на диагонали матрицы расположены все собственные числа этого оператора. Таким образом, всякий нормальный оператор есть оператор простой структуры (см. п. 3, с. 172).

2) Часто оказывается полезной следующая эквивалентная формулировка указанного результата: пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $k \leqslant n$, есть все попарно различные собственные числа нормального оператора $\mathcal{A}\colon \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$, — соответствующие собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$. Тогда

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}, \tag{8.1}$$

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k, \tag{8.2}$$

где $\mathcal{P}_i$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на подпространство L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Упражнения.

1) Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n такая, что $A^T A = AA^T$. Опираясь на теорему 4, показать, что существует система векторов $\{\xi^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$, ортонормированная в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$, и такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$, что $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Причем, если число λ_k вещественно, то и вектор ξ_k можно выбрать вещественным.

2) Докажите, что если у нормального оператора все собственные числа вещественны, то он — самосопряженный оператор; если у нормального оператора все собственные числа чисто мнимые, то он — косоэрмитов оператор; если у нормального оператора все собственные числа по модулю равны единице, то он — унитарный оператор.

3) Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует унитарный оператор $\mathcal{Q}$ такой, что $\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$.

4) Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, $\mathcal{Q}$ — унитарный оператор. Докажите, что оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$ нормальный и справедливо представление

$$\tilde{\mathcal{A}} = \lambda_1 \widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2 \widetilde{\mathcal{P}}_2 + \dots + \lambda_k \widetilde{\mathcal{P}}_k, \tag{8.3}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_k$ — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Теорема 5. *Для того, чтобы нормальные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы у них был общий ортонормированный базис собственных векторов.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\{e^j\}_{k=1}^n$ — общий базис собственных векторов операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, т. е. $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$, $\mathcal{B}e^k = \mu_k e^k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\mathcal{B}\mathcal{A}e^k = \lambda_k\mu_k e^k$, $\mathcal{A}\mathcal{B}e^k = \lambda_k\mu_k e^k$ для $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. на векторах базиса операторы $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}$ совпадают, но тогда они совпадают и на любом векторе пространства $\mathbf{X}_n$.

Необходимость. Воспользуемся представлением пространства $\mathbf{X}_n$ в виде ортогональной суммы (8.1) собственных подпространств оператора $\mathcal{A}$, отвечающих попарно различным собственным числам этого оператора. По лемме 1, с. 167, каждое из подпространств L_{λ_i} инвариантно относительно оператора $\mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{B}$ — нормальный оператор, то в этом подпространстве существует ортонормированный базис собственных векторов оператора $\mathcal{B}$. Объединение всех указанных базисов, очевидно, образует базис пространства $\mathbf{X}_n$, причем по построению все векторы этого базиса — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. $\square$

4. Подпространства Крылова[1] нормального оператора. Пусть Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$. Фиксируем некоторый ненулевой вектор x пространства $\mathbf{X}_n$, положительное целое число m и образуем подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на векторы x, $\mathcal{A}x$, $\dots$, $\mathcal{A}^{m-1}x$. Такие подпространства называют подпространствами Крылова. Они играют важную роль во многих разделах численных методов линейной алгебры (см. ниже гл. 20). Естественно, возникают вопросы о размерности построенного подпространства и указания его базисов. Наиболее просто эти вопросы решаются в случае, когда $\mathcal{A}$ — нормальный оператор. Основную роль здесь играет

Теорема 6. *Пусть*

$$x = e^1 + e^2 + \dots + e^p, \tag{8.4}$$

где $e^1, e^2, \dots, e^p$ *собственные векторы нормального оператора* $\mathcal{A}$, *отвечающие попарно различным собственным числам* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *этого оператора*[1]. *Тогда векторы* x, $\mathcal{A}x$, $\dots$, $\mathcal{A}^{p-1}x$ *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть существуют $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$ такие, что $c_0x + c_1\mathcal{A}x + \dots + c_{p-1}\mathcal{A}^{p-1}x = 0$. Используя (8.4), после элементарных преобразований отсюда получим, что $\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{p-1} c_j\lambda_k^j e^k = 0$. По теореме 3 векторы e^1, e^2, $\dots$, e^p линейно независимы, следовательно,

$$\sum_{j=0}^{p-1} c_j\lambda_k^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \tag{8.5}$$

Равенства (8.5) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$. Определитель системы (8.5) есть определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, поскольку по условию теоремы все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ попарно различны. Таким образом, система (8.5) может иметь только тривиальное решение. $\square$

[1] Алексей Николаевч Крылов (1863–1945) — русский, советский кораблестроитель, механик и математик.

[1] Согласно (8.1) любой вектор из $\mathbf{X}_n$ может быть представлен в указанном виде.

§ 9. Корень из самосопряженного неотрицательного оператора

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный неотрицательный оператор, $k \geqslant 2$ — целое число. Тогда существует единственный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathcal{T}$ такой, что $\mathcal{T}^k = \mathcal{A}$.*

Оператор $\mathcal{T}$ называют *корнем порядка* k из оператора $\mathcal{A}$ и обозначают через $\mathcal{A}^{1/k}$ или через $\sqrt[k]{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, существует ортонормированный базис $\{e^j\}_{k=1}^n$ его собственных векторов. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответствующие им собственные числа и определим оператор $\mathcal{T}$ действием на векторы базиса:

$$\mathcal{T}e_i = \sqrt[k]{\lambda_i}\, e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Все собственные числа неотрицательного оператора неотрицательны, поэтому можно считать, что все числа $\sqrt[k]{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$, неотрицательны. Очевидно, что оператор $\mathcal{T}$ самосопряжен, неотрицателен и $\mathcal{T}^k = \mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{T} = \mathcal{A}^{1/k}$.

Осталось доказать единственность корня порядка k из оператора $\mathcal{A}$. С этой целью установим предварительно, что существует полином P_m, степени $m \leqslant n-1$, такой, что $\mathcal{T} = P_m(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leqslant n$, — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$. Найдется (и притом только один) полином P_{r-1}, степени $r-1$, такой, что $P_{r-1}(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, r$ [1]. Действуя оператором $P_{r-1}(\mathcal{A})$ на векторы базиса e_i, получим

$$P_{r-1}(\mathcal{A})e_i = P_{r-1}(\lambda_i)e_i = \sqrt[k]{\lambda_i}\, e_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

т. е. $P_{r-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$. Пусть теперь $\mathcal{U}$ — произвольный самосопряженный неотрицательный оператор такой, что $\mathcal{U}^k = \mathcal{A}$. Тогда

$$\mathcal{T}\mathcal{U} = P_{r-1}(\mathcal{A})\mathcal{U} = P_{r-1}(\mathcal{U}^k)\mathcal{U} = \mathcal{U}P_{r-1}(\mathcal{U}^k) = \mathcal{U}\mathcal{T},$$

т. е. операторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ перестановочны, по теореме 5 у них существует общий ортонормированный базис собственных векторов (обозначим его вновь через $e_1, \ldots, e_n$)

$$\mathcal{T}e_i = \mu_i e_i, \ \mathcal{U}e_i = \widetilde{\mu}_i e_i, \ \mu_i, \ \widetilde{\mu}_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

[1] Полином P_{r-1} можно записать в явном виде, используя, например, интерполяционную формулу Лагранжа (см. с. 42).

Следовательно,

$$\mathcal{T}^k e_i = \mu_i^k e_i,\ \mathcal{U}^k e_i = \widetilde{\mu}_i^k e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

но $\mathcal{T}^k = \mathcal{U}^k$, поэтому $\widetilde{\mu}_i^k = \mu_i^k$, откуда вытекает, что $\widetilde{\mu}_i = \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\mathcal{U} = \mathcal{T}$. $\square$

§ 10. Конгруэнтные эрмитовы операторы

Эрмитовы операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называются *конгруэнтными*, если существует обратимый оператор $\mathcal{X}$ такой, что $B = \mathcal{X}^* \mathcal{A} \mathcal{X}$. Обозначим через $n_+(\mathcal{A})$, $n_-(\mathcal{A})$, $n_0(\mathcal{A})$ количества положительных, отрицательных и нулевых характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$, соответственно, с учетом их кратностей. Все характеристические числа эрмитова оператора вещественны, поэтому справедливо равенство $n_+(\mathcal{A}) + n_-(\mathcal{A}) + n_0(\mathcal{A}) = n$. Тройка чисел $n_+(\mathcal{A}), n_-(\mathcal{A}), n_0(\mathcal{A})$ называется инерцией оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 1 (теорема Сильвестра об инерции). *Для того, чтобы операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ были конгруэнтными необходимо и достаточно, чтобы их инерции совпадали.*

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть (n_-, n_0, n_+) — инерция оператора $\mathcal{A}$, и

$$\mathcal{A} e^k = \lambda_k(A) e^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.1}$$

где e^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, есть полная ортонормированная система собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Будем предполагать, что собственные числа оператора $\mathcal{A}$ занумерованы в порядке неубывания, так что первые n_- собственных чисел отрицательны, следующие n_0 чисел — нули, и, наконец, последние n_+ собственных чисел положительны. Введем в рассмотрение эрмитов оператор $\mathcal{D}$, определив его действием на элементы базиса $\mathcal{E} = \{e^k\}_{k=1}^n$:

$$\mathcal{D} e^k = \begin{cases} |\lambda_k(A)|^{-1/2} e^k, & \lambda_k(A) \neq 0, \\ e^k, & \lambda_k(A) = 0, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда равенство (10.1) можно записать в виде

$$\mathcal{D} \mathcal{A} \mathcal{D} \mathcal{E} = \mathcal{E} T_{\mathcal{A}}, \tag{10.2}$$

где $T_{\mathcal{A}}$ — диагональная матрица. Первые n_- элементов ее диагонали равны -1, следующие n_0 элементов — нули, последние n_+ элементов равны единице. Фиксируем теперь в пространстве $\mathbf{X}_n$ некий ортонормированный базис $\mathcal{Q} = \{q^k\}_{k=1}^n$ и определим оператор $\mathcal{M}$, полагая

$$\mathcal{M}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}T_{\mathcal{A}}. \tag{10.3}$$

Поскольку базисы $\mathcal{E}, \mathcal{Q}$ ортонормированы, существует унитарный оператор $\mathcal{U}$ такой, что $\mathcal{E} = \mathcal{U}\mathcal{Q}$, поэтому (10.2) можно представить в виде

$$\mathcal{U}^*\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}\mathcal{U}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}T_{\mathcal{A}}. \tag{10.4}$$

Сравнивая (10.3) и (10.4), получим, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ конгруэнтны. Таким образом, все операторы с одной и той же инерцией (n_+, n_-, n_0) конгруэнтны оператору $\mathcal{M}$, следовательно, все они попарно конгруэнтны.

Н е о б х о д и м о с т ь. Представим пространство $\mathbf{X}_n$ в виде ортогонального разложения $\mathbf{X}_n = L_+ \oplus L_- \oplus L_0$, где L_+, L_-, L_0 — подпространства, натянутые на собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие его положительным, отрицательным и нулевым собственным числам, соответственно (см замечание 2 на с. 201). Тогда

$$\dim(L_+) + \dim(L_-) + \dim(L_0) = n.$$

Обозначим через M_+ подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на все собственные векторы оператора $\mathcal{B}$, отвечающие его положительным собственным числам. Для любого $x \in M_+$, $x \neq 0$, имеем $(\mathcal{B}x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{X}x, \mathcal{X}x) = (\mathcal{A}y, y) > 0$, где $y = \mathcal{X}x$. Это означает, что $(\mathcal{A}y, y) > 0$ для любого вектора y, принадлежащего подпространству $\widetilde{M}_+$, которое является образом подпространства M_+ при действии на него оператором $\mathcal{X}$. Поскольку оператор $\mathcal{X}$ обратим, $\dim(M_+) = \dim(\widetilde{M}_+)$. Понятно, что $\widetilde{M}_+ \cap (L_- \oplus L_0) = \{0\}$, следовательно, $\dim(M_+) + \dim(L_-) + \dim(L_0) \leqslant n$, и $\dim(M_+) \leqslant \dim(L_+)$. Аналогичные рассуждения показывают, что имеет место и противоположное неравенство, т. е. $\dim(M_+) = \dim(L_+)$, или $n_+(\mathcal{A}) = n_+(\mathcal{B})$. Точно так же доказывается, что $n_-(\mathcal{A}) = n_-(\mathcal{B})$, $n_0(\mathcal{A}) = n_0(\mathcal{B})$. $\square$

§ 11. Вариационные свойства собственных чисел эрмитова оператора

1. Напомним, что оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется самосопряженным, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n. \tag{11.1}$$

Напомним также, что все собственные числа самосопряженного оператора вещественны, существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, составленный из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

2. Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — самосопряженный оператор, а λ_1, λ_2, …, λ_n — его собственные числа, $\{e^k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис собственных векторов. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n. \tag{11.2}$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем как собственные числа оператора все характеристические числа его матрицы, т. е. кратные характеристические числа повторяются столько раз, какова их кратность, поэтому, вообще говоря, неравенства в (4.9) являются нестрогими.

Пусть p, q — целые числа такие, что $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Обозначим через L_{pq} подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на векторы $\{e^k\}_{k=p}^q$. Очевидно, $L_{1n} = \mathbf{X}_n$.

Лемма 1. *Для любого $x \in L_{pq}$ справедливы неравенства*

$$\lambda_p(x,x) \leqslant (\mathcal{A}x,x) \leqslant \lambda_q(x,x), \tag{11.3}$$

более того

$$\lambda_p = \min_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}, \quad \lambda_q = \max_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}. \tag{11.4}$$

Доказательство. Для любого $x \in L_{pq}$

$$(\mathcal{A}x,x) = \Bigl(\mathcal{A}\sum_{k=p}^{q}\xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q}\xi_k e^k\Bigr) = \\ = \Bigl(\sum_{k=p}^{q}\lambda_k\xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q}\xi_k e^k\Bigr) = \sum_{k=p}^{q}\lambda_k|\xi_k|^2. \tag{11.5}$$

Очевидно, что

$$\lambda_p\sum_{k=p}^{q}|\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=p}^{q}\lambda_k|\xi_k|^2 \leqslant \lambda_q\sum_{k=p}^{q}|\xi_k|^2, \quad \sum_{k=p}^{q}|\xi_k|^2 = (x,x),$$

следовательно, (11.3) доказано и для любого $x \neq 0$ из L_{pq} справедливы неравенства

$$\lambda_p \leqslant \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)} \leqslant \lambda_q.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{(\mathcal{A}e^p, e^p)}{(e^p, e^p)} = \lambda_p, \quad \frac{(\mathcal{A}e^q, e^q)}{(e^q, e^q)} = \lambda_q,$$

поэтому равенства (11.4) также доказаны. □

Очевидным следствием леммы 1 является

Теорема 1. *Для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{kn},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_k = \max_{x \in L_{1k},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \tag{11.6}$$

Использование формул (11.6) затруднено тем, что при отыскании собственного числа с номером k нужно знать все собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие всем собственным числам с меньшими номерами, или — все собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие всем собственным числам с большими номерами.

Следующие две теоремы дают независимое описание каждого собственного числа самосопряженного оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \tag{11.7}$$

Здесь $R_{n-k+1} \subset \mathbf{X}_n$ *— подпространство размерности* $n-k+1$. *Максимум берется по всем подпространствам пространства* $\mathbf{X}_n$ *размерности* $n-k+1$.

Доказательство. Ясно, что $\dim(R_{n-k+1}) + \dim(L_{1k}) = n+1$, поэтому (см. следствие 1, с. 132) существует вектор $x \neq 0$, принадлежащий $R_{n-k+1} \cap L_{1k}$. Таким образом (см. (11.6)), в каждом подпространстве R_{n-k+1} найдется вектор x, для которого $(\mathcal{A}x, x)/(x, x) \leqslant \lambda_k$. Следовательно, для любого подпространства R_{n-k+1}

$$\min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k.$$

Если мы укажем подпространство R_{n-k+1}, для которого

$$\min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

то это будет означать выполнение равенства (11.7). По теореме 1 искомым подпространством R_{n-k+1} является L_{kn}. □

Теорема 3. *Для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}. \tag{11.8}$$

Здесь $R_k \subset \mathbf{X}_n$ *— подпространство размерности* k*. Минимум берется по всем подпространствам пространства* $\mathbf{X}_n$ *размерности* k*.*

Доказательство. Очевидно, что $\dim(R_k) + \dim(L_{kn}) = n + 1$ для любого подпространства R_k, значит $R_k \cap L_{kn} \neq \{0\}$. По теореме 1

$$\min_{x \in L_{kn},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

поэтому для любого подпространства R_k

$$\max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \geqslant \lambda_k.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось указать такое подпространство R_k размерности k, для которого

$$\max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

По теореме 1 таким подпространством является L_{1k}. $\Box$

3. Из (11.3) сразу же следует, что для того, чтобы самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ был неотрицателен (см. (6.1), с. 197), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были неотрицательными, а для того, чтобы самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ был положительно определен (см. (6.2), с. 197), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны.

Упражнения.

1) Доказать, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

2) Доказать неравенство Коши — Буняковского (см. теорему 1, с. 116), используя матрицу Грама (см. (4.1), с. 118) системы, состоящей из двух векторов x, y евклидова пространства.

§ 12. Применения вариационного описания собственных чисел

1. Вариационные характеристики оказываются особенно полезными при сравнении собственных чисел различных самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *— самосопряженные операторы, и*

$$\lambda_1(\mathcal{A}) \leqslant \lambda_2(\mathcal{A}) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(\mathcal{A}),$$
$$\lambda_1(\mathcal{B}) \leqslant \lambda_2(\mathcal{B}) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(\mathcal{B}),$$
$$\lambda_1(\mathcal{C}) \leqslant \lambda_2(\mathcal{C}) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(\mathcal{C})$$

есть их собственные числа. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$*. Тогда*

$$\lambda_1(\mathcal{C}) \leqslant \lambda_k(\mathcal{A}) - \lambda_k(\mathcal{B}) \leqslant \lambda_n(\mathcal{C}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{12.1}$$

Доказательство. Для обоснования этого утверждения достаточно заметить, что, фиксируя произвольное подпространство $R_k \subset \mathbf{X}_n$, получаем, что

$$\frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \frac{(\mathcal{C}x, x)}{(x, x)} \quad \forall\, x \in R_k,\ x \neq 0.$$

Вследствие (11.3)

$$\frac{(\mathcal{C}x, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_n(\mathcal{C}) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,\ x \neq 0,$$

поэтому

$$\min_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leqslant \min_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \lambda_n(\mathcal{C}),$$

но тогда и

$$\max_{R_k} \min_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leqslant \max_{R_k} \min_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{B}x, x)}{(x, x)} + \lambda_n(\mathcal{C}).$$

Последнее неравенство по теореме 2, с. 208, равносильно тому, что

$$\lambda_k(\mathcal{A}) - \lambda_k(\mathcal{B}) \leqslant \lambda_n(\mathcal{C}). \tag{12.2}$$

Заметим теперь, что $\mathcal{B} = \mathcal{A} + (-\mathcal{C})$. Собственными числами оператора $-\mathcal{C}$ являются числа $-\lambda_k(\mathcal{C})$. Максимальным из них будет $-\lambda_1(\mathcal{C})$. Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\lambda_k(\mathcal{B}) - \lambda_k(\mathcal{A}) \leqslant -\lambda_1(\mathcal{C}). \tag{12.3}$$

Объединяя (12.2), (12.3), приходим к (12.1). □

Оценки (12.1) показывают, как могут измениться собственные числа самосопряженного оператора $\mathcal{B}$, если к нему добавить самосопряженный оператор $\mathcal{C}$. Видно, что если собственные числа оператора $\mathcal{C}$ малы, то собственные числа оператора $\mathcal{B}$ мало меняются.

Теорема 2. *Пусть $A_{n+1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ — произвольная эрмитова матрица порядка $n+1$, $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица, соответствующая ее главному минору порядка n. Пусть $\hat\lambda_1 \leqslant \hat\lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \hat\lambda_{n+1}$ — собственные числа матрицы A_{n+1}, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ — собственные числа матрицы A_n. Тогда*

$$\hat\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat\lambda_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n \leqslant \hat\lambda_{n+1}, \tag{12.4}$$

т. е., как говорят, собственные числа матриц A_n и A_{n+1} перемежаются.

Доказательство. В ходе последующих рассуждений под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. В соответствии с теоремой 3, с. 209,

$$\hat\lambda_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x \in R_{k+1},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \tag{12.5}$$

Здесь минимум берется по всевозможным подпространствам R_{k+1} пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ размерности $k+1$.

Обозначим через $R_k \subset \mathbb{C}^n$ множество векторов из R_{k+1}, $(n+1)$-я компонента которых в естественном базисе равна нулю. Тогда

$$\max_{x \in R_{k+1},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

Для обоснования этого неравенства достаточно заметить, что слева максимум берется по более широкому множеству векторов, чем справа. Таким образом, из (12.5) получаем

$$\hat\lambda_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x \in R_{k+1},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)},$$

но правая часть этого неравенства по теореме 3 равна λ_k. Итак, $\hat\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Обратимся теперь к теореме 2, с. 208, в соответствии с которой

$$\hat\lambda_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x \in R_{n+2-k},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \tag{12.6}$$

Здесь максимум берется по всевозможным подпространствам R_{n+2-k} пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ размерности $n+2-k$. При сужении множества векторов, по которому вычисляется минимум, последний не может уменьшиться, поэтому по аналогии с предыдущим случаем можем написать, что

$$\hat{\lambda}_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x \in R_{n+2-k},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{R_{n+1-k}} \min_{x \in R_{n+1-k},\ x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)} = \lambda_k. \quad (12.7)$$

Таким образом, неравенства (12.4) доказаны. □

Аналогичными рассуждениями может быть установлен и более общий результат.

Теорема 3. *Пусть A — эрмитова матрица порядка n, A_m — эрмитова матрица порядка $m < n$, соответствующая диагональному минору порядка m матрицы A (см. п. 4, с. 174). Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — собственные числа матрицы A, $\lambda_1(A_m) \leqslant \lambda_2(A_m) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(A_m)$ — собственные числа матрицы A_m. Тогда*

$$\lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(A_m) \leqslant \lambda_{k+n-m}(A), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \quad (12.8)$$

Замечание 1. Понятно, что теорема 3 есть частный случай теоремы 2, когда $m = n-1$, и A_{n-1} соответствует главному минору матрицы A порядка $n-1$. Иногда собственные числа матриц A и A_m удобнее нумеровать в порядке невозрастания. Тогда оценка (12.8), очевидно, приобретает вид

$$\lambda_{k+n-m}(A) \leqslant \lambda_k(A_m) \leqslant \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \quad (12.9)$$

Теорема 4 (критерий Сильвестра). *Для того, чтобы матрица A была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее определителя были положительны.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Фиксируем некоторое целое k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Выберем в качестве вектора x в (6.4), с. 197, вектор вида $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (y, 0, \ldots, 0)$, где y можно считать произвольным вектором пространства $\mathbb{C}^k$. Тогда $(Ax, x) = (A_k y, y)$, где A_k — матрица, соответствующая главному минору порядка k матрицы A. Из условия (6.4), очевидно, вытекает, что $(A_k y, y) > 0$ для любого ненулевого вектора y из $\mathbb{C}^k$, т. е. матрица A_k

положительно определена, следовательно, ее определитель (главный минор порядка k матрицы A) положителен (см. упражнение 1 на с. 209).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем, что если все главные миноры матрицы A положительны, то положительны все ее собственные числа. Тогда положительная определенность матрицы A будет установлена. На самом деле, мы докажем большее, а именно, мы установим, что собственные числа всех главных миноров матрицы A положительны. Для минора первого порядка, т. е. для a_{11}, это выполняется тривиальным образом. Предположим, что у матрицы A_k, соответствующей главному минору порядка k [1)], все собственные числа $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$ положительны и покажем, что тогда и у матрицы A_{k+1} все собственные числа $\hat{\lambda}_1 \leqslant \cdots \leqslant \hat{\lambda}_{k+1}$ положительны. В соответствии с теоремой 2, выполнены неравенства

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \hat{\lambda}_{k+1},$$

откуда вытекает, что $\hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_{k+1} > 0$. Поскольку по условию $\det(A_{k+1}) > 0$, а $\det(A_{k+1}) = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \cdots \hat{\lambda}_{k+1}$ (см. (4.7), с. 175), то и $\hat{\lambda}_1 > 0$. $\square$

2. Для дальнейшего полезно ввести следующие определения. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ \ldots \ \geqslant x_n,$$

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ \ldots \ \geqslant y_n.$$

Будем говорить, что вектор y *слабо мажорирует* вектор x и писать $x \prec_w y$, если

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем говорить, что вектор y *сильно мажорирует* вектор x и писать $x \prec y$, если $x \prec_w y$ и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{12.10}$$

Теорема 5 (Шур). *Пусть A — эрмитова матрица порядка n, $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, составленный из всех собственных значений*

[1)] Такую подматрицу часто называют главной подматрицей порядка k матрицы A.

матрицы A*, упорядоченных по невозрастанию,* $d(A) \in \mathbb{R}^n$ *— вектор, составленный из всех диагональных элементов матрицы* A*, упорядоченных по невозрастанию. Тогда*

$$d(A) \prec \lambda(A). \tag{12.11}$$

Доказательство. Поскольку для любой матрицы перестановки P собственные значения матриц A и PAP совпадают, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что матрица A такова, что ее диагональные элементы упорядочены по невозрастанию, т. е. $a_{11} \geqslant a_{22} \geqslant \ldots \geqslant a_{nn}$. Пусть A_k главная подматрица матрицы A порядка k. Используя равенство (4.7), с. 175, и оценку (12.9), будем иметь, что

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ii} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A_k) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A). \tag{12.12}$$

Используя теперь (4.7), с. 175, применительно к матрице A, получим, что при $k = n$ неравенство (12.12) превращается в равенство. □

Укажем на очевидное

Следствие 1. *Пусть* A *— эрмитова матрица,* U *— произвольная унитарная матрица. Тогда*

$$d(U^*AU) \prec \lambda(A).$$

Теорема 6. *Пусть* A *— эрмитова матрица порядка* n*. Будем считать ее собственные числа упорядоченными по невозрастанию. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) = \max_{V} \operatorname{tr}(V^*AV), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Максимум вычисляется по всем прямоугольным унитарным матрицам[1] $V \in M_{n,k}$.

Доказательство. Пусть V — произвольная прямоугольная унитарная матрица с n строками и k столбцами, $U = (V, W)$ — квадратная унитарная матрица порядка n. При любом выборе матрицы W диагональные элементы матрицы V^*AV совпадают с первыми k диагональными элементами матрицы U^*AU. По следствию 1 их сумма не превосходит величины $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(U^*AU)$, которая равна $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(A)$. Выбирая в качестве столбцов матрицы V ортонормированные в смысле

[1] Определение см. на с. 63.

стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$ собственные векторы матрицы A, отвечающие $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, $\dots$, $\lambda_k(A)$, получим, что $\mathrm{tr}(V^*AV) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(A)$. $\square$

Теорема 7 (Фань Цзы[1]). *Пусть A, B — эрмитовы матрицы одного порядка. Тогда*

$$\lambda(A+B) \prec (\lambda(A) + \lambda(B)).$$

Справедливость этого утверждения сразу же вытекает из теоремы 6 и того факта, что след суммы матриц равен сумме их следов (см. (4.8), с. 176).

§ 13. Евклидово пространство операторов

1. Определим на пространстве линейных операторов, действующих в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, *скалярное произведение* по формуле $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}^*)$, Пусть A_e, B_e — матрицы операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в произвольном ортонормированном базисе. Тогда, как нетрудно подсчитать, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^e \bar{b}_{ij}^e$. Из этой формулы очевидным образом вытекает справедливость аксиом скалярного произведения.

Упражнение. Покажите, что для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$,

$$|\mathcal{A}|^2 = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2,$$

где ρ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, — сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$.

2. Построим некоторые часто используемые в различных приложениях базисы евклидова пространства операторов. Каждой паре векторов a, b евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ поставим в соответствие линейный оператор, обозначаемый через $a \otimes b$ и определяемый равенством

$$a \otimes b\, x = (x, b)a \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{13.1}$$

Оператор $a \otimes b$ называют *тензорным произведением* или *диадой* векторов a, b. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$. Образуем

[1] Фань Цзы (Ky Fan; 1914–2010) американский математик.

линейные операторы

$$e^k \otimes e^l, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.2}$$

Количество операторов вида (13.2) равно n^2, т. е. совпадает с размерностью пространства всех линейных операторов, действующих в $\mathbf{X}_n$ (см. § 7, с. 149). Совокупность операторов (13.2) линейно независима. Действительно, пусть $\sum\limits_{k,l=1}^{n} c_{kl} e^k \otimes e^l = 0$. Тогда для любого вектора $\tilde{e}^j$ взаимного базиса $\tilde{\mathcal{E}}_n \subset \mathbf{X}_n$ (см. § 9, с. 124), используя (13.1), получим

$$0 = \sum_{k,l=1}^{n} c_{kl} (e^k \otimes e^l) \tilde{e}^j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e^k, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.3}$$

Отсюда вследствие линейной независимости векторов $\mathcal{E}_n$ вытекает, что $c_{kl} = 0$ для всех $k, l = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, система (13.2) есть базис, и каждый оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{kl} e^k \otimes e^l. \tag{13.4}$$

Аналогично доказывается, что каждый оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ однозначно представим в одной из следующих форм при помощи векторов основного и взаимного базисов:

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\alpha}_{kl} \tilde{e}^k \otimes \tilde{e}^l, \tag{13.5}$$

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^{n} \hat{\alpha}_{kl} e^k \otimes \tilde{e}^l, \tag{13.6}$$

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l=1}^{n} \check{\alpha}_{kl} \tilde{e}^k \otimes e^l. \tag{13.7}$$

Коэффициенты разложения (13.4) называются *контравариантными* компонентами оператора $\mathcal{A}$, коэффициенты разложения (13.5) называются *ковариантными* компонентами оператора $\mathcal{A}$, а коэффициенты разложений (13.6), (13.7) — *смешанными* компонентами.

Упражнения.

1) Покажите, что для любых $a, b \in \mathbf{X}_n$ справедливо равенство

$$a \otimes b = (b \otimes a)^*. \tag{13.8}$$

2) Опираясь на (13.8), докажите, что любых $a, b \in \mathbf{X}_n$ оператор

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a, \tag{13.9}$$

называемый *внешним произведением* векторов a, b, косоэрмитов.

3) Опишите ядро оператора $a \wedge b$. Специально рассмотрите случай $n = 3$.

4) Докажите, что матрица оператора $a \otimes b$ относительно базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ есть $\{a_k \tilde{b}_l\}_{k,l=1}^n$, где a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — контравариантные компоненты вектора a относительного этого базиса, $\tilde{b}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — ковариантные компоненты вектора b.

5) Докажите, что коэффициенты разложений (13.4)–(13.7) можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha_{kl} = (\mathcal{A}\tilde{e}^l, \tilde{e}^k),\ \tilde{\alpha}_{kl} = (Ae^l, e^k),\ \hat{\alpha}_{kl} = (\mathcal{A}e^l, \tilde{e}^k),\ \check{\alpha}_{kl} = (\mathcal{A}\tilde{e}^l, e^k),$$

$k, l = 1, 2, \ldots, n$.

Покажите также, что числа $\hat{\alpha}_{kl}$, $\check{\alpha}_{kl}$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, есть элементы матрицы оператора $\mathcal{A}$ в основном и взаимном базисах соответственно.

6) Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор, $\{e^k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, составленный из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные числа оператора $\mathcal{A}$. Покажите, что $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^i \otimes e^i$.

Глава 11

Операторы в вещественном евклидовом пространстве

§ 1. Общие сведения

1. Отметим некоторые особенности, связанные с рассмотрением линенйных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$.

В любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно транспонированы.

Для того, чтобы оператор был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была симметрична.

Косоэрмитов оператор, действующий в вещественном евклидовом пространстве, обычно называют *кососимметричным.* Для того, чтобы оператор был кососимметричным необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ его матрица была кососимметрична.

2. Любой оператор $\mathcal{A}$ однозначно представим в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный, $\mathcal{A}_2$ — кососимметричный операторы, причем

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

Аналогичные рассуждения для матриц см. на с. 62, 63.

Теорема 1. [1] *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был кососимметричным, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{1.1}$$

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$, то

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x),$$

т. е. $(\mathcal{A}x, x) = 0$. Достаточность условия (1.1) вытекает из очевидного тождества $(\mathcal{A}(x+y), x+y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x + \mathcal{A}^*x, y)$. $\square$

[1] Сравните с теоремой 1 с. 196.

3. Унитарный оператор, т. е. оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$, действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *ортогональным.* Для того, чтобы оператор был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица была ортогональной (см. п. 7 на с.63) в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$.

Из определения ортогонального оператора сразу же вытекает, что он не меняет длин векторов и углов между векторами. Определитель ортогонального оператора равен плюс или минус единице.

Собственным числом ортогонального оператора может быть только плюс или минус единица.

4. Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ называется нормальным, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Самосопряженный, кососимметричный и ортогональный операторы — нормальные операторы. В любом ортонормированном базисе $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$ матрица A_e нормального оператора $\mathcal{A}$ является нормальной, т. е. удовлетворяет условию

$$A_e A_e^T = A_e^T A_e. \tag{1.2}$$

Справедливо и обратное: если в некотором ортонормированном базисе $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$ матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (1.2), то $\mathcal{A}$ — нормальный оператор.

§ 2. Вещественное евклидово пространство операторов

1. Вводя на вещественном линейном пространстве всех операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, скалярное произведение по формуле $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}^*)$, получим *вещественное евклидово пространство операторов.* Все факты, установленные в § 13, с. 215, очевидным образом переносятся и на этот случай.

Упражнения

1) Покажите, что множество всех самосопряженных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, есть подпространство евклидова пространства операторов, действующих в вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$, и определите его размерность.

2) Покажите, что множество всех кососимметричных операторов, действующих в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, есть подпространство евклидова пространства операторов, действующих в вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$, и определите его размерность.

3) Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис вещественного евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Докажите, что операторы $e^k \otimes e^l + e^l \otimes e^k$ — базис пространства всех самосопряженных операторов, действующих в $\mathbf{X}_n$, а операторы $e^k \wedge e^l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, $k < l$ — базис пространства всех кососимметричных операторов, действующих в $\mathbf{X}_n$.

2. Изотропные функции операторного аргумента. В этом пункте описывается класс операторных функций, находящих многочисленные применения в механике.

2.1. Функция f, отображающая вещественное евклидово пространство операторов на $\mathbb{R}$, называется изотропной скалярной функцией, если
$$f(\mathcal{QAQ}^*) = f(\mathcal{A})$$
для любого любого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ и любого ортогонального оператора Q. Практически дословно повторяя рассуждения п. 1, с. 176, нетрудно убедиться, что для того, чтобы функция f была скалярной и изотропной, необходимо и достаточно, чтобы она зависела только от инвариантов оператора $\mathcal{A}$.

2.2. Функция f, отображающая вещественное евклидово пространство операторов в себя, называется симметричной и изотропной, если
$$f(\mathcal{QAQ}^*) = \mathcal{Q}f(\mathcal{A})\mathcal{Q}^*$$
для любого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ и любого ортогонального оператора $\mathcal{Q}$.

Аналогично теоремам 2, с. 177, 3, с. 179, доказываются

2.3. Теорема. *Операторная функция f симметрична и изотропна тогда и только тогда, когда для любого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ имеет место представление:*
$$f(\mathcal{A}) = \varphi_0 I + \varphi_1\mathcal{A} + \varphi_2\mathcal{A}^2 + \ldots + \varphi_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}, \tag{2.1}$$
где $\varphi_i = \varphi_i(\mathcal{A})$, φ_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, есть изотропные скалярные функции операторного аргумента.

2.4. Теорема. *Для того, чтобы функция f была линейной симметричной и изотропной, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*
$$f(\mathcal{A}) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathcal{A})I + 2\mu\mathcal{A}, \tag{2.2}$$
где λ, μ — вещественные числа.

Замечание. Теоремы 2.3, 2.4 часто используются в механике сплошной среды. Множитель два во втором слагаемом правой части равенства (2.2) обусловлен традиционно применяемыми обозначениями в этой области механики.

§ 3. Структура нормального оператора

1. В этом параграфе все операторы — операторы, действующие в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был нормальным оператором, необходимо и достаточно существования ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно диагональна:*

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Диагональные блоки этой матрицы могут иметь размеры либо 1×1, либо 2×2; блоки размера 1×1 — это вещественные числа, блоки размера 2×2 есть матрицы вида

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где α_p, β_p — вещественные числа.

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Непосредственными вычислениями легко проверяется, что матрица A_e описанной в теореме структуры удовлетворяет условию (1.2), с. 219.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A_e — матрица нормального оператора $\mathcal{A}$ в произвольно выбранном ортонормированном базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда A_e удовлетворяет условию (1.2). Как было установлено ранее (см. упражнение 1 на с. 202), по матрице A_e можно построить ортонормированный базис $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$ такой, что

$$A_e f_k = \lambda_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где λ_1, λ_2, …, λ_n — характеристические числа матрицы A_e, причем если λ_k — вещественное число, то и вектор f_k можно считать вещественным. Будем нумеровать характеристические числа матрицы A_e так, что $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, …, $\lambda_m = \alpha_m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, вещественны, а $\lambda_{m+j} = \alpha_{m+j} + i\beta_{m+j}$, $\bar{\lambda}_{m+j} = \alpha_{m+j} - i\beta_{m+j}$, $j = 1, 2, \ldots, p$,

$p = (n - m)/2$, — комплексные числа. Тогда собственные векторы f_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, будут вещественными, остальные — комплексными, т. е. $f_k = g_k + ih_k$, где $g_k, h_k \in \mathbb{R}^n$, $k > m$. Отметим также, что, поскольку A_e — вещественная матрица, то если λ_k — комплексное характеристическое число матрицы A_e и $A_e f_k = \lambda_k f_k$, то $A_e \bar{f}_k = \bar{\lambda}_k \bar{f}_k$. По теореме 3, с. 200, собственные векторы, соответствующие различным собственным числам нормального оператора, ортогональны, следовательно, $(f_k, \bar{f}_k) = 0$, откуда вытекает, что $(g_k, g_k) = (h_k, h_k)$, $(g_k, h_k) = 0$. Кроме того, $(f_k, f_k) = 1$. Отсюда легко получается, что $(g_k, g_k) = (h_k, h_k) = 1/2$. Пусть, далее, $f_k, f_l \in \mathcal{F}_n$ есть комплексные векторы $k \neq l$, $f_k \neq \bar{f}_l$. Тогда $(f_k, f_l) = 0$, и $(f_k, \bar{f}_l) = 0$, откуда при помощи элементарных выкладок получаем, что (g_k, g_l), (h_k, h_l), (g_k, h_l), $(h_k, g_l) = 0$. Напомним (см. п. 2, с. 180), что если $A_e f_k = \lambda_k f_k$, $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $f_k = g_k + ih_k$, то $A_e g_k = \alpha_k g_k - \beta_k h_k$, $A_e h_k = \alpha_k g_k + \beta_k h_k$. Поставим теперь в соответствие каждому вещественному характеристическому числу λ_k матрицы A_e вещественный вектор $f_k \in \mathcal{F}_n$, а каждой паре комплексно сопряженных характеристических чисел λ_k, $\bar{\lambda}_k$ матрицы A_e вещественные векторы $\tilde{g}_k = \sqrt{2}\, g_k$, $\tilde{h}_k = \sqrt{2}\, h_k$. В результате, получим систему

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n = \{f_1, f_2, \ldots, f_m,\ \tilde{g}_1, \tilde{h}_1,\ \tilde{g}_2, \tilde{h}_2,\ \ldots,\ \tilde{g}_p, \tilde{h}_p\},$$

состоящую из n векторов пространства $\mathbb{R}^n$ и по доказанному выше ортонормированную. Для векторов системы $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ выполнены равенства

$$A_e f_k = \alpha_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} A_e \tilde{g}_j &= \alpha_j \tilde{g}_j - \beta_j \tilde{h}_j \\ A_e \tilde{h}_j &= \beta_j \tilde{g}_j + \alpha_j \tilde{h}_j, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, из которых, очевидно, вытекает, что в ортонормированном базисе $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$ оператор $\mathcal{A}$ будет иметь матрицу вида (3.1). Блоки этой матрицы образованы соответствующим элементами матрицы A_e. $\square$

2. Остановимся на некоторых важных частных случаях. При этом мы будем опираться на следствие 2, с. 200.

2.1. Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе симметрична, следовательно, (см. п. 2, с. 200), все ее характеристические числа вещественны. Поэтому, все числа β_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, в равенствах (3.5) равны нулю. Таким образом, существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.

2.2. Кососимметричный оператор. Матрица кососимметричного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе кососимметрична, следовательно, (см. п. 2, с. 200), все ее характеристические числа чисто мнимые. Поэтому, все числа α_j, в равенствах (3.4), (3.5) равны нулю, значит, существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид (3.1). При этом все диагональные блоки первого порядка нулевые, а блоки второго порядка кососимметричны:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \ldots, p$.

§ 4. Структура ортогонального оператора

1. Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, следовательно (см. п. 2, с. 200), все ее характеристические числа по модулю равны единице. Поэтому числа α_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, в соотношениях (3.4) могут быть равны только плюс единице или минус единице, а числа α_j, β_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, в равенствах (3.5) таковы, что $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$, следовательно, существуют углы $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ такие, что $\alpha_j = \cos\varphi_j$, $\beta_j = \sin\varphi_j$. Таким образом, существует ортонормированый базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица ортогонального оператора принимает вид (3.1). При этом все диагональные блоки первого порядка — это числа, равные плюс единице или минус единице, а блоки второго порядка имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}.$$

Благодаря теореме 1, § 3, всякому ортогональному преобразованию вещественного евклидова пространства можно придать отчетливый геометрический смысл.

2. Начнем с двумерного случая. Как следует из вышеизложенного, для любого ортогонального преобразования евклидова пространства $\mathbf{X}_2$ существует ортонормированный базис e^1, e^2, в котором его матрица будет либо

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В первом случае всякий вектор $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \in \mathbf{X}_2$ переводится оператором $\mathcal{A}$ в вектор $\mathcal{A}x = -\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет зеркальное отражение относительно координатной оси ξ_2.

Во втором случае $(\mathcal{A}x, x) = |x||\mathcal{A}x| \cos\varphi$ т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет поворот каждого вектора $x \in \mathbf{X}_2$ на угол φ. Направление поворота (при $\varphi > 0$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от e^1 к e^2.

3. В трехмерном случае у любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно собственное число, поскольку соответствующее характеристическое уравнение есть алгебраическое уравнение третьего порядка с вещественными коэффициентами. Поэтому с точностью до перенумерации векторов ортонормированного базиса e^1, e^2, $e^3 \in \mathbf{X}_3$ матрица A_e может принять одну из следующих форм:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Поясним, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет одно собственное число, указанные представления непосредственно следуют из теоремы 1, а если оператор $\mathcal{A}$ имеет три собственных числа, то представления (4.1) или (4.2) получаются за счет специального выбора угла φ.

Рассуждая по аналогии с двумерным случаем, нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{A}$ с матрицей (4.1) осуществляет поворот пространства $\mathbf{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ, а оператор $\mathcal{A}$ с матрицей (4.1) осуществляет поворот пространства $\mathbf{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной вектору e^1. В первом случае определитель оператора $\mathcal{A}$ равен единице, во втором — минус единице.

Определитель оператора, как мы знаем, не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому все ортогональные преобразования трехмерного пространства можно разбить на два класса: *собственные вращения* — это преобразования с положительным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси; и *несобственные вращения* — это преобразования с отрицательным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной этой же оси.

4. Евклидово пространство $\mathbf{X}_n$ произвольной размерности в соответствии с теоремой 1 можно представить в виде ортогональной суммы некоторого количества одномерных инвариантных подпространств и некоторого количества двумерных инвариантных подпространств ортогонального оператора $\mathcal{A}$. В двумерных инвариантных подпространствах оператор $\mathcal{A}$ выполняет поворот, в каждом, вообще говоря, на свой угол, а в одномерных инвариантных подпространствах может изменится лишь направление координатной оси.

Упражнение.

Показать, что всякая вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна диагональной, т. е. $Q^T AQ = \Lambda$, где Λ — диагональная, Q — ортогональная матрицы. Столбцы матрицы Q — собственные векторы матрицы A, по диагонали матрицы Λ расположены все собственные числа матрицы A.

Глава 12
Квадратичные формы и квадратичные функции

§ 1. Канонический вид квадратичной формы

1. *Квадратичной формой* будем называть вещественную функцию F от n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{1.1}$$

Заданные вещественные числа a_{ij} называют *коэффициентами* квадратичной формы. Их можно считать удовлетворяющими условиям симметрии $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, поскольку слагаемые в квадратичной форме, содержащие коэффициенты a_{ij}, a_{ji}, можно представить так:

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i.$$

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть A — симметричная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $F(x) = (Ax, x)$. Здесь и всюду на протяжении данной главы скобки обозначают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

2. Пусть в квадратичной форме выполнена *линейная замена переменных*, т. е. введены новые переменные $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, связанные со старыми переменными $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соотношением

$$x = Qy, \tag{1.2}$$

где Q — невырожденная матрица, называемая *матрицей преобразования переменных*. Выполнив замену переменных (1.2), получим

$$F(Qy) = (AQy, Qy) = (Q^T AQy, y) = (By, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j,$$

где через B обозначена матрица $Q^T AQ$. Очевидно, матрица B симметрична. Чаще всего, матрицу Q стремятся подобрать так, чтобы квадратичная форма в новых переменных приобрела наиболее простой вид.

Говорят, что преобразование переменных (1.2) приводит квадратичную форму (1.1) к *каноническому виду*, если матрица $B = Q^T AQ$ диагональна, т. е.

$$F(Qy) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2. \tag{1.3}$$

Можно сказать также, что квадратичная форма (1.1) преобразованием переменных (1.2) приведена к сумме квадратов.

3. Всякую квадратичную форму невырожденным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, поскольку A — симметричная матрица, то существует ортогональная матрица Q такая, что (см. упражнение 2 на с. 225)

$$Q^T AQ = \Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа матрицы A. При указанном выборе матрицы Q преобразование переменных (1.2) приводит квадратичную форму (1.1) к виду

$$F(Qy) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \tag{1.4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A.

4. Известны и другие способы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Опишем, например, *метод Лагранжа*, или *метод выделения полных квадратов*, приведения квадратичной формы к каноническому виду. В ходе описания этого метода, фактически, будет дано еще одно, независимое, доказательство возможности приведения любой квадратичной формы к каноническому виду.

Будем различать два случая: 1) в квадратичной форме (1.1) коэффициент при квадрате какой-либо переменной отличен от нуля, 2) коэффициенты при квадратах всех переменных — нули.

Рассмотрим сначала первый случай, и пусть $a_{11} \neq 0$. Если это не так, придется ввести другую нумерацию неизвестных.

Запишем квадратичную форму (1.1) в виде

$$F = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + G, \tag{1.5}$$

где $G = F - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2$. Нетрудно убедиться, что G не содержит x_1, а является квадратичной формой только от переменных $x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$. Положим

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \quad y_2 = x_2,\ \ldots, \quad y_n = x_n. \qquad (1.6)$$

Тогда

$$F = a_{11}^{-1}y_1^2 + G(y_2,\ \ldots, y_n), \qquad (1.7)$$

где $G(y_2,\ \ldots, y_n)$ — квадратичная форма от переменных $y_2,\ \ldots, y_n$.

Матрица замены переменных (1.6) невырождена, так как ее определитель равен a_{11}, а по предположению $a_{11} \neq 0$.

Пусть теперь все коэффициенты при квадратах переменных в (1.1) равны нулю. Тогда будем считать, что хотя бы один коэффициент при произведениях переменных отличен от нуля, иначе квадратичная форма тождественно равна нулю, и она имеет тривиальный канонический вид: все коэффициенты при квадратах неизвестных — нули. Итак, примем для определенности, что $a_{12} \neq 0$, и выполним преобразование переменных по формулам

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_3,\ \ldots, \quad x_n = z_n. \qquad (1.8)$$

Заметим, во-первых, что определитель матрицы преобразования (1.8) равен двум, а во-вторых, что $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$, следовательно, в квадратичной форме появились слагаемые, содержащие квадраты переменных, поэтому, повторяя рассуждения предыдущего случая, при помощи невырожденной замены переменных приведем квадратичную форму к виду

$$F = \alpha y_1^2 + G(y_2,\ \ldots, y_n). \qquad (1.9)$$

Таким образом, выполняя одно или два последовательных невырожденных преобразования переменных, квадратичную форму (1.1) можно привести к виду (1.9).

Аналогичными преобразованиями переменных выделим полный квадрат в квадратичной форме $G(y_2,\ \ldots, y_n)$. Продолжая преобразования, в конце концов приведем квадратичную форму (1.1) к сумме квадратов.

Пример. Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \qquad (1.10)$$

Поскольку в этой форме отсутствуют квадраты переменных, выполним сначала преобразование переменных

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Получим

$$F = 2y_1^2 - 4y_1y_3 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Положим теперь

$$z_1 = y_1 - y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3.$$

Тогда

$$F = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3) - 2z_3^2.$$

Отсюда после замены переменных

$$t_1 = z_1, \quad t_2 = z_2 + 2z_3, \quad t_3 = z_3$$

получаем

$$F = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2, \tag{1.11}$$

т. е. в переменных t_1, t_2, t_3 квадратичная форма принимает канонический вид. Очевидно, каждое из выполненных нами преобразований переменных имеет невырожденную матрицу. Результирующее преобразование переменных, как нетрудно проверить, имеет вид

$$t_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad t_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3, \quad t_3 = x_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что матрица преобразования переменных (1.12) невырождена, и эта замена переменных приводит квадратичную форму (1.10) к каноническому виду (1.11).

§ 2. Закон инерции квадратичных форм

Среди коэффициентов b_{ii} канонического вида (1.3) квадратичной формы (1.1) могут быть положительные, отрицательные числа, а также — нули. Нумеруя соответствующим образом переменные, запишем (1.3) так:

$$F(Qy) = (By, y) = \sum_{i=1}^{n_+} b_{ii}y_i^2 + \sum_{i=n_+ +1}^{n_+ + n_-} b_{ii}y_i^2. \tag{2.1}$$

Считаем при этом, что числа b_{ii} положительны при $i = 1, 2, \ldots, n_+$ и отрицательны при $i = n_+ + 1, \ldots, n_+ + n_-$.

Как мы уже убедились, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть выполнено различными способами. Поэтому естественно поставить вопрос: зависят ли числа n_+, n_- от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду?

При исследовании этого вопроса будут использованы следующие определения.

Симметричные матрицы A и B называют *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица C такая, что $B = C^T AC$.

С каждой симметричной матрицей A свяжем три целых числа: $n_0(A)$ — количество нулевых характеристических чисел матрицы A, $n_+(A)$ — количество положительных характеристических чисел, $n_-(A)$ — количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности). Тройка чисел $n_0(A), n_+(A), n_-(A)$ называется *инерцией матрицы* A, или *инерцией* соответствующей ей *квадратичной формы.*

Из теоремы 1, с. 205, непосредственно вытекает

Теорема. *Для того, чтобы матрицы A и B были конгруэнтными, необходимо и достаточно, чтобы их инерции совпадали.*

Следствие (закон инерции квадратичных форм). *Количества положительных и отрицательных слагаемых в* (2.1) *не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы* (1.1) *к каноническому виду.*

Доказательство. Коэффициенты b_{ii} в (2.1) — это характеристические числа диагональной матрицы $B = Q^T AQ$, конгруэнтной матрице A, поэтому количества положительных и отрицательных слагаемых в (2.1) определяются инерцией матрицы A и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (1.1) к каноническому виду. □

§ 3. Положительно определенные квадратичные формы

Квадратичная форма (1.1) называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица A положительно определена, т. е.

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю } \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Как известно (см. п. 3, с. 209), для того, чтобы матрица A была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны.

Полезный признак положительной определенности квадратичной формы дает теорема Сильвестра (теорема 4, с. 212).

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратичная форма* (1.1)*, с.* 226*, была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны.*

§ 4. Квадратичная функция и ее инварианты

1. Пусть A — вещественная квадратная матица порядка n, a — заданный фиксированный вектор пространства $\mathbb{R}^n$, a_0 — вещественное число. Определенная на пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественная функция вида

$$F(x) = (Ax, x) + 2(a, x) + a_0 \tag{4.1}$$

называется *квадратичной*. Множитель два перед вторым слагаемым поставлен ради удобства записи формул в дальнейшем. Не ограничивая общности (см. п. 1, с. 226), можно считать, что матрица A симметрична.

Понятно, что теория квадратичных функций может строиться как некоторое обобщение теории квадратичных форм.

Свяжем с каждой квадратичной функцией F симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Здесь a трактуется как вектор столбец.

2. Выполним так называемое *аффинное преобразование* переменных, т. е. положим

$$x = x^0 + Ty, \tag{4.3}$$

где x^0 — фиксированный вектор пространства $\mathbb{R}^n$, T — невырожденная матрица. Иногда замену переменных (4.3) удобнее записывать в виде $x = T(\hat{x}^0 + y)$, где $\hat{x}^0 = T^{-1}x^0$.

Выполняя элементарные преобразования, нетрудно получить, что

$$F(x^0 + Ty) \equiv \hat{F}(y) = (\hat{A}y, y) + 2(\hat{a}, y) + \hat{a_0}, \tag{4.4}$$

где

$$\hat{A} = T^T AT, \tag{4.5}$$

$$\hat{a} = T^T a + \hat{A}\hat{x}^0, \quad \hat{a}_0 = a_0 + 2(T^T a, \hat{x}^0) + (\hat{A}\hat{x}^0, \hat{x}^0). \tag{4.6}$$

Таким образом, любое аффинное преобразование переменных переводит квадратичную функцию в квадратичную.

Введем в рассмотрение квадратные матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} I & \hat{x}^0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

порядка $n + 1$. Здесь 0 — вектор столбец длины n, I — единичная матрица порядка n. Ясно, что $\det(Q) = \det(T)$, $\det(U) = 1$, т. е. матрицы Q, U невырождены.

Простые выкладки показывают, что

$$\hat{B} \equiv \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{a} \\ \hat{a}^T & \hat{a}_0 \end{pmatrix} = (QU)^T B(QU). \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.5), (4.8) вытекает, что матрицы A и $\hat{A}$, B и $\hat{B}$ соответственно конгруэнтны, поэтому их инерции совпадают (см. теорему 2, с. 230). Можно сказать, таким образом, что инерции матриц A, B являются *аффинными инвариантами* квадратичной функции, определенной равенством (4.1).

3. Будем считать теперь, что матрица T ортогональна, то есть $T^T = T^{-1}$. Тогда матрица Q, очевидно, также ортогональна. Из (4.5) в этом случае вытекает, что матрицы A и $\hat{A}$ подобны, следовательно, их собственные числа совпадают. Из (4.8), очевидно, вытекает, что $\det(\hat{B}) = \det(B)$.

Таким образом, собственные числа матрицы A, инерция, а следовательно, и ранг матрицы B, а также определитель матрицы B могут быть названы *ортогональными инвариантами* квадратичной функции (4.1). Они не меняются при любом преобразовании переменных (4.3) с ортогональной матрицей T.

§ 5. Приведенная форма квадратичной функции

1. Покажем, что, выбирая в (4.3) соответствующим образом ортогональную матрицу T и вектор x^0, любую квадратичную функцию можно преобразовать к простейшему так называемому *приведенному виду*.

Матрица A симметрична, поэтому существует ортонормированный базис e^1, e^2, $\dots$, e^n пространства $\mathbb{R}^n$, составленный из собственных векторов матрицы A. Обозначим через λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n соответствующие им собственные числа матрицы A.

Будем считать что первые r собственных чисел матрицы A отличны от нуля, остальные — нули.

Обозначим через T ортогональную матрицу, столбцы которой образованы векторами e^1, e^2, $\dots$, e^n. Отметим, что последние $n - r$ столбцов матрицы T принадлежат ядру матрицы A.

Выполним замену переменных в функции (4.1), полагая

$$x = Tu. \tag{5.1}$$

В соответствии с формулами (4.4)–(4.6) (см. также упражнение 2 на с. 225) получим

$$F(Tu) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_r u_r^2 + 2(\hat{a}_1 u_1 + \hat{a}_2 u_2 + \dots + \hat{a}_r u_r) + \\ + 2(\hat{a}_{r+1} u_{r+1} + \hat{a}_{r+2} u_{r+2} + \dots + \hat{a}_n u_n) + a_0. \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$\lambda_k u_k^2 + 2\hat{a}_k u_k = \lambda_k (u_k + \hat{a}_k/\lambda_k)^2 - \hat{a}_k^2/\lambda_k$$

для $k = 1, 2, \ldots, r$. Поэтому

$$F(Tu) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2(b, \tilde{y}) + \hat{a}_0, \tag{5.3}$$

где

$$y_k = u_k + \hat{a}_k/\lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots, r, \ \tilde{y} = (u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-r},$$

$$b = (\hat{a}_{r+1}, \hat{a}_{r+2}, \ldots, \hat{a}_n) \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad \hat{a}_0 = a_0 - \sum_{k=1}^{r} \hat{a}_k^2/\lambda_k. \tag{5.4}$$

Далее будем различать два случая. Предположим сначала, что вектор b равен нулю, и пусть

$$\hat{x}_k^0 = -\hat{a}_k/\lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots, r, \quad \hat{x}_k^0 = 0, \ k = r+1, r+2, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Тогда $u = y + \hat{x}^0$,

$$Tu = Ty + T\hat{x}^0, \tag{5.6}$$

и равенство (5.3) принимает вид

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0, \tag{5.7}$$

где

$$x^0 = T\hat{x}^0. \tag{5.8}$$

Пусть теперь $b \neq 0$. Следуя построениям п. 3.2, с. 375, сконструируем симметричную ортогональную матрицу R порядка $n - r$ (матрицу отражения) такую, что $Rb = |b|(1, 0, \ldots, 0)$. Выполним в (5.3) замену переменных

$$y = \widetilde{R}v, \tag{5.9}$$

где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0^T & R \end{pmatrix},$$

I_r — единичная матрица порядка r. Тогда (5.3) примет вид

$$F(Tu) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots + \lambda_r v_r^2 + 2b_{r+1} v_{r+1} + \hat{a}_0, \tag{5.10}$$

где $b_{r+1} = |b|$. Заметим, наконец, что

$$2b_{r+1} v_{r+1} + \hat{a}_0 = 2b_{r+1}(v_{r+1} + \hat{a}_0/(2b_{r+1})).$$

Поэтому, полагая
$$w = v + x^1, \tag{5.11}$$
где
$$x^1_{r+1} = \hat{a}_0/(2b_{r+1}), \quad x^1_i = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq r+1, \tag{5.12}$$
получим
$$F(Tu) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_r w_r^2 + 2b_{r+1} w_{r+1}. \tag{5.13}$$
Из (5.6), (5.8), (5.9), (5.11) вытекает, что $Tu = \tilde{x}^0 + \widetilde{T}w$, где
$$\widetilde{T} = T\widetilde{R}, \quad \tilde{x}^0 = x^0 - \widetilde{T}x^1, \tag{5.14}$$
следовательно,
$$F(\tilde{x}^0 + \widetilde{T}w) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_r w_r^2 + 2b_{r+1} w_{r+1}. \tag{5.15}$$

Матрица $\widetilde{T}$ ортогональна, поскольку является произведением ортогональных матриц. Нетрудно убедиться также, что первые r столбцов матрицы $\widetilde{T}$ совпадают с соответствующими столбцами матрицы T, а последние $n-r$ столбцов матрицы $\widetilde{T}$ являются линейными комбинациями последних $n-r$ столбцов матрицы матрицы T и потому принадлежат ядру матрицы A.

2. Таким образом, доказано, что для любой квадратичной функции вида (4.1) найдутся матрица T, столбцы которой есть векторы ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$, образованного собственными векторами матрицы A, и вектор x^0 такие, что либо
$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0, \tag{5.16}$$
либо
$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2b_{r+1} y_{r+1}. \tag{5.17}$$
Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — все ненулевые собственные числа матрицы A, $b_{r+1} > 0$. Представления (5.16), (5.17) называются *приведенными формами* квадратичной функции.

Ранг матрицы B (см. (4.2)), соответствующей квадратичной функции (5.16), очевидно, равен r, если $\hat{a}_0 = 0$, и равен $r+1$, если $\hat{a}_0 \neq 0$. Ранг матрицы B, соответствующей квадратичной функции (5.17), равен $r+2$ (докажите!).

Собственные числа матрицы A и ранг матрицы B инвариантны по отношению к замене переменных (4.3) с любой ортогональной матрицей T и любым вектором x^0. Поэтому любой квадратичной функции однозначно соответствует либо приведенная форма вида (5.16), либо приведенная форма вида (5.17).

3. В этом пункте будет показано, что коэффициенты приведенной формы квадратичной функции F однозначно определяются по элементам матрицы B (см. (4.2)). Они не зависят от выбора вектора x^0 и ортогональной матрицы T в преобразовании переменных (4.3), дающем приведенную форму квадратичной функции.

Нам потребуются в дальнейшем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть*

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

где $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ *— диагональная матрица порядка* n, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *— вектор столбец. Предполагается, что лишь элементы* a_{11}, a_{22}, $\dots$,a_{rr}, $r \leqslant n-1$, *матрицы* A *отличны от нуля. Тогда*

$$\mathcal{I}_{r+2}(B) = -a_{11}a_{22}\cdots a_{rr}(a_{r+1}^2 + \dots + a_n^2)\,^{1)}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что среди диагональных миноров порядка $r+2$ матрицы B лишь миноры вида

$$\Delta_{r,m} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{vmatrix}, \tag{5.20}$$

где

$$D_{11} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}), \tag{5.21}$$

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_r \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ a_m & a_0 \end{pmatrix},$$

$m = r+1, r+2, \dots, n$, отличны от нуля. Все остальные диагональные миноры порядка $r+2$ содержат хотя бы одну нулевую строку (и столбец). Используя формулу (9.12), с. 66, нетрудно получить, что $\Delta_{r,m} = -a_{11}a_{22}\cdots a_{rr}a_m^2$. Суммируя теперь все миноры вида (5.20), приходим к (5.19). $\square$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1,*

$$\mathrm{rank}(B) = r+1. \tag{5.22}$$

[1] Напомним, что $\mathcal{I}_k(B)$, $k = 1, 2, \dots, n$, — инвариант матрицы B, определяемый по ее элементам при помощи формулы вида (4.5), с. 175.

Тогда

$$\mathcal{I}_{r+1}(B) = \begin{vmatrix} D_{11} & d \\ d^T & a_0 \end{vmatrix}, \tag{5.23}$$

где матрица D_{11} *определена равенством* (5.21), $d = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ *— вектор столбец.*

Доказательство. Вследствие условия (5.22) все миноры порядка $r+2$ матрицы B равны нулю. Поэтому $\mathcal{I}_{r+2}(B) = 0$, откуда вследствие (5.19) вытекает, что a_{r+1}, $a_{r+2}, \ldots$, $a_n{=}0$. Тогда, как нетрудно убедиться, все диагональные миноры порядка $r+1$ матрицы B, кроме минора вида (5.23), содержат хотя бы одну нулевую строку. □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *матрица* U *определена равенством* (4.7), $\widetilde{B} = U^T BU$. Тогда

$$\mathcal{I}_{r+2}(\widetilde{B}) = \mathcal{I}_{r+2}(B). \tag{5.24}$$

Если выполнены условия леммы 2, то $\mathcal{I}_{r+1}(\widetilde{B}) = \mathcal{I}_{r+1}(B)$.

Доказательство. Заметим, что

$$BU = \begin{pmatrix} A & \tilde{a} \\ a^T & \tilde{a}_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{a}_i = a_i + \hat{x}_i^0 a_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{5.25}$$

$$\tilde{a}_i = a_i, \quad i = r+1, \ldots, n, \tag{5.26}$$

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{x}_i^0. \tag{5.27}$$

Вследствие (5.19), (5.26) справедливо равенство $\mathcal{I}_{r+2}(BU) = \mathcal{I}_{r+2}(B)$. Точно так же проверяется, что умножение матрицы вида BU слева на матрицу U^T не меняет инварианта $\mathcal{I}_{r+2}(BU)$. Отсюда, очевидно, вытекает равенство (5.24). Второе утверждение леммы с использованием соотношений (5.25)–(5.27) доказывается аналогично. При этом надо учесть, что определитель (5.23) не меняется при переходе от матрицы B к матрице $\widetilde{B}$. □

Теорема 1. *Пусть ранг матрицы* A *квадратичной функции* F *равен* r, *ранг матрицы* B *не превосходит* $r+1$. *Пусть при помощи замены переменных* $x = x^0 + Ty$ *с ортогональной матрицей* T *квадратичная функция* F *приведена к виду*

$$\hat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_m y_m^2 + \hat{a}_0. \tag{5.28}$$

Тогда: 1) $m = r$, $\alpha_i = \lambda_i$, *где* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *— все ненулевые собственные числа матрицы* A*;* 2) *справедливо равенство*

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_{r+1}(B)/\mathcal{I}_r(A). \tag{5.29}$$

Доказательство. Используем формулы (4.4)–(4.8), связывающие исходную и приведенную формы квадратичной функции. В рассматриваемом случае $T^T AT = \hat{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Поскольку матрица T ортогональна, то матрицы A, $\hat{A}$ подобны, откуда вытекает справедливость утверждения 1). Используем теперь тот факт, что в рассматриваемом случае $\hat{a} = 0$. Поэтому по лемме 2 получаем, что $\mathcal{I}_{r+1}(\hat{B}) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_r \hat{a}_0$. Матрица A имеет ровно r ненулевых собственных чисел, следовательно, $\mathcal{I}_r(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_r$ (см. п. 4, с. 174). Таким образом, $\hat{a}_0 = \mathcal{I}_{r+1}(\hat{B})/\mathcal{I}_r(A)$. Матрица $Q^T BQ$ подобна матрице B. Поэтому все их инварианты совпадают. С другой стороны, матрица $Q^T BQ$ удовлетворяет условиям леммы 3, значит, $\mathcal{I}_{r+1}(Q^T BQ) = \mathcal{I}_{r+1}(\hat{B})$, т. е. $\mathcal{I}_{r+1}(\hat{B}) = \mathcal{I}_{r+1}(B)$, и утверждение 2) также доказано. $\square$

Теорема 2. *Пусть ранг матрицы* A *квадратичной функции* F *равен* r, $r \leqslant n - 1$, *ранг матрицы* B *равен* $r + 2$. *Пусть при помощи замены переменных* $x = x^0 + Ty$ *с ортогональной матрицей* T *квадратичная функция* F *приведена к виду*

$$\hat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_m y_m^2 + 2b y_{m+1}. \tag{5.30}$$

Тогда: 1) $m = r$, $\alpha_i = \lambda_i$, *где* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *— все ненулевые собственные числа матрицы* A*;* 2) *выполнено равенство*

$$b^2 = -\mathcal{I}_{r+2}(B)/\mathcal{I}_r(A). \tag{5.31}$$

Доказательство. Справедливость утверждения 1) обосновывается точно так же, как и при доказательстве теоремы 1. В рассматриваемом случае лишь одна компонента вектора $\hat{a}$ отлична от нуля. Поэтому по лемме 1 получаем, что $b^2 = -\mathcal{I}_{r+2}(\hat{B})/\mathcal{I}_r(A)$. Равенство $\mathcal{I}_{r+2}(\hat{B}) = \mathcal{I}_{r+2}(B)$ получаем аналогично доказательству предыдущей теоремы, используя подобие матриц B и $Q^T BQ$, а также лемму 3. $\square$

Глава 13
Кривые второго порядка

§ 1. Приведение уравнения кривой к простейшему виду

1. Как и в § 6, гл. 3, будем рассматривать плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2.

Множество всех точек $x = (x_1, x_2)$ плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

называют *кривой второго порядка.* Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2$, a_i, $i = 0, 1, 2$, — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения.*

Для сокращения записей, как и в предыдущей главе, введем в рассмотрение симметричную ненулевую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

и вектор $a = (a_1, a_2)$. Тогда уравнение (1.1) запишется в виде[1)]

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0. \tag{1.3}$$

2. В соответствии с общей теорией квадратичных функций (см. § 4, § 5, гл. 12) упрощение этого уравнения мы будем выполнять с помощью замены переменных

$$x = x^0 + Ty, \tag{1.4}$$

где T — ортогональная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол φ, если считать при этом, что исходная декартова система координат правая, т. е. поворот от оси x_1 к оси x_2 — поворот против часовой

[1)] В этой главе под скалярным произведением всюду понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^2$.

стрелки (см. п. 2, с. 223), и последующий перенос начала системы координат в точку x^0.

Выполним сначала поворот координатных осей, т. е. замену переменных

$$x = Tz \tag{1.6}$$

в уравнении (1.3). Проводя элементарные выкладки, получим

$$(T^T ATz, z) + 2(\hat{a}, z) + a_0 = 0, \tag{1.7}$$

где $\hat{a} = T^T a$.

Построим ортогональное преобразование T так, чтобы матрица $T^T AT$ приняла диагональный вид (см. упражнение 2 на с. 225). С этой целью решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Корни его легко выписываются в явном виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \tag{1.8}$$

Если $a_{12} = 0$, то $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$. Положим в этом случае $T = I$. Уравнение (1.7) принимает вид

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\hat{a}_1 z_1 + 2\hat{a}_2 z_2 + a_0 = 0 \tag{1.9}$$

(здесь $\hat{a}_1 = a_1$, $\hat{a}_2 = a_2$).

Если $a_{12} \neq 0$, то, очевидно, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Найдя λ_1, λ_2, определим соответствующие им единичные собственные векторы

$$e^k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k), \quad k = 1, 2,$$

как решения уравнений

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2,$$

или, более подробно,

$$(a_{11} - \lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0,$$

$$a_{12}\cos\varphi_k + (a_{22} - \lambda_k)\sin\varphi_k = 0,$$

откуда получаем уравнения для определения углов φ_1, φ_2:

$$\operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1, 2. \tag{1.10}$$

Будем считать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Причем, поскольку собственные векторы симметричной матрицы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны (см. теорему 3, с. 200), то обязательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2.$$

Элементарные вычисления дают

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}} = \frac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{a_{12}}. \tag{1.11}$$

В соответствии со знаком a_{12} занумеруем собственные числа (и соответствующие им углы) так, чтобы $\operatorname{tg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\varphi_2$, т. е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

Используя общие построения (см. упражнение 2 на с. 225), матрицу T составим из собственных векторов e^1, e^2:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

При указанном выборе матрицы T получаем

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

и уравнение (1.7) вновь принимает вид (1.9).

3. Дальнейшие упрощения уравнения (1.3) используют перенос начала системы координат. Будем различать два случая: $\det(A) \neq 0$ и $\det(A) = 0$.

3.1. Предположим сначала, что $\det(A) \neq 0$. Это условие эквивалентно тому, что $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. При выполнении этого условия, выделяя полные квадраты, т. е. полагая $y = \hat{x}^0 + z$, где $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$, $\hat{x}_2^0 = \hat{a}_2/\lambda_2$, уравнение (1.9) можно записать в виде

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0. \tag{1.14}$$

Здесь $\hat{a}_0 = a_0 - \hat{a}_1^2/\lambda_1 - \hat{a}_2^2/\lambda_2$.

3.2. Пусть теперь $\det(A) = 0$. Напомним, что мы считаем, что $A \neq 0$. Понятно, что в этом случае либо $\lambda_1 = 0$, либо $\lambda_2 = 0$. Одновременно λ_1 и λ_2 не могут равняться нулю (почему?). Предположим для определенности, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда уравнение (1.9) можно представить в виде

$$\lambda_1(z_1 + \hat{a}_1/\lambda_1)^2 + 2\hat{a}_2 z_2 + \hat{a}_0 = 0, \tag{1.15}$$

где $\hat{a}_0 = a_0 - \hat{a}_1^2/\lambda_1$. Здесь опять надо различать два случая.

1) Если $\hat{a}_2 = 0$, положим $y = \hat{x}^0 + z$, где $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$, $\hat{x}_2^0 = 0$. Такая замена переменных приведет уравнение (1.15) к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \hat{a}_0 = 0. \tag{1.16}$$

2) Если $\hat{a}_2 \neq 0$, представим уравнение (1.15) в форме

$$\lambda_1(z_1 + \hat{a}_1/\lambda_1)^2 + 2\hat{a}_2(z_2 + \hat{a}_0/(2\hat{a}_2)) = 0$$

и положим $y = \hat{x}^0 + z$, $\hat{x}_1^0 = \hat{a}_1/\lambda_1$, $\hat{x}_2^0 = \hat{a}_0/2\hat{a}_2$. Тогда уравнение (1.15) примет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + 2\hat{a}_2 y_2 = 0. \tag{1.17}$$

Предполагая, что $\lambda_1 = 0$, а $\lambda_2 \neq 0$, можно точно так же преобразовать уравнение (1.9) либо к уравнению

$$\lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0, \tag{1.18}$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 y_2^2 + 2\hat{a}_1 y_1 = 0. \tag{1.19}$$

4. Таким образом, полагая, что z в (1.6) равно $-\hat{x}^0 + y$, где в зависимости от свойств собственных чисел матрицы A вектор $\hat{x}^0$ выбирается по одной из выше приведенных формул, а T — матрица вида (1.5) такова, что выполнено (1.13), получим, что общее уравнение (1.1) кривой второго порядка при помощи замены переменных $x = x^0 + Ty$, где $x^0 = -T\hat{x}^0$, можно преобразовать к одной из следующих форм:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{1.20}$$

$$\lambda_2 y_2^2 + 2\hat{a}_1 y_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0, \tag{1.21}$$

$$\lambda_2 y_2^2 + \hat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0, \tag{1.22}$$

$$\lambda_1 y_1^2 + 2\hat{a}_2 y_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0, \tag{1.23}$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \hat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0. \tag{1.24}$$

Важно подчеркнуть, что угол φ и вектор x^0 определяются по коэффициентам уравнения (1.1) при помощи простых явных формул. В соответствии с общей теорией квадратичных функций каждое уравнение (1.1) при помощи преобразования вида (1.4) может быть однозначно приведено лишь к одной из форм (1.20)–(1.24).

5. Из общих результатов, полученных при изучении квадратичных функций, следует, что коэффициенты уравнений (1.20)–(1.24) однозначно определяются при помощи простых формул по коэффициентами уравнения (1.1). Таким образом, построение преобразования (1.4), фактически, требуется лишь для того, чтобы установить, как располагается исследуемая кривая по отношению к исходной декартовой системе координат.

Наряду с матрицей A, определяемой соотношением (1.2), введем в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

соответствующую квадратичной функции, определяемой левой частью уравнения (1.1), и выпишем выражения для коэффициентов уравнений (1.20)–(1.24) (см. теоремы 1, 2, с. 236):

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A),\ \hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)},\ \hat{a}_{01} = \mathcal{I}_2(B)/\mathcal{I}_1(A).$$

Здесь (см. общие формулы для инвариантов оператора, с. 174)

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = \operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad \mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

По сравнению с (4.5), с. 175, в выражении $\mathcal{I}_2(B)$ на одно слагаемое меньше, поскольку в рассматриваемом случае $\det A = 0$.

§ 2. Геометрические свойства кривых второго порядка

Опираясь на уравнения (1.20) – (1.24), исследуем геометрические свойства кривых второго порядка.

Для упрощения записей в дальнейшем изменим очевидным образом обозначения декартовых координат и коэффициентов уравнений. В результате получим, что нам предстоит исследовать три различных типа уравнений

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2.1}$$

$$y^2 = 2px, \tag{2.2}$$

$$y^2 + d = 0. \tag{2.3}$$

1. Начнем с уравнения (2.3). Возможны три случая: $d = 0$, кривая совпадает с осью y; $d < 0$, кривая распадается на две параллельные прямые $y = \sqrt{-d}$, $y = -\sqrt{-d}$; $d > 0$, множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (2.3), пусто; говорят, что в этом случае кривая распадается на *две мнимые параллельные прямые.*

2. Исследуем уравнение (2.1). Здесь нужно различать такие случаи:

1) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 матрицы A совпадают, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

2) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 различны.

Кривые, соответствующие первому случаю, называют *эллипсами.* Здесь опять нужно различать три случая: $d = 0$, кривая вырождается в точку, совпадающую с началом координат; $d > 0$, уравнение определяет так называемый *мнимый эллипс*; $d < 0$, в этом случае уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.4}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (2.4), называют *эллипсом.*

Кривые, соответствующие случаю, когда λ_1, λ_2 имеют различные знаки, называют *гиперболами.* Будем для определенности считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ и рассмотрим три случая. Если $d = 0$, то уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\sqrt{\lambda_1}x = \pm\sqrt{-\lambda_2}y,$$

т. е. в данном случае кривая распадается на две прямые, пересекающиеся в начале координат. Случаи $d < 0$, $d > 0$, фактически, можно не различать, так как они сводятся один к другому за счет переименования осей координат.

Будем для определенности считать, что $d < 0$. Тогда уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{-\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (2.5), называют *гиперболой.*

3. Опишем геометрические свойства эллипса (см. рис. 1). Непосредственно из уравнения (2.4) вытекает, что для всех точек эллипса справедливы неравенства: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике.

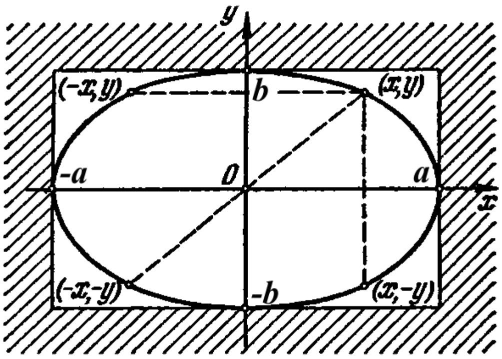


Рис. 1. К описанию геометрических свойств эллипса

Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе. Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.

Числа a, b называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса a). Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0, 1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* эллипса. Пусть (x, y) — произвольная точка эллипса. Тогда, как ниже будет показано,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 2). Это свойство эллипса можно принять за его определение, так как, исходя из (2.6), очевидно, можно получить уравнение эллипса.

Докажем справедливость равенства (2.6) для точек, принадлежащих эллипсу. Используя равенства $c^2 = a^2 - b^2$, $y^2 = b^2 - b^2x^2/a^2$, можем написать

$$(x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + a^2 - b^2 + b^2 - b^2x^2/a^2 =$$

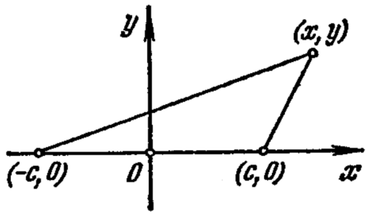


Рис. 2. К определению эллипса и гиперболы

$$= x^2(1 - b^2/a^2) + 2cx + a^2 = x^2c^2/a^2 + 2cx + a^2 = \\ = (xc/a + a)^2. \quad (2.7)$$

Точно так же

$$(x - c)^2 + y^2 = (-xc/a + a)^2.$$

Заметим, что $c < a$. Учтем также, что $|x| \leqslant a$ для любой точки эллипса. Поэтому справедливы неравенства

$$xc/a + a > 0, \quad -xc/a + a > 0,$$

следовательно,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = xc/a + a, \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -xc/a + a,$$

откуда непосредственно вытекает (2.6).

4. Опишем геометрические свойства гиперболы (см. рис. 3). Из уравнения (2.5) непосредственно вытекает, что если точка (x, y) лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2x^2/x^2$, т. е. кривая, описываемая уравнением (2.5), лежит вне полосы $|x| < a$ и внутри соответствующих (вертикальных) углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$.

Как и в случае эллипса, проверяется, что кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат — *центр симметрии* кривой. Точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$ пересечения с осью x называются *вершинами* гиперболы.

Прямые $y = \pm(b/a)x$ — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (рис. 3). Покажем это применительно к ветви, определяемой уравнением

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geqslant a, \tag{2.8}$$

и прямой $y = (b/a)x$. Для остальных ветвей выкладки полностью аналогичны. В соответствии с определением асимптоты (см. курс математического анализа) достаточно проверить справедливость следующих равенств:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

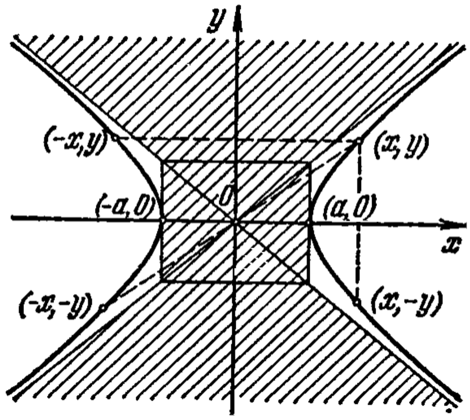


Рис. 3. К описанию геометрических свойств гиперболы

Проверка первого из этих равенств элементарна. При проверке второго полезно заметить, что

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = -\frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \to 0$$

при $x \to \infty$.

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы.

Для любой точки (x, y), лежащей на гиперболе,

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a, \tag{2.9}$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Проверим справедливость равенства (2.9), считая, что выполнены соотношения (2.8). Для остальных ветвей гиперболы все рассуждения полностью аналогичны. Следуя выкладкам, выполненным в предыдущем пункте (см. (2.7)), получаем

$$(x+c)^2 + y^2 = (cx/a + a)^2, \quad (x-c)^2 + y^2 = (cx/a - a)^2.$$

Для рассматриваемой ветви гиперболы, как нетрудно убедиться, справедливы неравенства

$$cx/a + a > 0, \quad cx/a - a > 0.$$

Поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx/a + a - (cx/a - a) = 2a,$$

т. е. (2.9) доказано.

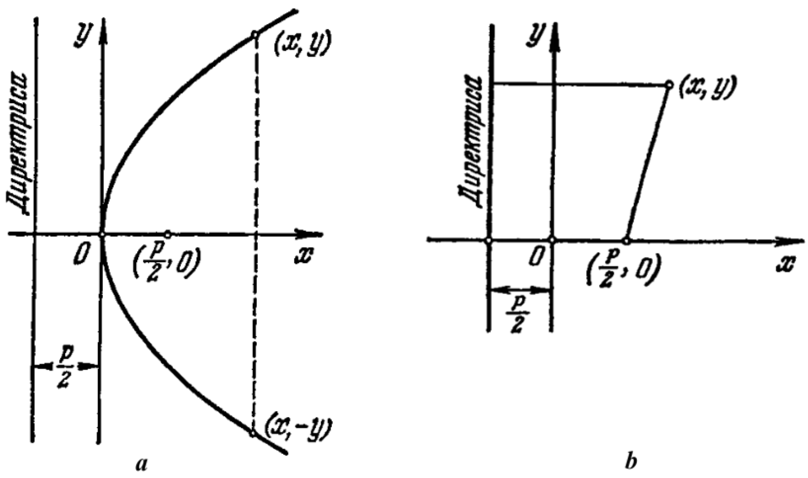


Рис. 4. К описанию геометрических свойств параболы (a). К определению параболы (b)

5. Кривая, задаваемая уравнением (2.2), называется *параболой*. Опишем ее геометрические свойства (см. рис. 4, a). Большинство из них хорошо известны читателю из школьного курса математики. Будем считать, что $p > 0$. Рассмотрение случая $p < 0$ требует очевидных изменений.

Непосредственно из уравнения (2.2) вытекает, что парабола расположена в правой полуплоскости, симметрична относительно оси x. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот (докажите!).

Точка $(p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 4, a). Для любой точки (x, y), принадлежащей параболе,

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2, \tag{2.10}$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 4, b). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

Докажем равенство (2.10). Имеем

$$(x - p/2)^2 + y^2 = x^2 - px + p^2/4 + 2px = (x + p/2)^2,$$

причем, очевидно, $x + p/2 > 0$ для любой точки параболы, следовательно, (2.10) выполнено.

6. Пример. Привести к простейшему виду уравнение

$$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0 \tag{2.11}$$

и построить кривую в исходной декартовой системе координат x_1x_2.

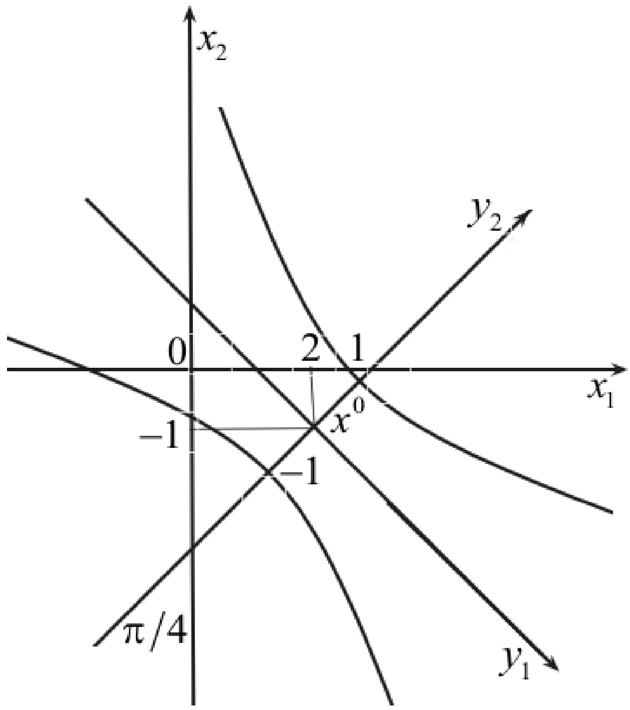


Рис. 5. К примеру исследования уравнения кривой второго порядка

Решение. В данном случае $a_{11} = a_{22} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_1 = -1$, $a_2 = -7$, $a_0 = -13$. По формуле (1.8), с. 239, имеем $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, по формуле (1.10), с. 239, получаем $\operatorname{tg}\varphi_1 = 1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = -1$. Далее действуем в соответствии с предписаниями § 1, т. е. нумеруем углы и соответствующие им собственные числа так, чтобы выполнялись условия $-\pi/2 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \pi/2$. Таким образом, получаем $\lambda_1 = -2$, $\varphi_1 = -\pi/4$, $\lambda_2 = 8$, $\varphi_2 = \pi/4$. По формуле (1.12), с. 240,

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Выполнив замену переменных

$$x = Tz, \tag{2.13}$$

в соответствии с (1.7), с. 239, получаем

$$-2z_1^2 + 8z_2^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}z_2 - 13 = 0.$$

Используя теперь формулы пункта 3.1, с. 240, приходим к уравнению

$$-2y_1^2 + 8y_2^2 - 8 = 0, \tag{2.14}$$

или

$$-\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{1} = 1, \tag{2.15}$$

где

$$y_1 = z_1 - 3/\sqrt{2}, \quad y_2 = z_2 - 1/\sqrt{2}. \tag{2.16}$$

Из (2.13), (2.16) получаем, что $x = x^0 + Ty$, где $x^0 = (2, -1)$. Таким образом, кривая, задаваемая уравнением (2.11), есть гипербола, описываемая уравнением (2.15) в декартовой системе координат y_1y_2, оси которой повернуты на угол $-\pi/4$ против часовой стрелки ($\pi/4$ — по часовой стрелке) по отношению к осям декартовой системы координат x_1x_2, а начало системы координат y_1y_2 расположено в точке $(2, -1)$ относительно системы координат x_1x_2 (см. рис. 5).

Отметим, что если оставить в стороне вопрос о расположении кривой по отношению к исходной системе координат, то уравнение (2.14) может быть выписано непосредственно по формулам п. 5, с. 242. Для этого учтем, что уравнению (2.11) соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(A) = -16 \neq 0$, собственные числа матрицы A есть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, $\det(B) = 128$, то приведенной формой уравнения (2.11) будет уравнение (2.14).

Глава 14
Поверхности второго порядка

§ 1. Приведение уравнения поверхности к простейшему виду

1. Отнесем трехмерное евклидово пространство $\mathbf{V}_3$ к декартовой системе координат (см. п. 1, с. 68). *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению[1)]

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

есть заданная симметричная ненулевая матрица, $a = (a_1, a_2, a_3)$ — заданный вектор, a_0 — заданное число.

Простейший пример: уравнение сферы радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, как известно (см. с. 82), имеет вид

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 - R^2 = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$(x, x) - 2(x^0, x) + |x^0|^2 - R^2 = 0,$$

т. е. в данном случае $A = I$, $a = -x^0$, $a_0 = |x^0|^2 - R^2$.

Упрощение уравнения (1.1) опирается на общую теорию квадратичных функций и проводится по той же схеме, что и для кривых второго порядка. Оно основано на замене переменных

$$x = x^0 + Ty, \tag{1.3}$$

где T — некоторая ортогональная матрица. Геометрически эта замена переменных состоит в переносе начала координат в точку x^0,

---

[1)] В этой главе под скалярным произведением всюду понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$.

повороте системы координат вокруг некоторой оси и, возможно, последующем изменении направления этой координатной оси (см. п. 3, с. 224). Однако построение матрицы T не может быть выполнено в общем случае с той же степенью подробности, как для кривых второго порядка, поскольку задача приведения симметричной матрицы третьего порядка ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду не допускает решения по простым явным формулам.

2. Из общей теории квадратичных функций вытекает, что, выбирая соответствующим образом начало x^0 новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу T, уравнение (1.1) поверхности второго порядка можно преобразовать к одному из следующих пяти видов:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \hat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\hat{a}_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0, \tag{1.5}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \hat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0, \tag{1.6}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\hat{a}_2 x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = 0, \tag{1.7}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \hat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = 0. \tag{1.8}$$

3. Аналогично случаю кривых второго порядка коэффициенты уравнений (1.4)–(1.8) могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения (1.1). Введем в рассмотрение наряду с матрицей A, определенной равенством (1.2), матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

и выпишем, используя теоремы 1, 2, с. 236, выражения для коэффициентов уравнений (1.4)–(1.8):

$$\hat{a}_0 = \mathcal{I}_4(B)/\mathcal{I}_3(A) = \det(B)/\det(A), \quad \hat{a}_3 = \sqrt{-\det(B)/\mathcal{I}_2(A)}$$

$$\hat{a}_{0,1} = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A), \quad \hat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)}, \quad \hat{a}_{0,2} = \mathcal{I}_2(B)/\mathcal{I}_1(A).$$

Здесь (см. формулы (4.5), с. 175)

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Выписывая формулы для $\mathcal{I}_3(B), \mathcal{I}_2(B)$, мы опустили нулевые слагаемые, учитывая, что в первом случае ранг матрицы A не превосходит двух (см. (1.6), (1.7)) и, следовательно, ее определитель равен нулю, а во втором случае ранг матрицы A равен единице (см. (1.8)) и, следовательно, все ее миноры второго порядка — нули.

§ 2. Геометрические свойства поверхностей второго порядка

Опираясь на уравнения (1.4)–(1.8), исследуем геометрические свойства поверхностей второго порядка. Для удобства записей в дальнейшем изменим очевидным образом обозначения для декартовых координат и некоторых коэффициентов. Таким образом, нам предстоит исследовать поверхности, описываемые следующими уравнениями:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1,\, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2.2}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2.3}$$

$$y^2 = 2px, \tag{2.4}$$

$$y^2 + d = 0. \tag{2.5}$$

1. Начнем с уравнения (2.5). Здесь возможны три случая: $d < 0$, поверхность распадается на две параллельные плоскости $y = \sqrt{-d}$, $y = -\sqrt{-d}$; $d = 0$, поверхность представляет собой плоскость $y = 0$; $d > 0$, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей уравнению. В последнем случае говорят, что уравнение описывает пару параллельных *мнимых плоскостей*.

2. Как показано в предыдущей главе, уравнение (2.4) описывает параболу на плоскости переменных (x, y), поэтому соответствующая поверхность есть так называемый *параболический цилиндр* с образующей, параллельной оси z. Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = \mathrm{const}$ — парабола (см. рис. 1).

3. Уравнение (2.3) в зависимости от знаков λ_1, λ_2, d может описывать эллипс или гиперболу в декартовой плоскости x, y. Соответствующие поверхности — *эллиптический* или *гиперболический цилиндр* (см. рис. 1). Понятно, что здесь возможны случаи вырождения, аналогичные изученным в пункте 2, с. 243.

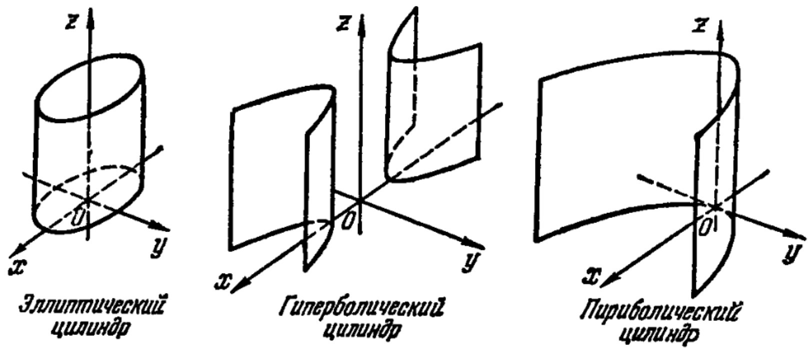


Рис. 1. Цилиндры

4. Обратимся к уравнению (2.2). Здесь нужно различать два случая: 1) числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки, 2) знаки чисел λ_1, λ_2 различны.

Пусть числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать, что они положительны. Будем считать, что $b_3 < 0$. Если принять, что $b_3 > 0$, то получим, очевидно, такую же поверхность, но симметричную относительно плоскости x, y. Если $b_3 = 0$, то мы приходим к одной из поверхностей, рассмотренных в предыдущих пунктах. При сделанных предположениях уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{2.6}$$

Здесь $a^2 = 2|b_3|/\lambda_1$, $b^2 = 2|b_3|/\lambda_2$. При $z < 0$ уравнение (2.2) противоречиво, т. е. вся поверхность расположена в полупространстве $z \geqslant 0$. Единственная точка плоскости $z = 0$, принадлежащая поверхности, — начало координат. Координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются *плоскостями симметрии*, ось z является *осью симметрии*, так как если точка (x, y, z) принадлежит поверхности, то точки $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, -y, z)$ также принадлежат поверхности. Записывая уравнение (2.2) при $z > 0$ в виде

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1, \tag{2.7}$$

получаем, что сечения этой поверхности плоскостями $z = \mathrm{const} > 0$ — эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом z (см. рис. 2). Сечения этой поверхности плоскостям $x = \mathrm{const}$ или $y = \mathrm{const}$, как нетрудно убедиться, — параболы (см. рис. 2). Описанную поверхность называют *эллиптическим параболоидом.*

Пусть числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки. Будем считать, что

$$\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0, \ b_3 < 0.$$

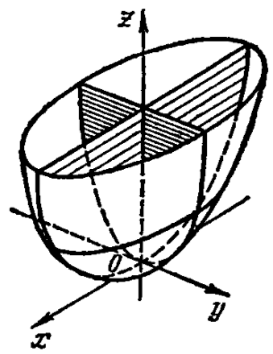


Рис. 2. Эллиптический параболоид

Любое другое допустимое сочетание знаков рассматривается аналогично. Уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{2.8}$$

Здесь $a^2 = 2|b_3|/\lambda_1$, $b^2 = 2|b_3|/|\lambda_2|$. Вновь координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются *плоскостями симметрии*, ось z является *осью симметрии.*

Проанализируем сечения этой поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости x, y (см. рис. 3, b). При $z = 0$ из (2.2) получаем

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0,$$

т. е. сечение поверхности плоскостью $z = 0$ — пара прямых (см. рис. 3, b)

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

При $z = h \neq 0$ запишем уравнение (2.2) в виде

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1. \tag{2.9}$$

При $h > 0$ уравнение (2.9) — уравнение гиперболы, ветви которой вытянуты вдоль оси x. При $h < 0$ получаем гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль оси y (см. рис. 3, b).

Пересекая поверхность плоскостью $x = h$, получаем параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{2.10}$$

ветви которой направлены противоположно оси z. Пересекая поверхность плоскостью $y = h$, очевидно, получим параболу, ветви которой

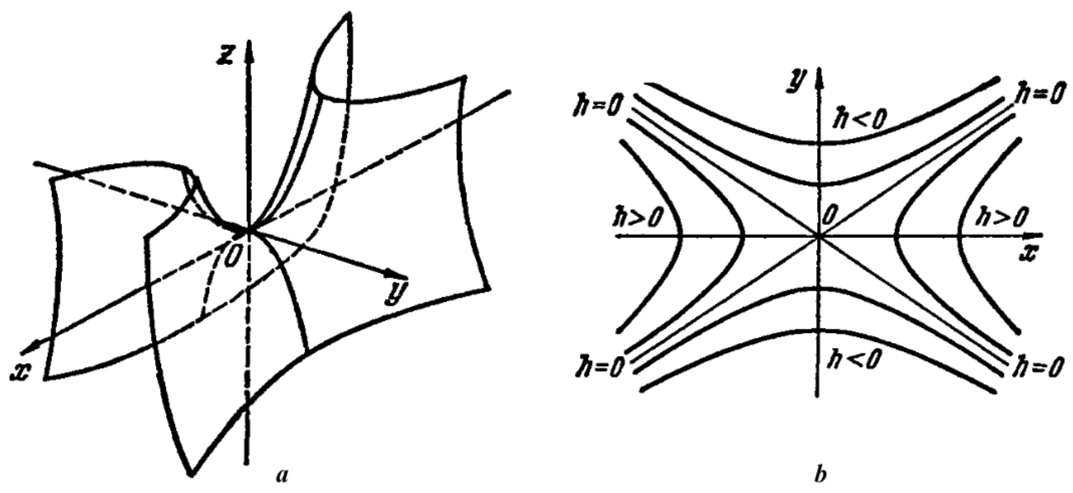


Рис. 3. Гиперболический параболоид (a). Сечения гиперболического параболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b)

направлены вдоль оси z. Описанную седлообразную поверхность называют *гиперболическим параболоидом* (см. рис. 3, a).

5. Обратимся, наконец, к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \tag{2.11}$$

Не ограничивая общности, здесь можно различать два случая:

1) λ_1, λ_2, $\lambda_3 > 0$, это условие эквивалентно условию положительной определенности матрицы A (см. с. 197);

2) λ_1, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

В случае 1) возможны три ситуации: $d = 0$, единственная точка, удовлетворяющая (2.11), — начало координат; $d > 0$, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению; $d < 0$. При выполнении последнего условия уравнение (2.11) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.12}$$

Здесь $a^2 = -d/\lambda_1$, $b^2 = -d/\lambda_2$, $c^2 = -d/\lambda_3$. Поверхность, описываемая уравнением (2.12), называется *эллипсоидом* (см. рис. 4, a).

Эллипсоид, очевидно, симметричен относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Вся поверхность заключена в параллелепипеде

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c$$

и, следовательно, ограничена.

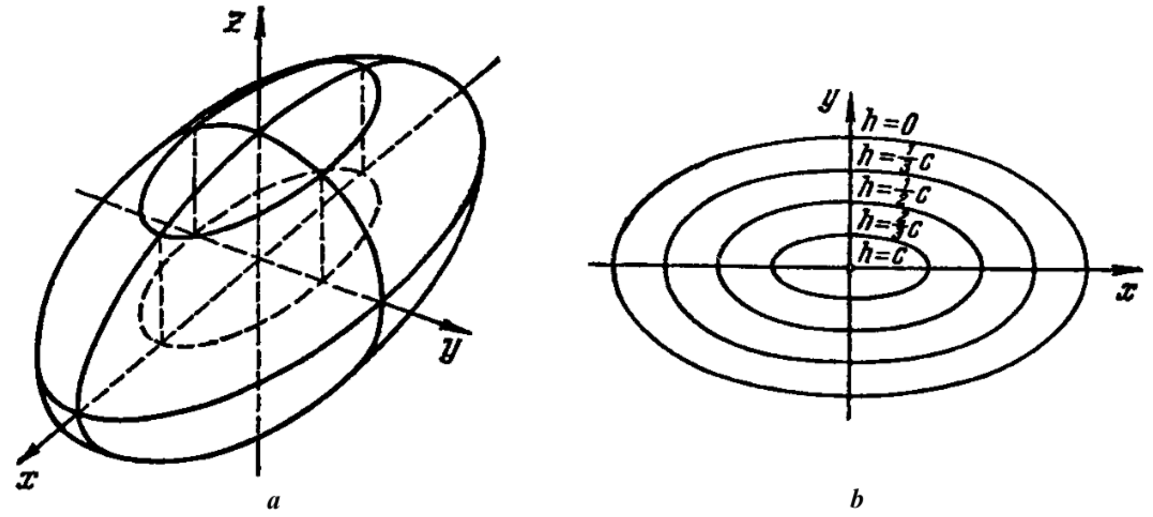


Рис. 4. Эллипсоид (a). Сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b)

Изучим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным. Вследствие симметрии поверхности достаточно ограничиться, например, плоскостями, параллельными плоскости x, y. Нетрудно убедиться, что кривая, получающаяся при пересечении эллипсоида с плоскостью $z = h$, где $|h| \le c$, является эллипсом с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При возрастании h от 0 до c полуоси a_1, b_1 убывают. При $h = \pm c$ эллипс вырождается в точку (см. рис. 4, b).

Полезно отметить, что сечение эллипсоида любой плоскостью дает эллипс. В самом деле, это сечение — кривая второго порядка. Она ограничена, так как эллипсоид ограничен, но единственной ограниченной кривой второго порядка (см. § 2 настоящей главы) является эллипс.

Обратимся к случаю 2). Пусть при этом $d = 0$. Запишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (2.13)$$

Здесь $a^2 = 1/\lambda_1$, $b^2 = 1/\lambda_2$, $c^2 = -1/\lambda_3$. Поверхность, описываемая уравнением (2.13), называется *эллиптическим конусом.* Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Ее сечение плоскостью $z = h$ — эллипс с полуосями $a_1 = a|h|/c$, $b_1 = b|h|/c$ (см. рис. 5).

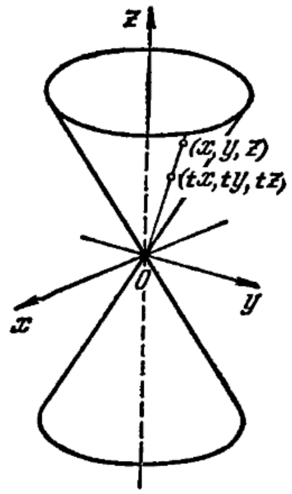


Рис. 5. Эллиптический конус

При $a = b$ получаем прямой круговой конус с вершиной в начале координат.

Заметим, что если точка (x, y, z) лежит на конусе, то и точка (tx, ty, tz) при любом $t \in (-\infty, \infty)$ лежит на конусе, т. е. вместе с любой точкой (x, y, z), лежащей на конусе, конусу принадлежит и вся прямая, проходящая через эту точку и начало координат (см. рис. 5).

Можно сказать, таким образом, что эллиптический конус получается при движении прямой (*образующей*), закрепленной в одной точке, по эллиптической *направляющей*.

Пусть теперь $d < 0$. Запишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.14}$$

Здесь $a^2 = -d/\lambda_1$, $b^2 = -d/\lambda_2$, $c^2 = -d/|\lambda_3|$. Поверхность, описываемая уравнением (2.14), называется *однополостным гиперболоидом* (см. рис. 6, a). Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

Сечением поверхности плоскостью $z = h$ является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

При $h = 0$ получаем так называемый *горловой эллипс* (см. рис. 6, b).

Рассмотрим, наконец, случай $d > 0$. Уравнение (2.11) представим в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{2.15}$$

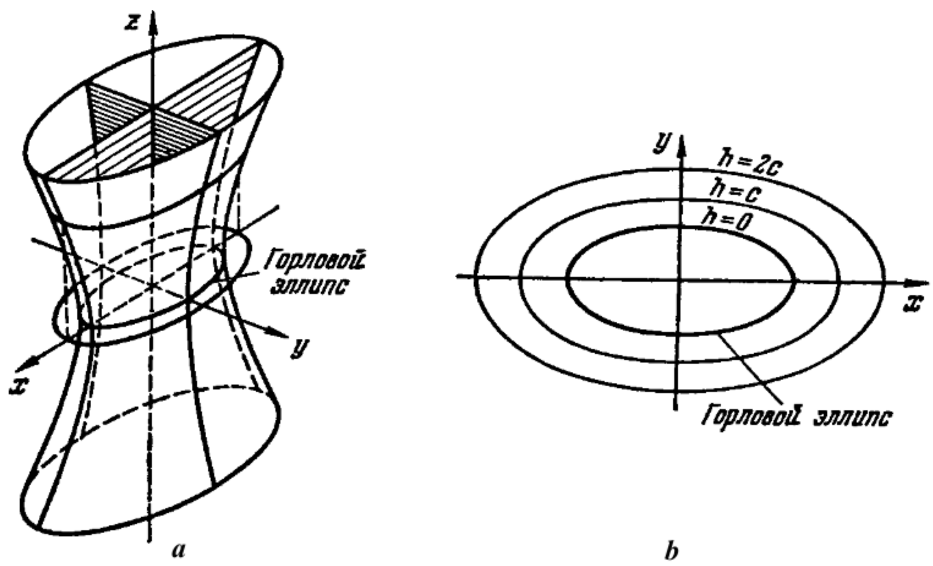


Рис. 6. Однополостный гиперболоид (a). Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b)

где $a^2 = d/\lambda_1$, $b^2 = d/\lambda_2$, $c^2 = d/|\lambda_3|$. Уравнение (2.15) описывает *двуполостный гиперболоид* (см. рис. 7, a).

Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Заметим, что при $|z| < c$ не существует вещественных x, y, удовлетворяющих уравнению (2.15). При $|z| = c$ уравнению (2.15) удовлетворяют лишь $x = 0$, $y = 0$, т. е. вся поверхность лежит вне плоского слоя $|z| < c$. Сечениями поверхности плоскостями $z = \pm h$ при $h > c$ являются эллипсы (см. рис. 7, b) с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

6. Однополостный гиперболоид представляет собой *линейчатую поверхность*, т. е. через каждую точку, лежащую на однополостном гиперболоиде, можно провести две различные прямые, целиком принадлежащие этому же однополостному гиперболоиду (см. рис. 8, a). Аналогичным свойством обладает гиперболический параболоид (см. рис. 8, b).

Проведем доказательство этого утверждения применительно к случаю однополостного гиперболоида. Определим прямую l как результат пересечения двух плоскостей, задаваемых уравнениями

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{2.16}$$

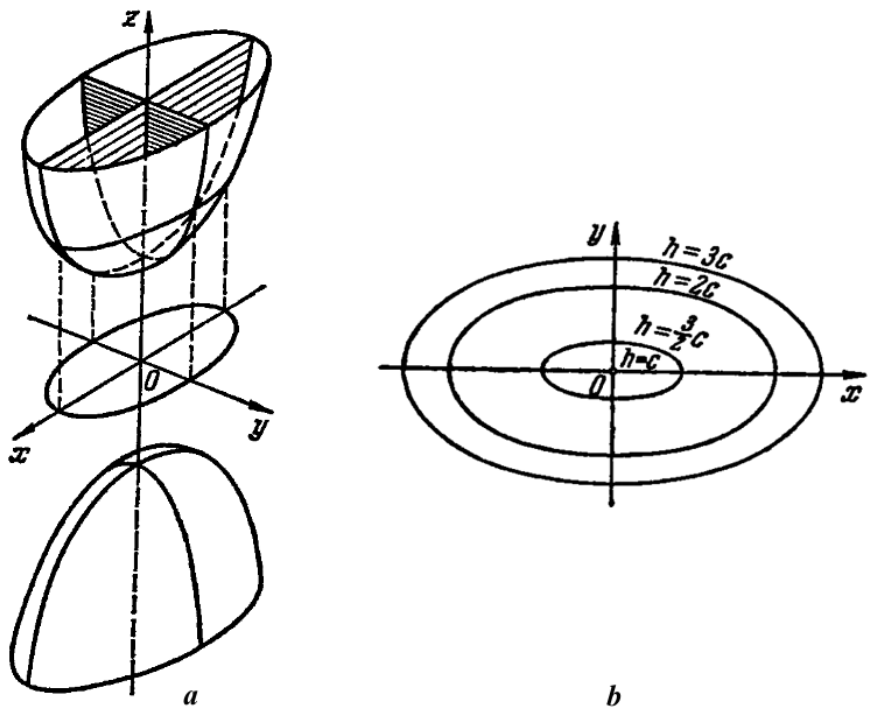


Рис. 7. Двуполостный гиперболоид (a). Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b)

где a, b, c — параметры однополостного гиперболоида Γ, описываемого уравнением (2.14). Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на Γ. Подберем α, β так, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) принадлежала прямой l. Для этого нужно, чтобы числа α, β удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y_0}{b}\right), \quad \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y_0}{b}\right). \tag{2.17}$$

Понятно, что если $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, то определитель системы уравнений (2.17) равен нулю, значит, существует нетривиальное решение α_0, β_0 этой системы. Нетрудно убедиться также, что при любых α, β, не равных нулю одновременно, плоскости, описываемые уравнениями (2.16), не параллельны. Поэтому прямая l по найденным значениям α_0, β_0 определяется однозначно. Пусть теперь (x, y, z) — произвольная точка прямой l. Очевидно, ее координаты должны удовлетворять системе уравнений

$$\alpha_0\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta_0\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \beta_0\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha_0\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{2.18}$$

и, поскольку среди чисел α_0, β_0 хотя бы одно не нуль, то определитель системы (2.18) равен нулю, следовательно $(x, y, z) \in \Gamma$.

Аналогичные рассуждения показывают, что через точку (x_0, y_0, z_0) можно провести прямую l', определяемую как пересечение плоско-

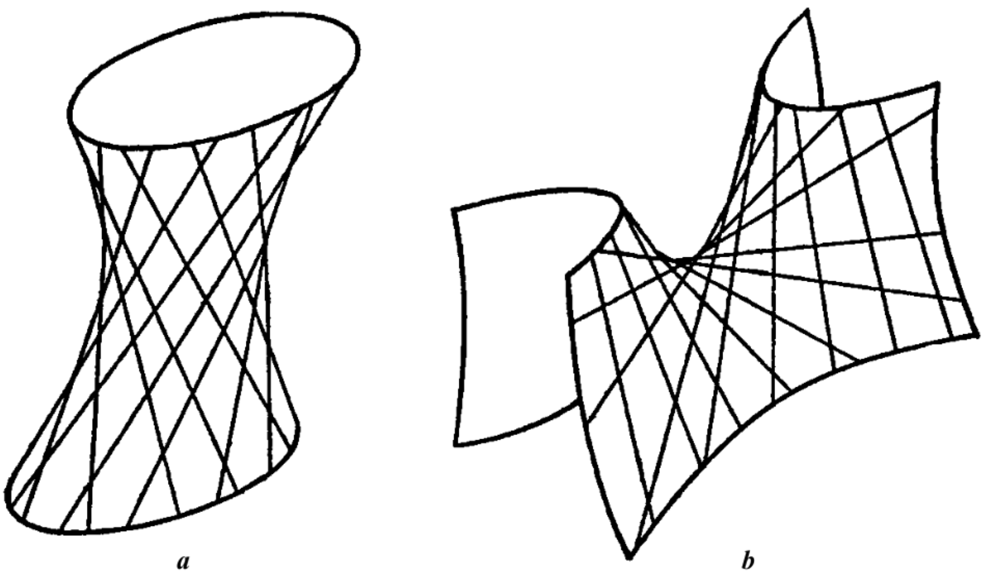


Рис. 8. Однополостный гиперболоид (a) и гиперболический параболоид (b) как линейчатые поверхности

стей, описываемых уравнениями вида

$$\nu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

и целиком лежащую на Г. Используя результаты п. 6, с. 94, нетрудно убедиться, что прямые l и l' не параллельны.

Упражнение. Показать, что через каждую точку гиперболического параболоида, описываемого уравнением (2.8), можно провести две различные прямые, целиком лежащие на этом параболоиде и задаваемые как пересечение плоскостей

$$\alpha z=\beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),\ \beta=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\ \text{ и }\ \nu z=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right),\ \lambda=\nu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Линейчатость поверхностей широко используется в инженерной практике, так как позволяет создавать соответствующие конструкции в виде простых стержневых систем. Такова, например, знаменитая телевизионная шуховская башня в Москве[1)].

7. Приведем в заключение сводку уравнений и названий поверхностей второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид,

[1)] Владимир Григорьевич Шухов (1853 — 1939) — русский, советский инженер. Ему принадлежит идея использования однополостных гиперболоидов в строительстве.

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — эллиптический конус,

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид,

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид,

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — эллиптический параболоид,

6) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — гиперболический параболоид,

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр,

8) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр,

9) $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр.

8. Примеры.

1) Привести к простейшему виду уравнение

$$4x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \tag{2.19}$$

и построить поверхность, описываемую этим уравнением в декартовой системе координат $x_1x_2x_3$.

Решение. В обозначениях п. 1, § 1, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = (-1, 3, 1), \ a_0 = 0.$$

Будем опираться на описанный в § 5, с. 232, способ построения приведенной формы квадратичной функции. Характеристическое уравнение матрицы A, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$P_3(\lambda) \equiv \lambda^3 - 16\lambda^2 + 69\lambda - 54 = 0.$$

Очевидно $\lambda_1 = 1$ — корень этого уравнения. Далее, поделив полином $P_3(\lambda)$ на $\lambda - 1$, получим $P_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 15\lambda + 54)$. Корнями уравнения $\lambda^2 - 15\lambda + 54 = 0$ являются числа $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Таким образом, все собственные числа матрицы A отличны от нуля, и они попарно различны. Соответствующие им собственные векторы матрицы A по теореме 3, с. 200, образуют ортогональную систему в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением.

Вычислим собственные векторы матрицы A. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 1$, есть решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - I)x = 0$. Записывая эту систему подробнее, получим

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,$$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 = 0,$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.$$

Определитель матрицы этой системы по построению равен нулю. Главный минор вто-

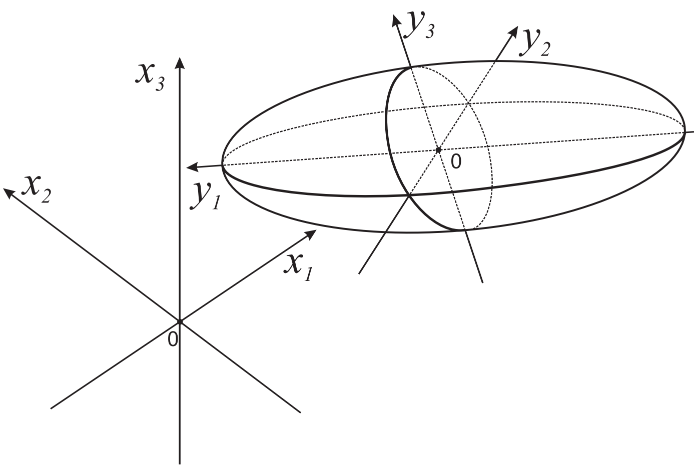


Рис. 9. К примеру 1) исследования уравнения поверхности второго порядка

рого порядка матрицы этой системы отличен от нуля, поэтому последнее уравнение системы — следствие первых двух уравнений, и искомый собственный вектор можно вычислить, полагая $x_3 = 1$ и определяя затем x_1, x_2 из первых двух уравнений системы. В результате получим, что собственному числу $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $x^1 = (-1, 0, 1)$. Точно так же находим, что собственному числу λ_2 соответствует собственный вектор $x^2 = (1, -1, 1)$, собственному числу λ_3 соответствует собственный вектор $x^3 = (1, 2, 1)$. Нормируя эти векторы, получим столбцы ортогональной матрицы T:

$$T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Используя теперь формулу (4.6), с. 231, найдем

$$\hat{a} = T^T a = (\sqrt{2}, -\sqrt{3},\ \sqrt{6}),$$

по формуле (5.4), с. 233, вычисляем $\hat{a}_0 = a_0 - \sum\limits_{k=1}^{3} \hat{a}_k^2/\lambda_k = -19/6$. Затем по формуле (5.5), с. 233, находим $\hat{x}^0 = (-\sqrt{2}, 1/6\sqrt{3}, -1/9\sqrt{6})$ и, наконец, по формуле (5.8), с. 233,

$$x^0 = T\hat{x}^0 = (19/18, -7/18, -17/18).$$

Таким образом, замена переменных $x = x^0 + Ty$ приводит уравнение (2.19) к виду

$$y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 - 19/6 = 0,$$

откуда получаем, что

$$(6/19)y_1^2 + (36/19)y_2^2 + (54/19)y_3^2 = 1. \qquad (2.20)$$

Уравнение (2.20) — это уравнение эллипсоида с полуосями $\sqrt{19/6}$, $\sqrt{19}/6$, $\sqrt{19/6}/3$, отнесенного к декартовой системе координат $y_1y_2y_3$, которая получается из исходной системы координат $x_1x_2x_3$ переносом начала в точку x^0 и поворотом таким, что оси y_k оказываются направленными вдоль векторов x^k, $k = 1, 2, 3$, соответственно (см. рис. 9).

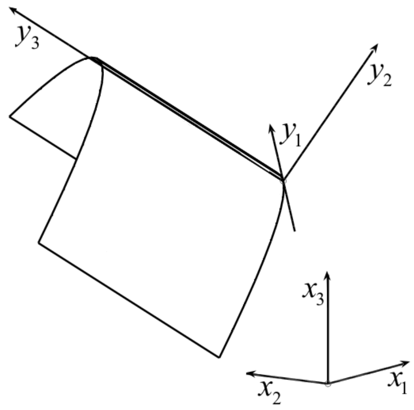


Рис. 10. К примеру 2) исследования уравнения поверхности второго порядка

2) Привести к простейшему виду уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 183 = 0 \qquad (2.21)$$

и построить поверхность, описываемую этим уравнением в декартовой системе координат $x_1x_2x_3$.

Решение. В обозначениях п. 1, § 1, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = (2, -1, 3),\ a_0 = 183.$$

Собственные числа матрицы A, как нетрудно убедиться, есть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ранг матрицы

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

равен двум. Все ненулевые решения системы уравнений $(A-2I)x = 0$, очевидно, пропорциональны вектору $e^1 = (1, 1, 0)$. Ранг матрицы A равен единице. Поэтому размерность фундаментальной системы решений однородного уравнения $Ax = 0$ равна двум. Полагая сначала $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим, что векторы $e^2 = (-1, 1, 0)$, $e^2 = (0, 0, 1)$ образуют базис собственного подпространства матрицы A, отвечающего нулевому собственному числу. Векторы e^1, e^2, e^3 попарно ортогональны. Нормируя их, получаем ортогональную матрицу T собственных векторов матрицы A:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\hat{a} = T^T a = (\sqrt{1/2}, -3\sqrt{1/2}, 3)$, поэтому, выполняя замену переменных $x = Tu$ в уравнении (2.21), получим

$$2(u_1^2 + \sqrt{1/2}u_1) + 2(-3\sqrt{1/2}\,u_2 + 3u_3) + 183 = 0. \tag{2.22}$$

В соответствии с методикой, описанной в п. 1, §5, гл. 12 (см. с. 232, 233), построим матрицу отражения R, преобразующую вектор $b = (-3\sqrt{1/2}, 3)$ в вектор, параллельный вектору $e = (1, 0)$. Для этого (см. п. 3.1, п. 3.2, с. 374) сначала вычислим вектор

$$w = (b - |b|e)/|b - |b|e| = ((1+\sqrt{3})/(6+2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3+\sqrt{3}}\,),$$

затем матрицы

$$R = I - 2ww^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

и выполним в уравнении (2.23) замену переменных $u = \widetilde{R}v$. В результате, получим

$$2(v_1^2 + \sqrt{1/2}\,v_1) + 3\sqrt{6}\,v_2 + 183 = 0, \tag{2.23}$$

или

$$2(v_1 + \sqrt{1/2}/2)^2 + 3\sqrt{6}(v_2 + (183 - 1/4)/(3\sqrt{6})) = 0. \tag{2.24}$$

Наконец, полагая $y_1 = v_1 + \sqrt{1/2}/2$, $y_2 = v_2 + (183 - 1/4)/(3\sqrt{6})$, $y_3 = v_3$, приходим к уравнению

$$y_1^2 = -3\sqrt{3/2}\,y_2. \tag{2.25}$$

Переменные x, y связаны соотношением $x = \tilde{x}^0 + \widetilde{T}y$. Вектор $\tilde{x}^0$ и ортогональная матрица $\widetilde{T}$ могут быть найдены при помощи последовательных вычислений по формулам (5.4), (5.5), (5.8), (5.12), (5.14), гл. 12: $\hat{a}_0 = 183 - 1/4$, $\hat{x}^0 = (1/2\sqrt{2}, 0, 0)$, $x^0 = T\hat{x}^0 = (1/4, 1/4, 0)$, $x^1 = (0, 2(183 - 1/4)/(3\sqrt{6}), 0)$,

$$\widetilde{T} = T\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \\ 0 & 2\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \end{pmatrix},$$

$\tilde{x}^0 = x^0 - \tilde{T}x^1 = (-361/18, 185/9, -731/18)$. Таким образом, уравнение (2.25) — это уравнение параболического цилиндра, отнесенного к декартовой системе координат $y_1y_2y_3$, которая получается из исходной системы координат $x_1x_2x_3$ переносом начала в точку $\tilde{x}^0$ и поворотом таким, что оси y_k, $k = 1, 2, 3$, оказываются направленными вдоль векторов, образованных столбцами матрицы $\widetilde{T}$ (см. рис. 10).

Упражнение. Получите уравнения (2.20), (2.25) непосредственно из уравнений (2.19), (2.21), используя формулы п. 3, с. 251.

§ 3. Гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$

1. *Гиперповерхностью второго порядка* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению

$$F(x) \equiv (Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0. \tag{3.1}$$

Здесь A — заданная симметричная матрица порядка n, a — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$, a_0 — фиксированное число, под скалярным произведением понимается стандартное скалярным произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Выполним в уравнении (3.1) замену переменных, полагая

$$x = x^0 + Ty. \tag{3.2}$$

В дальнейшем на протяжении данного параграфа будем предполагать, что T — ортогональная матрица.

Замена переменных (3.2) может быть интерпретирована как замена естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ на ортонормированный базис, образованный столбцами матрицы T, и перенос начала отсчета в точку x^0.

Как показано в § 5, матрица T и вектор x^0 могут быть выбраны так, что уравнение (3.1) примет одну и только одну из следующих *приведенных форм*:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + \hat{a}_0 = 0, \tag{3.3}$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + 2b_{r+1} y_{r+1} = 0. \tag{3.4}$$

Здесь, как и раньше, λ_1, λ_2, $\dots$, λ_r — все ненулевые собственные числа матрицы A, $b_{r+1} > 0$. Условимся в дальнейшем считать, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ положительны, $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_r$ отрицательны.

2. Приведенные формы гиперповерхностей позволяют выполнить их классификацию. Мы будем при этом использовать результаты п. 3, § 4, об ортогональных инвариантах квадратичных функций. Как и выше, через B будем обозначать квадратную матрицу порядка $n+1$, определенную равенством (4.2), с. 231.

2.1. Пусть $r = n$ (это условие эквивалентно тому, что $\det(A) \neq 0$). Форма (3.4) в этом случае, очевидно, невозможна. Таким образом, в рассматриваемом случае возможны лишь следующие ситуации:

1) Определитель матрицы B не нуль, и $\hat{a}_0 = \det(B)/\det(A) < 0$. Тогда уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 1. \qquad (3.5)$$

2) Определитель матрицы B не нуль, $\hat{a}_0 = \det(B)/\det(A) > 0$. Уравнение (3.3) принимает вид

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 1. \qquad (3.6)$$

3) Определитель матрицы B равен нулю. Уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_n^2}{\alpha_n^2} = 0. \qquad (3.7)$$

Коэффициенты α_i, $i = 1, 2, \dots, n$, в уравнениях (3.5)–(3.7) очевидным образом выражаются через собственные числа матрицы A и определитель матрицы B.

Гиперповерхность, описываемая уравнением (3.5) при $k = n$ (уравнением (3.6) при $k = 0$), называется *эллипсоидом.*

Гиперповерхность, описываемая уравнением (3.5) при $k = 0$ (уравнением (3.6) при $k = n$), называется *мнимым эллипсоидом.* Нет ни одной точки пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей этому уравнению.

Уравнения (3.5), (3.6) при $1 < k < n$ описывают гиперповерхности, называемые *гиперболоидами.*

Гиперповерхности, описываемые уравнением (3.7) при $1 < k < n$, называются *конусами.* При $k = 0$ и $k = n$ уравнение (3.7) вырождается. Ему удовлетворяет единственная точка $x = 0$ пространства $\mathbb{R}^n$.

2.2. Пусть $r = n-1$. В этом случае $\det(A) = 0$. Ранг матрицы B может принимать при этом следующие значения: $n-1$, n, $n+1$.

Если $\operatorname{rank}(B) = n-1$, то приведенная форма уравнения гиперповерхности принимает вид (3.3) с $\hat{a}_0$ равным нулю, и ее можно представить так:

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 0. \qquad (3.8)$$

Если $\operatorname{rank}(B) = n$, то $\hat{a}_0 \neq 0$, и в зависимости от знака $\hat{a}_0$ приходим либо к уравнению вида

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 1, \qquad (3.9)$$

либо к уравнению вида

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 1, \qquad (3.10)$$

Если $\operatorname{rank}(B) = n + 1$, то реализуется приведенная форма (3.4), которую можно представить в виде

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}^2} = 2py_n, \quad p > 0. \quad (3.11)$$

2.3. Пусть, наконец, $0 < r < n - 1$. Ранг матрицы B может при этом принимать значения: r , $r + 1$, $r + 2$. Аналогично предыдущему случаю приходим к уравнениям вида

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 0, \qquad (3.12)$$

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 1, \qquad (3.13)$$

или

$$-\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} - \dots - \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} + \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} + \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} + \dots + \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 1, \qquad (3.14)$$

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \frac{y_{k+2}^2}{\alpha_{k+2}^2} - \dots - \frac{y_r^2}{\alpha_r^2} = 2py_{r+1}, \quad p > 0. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.8)–(3.10), (3.12)–(3.15) описывают гиперповерхности, называемые *цилиндрами*, уравнение (3.11) описывает *параболоид.*

Уравнения (3.5)–(3.15) исчерпывают все так называемые *канонические формы* уравнения гиперповерхности второго порядка. Геометрическая интерпретация этих уравнений может быть выполнена аналогично тому, как это делалось в §2 для поверхностей в трехмерном пространстве.

Глава 15
Канонические формы и разложения

§ 1. Сингулярное разложение оператора

1. Сингулярные базисы и сингулярные числа оператора. В этом параграфе будет показано, что для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего из евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$, можно указать такие ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ и $\{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$, что

$$\mathcal{A}e^k = \begin{cases} \rho_k q^k, & k \leqslant r, \\ 0 \quad, & k > r, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\rho_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Числа ρ_k называют *сингулярными числами* оператора $\mathcal{A}$[1)]. Базисы $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$, обеспечивающие выполнение соотношений (1.1), называются *сингулярными базисами* оператора $\mathcal{A}$.

Как показывают соотношения (1.1), ненулевыми элементами матрицы A_{eq} оператора $\mathcal{A}$ относительно сингулярных базисов являются только числа ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_r, расположенные на диагонали главного (базисного) минора матрицы A_{eq}.

2. Построим сингулярные базисы оператора $\mathcal{A}$. Оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен и неотрицателен (см. упражнение 2 на с. 197), следовательно (см. теорему 4, с. 200, и п. 3, с. 209), существуют ортонормированные собственные векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, все его собственные числа неотрицательны. Таким образом,

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}e^k = \rho_k^2 e^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Здесь $\rho_k^2 \geqslant 0$ — собственные числа оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Будем нумеровать их так, чтобы $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \cdots \geqslant \rho_r > 0$, $\rho_{r+1} = \cdots = \rho_n = 0$. Положим $z^k = \mathcal{A}e^k$ для $k = 1, \ldots, r$ и заметим, что

$$(z^p, z^q) = (\mathcal{A}e^p, \mathcal{A}e^q) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e^p, e^q) = \rho_p^2(e^p, e^q).$$

Поэтому

$$(z^p, z^q) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ \rho_p^2, & p = q, \end{cases} \tag{1.3}$$

[1)]Иногда в это множество удобно включать также $\min(m, n) - r$ нулей.

следовательно, векторы

$$q^k = \rho_k^{-1} \mathcal{A} e^k, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{1.4}$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathbf{Y}_m$. Если окажется, что $r < m$, дополним ее произвольно векторами q^k, $k = r + 1$, $r + 2, \ldots, m$, до ортонормированного базиса пространства $\mathbf{Y}_m$. Из определения векторов $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$ сразу же вытекает справедливость (1.1).

3. Из (1.1) получаем, что векторы $\{q^k\}_{k=1}^r$ образуют базис в $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, но тогда из теоремы 1, с. 191, вытекает, что векторы $\{q^k\}_{k=r+1}^m$ образуют базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$, следовательно,

$$\mathcal{A}^* q^k = 0 \text{ для } k = r + 1, \ldots, m. \tag{1.5}$$

Для $k = 1, 2, \ldots, r$ из (1.4), (1.2) получаем

$$\mathcal{A}^* q^k = \rho_k^{-1} \mathcal{A}^* \mathcal{A} e^k = \rho_k e^k. \tag{1.6}$$

4. Сопоставляя (1.6), (1.4), (1.5), будем иметь, что

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* q^k = \rho_k^2 q^k, \; k = 1, 2, \ldots, r, \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* q^k = 0, \; k = r + 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$

Из (1.2), (1.7) вытекает, что ненулевые собственные числа операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ совпадают, т. е. спектры этих операторов могут отличаться лишь кратностью нулевого собственного числа.

5. Из предыдущих рассуждений также следуют равенства

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*),$$

$$\mathrm{def}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = n - \mathrm{rank}(\mathcal{A}), \quad \mathrm{def}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = m - \mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

6. Понятно, что ранг r оператора $\mathcal{A}$ равен количеству ненулевых сингулярных чисел оператора $\mathcal{A}$. Это наблюдение открывает реальную возможность вычисления ранга оператора $\mathcal{A}$: нужно решить задачу на собственные значения для самосопряженного неотрицательного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и определить количество ненулевых собственных чисел. Именно таким способом обычно пользуются в вычислительной практике. Ясно также, что собственные векторы $\{e^i\}_{i=r+1}^n$ оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ образуют ортонормированный базис ядра оператора $\mathcal{A}$.

7. Если сингулярные числа и сингулярные базисы оператора $\mathcal{A}$ найдены, то построение псевдорешения (см. п. 4, с. 192) уравнения

$$\mathcal{A}x = y \tag{1.8}$$

не вызывает затруднений. В самом деле, как было показано в п. 3, с. 193, любое решение уравнения

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*y \tag{1.9}$$

есть псевдорешение уравнения (1.8). Представляя векторы x и y в виде разложений по сингулярным базисам, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k q^k$, и используя затем соотношения (1.2), (1.5), (1.6), получим как следствие уравнения (1.9), что

$$\sum_{k=1}^{r} (\rho_k^2 \xi_k - \rho_k \eta_k) e^k = 0, \tag{1.10}$$

откуда вытекает, что $\xi_k = \eta_k/\rho_k$ для $k = 1, 2, \ldots, r$. Таким образом, любой вектор

$$x = \sum_{k=1}^{r} (\eta_k/\rho_k) e^k + \sum_{k=r+1}^{n} \xi_k e^k, \tag{1.11}$$

где $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ — произвольные числа, есть псевдорешение уравнения (1.8).

Если $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, т. е. уравнение (1.8) разрешимо, то формула (1.11) дает общее решение (см. § 1, с. 156) уравнения (1.8). Действительно, в этом случае вектор $x^0 = \sum\limits_{k=1}^{r} (\eta_k/\rho_k) e^k$ есть частное решение уравнения (1.8), а $\sum\limits_{k=r+1}^{n} \xi_k e^k$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

8. Для любого псевдорешения x уравнения (1.8) имеем

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{r} (\eta_k/\rho_k)^2 + \sum_{k=r+1}^{n} \xi_k^2.$$

Полагая $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n = 0$, получим псевдорешение с минимальной длиной. Такое псевдорешение принято называть *нормальным.* Оно ортогонально ядру оператора $\mathcal{A}$.

Упражнения.

1) Покажите, что модуль определителя любого оператора, действующего в конечномерном пространстве, равен произведению всех сингулярных чисел этого оператора.

2) Пусть $A \in M_{m,n}$ — матрица ранга r. Покажите, что существуют унитарные матрицы $U \in M_m$, $V \in M_n$ такие, что

$$A = UDV, \tag{1.12}$$

где

$$D = \begin{pmatrix} R & O_{1,2} \\ O_{2,1} & O_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

есть блочная 2×2 матрица, $R = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r)$, все элементы диагонали R положительны, все элементы матриц $O_{1,2}$, $O_{2,1}$, $O_{2,2}$ — нули.

Формула (1.12) определяет так называемое *сингулярное* разложение прямоугольной матрицы. Числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ — сингулярные числа матрицы A.

3) Покажите, что сингулярные числа матриц A и UAV, где U, V — произвольные унитарные матрицы соответствующих размеров, совпадают (говорят поэтому, что сингулярные числа матрицы инвариантны по отношению к унитарным преобразованиям).

4) Пусть $A \in M_{m,n}$ — произвольная матрица, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ — ее сингулярные числа. Докажите, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant r} \rho_k \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

9. Сингулярные числа оператора характеризуют чувствительность решения линейного уравнения по отношению к изменению его правой части. Пусть $\mathcal{A}$ — невырожденный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Рассмотрим наряду с уравнением

$$\mathcal{A}x = y \tag{1.14}$$

уравнение

$$\mathcal{A}x = \tilde{y}. \tag{1.15}$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ невырожден, оба уравнения однозначно разрешимы. Пусть x — решение уравнения (1.14), $\tilde{x}$ — решение уравнения (1.15). Величину $\delta_x = |x - \tilde{x}|/|x|$ называют величиной *относительного изменения решения* при изменении правой части. Выясним, как она зависит от $\delta_y = |y - \tilde{y}|/|y|$ — величины *относительного изменения правой части.* Представим векторы y, $\tilde{y}$ в виде разложений по сингулярному базису: $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k q^k$, $\tilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\eta}_k q^k$. Тогда вследствие (1.1) получим $x = \mathcal{A}^{-1} y = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\eta_k}{\rho_k} e^k$, $\tilde{x} = \mathcal{A}^{-1}\tilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\tilde{\eta}_k}{\rho_k} e^k$, поэтому, используя неравенства $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \dots \geqslant \rho_n > 0$, будем иметь, что

$$\delta_x^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|\eta_k - \tilde{\eta}_k|^2}{\rho_k^2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|\eta_k|^2}{\rho_k^2}} \leqslant \frac{\rho_1^2}{\rho_n^2} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k - \tilde{\eta}_k|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k|^2} = \frac{\rho_1^2}{\rho_n^2} \delta_y^2. \tag{1.16}$$

Таким образом,

$$\delta_x \leqslant \frac{\rho_1}{\rho_n} \delta_y. \tag{1.17}$$

Величина ρ_1/ρ_n, характеризующая устойчивость решения уравнения (1.14) по отношению к изменению его правой части, называется *числом обусловленности* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\operatorname{cond}(\mathcal{A})$. Очевидно, $\operatorname{cond}(\mathcal{A}) \geqslant 1$ для любого оператора $\mathcal{A}$.

Упражнения.

1) Покажите, что при определенном выборе y и $\tilde{y}$ неравенство (1.17) превращается в равенство, и в этом смысле оценка (1.17) неулучшаема.

2) Приведите примеры операторов, для которых число обусловленности равно единице.

§ 2. Полярное разложение оператора

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_m$ — произвольный линейный оператор. Существуют линейные операторы*

$$\mathcal{U} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_m, \quad \mathcal{S} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n, \quad \mathcal{T} : \mathbf{X}_m \to \mathbf{X}_m$$

такие, что

$$U^* U = I \text{ при } n \leqslant m, \quad U U^* = I \text{ при } n \geqslant m, \tag{2.1}$$

операторы $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ эрмитовы и неотрицательно определены, и

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$ — сингулярные базисы оператора $\mathcal{A}$, σ_1, σ_2, ..., σ_r — его сингулярные числа. При $n \leqslant m$ определим оператор $\mathcal{U}$ соотношениями

$$\mathcal{U}e_k = q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3}$$

а при $n \geqslant m$ положим

$$\mathcal{U}e_k = q_k,\ k = 1, 2, \ldots, m, \quad \mathcal{U}e_k = 0,\ k = m+1, m+2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Определим операторы $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ при помощи равенств

$$\mathcal{S}e_k = \sigma_k e_k,\ k = 1, 2, \ldots, r, \quad \mathcal{S}e_k = 0,\ k = r+1, r+2, \ldots, n,$$

$$\mathcal{T}q_k = \sigma_k q_k,\ k = 1, 2, \ldots, r, \quad \mathcal{T}q_k = 0,\ k = r+1, r+2, \ldots, m.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{U}\mathcal{S}e^k = \mathcal{A}e^k, \quad \mathcal{T}\mathcal{U}e^k = \mathcal{A}e^k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. соотношения (2.2) доказаны. Непосредственной проверкой устанавливается, что оператор $\mathcal{U}^*$ можно определить соотношениями

$$\mathcal{U}^* q_k = e_k,\ k = 1, 2, \ldots, m \ \text{ при } \ m \leqslant n, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{U}^* q_k = e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \quad \mathcal{U}^* q_k = 0,\ k = n+1, n+2, \ldots, m \ \text{ при } \ m \geqslant n. \tag{2.6}$$

Равенства (2.1) очевидным образом следуют из (2.3)–(2.6) □

Формулы (2.2) определяют так называемое *полярное разложение* оператора $\mathcal{A}$.

Остановимся подробнее на том случае, оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве $\mathbf{X}_n$. Как показывают соотношения (2.1), оператор $\mathcal{U}$ при этом оказывается унитарным, а из равенств (2.2) вытекает, что любое линейное преобразование пространства $\mathbf{X}_n$ есть результат последовательного выполнения унитарного преобразования, не меняющего длин векторов, и самосопряженного неотрицательного преобразования, выполняющего растяжения пространства в n попарно ортогональных направлениях.

Оператор $\mathcal{S}$ называют *правым оператором растяжения*, а оператор $\mathcal{T}$ — *левым оператором растяжения*. Из (2.2) непосредственно получаем $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{S}^2$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{T}^2$. Поскольку операторы $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ — самосопряженные неотрицательные операторы, то эти равенства показывают, что $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ однозначно определяются по оператору $\mathcal{A}$, а именно[1)]

$$\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}, \quad \mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}. \tag{2.7}$$

[1)]См. п. 9, с. 204.

В случае, когда оператор $\mathcal{A}$ невырожден, оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ также невырожден, следовательно, невырожден и оператор $\mathcal{S}$, поэтому оператор $\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$ также определяется однозначно.

Из формул (2.2), (2.7) непосредственно вытекает

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы операторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ в представлении* (2.2) *совпадали, иными словами, чтобы операторы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{S}$ были перестановочны.*

§ 3. Псевдообратный оператор

Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — конечномерные евклидовы пространства $\mathcal{A}$: $\mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор, $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$, $\{q_k\}_{k=1}^m \mathbf{Y}_m$ — его сингулярные базисы, ρ_1, ρ_1, …, ρ_r — сингулярные числа, $r = \mathrm{rank}(A)$, $r \leqslant \min(m, n)$.

Как было показано в п. 8, § 1, соотношением

$$x_0 = \sum_{k=1}^{r} (\eta_k/\rho_k) e_k, \tag{3.1}$$

где $\eta_k = (e_k, y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — коэффициенты разложения вектора y по базису $\{q_k\}_{k=1}^m$ определяется нормальное псевдорешение x_0 уравнения $\mathcal{A}x = y$. Понятно что отображение, порождаемое формулой (3.1), линейно. Будем обозначать его через $\mathcal{A}^+$, так что

$$x_0 = \mathcal{A}^+ y = \sum_{k=1}^{r} ((q_k, y)/\rho_k) e_k. \tag{3.2}$$

Оператор $\mathcal{A}^+$ принято называть *псевдообратным* (по отношению к оператору $\mathcal{A}$). Нетрудно убедиться, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный, то $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^{-1}$.

Отметим основные свойства псевдообратного оператора:

1. $(\mathcal{A}^*)^+ = (\mathcal{A}^+)^*$,
2. $(\mathcal{A}^+)^+ = \mathcal{A}$,
3. $(\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$, $\quad (\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$
4. $(\mathcal{A}^+\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^+\mathcal{A}$, $\quad (\mathcal{A}^+\mathcal{A})^2 = \mathcal{A}^+\mathcal{A}$,
5. $\mathcal{A}\mathcal{A}^+\mathcal{A} = \mathcal{A}$,
6. $\mathcal{A}^+\mathcal{A}\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+$.

Докажем только первое и третье равенства. Остальные доказательство могут быть выполнены по той же схеме и поручаются читателю в качестве упражнений.

1. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k q_k$. Решая уравнение

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* y = x$$

точно так же, как уравнение (1.9), получим, что

$$(\mathcal{A}^*)^+ x = \sum_{k=1}^{r} (\xi_k/\rho_k) q_k.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$((\mathcal{A}^*)^+ x, y) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \bar{\eta}_k/\rho_k.$$

Используя теперь (3.2), нетрудно получить, что и

$$(x, \mathcal{A}^+ y) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \bar{\eta}_k/\rho_k.$$

Это означает справедливость равенства $(\mathcal{A}^*)^+ = (\mathcal{A}^+)^*$.

3. Из определения $\mathcal{A}^+$, очевидно, вытекает, что $\mathcal{A}^+ q_k = \rho_k^{-1} e_k$ при $k = 1, 2, \ldots, r$, $\mathcal{A}^+ q_k = 0$ при $k = r+1, r+2, \ldots, m$, поэтому $\mathcal{A}\mathcal{A}^+ q_k = q_k$ при $k = 1, 2, \ldots, r$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^+ q_k = 0$ при $k = r+1, r+2, \ldots, m$. Отсюда следует, что $(\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$. Далее, в результате элементарных вычислений получаем, что $(\mathcal{A}\mathcal{A}^+ y, y) = \sum\limits_{k=1}^{r} |\eta_k|^2 \geqslant 0$ для любого $y \in \mathbf{Y}_m$. Отсюда следует, что $(\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$ (см. лемму 2, с. 196).

Из свойств 3, 4 вытекает, что операторы $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}^+\mathcal{A}$ есть операторы ортогонального проектирования (см. упражнение на с. 195).

§ 4. Элементы теории мажоризации

1. Вещественная функция f вещественной переменной называется *выпуклой* на интервале (a, b), если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала и для любого $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{4.1}$$

Геометрически это означает, что любая точка графика функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ лежит ниже хорды, стягивающей точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, или на этой же хорде.

Теорема 1 (Неравенство Йенсена[1]). *Если функция f выпукла на интервале (a,b), то для любых x_1, x_2, $\ldots$, x_m, принадлежащих (a,b), и для любых неотрицательных α_1, α_2, $\ldots$, α_m таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=1$,*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x_i).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i=\alpha_m x_m+(1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_m)}x_i,$$

заметить, что

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_m)}=1,$$

и применить индукцию по m. □

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a,b), вторая производная f неотрицательна на интервале (a,b). Тогда f — выпуклая функция на интервале (a,b).*

Доказательство. В соответствии с определением выпуклой функции нужно установить, что при любых $x_1,x_2\in(a,b)$ функция φ вещественной переменной t, задаваемая равенством

$$\varphi(t)=f(tx_1+(1-t)x_2)-tf(x_1)-(1-t)f(x_2)$$

неположительна для всех t из отрезка $[0,1]$. Нетрудно видеть, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=0$, $\varphi''(t)=f''(tx_1+(1-t)x_2)(x_1-x_2)^2\geqslant0$ для всех $t\in[0,1]$ Пусть t — произвольным образом фиксированная точка из интервала $(0,1)$. Используя формулу конечных приращений Лагранжа, получим $\varphi(t)=\varphi(t)-\varphi(0)=t\varphi'(t_1)$, где t_1 — некоторая точка из интервала $(0,t)$. Аналогично, $\varphi(t)=-(1-t)\varphi'(t_2)$, где t_2 — точка из интервала $(t,1)$. Отсюда, очевидно, следует, что $\varphi(t)=-t(1-t)(\varphi'(t_2)-\varphi'(t_1))$. Вновь применяя формулу Лагранжа, получим, что $\varphi(t)=-t(1-t)(t_2-t_1)\varphi''(t_3)$, где $t_3\in(t_2,t_1)$. Таким образом, $\varphi(t)\leqslant0$. □

[1] Иоган Виллем Людвиг Вальдемар Йенсен (Johan Willem Ludwig Valdemar Jensen; 1859–1925) — датский математик и инженер.

2. В дальнейшем будут использованы следующие определения. Матрица называется *неотрицательной*, если все ее элементы неотрицательны. Квадратная матрица называется *стохастической*, если она неотрицательна и сумма элементов каждой ее строки равна единице. Стохастическая матрица называется *двояко стохастической*, если сумма элементов каждого ее столбца равна единице.

Теорема 3. *Пусть* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n,$$

,

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n,$$

и $x \prec y$*. Тогда существует двояко стохастическая матрица* S *такая, что* $x = Sy$*.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ теорема тривиальна. Предположим, что доказываемое утверждение верно для векторов длины $n - 1$ и покажем, что оно остается справедливым и для векторов длины n. Элементарно проверяется, что если векторы x, y удовлетворяют условиям теоремы, то $x_1 \geqslant x_n$[1], и, следовательно, существуют такие k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, $\tau \in [0, 1]$, что

$$x_1 = \tau y_k + (1 - \tau) y_{k+1}. \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение два вектора длины $n - 1$:

$$\tilde{x} = (x_2, x_3, \ldots, x_n),\ \tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1} - x_1, y_{k+2}, \ldots, y_n).$$

Нетрудно убедиться, что компоненты этих векторов монотонно не возрастают и $\tilde{x} \prec \tilde{y}$. Поэтому по индуктивному предположению существует двояко стохастическая матрица $\tilde{S}$ порядка $n - 1$ такая, что

$$\tilde{x} = \tilde{S}\tilde{y}. \tag{4.3}$$

Записывая (4.2), (4.3) в виде одного матричного равенства, получим, что $x = Sy$, где S — двояко стохастическая матрица. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n,$$

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n,$$

и $x \prec_w y$*. Пусть, далее* f *— неубывающая выпуклая функция на всей вещественной оси. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i). \tag{4.4}$$

[1] Иначе равенство (12.10), с. 213, невозможно.

Доказательство. По условию теоремы $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$. Выберем числа x_{n+1}, y_{n+1} так, чтобы были выполнены условия

$$x_{n+1} \leqslant x_n,\ y_{n+1} \leqslant y_n,\ x_{n+1} - y_{n+1} = \alpha.$$

Тогда для векторов $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ выполнены условия теоремы 3, поэтому существует двояко стохастическая матрица $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ такая, что

$$x_i = \sum_{j=1}^{n+1} s_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Отсюда вследствие неравенства Йенсена получаем, что

$$f(x_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} s_{ij} f(y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \tag{4.5}$$

Суммируя неравенства (4.5), будем иметь, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} s_{ij} f(y_j) = \sum_{i=1}^{n+1} f(y_i). \tag{4.6}$$

По построению $x_{n+1} \geqslant y_{n+1}$, а по условию теоремы функция f не убывает, значит, $f(x_{n+1}) \geqslant f(y_{n+1})$. Поэтому из (4.6) вытекает (4.4). □

Замечание 1. Если в условиях теоремы $x \prec y$, то доказательство очевидным образом упрощается. При этом можно отказаться от условия неубывания функции f.

Следствие 1. *Дополнительно к условиям теоремы 4 предположим, что все компоненты векторов x, y неотрицательны. Тогда для любого $p > 1$ выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^p. \tag{4.7}$$

Доказательство. Из теоремы 2, очевидно, следует, что функция $f(t) = t^p$ при любом $p > 1$ выпукла на положительной полуоси. Продолжая ее на всю вещественную ось нулем получим (4.7). □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1 и*

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.8}$$

Тогда

$$x \prec_w y \tag{4.9}$$

Доказательство. Если $x = 0$, то доказываемое утверждение выполняется тривиальным образом. Пусть

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = 0,\ p \geqslant 1,$$

а остальные компоненты вектора x положительны. Тогда вследствие условия (4.8) первые q, $p \leqslant q \leqslant n$, компонент вектора y также положительны (а остальные — нули). Условия (4.8) тогда примут вид

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{4.10}$$

Нетрудно убедиться, что существует такое положительное δ, что для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$ и при

$$\tilde{x}(i) = \begin{cases} x(i), & i = 1, 2, \ldots, p, \\ \varepsilon, & i = p+1, p+2, \ldots, q, \end{cases}$$

как следствие (4.10)

$$\prod_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{4.11}$$

Логарифмируя неравенства (4.11), получим

$$\sum_{i=1}^{k} \log \tilde{x}_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \log y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{4.12}$$

Полагая теперь $f(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, и используя теорему 4, будем иметь, что

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{4.13}$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\delta \to 0$ получим (4.9). $\square$

§ 5. Некоторые оценки собственных и сингулярных чисел

1. Непосредственно из определения вытекает, что сингулярные числа произвольной матрицы A находятся по формулам

$$\rho_k = \sqrt{\lambda_k(A^*A)},$$

где $\lambda_k(A^*A)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, — ненулевые собственные числа матрицы A^*A. Следующая лемма дает другое, иногда более полезное, представление сингулярных чисел через собственные числа эрмитовой матрицы.

Лемма 1. *Пусть $A(m, n)$ — произвольная матрица, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r — ее сингулярные числа, $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$, $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}^m$ — сингулярные базисы (см. п. 1, с. 268),*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

($\tilde{A}$ — эрмитова матрица порядка $m+n$). Тогда векторы $u_k = (q_k, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $u_{r+k} = (q_k, -e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $u_{2r+k} = (q_k, 0)$, $k = r+1, r+2, \ldots, m$; $u_{r+m+k} = (0, e_k)$, $k = r+1, r+2, \ldots, n$, образуют полную ортогональную систему собственных векторов матрицы $\tilde{A}$. Соответствующие им собственные числа есть $\pm\rho_1$, $\pm\rho_2$, ..., $\pm\rho_r$, а также $m + n - 2r$ нулей.

Доказательство леммы выполняется умножением векторов u_k, $k = 1, 2, \ldots, m + n$, на матрицу $\tilde{A}$.

С помощью леммы 1, например, легко доказывается теорема аналогичная теореме 7, с. 215. Введем необходимые обозначения. Пусть $A(m, n)$ — произвольная матрица, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r — ее сингулярные числа. Обозначим через $\sigma(A)$ вектор длины $\min(m, n)$, составленный из сингулярных чисел матрицы A, дополненный (возможно) нулями и упорядоченный по невозрастанию его элементов.

Теорема 1. *Для любых двух матриц A, B одинаковых размеров*

$$\sigma(A + B) \prec_w (\sigma(A) + \sigma(B)).$$

Следующая теорема оказывается полезной при оценке сингулярных чисел произведения матриц.

Теорема 2. *Пусть A, B — квадратные матрицы порядка n. В обозначениях теоремы 1 справедливы неравенства*

$$\sigma_i(AB) \leqslant \sigma_1(A)\sigma_i(B), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Доказательство. Положим $M = \sigma_1^2(A)I - A^*A$. Матрица M, как нетрудно видеть, эрмитова и неотрицательно определена, причем $\sigma_1^2(A)B^*B = B^*(A^*A + M)B = (AB)^*(AB) + B^*MB$. Матрица B^*MB также эрмитова и неотрицательно определена, следовательно, неравенства (5.1) справедливы. $\square$

Приведем очевидное, но полезное

Следствие 1. *Для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ и любого $p > 1$ выполнены неравенства*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^p(AB)\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^p(A)\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^p(B)\right)^{1/p}. \tag{5.2}$$

Теорема 3. *Пусть $A = A(m, n)$ — произвольная матрица, A_r — подматрица матрицы A, получающаяся удалением r столбцов и (или) r строк. Тогда*

$$\sigma_{k+r}(A) \leqslant \sigma_k(A_r) \leqslant \sigma_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots, \min(m, n). \tag{5.3}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если удаляются (заменяются нулевыми) столбцы матрицы A, то ненулевые строки и столбцы матрицы A^*A образуют ее подматрицу, отвечающую диагональному минору матрицы A соответствующего порядка[1)] и воспользоваться теоремой 3, с. 212. □

Лемма 2. *Пусть*

$$A \in M_{m,n}, \ V_k \in M_{m,k}, \ W_k \in M_{n,k}, \ k \leqslant \min(m, n),$$

столбцы матриц V_k, W_k ортонормированы в смысле стандартного скалярного произведения пространств $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ соответственно. Тогда

$$\sigma_i(V_k^* A W_k) \leqslant \sigma_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть матрицы $V = (V_k, V_{m-k}) \in M_m$, $W = (W_k, W_{n-k}) \in M_n$ унитарны. Нетрудно убедиться, что матрица $V_k^* A W_k$ — главная подматрица порядка k матрицы V^*AW. Поэтому в силу теоремы 3 и того факта, что сингулярные числа матрицы инвариантны по отношению к ее унитарным преобразованиям, справедливы оценки

$$\sigma_i(V_k^* A W_k) \leqslant \sigma_i(V^*AW) = \sigma_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \ \square$$

Теорема 4 (Вейль). *Пусть $A \in M_n$. Предположим, что сингулярные числа матрицы A упорядочены в порядке невозрастания, а собственные числа — в порядке невозрастания их модулей. Тогда*

$$|\lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_k(A)| \leqslant \sigma_1(A)\sigma_2(A)\cdots\sigma_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.5}$$

[1)] Аналогично, если удаляются строки матрицы матрицы A, то получается подматрица матрицы AA^* того же порядка.

причем при $k = n$ имеет место точное равенство.

Доказательство. По теореме Шура, с. 182, существует такая унитарная матрица U, что $U^*AU = T$, где T — верхняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены числа $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$. Пусть $U_k \in M_{n,k}$ — матрица, состоящая из первых k столбцов матрицы U. Элементарные вычисления показывают, что

$$U^*AU = (U_k, U_{n-k})^* A (U_k, U_{n-k}) = \begin{pmatrix} U_k^* A U_k & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = T,$$

где $U_k^* A U_k$ — верхняя треугольная матрица, на диагонали которой расположены числа $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_k(A)$. Неравенства (5.5) следуют поэтому из леммы 2. Равенство в (5.5) при $k = n$ выполнено, поскольку, как мы уже знаем, для любой квадратной матрицы A порядка n

$$\det(A) = \lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_n(A), \ |\det(A)| = \sigma_1(A)\sigma_2(A)\cdots\sigma_n(A). \ \square$$

Из следствия 2, с. 278, теперь вытекает, что для любой матрицы $A \in M_n$

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A), \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{5.6}$$

Теорема 5. *Пусть $A \in M_{m,p}$, $B \in M_{p,n}$ — произвольные матрицы, $q = \min(m, n, p)$. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(AB) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\sigma_i(B), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.7}$$

причем, если $m = n = p$, то при $k = n$ выполнено точное равенство.

Доказательство. Пусть $AB = UDV$ — сингулярное разложение матрицы AB. Тогда $D = U^*ABV^*$. Обозначим через U_k, V_k^* матрицы, состоящие из первых k столбцов матриц U, V^* соответственно. Тогда $U_k^* ABV_k^* = \operatorname{diag}(\sigma_1(AB), \sigma_2(AB), \ldots, \sigma_k(AB))$, так как — это главная подматрица порядка k матрицы D. По условию $p \geqslant k$. Поэтому в силу теоремы 1, с. 272, существует полярное разложение $BV_k^* = X_k Q_k$, где $X_k^* X_k = I_k$, а $Q_k \in M_k$ — эрмитова неотрицательно определенная матрица, I_k — единичная матрица порядка k.

Элементарные вычисления приводят к равенству $Q_k^2 = (BV_k^*)^* BV_k^*$. Следовательно, по лемме 2

$$\det(Q_k^2) = \det(V_k B^* B V_k^*) \leqslant \sigma_1(B^*B)\sigma_2(B^*B)\cdots\sigma_k(B^*B) = \\ = \sigma_1^2(B)\sigma_2^2(B)\cdots\sigma_k^2(B).$$

Вновь применяя лемму 2, получим, что

$$\sigma_1(AB)\sigma_2(AB)\cdots\sigma_k(AB) = \det(U_k^* ABV_k^*) = \\ = \det(U_k^* AX_kQ_k) = |\det(U_k^* AX_k)\det(Q_k)| \leqslant \\ \leqslant \sigma_1(A)\sigma_2(A)\cdots\sigma_k(A)\sigma_1(B)\sigma_2(B)\cdots\sigma_k(B).$$

Наконец, если $m = n = p$, то

$$\sigma_1(AB)\sigma_2(AB)\cdots\sigma_n(AB) = |\det(AB)| = \\ = |\det(A)||\det(B)| = \sigma_1(A)\sigma_2(A)\cdots\sigma_n(A)\sigma_1(B)\sigma_2(B)\cdots\sigma_n(B). \ \square$$

Обращаясь к следствию 2, с. 278, получим, что при выполнении условий теоремы 5

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\sigma_i(B), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

2. Суммы сингулярных чисел матрицы допускают полезные вариационные описания. Для формулировки соответствующих результатов нам потребуется ввести следующее определение. Матрица A называется частичной изометрией ранга k, если она имеет ранг k и все ее (ненулевые) сингулярные числа равны единице.

Теорема 6. *Пусть $A \in M_{m,n}$, $q = \min(m, n)$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, q$ справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) = \max_{X,Y} |\operatorname{tr} X^* AY|, \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) = \max_{C} |\operatorname{tr} AC|. \tag{5.10}$$

В первом случае максимум вычисляется по всем матрицам

$$X \in M_{m,k},\ Y \in M_{n,k} \text{ таким, что } X^*X = I, Y^*Y = I. \tag{5.11}$$

Во втором случае — по всем матрицам $C \in M_{n,m}$, которые являются частичными изометриями ранга k.

Доказательство. Покажем сначала, что формулировки (5.9), (5.10) эквивалентны. По формуле (4.9), с. 176, получаем, что $\operatorname{tr} X^*AY = \operatorname{tr} AYX^* = trAC$, где $C = YX^* \in M_{n,m}$, следовательно, $C^*C = XX^*$. Как показано на с. 269, все ненулевые собственные числа самосопряженых операторов XX^* и X^*X совпадают, следовательно совпадают все их сингулярные числа, но X^*X — единичная матрица порядка k. Таким образом матрица C имеет ровно k сингулярных чисел и все они равны единице, т. е. C — частичная изометрия ранга k. Обратно, если $C \in M_{n,m}$ — частичная изометрия ранга k, то для нее по определению справедливо сингулярное разложение

$$C = (Y_k, Y_{n-k}) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k^* \\ X_{m-k}^* \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

где I_k — единичная матрица порядка k,

$$Y = (Y_k, Y_{n-k}) \in M_n, \quad X^* = \begin{pmatrix} X_k^* \\ X_{m-k}^* \end{pmatrix} \in M_m$$

есть унитарные матрицы. Из равенства (5.12) при помощи элементарных вычислений получаем, что $C = Y_k X_k^*$, причем матрицы Y_k, X_k^* удовлетворяют условиям (5.11). Таким образом, эквивалентность формулировок (5.9), (5.10) установлена.

Используя теперь последовательно (5.6), (5.8), можем написать, что если C — произвольная частичная изометрия ранга k, то

$$|\operatorname{tr}(AC)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i(AC)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(AC) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \sigma_i(A)\sigma_i(C) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A). \tag{5.13}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно указать такую частичную изометрию C ранга k, что неравенство (5.13) превращается в равенство. Пусть $A = UDV$ — сингулярное разложение матрицы A. Положим $C = V^*PU^*$, где

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,m}.$$

По построению $C \in M_{n,m}$ и является частичной изометрией ранга k. Кроме того
$$AC = UDVV^*PU^* = UDPU^*,$$
следовательно, $\mathrm{tr}(AC) = \mathrm{tr}(DP)$, причем элементарные вычисления приводят к равенству $\mathrm{tr}(DP) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i(A)$. $\square$

§ 6. Каноническая форма Жордана

В этом параграфе будет показано, что для любого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, можно указать базис, в котором матрица оператора имеет очень простую форму. Она двухдиагональна. Причем по ее главной диагонали расположены все собственные числа оператора. На ближайшей сверху параллельной диагонали располагаются элементы, которые могут принимать значения нуль или единица. Матрица такого вида называется *жордановой* [1]. Для того, чтобы получить *жорданово представление* оператора, нужно взять его матрицу в произвольно выбранном базисе, а затем преобразованием подобия привести ее к жордановой форме. Указанная программа и будет реализована в настоящем параграфе.

Естественно, возникает вопрос, а нельзя ли любую матрицу привести подобным преобразованием к диагональному виду. Простейшие примеры показывают, что это невозможно. Так, если потребовать, чтобы матрица SAS^{-1}, где
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
при некоторой невырожденной матрице S была диагональной, то мы получим противоречивые равенства.

1. Нам потребуется следующее определение. *Жордановым блоком* или *жордановой клеткой* называется верхняя треугольная матрица $J_k(\lambda)$, имеющая вид
$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

[1] Мари Энмон Камиль (Камилл) Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan; 1838 — 1922) — французский математик.

Поясним, что k — порядок матрицы $J_k(\lambda)$, все элементы ее главной диагонали равны λ, параллельно главной диагонали располагается $k-1$ единиц. Все остальные элементы матрицы $J_k(\lambda)$ равны нулю.

2. Полезно отметить, что если матрица оператора $\mathcal{A}:\mathbf{X}_k \to \mathbf{X}_k$ в базисе $\{e^i\}_{i=1}^k$ есть клетка Жордана $J_k(0)$, то векторы этого базиса, очевидно, связаны соотношениями

$$\mathcal{A}e^1 = 0,\ \mathcal{A}e^2 = e^1,\ \dots,\ \mathcal{A}e^k = e^{k-1}.$$

Обозначая вектор e^k через f, получим, что базис $\{e^i\}_{i=1}^k$ образован векторами f, $\mathcal{A}f$, $\mathcal{A}^2 f$, $\dots$, $\mathcal{A}^{k-1}f$ [1)], причем $\mathcal{A}^k f = 0$.

3. Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 1. *Для произвольной квадратной матрицы A порядка n существует невырожденная матрица S такая, что*

$$S^{-1}AS = J, \tag{6.2}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Здесь $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Числа λ_i, $i = 1, 2, \dots, k$, не обязательно различные, исчерпывают все множество характеристических чисел матрицы A (с учетом их кратности).

4. Теорема 1, очевидно, эквивалентна следующему утверждению. Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, можно указать базис $\mathcal{E}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ принимает вид (6.3), т. е.

$$\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n J. \tag{6.4}$$

Базис, в котором матрица оператора принимает жорданову форму, называется *жордановым* базисом.

5. Наиболее просто доказательство существования жорданова базиса проводится для нильпотентного оператора. Отметим, что в соответствии с теоремой 1, с. 181, и теоремой Шура, с. 182, для того, чтобы оператор был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы матрица этого оператора в некотором базисе была верхней треугольной с нулевыми элементами на главой диагонали.

[1)] Взятыми в обратном порядке.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{X}_n$ *— комплексное линейное пространство,* $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *— нильпотентный оператор. Тогда существует базис пространства* $\mathbf{X}_n$*, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *принимает жорданову форму*

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & 0 \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}(0) \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Здесь $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.

Доказательство. Принимая во внимание сказанное в п. 2, нетрудно убедиться, что доказываемое утверждение эквивалентно следующему: для любого нильпотентного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ существуют векторы f^1, f^2, $\dots f^m$ такие, что

$$f^1, \mathcal{A}f^1, \mathcal{A}^2 f^1, \dots, \mathcal{A}^{n_1-1} f^1,\ f^2, \mathcal{A}f^2, \mathcal{A}^2 f^2, \dots, \mathcal{A}^{n_2-1} f^2, \dots, \\ f^m, \mathcal{A}f^m, \mathcal{A}^2 f^m, \dots, \mathcal{A}^{n_m-1} f^m \tag{6.6}$$

есть базис пространства $\mathbf{X}_n$, причем

$$\mathcal{A}^{n_1} f^1 = \mathcal{A}^{n_2} f^2 = \cdots = \mathcal{A}^{n_m} f^m = 0. \tag{6.7}$$

Существование искомого базиса докажем индукцией по размерности пространства. Для случая нильпотентного оператора, действующего в одномерном пространстве, доказываемое утверждение выполняется тривиальным образом. Предположим, что оно верно для любого пространства размерности меньше n, и покажем, что тогда это утверждение справедливо и для пространства размерности равной n.

Оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен, следовательно, $\mathrm{def}(\mathcal{A}) \geqslant 1$, поэтому (см. (8.1), с. 150) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) < n$. Подпространство $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, очевидно, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, поэтому в силу предположения индукции существуют векторы u^1, u^2, $\dots$, u^k такие, что векторы

$$u^1, \mathcal{A}u^1, \mathcal{A}^2 u^1, \dots, \mathcal{A}^{p_1-1} u^1,\ u^2, \mathcal{A}u^2, \mathcal{A}^2 u^2, \dots, \mathcal{A}^{p_2-1} u^2, \dots, \\ u^k, \mathcal{A}u^k, \mathcal{A}^2 u^k, \dots, \mathcal{A}^{p_k-1} u^k \tag{6.8}$$

образуют базис подпространства $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, причем,

$$\mathcal{A}^{p_1} u^1 = \mathcal{A}^{p_2} u^2 = \cdots = \mathcal{A}^{p_k} u^k = 0. \tag{6.9}$$

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ векторы u^i принадлежат $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$, следовательно, существуют векторы $v^i \in \mathbf{X}_n$ такие, что

$$u^i = \mathcal{A}v^i. \tag{6.10}$$

Векторы

$$\mathcal{A}^{p_i-1}u^i,\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{6.11}$$

принадлежат базису (6.8), следовательно, они линейно независимы. Соотношения (6.9) показывают, что эти векторы принадлежат $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Отсюда вытекает, что можно построить векторы w^1, w^2, $\ldots$, w^l, дополняющие векторы (6.11) до базиса подпространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.

Если мы покажем теперь, что векторы

$$v^1, \mathcal{A}v^1, \ldots, \mathcal{A}^{p_1}v^1,\ v^2, \mathcal{A}v^2, \ldots, \mathcal{A}^{p_2}v^2,\ \ldots, v^k, \mathcal{A}v^k, \ldots, \mathcal{A}^{p_k}v^k,$$
$$w^1, w^2, \ldots, w^l \tag{6.12}$$

образуют базис пространства $\mathbf{X}_n$, то, очевидно, это и будет искомым базисом Жордана оператора $\mathcal{A}$. Система (6.12) содержит n векторов. В самом деле, в этой системе $p_1 + \cdots + p_k + k + l$ элементов, причем $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{rank}(\mathcal{A})$, и $k + l = \mathrm{def}(\mathcal{A})$, а для любого оператора $\mathcal{A}$ справедливо равенство $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) + \mathrm{def}(\mathcal{A}) = n$. Далее, пусть

$$\alpha_{1,0}v^1 + \alpha_{1,1}\mathcal{A}v^1 + \cdots + \alpha_{1,p_1}\mathcal{A}^{p_1}v^1 + \alpha_{2,0}v^2 + \alpha_{2,1}\mathcal{A}v^2 + \cdots + \alpha_{2,p_2}\mathcal{A}^{p_2}v^2 +$$
$$+ \cdots + \alpha_{k,0}v^k + \alpha_{k,1}\mathcal{A}v^k + \cdots + \alpha_{k,p_k}\mathcal{A}^{p_k}v^k +$$
$$+ \beta_1 w^1 + \beta_2 w^2 + \cdots + \beta_l w^l = 0. \tag{6.13}$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{A}$, учтем соотношения (6.9), (6.10) и тот факт, что w^1, w^2, $\ldots$, $w^l \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Получим

$$\alpha_{1,0}u^1 + \alpha_{1,1}\mathcal{A}u^1 + \cdots + \alpha_{1,p_1-1}\mathcal{A}^{p_1-1}u^1 +$$
$$+ \alpha_{2,0}u^2 + \alpha_{2,1}\mathcal{A}u^2 + \cdots + \alpha_{2,p_2-1}\mathcal{A}^{p_2-1}u^2 +$$
$$+ \cdots + \alpha_{k,0}u^k + \alpha_{k,1}\mathcal{A}u^k + \cdots + \alpha_{k,p_k-1}\mathcal{A}^{p_k-1}u^k = 0. \tag{6.14}$$

Векторы (6.8) линейно независимы, следовательно, все коэффициенты линейной комбинации в левой части (6.14) — нули, и равенство (6.13) принимает вид

$$\alpha_{1,p_1}\mathcal{A}^{p_1}v^1 + \alpha_{2,p_2}\mathcal{A}^{p_2}v^2 + \cdots + \alpha_{k,p_k}\mathcal{A}^{p_k}v^k +$$
$$+ \beta_1 w^1 + \beta_2 w^2 + \cdots + \beta_l w^l = 0. \tag{6.15}$$

В левой части (6.15) — линейная комбинация базисных векторов подпространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$, поэтому все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Таким образом, показано, что все коэффициенты линейной комбинации в правой части равенства (6.13) могут быть только нулями, т. е. система векторов (6.12) линейно независима, содержит n векторов и потому является базисом пространства $\mathbf{X}_n$. $\square$

6. Непосредственным обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет вид $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \lambda I$, где $\mathcal{A}_0$ — нильпотентный оператор, λ — произвольное число. Тогда в базисе Жордана оператора $\mathcal{A}_0$ матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет жорданову форму*

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что линейным операциям над операторами соответствуют линейные операции над их матрицами, а матрица тождественного оператора в любом базисе — единичная матрица.

7. Доказательство теоремы 1. Представление (6.2) получается как результат последовательного выполнения следующих шагов.

1. Опираясь на теорему Шура, с. 182, находим верхнюю треугольную матрицу T, унитарно подобную матрице A.

2. Используя теорему 3, с. 184, приведем матрицу T к блочно диагональному виду. Каждый блок здесь будет верхней треугольной матрицей, у которой все диагональные элементы равны между собой и совпадают с некоторым характеристическим числом матрицы A.

3. Применяя теоремы 2, 3, каждый блок, полученный на втором этапе, независимо приведем к виду (6.16). $\square$

8. При исследовании единственности жордановой формы нам потребуется

Лемма 1. *Для жордановой клетки $J_k(0)$ справедливы следующие соотношения:*

$$(J_k(0))^k = 0, \tag{6.17}$$

$$(J_k(0))^j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6.18}$$

Доказательство. Справедливость (6.17) сразу следует из теоремы 1 и следствия (1), с. 181, а (6.18) легко проверяется непосредственными вычислениями. При этом полезно отметить, что при последовательном увеличении степени матрицы $J_k(0)$ ее ненулевые столбцы «вытесняются» вправо. □

Теорема 4. *Жорданова матрица* (6.2) *определяется по матрице A однозначно* (*с точностью до перестановок жордановых клеток на главной диагонали*).

Доказательство. Две возможные жордановы формы матрицы A подобны матрице A и потому обладают одним и тем же набором характеристических чисел (с учетом их кратностей), поэтому остается лишь доказать совпадение размеров жордановых клеток, соответствующих некоторому фиксированному характеристическому числу матрицы A.

Стоящую перед нами задачу можно сформулировать так: убедиться в совпадении размеров жордановых клеток двух возможных жордановых форм для матрицы, обладающей единственным характеристическим числом. Более того, используя рассуждения из доказательства теоремы 3, нетрудно заметить, что можно ограничиться рассмотрением матрицы A_0, которая имеет единственное характеристическое число, равное нулю.

Итак, пусть

$$J(0) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}(0) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_r}(0) \end{pmatrix}$$

есть две возможные жордановы формы матрицы A_0. Будем считать жордановы клетки упорядоченными по неубыванию размеров (этого можно добиться при помощи соответствующей нумерации базисов Жордана), так что

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n,$$

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n,$$

n — порядок матрицы A_0. Предположим, что первые $l-1$, $l \geqslant 1$ жордановых клеток матриц $J(0)$ и $\tilde{J}(0)$ совпадают. По предположению существует невырожденная матрица S такая, что

$$J(0) = S\tilde{J}(0)S^{-1}. \tag{6.19}$$

Вследствие сделанного предположения о совпадении первых $l-1$ клеток матрица S должна иметь следующую структуру:

$$S = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & S_{n-p} \end{pmatrix},$$

где I_p — единичная матрица порядка $p = n_1 + \cdots + n_{l-1}$. Это дает возможность, фактически, считать, что рассматриваются матрицы $J(0)$ и $\tilde{J}(0)$, уже первые блоки которых, т. е. $J_{n_1}(0)$, $J_{m_1}(0)$, не совпадают. Если мы установим, что это невозможно, то теорема будет доказана. Положим для определенности, что $n_1 > m_1$ и возведем обе части равенства (6.19) в степень m_1. Получим

$$(J(0))^{m_1} = S(\tilde{J}(0))^{m_1} S^{-1}. \tag{6.20}$$

По лемме 1 имеем, что $(\tilde{J}(0))^{m_1} = 0$, по той же лемме $(J(0))^{m_1} \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

9. Приведем простой пример применения жордановой формы.

Теорема 5. *Всякая квадратная матрица A подобна A^T.*

Доказательство. Представим матрицу A в форме Жордана: $A = SJS^{-1}$. Тогда $A^T = (S^{-1})^T J^T S^T$. Ясно, что если мы укажем невырожденную матрицу P такую, что

$$J^T = P^{-1} J P, \tag{6.21}$$

то теорема будет доказана, поскольку матрица A^T будет подобна матрице J, а J подобна A. Очевидно также, что равенство вида (6.21) достаточно установить для произвольной жордановой клетки. Более того, поскольку всякая жорданова клетка равна $\lambda I + J(0)$, то достаточно указать такую матрицу P, что $(J(0))^T = P^{-1} J(0) P$. Элементарные вычисления показывают, что данному условию удовлетворяет матрица перестановок

$$P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \square \tag{6.22}$$

§ 7. Корневые и циклические подпространства

1. Матрица Жордана имеет блочно диагональную структуру, следовательно, пространство $\mathbf{X}_n$ можно представить в виде прямой суммы инвариантных подпространств оператора $\mathcal{A}$, соответствующих этим блокам (см. п. 2.1, с. 164). Подпространство, отвечающее блоку $J_{n_j}(\lambda_j)$ в представлении (6.2), называется *циклическим* подпространством. Прямая сумма всех циклических подпространств, отвечающих одному и тому же собственному числу λ оператора $\mathcal{A}$, называется *корневым* подпространством.

2. Исследуем подробнее структуру циклических и корневых подпространств. Пусть собственному числу λ оператора $\mathcal{A}$ отвечает циклическое подпространство размерности m. Пусть для определенности ему соответствуют векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ базиса $\mathcal{E}_n$. Вследствие (6.4) получаем

$$\mathcal{A}e^1 = \lambda e^1,\ \mathcal{A}e^2 = \lambda e^2 + e^1,\ \ldots,\ \mathcal{A}e^m = \lambda e^m + e^{m-1}. \tag{7.1}$$

Отсюда сразу вытекает, что вектор e^1 — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, и поскольку векторы e^1, e^2, $\ldots$, e^{m-1}, конечно, не нули, то все остальные векторы e^2, e^3, $\ldots$, e^m не являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$.

3. Каждое циклическое подпространство содержит ровно один собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. В самом деле, если предположить, что вектор $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_m e^m$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $J_m(\lambda)\xi = \lambda\xi$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$. Последнее равенство эквивалентно тому, что $J_m(0)\xi = 0$. Ранг матрицы $J_m(0)$ равен $m-1$, так как $\det J_m(0) = 0$, а минор, получающийся при вычеркивании первого столбца и последней строки матрицы $J_m(0)$, равен единице. Поэтому размерность ядра матрицы $J_m(0)$ равна единице.

4. Понятно, что если корневое подпространство, отвечающее собственному числу λ оператора $\mathcal{A}$, есть прямая сумма k циклических подпространств, то оно содержит ровно k линейно независимых собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному числу λ.

В соответствии с этим количество циклических подпространств данного корневого подпространства совпадает с геометрической кратностью собственного числа λ.

Сумма размерностей всех циклических подпространств, совпадающая с кратностью λ как корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$, есть алгебраическая кратность собственного числа λ.

5. Из (7.1) очевидным образом вытекает цепочка следующих равенств:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^j e^j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.2}$$

Нетрудно видеть, что $(\mathcal{A} - \lambda I)^p e^j \neq 0$ при $p < j$. Целое число j принято в связи с этим называть *высотой циклического* вектора e^j. В частности, собственный вектор есть циклический вектор высоты, равной единице.

Нетрудно догадаться, что если l — размерность корневого подпространства, отвечающего собственному числу λ оператора $\mathcal{A}$, то для любого вектора x этого подпространства справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^l x = 0. \tag{7.3}$$

Замечание. Базис Жордана, конечно, не определяется однозначно по оператору $\mathcal{A}$. Более того, имея некий базис Жордана, можно легко построить по нему другой базис Жордана. Например, если в базисе $\mathcal{E}_n$ заменить вектор e^2 вектором $\tilde{e}^2 = e^2 + \alpha e^1$, где α — любое число, то для такого базиса, по-прежнему, будут выполнены равенства (7.1), т. е. это также будет жорданов базис оператора $\mathcal{A}$. Однако, поскольку жорданова матрица определяется по оператору $\mathcal{A}$ однозначно (с точностью до перестановки диагональных блоков), то все базисы Жордана будут иметь описанную выше структуру.

§ 8. Вещественная форма Жордана

Теорема 1. *Пусть A — произвольная вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 1$. Существует невырожденная вещественная матрица S такая, что $S^{-1}AS = J$, где*

$$J = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \ \ldots, J_{m_l}(\lambda_l)),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — характеристические числа матрицы A, причем, если λ_k вещественно, то ему соответствует клетка Жордана, такая же, как и в форме (6.3) *из теоремы* 1, *а каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ матрицы A соответствует диагональный блок вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

матрицы J. Размер блока (8.1) *в два раза больше чем размер соответствущей жордановой клетки характеристического числа λ матрицы A в представлении* (6.2).

Доказательство. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис жордана матрицы A, построенный в ходе доказательства теоремы 1. Для определенности будем считать, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$, $m \leqslant n$, соответствуют вещественным характеристическим числам матрицы A. Принимая во внимание соотношения вида (7.1), нетрудно убедиться что эти векторы могут быть выбраны вещественными. Положим теперь, что векторы $\{e^k\}_{k=m+1}^{m+p}$ отвечают клетке Жордана $J_p(\lambda)$, соответствующей комплексному числу $\lambda = \alpha + i\beta$ матрицы A. Можно считать тогда, что векторы $\{\bar{e}^k\}_{k=m+1}^{m+p}$ того же базиса Жордана соответствуют клетке $J_p(\bar{\lambda})$. Положим $x^k = \operatorname{Re} e^k$, $y^k = \operatorname{Im} e^k$, $k = m+1, m+2, \dots, m+p$. Нетрудно убедиться, что векторы

$$e^1, e^2, \dots, e^m, x^{m+1}, y^{m+1}, \dots, x^{m+p}, y^{m+p}, e^{m+2p+1}, \dots, e^n \tag{8.2}$$

линейно независимы. Перейдем от базиса Жордана к базису (8.2). Заметим, что по определению базиса Жордана

$$Ae^{m+1} = \lambda e^{m+1},\ Ae^{m+2} = \lambda e^{m+2} + e^{m+1},\ \dots,\ Ae^{m+p} = \lambda e^{m+p} + e^{m+p-1}.$$

Разделяя в этих равенствах вещественные и мнимые части[1)], получим, что векторам $x^{m+1}, y^{m+1}, \dots, x^{m+p}, y^{m+p}$ в базисе (8.2) соответствует блок вида (8.1). Применение этого процесса ко всем последующим парам комплексно сопряженных характеристических чисел матрицы A завершает доказательство теоремы. □

Упражнение. Докажите линейную независимость системы векторов (8.2).

Указание. Выпишите матрицу перехода к системе (8.2) от базиса Жордана $\{e^k\}_{k=1}^n$.

Приведем пример использования вещественной жордановой формы.

Теорема 2. *Всякая квадратная вещественная матрица A может быть представлена в виде произведения двух вещественных симметричных матриц, одна из которых может быть выбрана невырожденной.*

Доказательство. По теореме 1 матрица A представима в вещественной форме Жордана: $A = SJS^{-1}$. Элементарные вычисления показывают, что матрица JP, где матрица P определена равенством (6.22), симметрична (удобно при этом проводить выкладки с

[1)]Аналогичные выкладки выполнялись в п.1, с. 179.

каждой из клеток жордана матрицы J поотдельности). Запишем теперь очевидные равенства

$$A = SJPPS^{-1} = SJPS^T(S^{-1})^TPS^{-1}.$$

Ясно, что матрица $SJPS^T$ симметрична, матрица $(S^{-1})^TPS^{-1}$ симметрична и невырождена. □

§ 9. Степенные матричные ряды

1. Ряд вида

$$a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_kA^k + \cdots\,, \tag{9.1}$$

где a_0, a_1, …— комплексные, вообще говоря, числа, $A \in M_n$, $n \geqslant 1$, называется *степенным матричным рядом.* Будем говорить, что ряд (9.1) сходится, если существует матрица B такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_kA^k = B.$$

Ряду (9.1) поставим в соответствие степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9.2}$$

Напомним некоторые сведения из курса математического анализа. Свяжем с рядом (9.2) ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|t^k, \quad t \geqslant 0$. Множество всех $t \geqslant 0$, для которых $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|t^k < \infty$ образует интервал на положительной полуоси. Этот интервал включает точку $t = 0$, может быть замкнутым или открытым справа, конечным или бесконечным. Длина этого интервала (обозначим ее через r) называется радиусом сходимости степенного ряда (9.2). Ряд (9.2) сходится абсолютно при любом $|\lambda| < r$. При $|\lambda| > r$ ряд (9.2) расходится.

2. Выясним условия сходимости ряда (9.1). Пусть λ — характеристическое число матрицы A. Обозначим через n_λ максимальный порядок жордановых клеток, отвечающих λ.

Теорема 1. *Для сходимости ряда* (9.1) *необходимо и достаточно чтобы:* 1) $\rho(A) \leqslant r$; 2) *если* $\rho(A) = r$, *то для каждого характеристического числа* λ *матрицы* A *такого, что* $|\lambda| = \rho(A)$, *сходятся ряды* (*получаемые дифференцированием ряда* (9.2))

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-j+1)\lambda^{k-j},\ j = 0, 1, \ldots, n_\lambda - 1. \tag{9.3}$$

Доказательство. Пусть матрица S приводит матрицу A к жордановой форме, т. е. $A = SJS^{-1}$, где матрица J определена равенством (6.3), с. 286. Тогда для любого $m \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k A^k = S \sum_{k=0}^{m} a_k J^k S^{-1}.$$

Поэтому сходимость ряда (9.1) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k. \tag{9.4}$$

Ряд же (9.4) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k J_l^k(\lambda)$, где λ — характеристическое число матрицы A, а $J_l(\lambda)$ — соответствующая ему жорданова клетка, l обозначает порядок матрицы $J_l(\lambda)$. По определению $1 \leqslant l \leqslant n_\lambda$. Заметим теперь, что $J_l(\lambda) = \lambda I_l + J_l(0)$. По лемме 1, с. 289, имеем $(J_l(0))^l = 0$, $(J_l(0))^j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, l-1$, поэтому для любого $k > l-1$

$$(J_l(\lambda))^k = \lambda^k I + C_1^k \lambda^{k-1} J_l(0) + \cdots + C_{l-1}^k \lambda^{k-l+1} (J_l(0))^{l-1}. \tag{9.5}$$

Таким образом, исследование сходимости ряда (9.4) сведено к исследованию сходимости l степенных рядов вида (9.3). Если $\rho(A) > r$, то существует характеристическое число λ матрицы A такое, что $|\lambda| > r$. Ряд $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k \lambda^k$, соответствующий $j = 0$, при этом расходится, следовательно, условие $\rho(A) \leqslant r$ необходимо для сходимости ряда (9.1). Пусть теперь $\rho(A) < r$. Тогда для любого характеристического числа λ матрицы A выполнено неравенство $|\lambda| < r$[1)], следовательно, при любом $j = 1, 2, \ldots, l-1$ и для всех достаточно больших k

[1)]Можно считать при этом, что $r > 0$, так как в противном случае матрица A нильпотентна и ряд (9.1) состоит из конечного числа слагаемых.

$$|a_k k(k-1)\cdots(k-j+1)\lambda^{k-j}| =$$
$$= |a_k| k(k-1)\cdots(k-j+1)\left(\frac{|\lambda|}{r}\right)^{k-j} r^{k-j} \leqslant r^j |a_k| r^k,$$

поэтому ряды (9.3) сходятся, значит сходится и ряд (9.1). Наконец, если $\rho(A) = r$, и для любого характеристического числа λ матрицы A такого, что $|\lambda| = \rho(A)$, все ряды (9.3) сходятся, то, как следует из предыдущих рассуждений, ряд (9.1) также сходится, а если хотя бы один их них расходится, то расходится и ряд (9.1) [1]. □

3. Приведем примеры степенных матричных рядов, часто возникающих в различных приложениях.

1. *Рядом Неймана* (геометрической прогрессией) называют ряд вида

$$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots \tag{9.6}$$

Ряду (9.6) соответствует степенной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^k$, сходящийся лишь при $|\lambda| < 1$. Поэтому ряд (9.6) сходится тогда и только тогда, когда

$$\rho(A) < 1.$$

При выполнении этого условия как следствие получаем, что

$$A^k \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{9.7}$$

Матрица, удовлетворяющая условию (9.7), называется *сходящейся.* Из соотношения (9.5), очевидно, следует, что если $\rho(A) \geqslant 1$, то условие (9.7) не выполняется. Таким образом, матрица A является сходящейся тогда и только тогда, когда $\rho(A) < 1$.

Теорема 2. *Пусть A — сходящаяся матрица. Тогда матрица, обратная к матрице $I - A$, существует и представима в виде ряда*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что если λ — собственное число матрицы A, то $1-\lambda$ есть собственное число матрицы $I-A$. Поскольку $\rho(A) < 1$, то ни одно собственное число матрицы A не равно единице, значит, среди собственных чисел матрицы $I - A$ нет нулевых, поэтому ее определитель не нуль, и, следовательно, матрица $(I-A)^{-1}$ существует. Фиксируем целое $k \geqslant 1$ и запишем очевидное

[1] Здесь следует учесть структуру степеней матрицы $J_l(0)$), см. доказательство леммы 1, с. 289.

равенство $(I-A)(I+A+\dots+A^k) = I - A^{k+1}$. Отсюда получаем, что $\sum\limits_{i=0}^{k} A^i = (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A^{k+1}$. Поскольку A — сходящаяся матрица, то предел правой части последнего равенства при $k \to \infty$ равен $(I-A)^{-1}$. $\square$

2. *Матричной экспонентой* называют ряд

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots \tag{9.8}$$

Соответствующий ему степенной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k$ имеет бесконечный радиус сходимости и потому ряд (9.8) сходится при любой матрице $A \in M_n$, $n \geqslant 1$.

Упражнения.

1. Докажите, что для любой матрицы $A \in M_n$ справедливо равенство

$$e^A = \lim_{k\to\infty}\left(I + \frac{1}{k}A\right)^k.$$

Указание: заметим, что для $m \geqslant 1$

$$e^A - \left(I + \frac{1}{m}A\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\right)A^k,$$

а коэффициенты при A^k неотрицательны.

2. Пусть A, $B \in M_n$ — перестановочные матрицы, докажите, что $e^{A+B} = e^A e^B$.

Указание: используйте равенство $e^{x+y} = e^x e^y$, справедливое для $x, y \in \mathbb{C}$.

3. Докажите, что

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} \quad \text{для любых } A \in M_n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{9.9}$$

Глава 16
Матричные пучки

§ 1. Определения. Основные свойства.

1. В этом параграфе все векторы — элементы пространства $\mathbb{C}^n$, под скалярным произведением векторов понимается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Все матрицы встречающиеся ниже, вообще говоря, комплексные.

Пусть A, B прямоугольные матрицы размера $m \times n$. Функцию, ставящую в соответствие каждому $\lambda \in \mathbb{C}$ матрицу $A + \lambda B$, называют линейным *матричным пучком* (чаще просто пучком). Поскольку пучок однозначно определяется заданием упорядоченной пары матриц A, B, то обычно мы будем говорить об (A, B) пучке.

2. Если $m = n$, т. е. A, B — квадратные матрицы прядка n, то полином $\det(A - \lambda B)$ называется *характеристическим полиномом пучка* (A, B). Проводя выкладки, аналогичные, применявшимся при выводе формулы (4.3), с. 175, получим

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda B) = \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) -\\ - \lambda(\Delta(b_1, a_2, \ldots, a_n) + \Delta(a_1, b_2, \ldots, a_n) + \cdots + \Delta(a_1, a_2, \ldots, b_n)) +\\ + \lambda^2(\Delta(b_1, b_2, \ldots, a_n) + \cdots + \Delta(a_1, a_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)) - \cdots \pm\\ \pm \lambda^n \Delta(b_1, b_2, \ldots, b_n).\end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — столбцы матрицы B. Остальные обозначения те же, что и в формуле (4.3), с. 175.

Из (1.1), очевидно, вытекает, что порядок характеристического полинома пучка (A, B) не превосходит $\operatorname{rank}(B)$.

Может случиться, что $\det(A - \lambda B) = 0$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$. Такой пучок называют *сингулярным.* Сингулярным называют также пучок при $m \neq n$. Во всех остальных случаях пучок называют *регулярным.*

Таким образом, регулярный пучок — это пучок с квадратными матрицами A, B такими, что $\det(A - \lambda B) \neq 0$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы пучок (A, B) с квадратными матрицами был сингулярным достаточно, чтобы* $\ker(A) \cap \ker(B) \neq \{0\}$.

. Доказательство. Действительно, если $x \neq 0$,
$$Ax = 0, \quad Bx = 0,$$
то $Ax - \lambda Bx = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, следовательно, $\det(A - \lambda B) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Следствие 1. *Если пучок (A, B) регулярен, то*
$$\ker(A) \cap \ker(B) = \{0\}.$$

Примеры:

1) $A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 3$,
$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = (1 - \lambda)^3$, $\deg(p) = 3$ [1];

2) $A = I_3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(B) = 2$,
$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = (1 - \lambda)^2$, $\deg(p) = 2$;

3) $A = I_3$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(B) = 2$,
$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = (1 - \lambda)$, $\deg(p) = 1$;

4) $A = I_3$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(B) = 2$,
$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = 1$, $\deg(p) = 0$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$,
$\ker(A) \cap \ker(B) = \{0\}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda B) \equiv 0$, пучок (A, B) сингулярен.

3. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *характеристическим* числом регулярного пучка (A, B), если $\det(A - \lambda B) = 0$. Пусть λ — характеристическое число пучка (A, B). Тогда вектор $x \neq 0$ называется *собственным* вектором, отвечающим λ, если $Ax = \lambda Bx$.

[1] Мы пользуемся обозначением: $\deg(p)$ — степень полинома p.

4. Пучки (A, B) и (A_1, B_1) называются *эквивалентными*, если существуют невырожденные матрицы U, V такие, что $A_1 = UAV$, $B_1 = UBV$ [2)]. Полезно отметить, что переход к эквивалентному пучку, фактически, состоит в изменении базисов в пространствах $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ (см. п. 5, с. 144).

Теорема 2. *Характеристические полиномы эквивалентных пучков совпадают с точностью до постоянного ненулевого множителя.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\det(UAV - \lambda UBV) = \det(U)\det(A - \lambda B)\det(V). \ \square$$

Отметим также, что если x — собственный вектор пучка (A, B), отвечающий характеристическому числу λ, то вектор $y = V^{-1}x$ есть собственный вектор пучка (UAV, UBV), отвечающий тому же характеристическому числу. В самом деле, вектор y не равен нулю, и, если $Ax = \lambda Bx$, то $AVy = \lambda BVy$, поэтому $UAVy = \lambda UBVy$.

5. Аналогом теоремы 2, с. 182, о триангуляции матриц служит

Теорема 3 (обобщенная теорема Шура). *Пусть пучок (A, B) регулярен. Тогда существуют унитарные матрицы U, V такие, что матрицы $A_1 = UAV$, $B_1 = UBV$ — верхние треугольные матрицы.*

Доказательство. Покажем сначала, что существуют унитарные матрицы U_1, V_1 такие, что у матриц $\tilde{A} = U_1AV_1$, $\widetilde{B} = U_1BV_1$ все поддиагональные элементы первого столбца равны нулю. По предположению пучок (A, B) регулярен, поэтому возможны два случая: 1) характеристическое уравнение пучка имеет корень (обозначим его через λ_1); 2) характеристический полином пучка тождественно равен $\det(A) \neq 0$ (см. (1.1)). Обратимся сначала к первому случаю. Пусть v_1 — нормированный собственный вектор пучка, отвечающий λ_1, т. е.

$$Av_1 = \lambda_1 Bv_1. \tag{1.2}$$

Дополним вектор v_1 до ортонормированного базиса $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть V — унитарная матрица, столбцами которой являются векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$. Заметим теперь, что вектор Bv_1 не равен нулю, так как в противном случае вследствие (1.2) вектор Av_1 тоже равен нулю, а это противоречит предположению о регулярности пучка (см. следствие 1). Положим $u_1 = Bv_1/|Bv_1|$ и дополним

[2)] Матрицы A, B могут быть при этом и прямоугольными.

вектор u_1 до ортонормированного базиса u_1, u_2, $\ldots$, u_n пространства $\mathbb{C}^n$. Образуем унитарную матрицу U_1, полагая, что векторы $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\ldots$, $\bar{u}_n$ являются ее строками. Элементарные выкладки показывают, что элементы первого столбца матрицы $\widetilde{B} = U_1 B V_1$ вычисляются по формулам $\tilde{b}_{j,1} = |Bv_1|(u_1, u_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, следовательно, $\tilde{b}_{1,1} = |Bv_1| > 0$, $\tilde{b}_{j,1} = 0$ при $j = 2, 3, \ldots, n$. Аналогично определяются элементы первого столбца матрицы $\tilde{A} = U_1 A V_1$. В результате получаем $\tilde{a}_{11} = (Av_1, u_1) = \lambda_1 |Bv_1|$, $\tilde{a}_{1j} = (Av_1, u_j) = 0$ при $j = 2, 3, \ldots, n$. Обратимся теперь к случаю, когда характеристическое уравнение пучка (A, B) не имеет корней. В этом случае $\det(B) = 0$, но $\det(A) \neq 0$, поэтому существует нормированный вектор v_1, для которого $Bv_1 = 0$, а $Av_1 \neq 0$. Построим ортонормированные базисы v_1, v_2, $\ldots$, v_n, $u_1 = v_1/|Av_1|$, u_2, $\ldots$, u_n пространства $\mathbb{C}^n$ и по ним унитарные матрицы U, V так же, как в первом случае. Элементарные вычисления показывают, что первый столбец матрицы $\widetilde{B} = U_1 B V_1$ будет нулевым, диагональный элемент первого столбца матрицы $\tilde{A} = U_1 A V_1$ равен $|Av_1| > 0$, а остальные элементы этого столбца — нули. Дальнейшие рассуждения основаны на понижении порядка рассматриваемых матриц и полностью аналогичны применявшимся при доказательстве теоремы 2, с. 182. $\square$

6. Полезно отметить, что если треугольные матрицы A_1, B_1, фигурирующие в теореме 3, построены, то характеристическое уравнение пучка (A, B) можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{n} (a_{ii}^{(1)} - \lambda b_{ii}^{(1)}) = 0,$$

где $a_{ii}^{(1)}$, $b_{ii}^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — диагональные элементы матриц A_1, B_1. Таким образом, если характеристический полином пучка имеет степень k, то характеристические числа пучка определяются по формулам $\lambda_i = a_{ii}^{(1)}/b_{ii}^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что $b_{ii}^{(1)} = 0$ при $i > k$. Принято говорить поэтому, что если характеристический полином пучка имеет степень $k < n$, то пучок имеет бесконечное характеристическое число кратности $n - k$.

§ 2. Квазидиагональная форма пучка

.

Теорема 1. *Всякий регулярный пучок* (A, B) *можно привести* *к эквивалентному квазидиагональному виду* (A_1, B_1)*:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь A_{11} *— верхняя треугольная матрица, на диагонали которой расположены все характеристические числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *пучка* (A, B)*,* B_{22} *— верхняя треугольная матрица с нулевой главной диагональю,* I_k*,* I_{n-k} *— единичные матрицы соответствующих размеров.*

Доказательство. Как установлено в теореме 3, пучок (A, B) эквивалентен пучку вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{11} — верхняя треугольная матрица порядка k, на диагонали которой расположены числа $b_{11}\lambda_1, b_{22}\lambda_2, \ldots, b_{kk}\lambda_k$, матрица B_{11} есть верхняя треугольная матрица порядка k, на диагонали которой расположены числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{kk}$, причем все они отличны от нуля, матрица A_{22} — верхняя треугольная матрица порядка $n-k$, ее диагональные элементы $a_{k+1,k+1}, a_{k+2,k+2}, \ldots, a_{nn}$ отличны от нуля, матрица B_{22} — верхняя треугольная с нулевой главной диагональю. Умножая обе матрицы пучка (1) на квазидиагональную матрицу $\mathrm{diag}(B_{11}^{-1}, A_{22}^{-1})$, перейдем к эквивалентному пучку

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_k & \tilde{B}_{12} \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}_{11}$ — верхняя треугольная с числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ на главной диагонали, диагональ верхней треугольной матрицы $\tilde{B}_{22}$ состоит из нулей. Доказательство теоремы будет завершено, если нам удастся подобрать прямоугольные $k \times (n-k)$ матрицы P, Q так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{pmatrix} I_k & Q \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & P \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_k & Q \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & \tilde{B}_{12} \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & P \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Несложные выкладки приводят к следующим уравнениям для определения матриц P, Q:

$$\tilde{A}_{11}P + Q = -\tilde{A}_{12}, \quad P + Q\tilde{B}_{22} = -\tilde{B}_{12}. \tag{2.2}$$

Совокупность уравнений (2.2) можно трактовать как систему линейных алгебраических уравнений относительно элементов матриц P, Q. Для того, чтобы доказать ее разрешимость при любых $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{B}_{12}$, достаточно убедиться, что соответствующая однородная система

$$\tilde{A}_{11}P + Q = 0, \quad P + Q\tilde{B}_{22} = 0 \tag{2.3}$$

имеет только тривиальное решение. Если P, Q удовлетворяют (2.3), то $P = \tilde{A}_{11}P\tilde{B}_{22}$, $Q = \tilde{A}_{11}Q\tilde{B}_{22}$. Матрица $\tilde{B}_{22}$ нильпотентна. Поэтому точно так же как при доказательстве теоремы 3, с. 184, получаем, что $P = 0$, $Q = 0$. $\square$

§ 3. Каноническая форма Вейерштрасса

Для регулярных матричных пучков удается строить эквивалентные двухдиагональные формы, аналогичные канонической форме Жордана.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Пусть (A, B) — регулярный матричный пучок порядка n, λ_1, λ_2, ..., λ_k, $k \leqslant n$, — его характеристические числа. Тогда существуют обратимые матрицы U, V такие, что $UAV = \operatorname{diag}(J, I_{n-k})$, $UBV = \operatorname{diag}(I_k, H)$. Здесь I_{n-k}, I_k — единичные матрицы порядка $n-k$ и k соответственно. J — жорданова матрица с числами λ_1, λ_2, ..., λ_k на главной диагонали, H — нильпотентная жорданова матрица.*

Доказательство. Пусть S_k, S_{n-k} невырожденные матрицы, приводящие матрицы A_{11}, B_{22} соответсвенно квазидиагональной эквивалентной формы (2.1) пучка (A, B) к жордановой форме. Выполнив преобразования подобия

$$\operatorname{diag}(S_k, S_{n-k})A_1 \operatorname{diag}(S_k^{-1}, S_{n-k}^{-1}), \quad \operatorname{diag}(S_k, S_{n-k})B_1 \operatorname{diag}(S_k^{-1}, S_{n-k}^{-1}),$$

приведем пучок (A_1, B_1) к нужному эквивалентному виду. $\square$

Матричный пучок $(\operatorname{diag}(J, I_{n-k}), \operatorname{diag}(I_k, H))$, фигурирующий в теореме 1, называется *канонической формой Вейерштрасса.*

Теорема 2. *Матрицы Жордана J, H канонической формы Вейерштрасса определяются однозначно, с точностью до перестановок на диагонали жордановых клеток, по матрицам исходного пучка (A, B).*

Доказательство. Пусть

$$(\operatorname{diag}(J, I_{n-k}), \operatorname{diag}(I_k, H)), \quad (\operatorname{diag}(J_1, I_{n-k}), \operatorname{diag}(I_k, H_1))$$

есть две различные канонические формы одного и того же пучка (A, B). Тогда существуют такие невырожденные матрицы U, V, что

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В равенствах (3.1), (3.2) использованы блочные представления матриц U, V, согласованные с размерами блоков J, H, индексы, обозначающие размеры единичных блоков, опущены. Выполняя элементарные выкладки, из (3.1), (3.2) получим, что $U_{11} = V_{11}$, $U_{22} = V_{22}$,

$$U_{11}J = J_1U_{11}, \quad U_{22}H = H_1U_{22}, \tag{3.3}$$

$$V_{21} = U_{21}J, \quad U_{21} = H_1V_{21}, \tag{3.4}$$

$$U_{12} = J_1V_{12}, \quad V_{12} = U_{12}H. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) следует, что $U_{21} = H_1U_{21}J$, $U_{12} = J_1U_{12}H$. Матрицы H, H_1 нильпотентны, поэтому (см. заключительные рассуждения доказательства теоремы (2.1)) $U_{12}, U_{21} = 0$, следовательно, $V_{12}, V_{21} = 0$. Матрица U невырождена, поэтому невырождены и матрицы U_{11}, U_{22}. Таким образом (см. (3.3)), матрица J подобна J_1, матрица H подобна H_1, и справедливость доказываемой теоремы вытекает из теоремы 4, с. 290. □

§ 4. Специальные матричные пучки

1. Регулярный пучок (A, B) называется *неособым*, если $\det(B)$ не равен нулю. В этом случае исходный пучок эквивалентен пучкам $(B^{-1}A, I)$, (AB^{-1}, I). Множество характеристических чисел пучка совпадает со спектром матрицы $B^{-1}A$. Собственные векторы матрицы $B^{-1}A$ также очевидным образом связаны с собственными векторами пучка (A, B). Эти обстоятельства могут оказаться полезными при теоретических исследованиях, однако при численном решении задач о спектре пучка переход к задаче на собственные значения для матрицы $B^{-1}A$ обычно не используется, так как при этом часто теряются такие полезные свойства матриц A, B как симметрия, разреженность и т. д.

2. Пучок (A, B) называется *эрмитовым*, если $A = A^*$, $B = B^*$. Все характеристические числа эрмитова пучка вещественны. В самом деле, если $x \neq 0$ и $Ax = \lambda Bx$, то $(Ax, x) = \lambda(Bx, x)$, причем числа (Ax, x), (Bx, x) вещественны (см. теорему 2, с. 197).

3. Важно отметить, что вследствие теоремы 2, с. 294, задача об отыскании собственных чисел и собственных векторов произвольной вещественной матрицы эквивалентна задаче о характеристических числах и собственных векторах матричного неособого пучка с симметричными вещественными матрицами. Таким образом, спектральная задача для неособого пучка с симметричными вещественными матрицами в общем оказывается столь же сложной, как и спектральная задача для произвольной вещественной матрицы. Ситуация улучшается, если сузить класс допустимых матриц B.

4. Пучок (A, B) называется *определенным*, если он эрмитов и матрица B положительно определена. Следующая теорема показывает, что всякий определенный пучок унитарным преобразованием подобия может быть приведен к диагональному виду.

Теорема 1. *Если (A, B) — определенный пучок, то существует невырожденная матрица U такая, что $U^*BU = I$, $U^*AU = \Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$* [1].

Доказательство. Введем на пространстве $\mathbb{C}^n$ новое скалярное произведение, полагая $(x, y)_B = (Bx, y)$. Оператор $C = B^{-1}A$, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$, самосопряжен относительно этого скалярного произведения, так как для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$(Cx, y)_B = (BB^{-1}Ax, y) = (x, Ay) = (Bx, B^{-1}Ay) = (x, Cy)_B.$$

Поэтому по теореме 4, с. 200, существуют векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$Ce_k = \lambda_k e_k, \ k = 1, 2, \ldots, n, \quad (e_k, e_l)_B = \delta_{kl}, \ k, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение матрицу U, столбцами которой являются векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда соотношения (4.1) можно записать в виде $B^{-1}AU = U\Lambda$, $U^*BU = I$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Очевидно, верно и равенство $U^*AU = \Lambda$. □

§ 5. Сингулярные пучки. Теорема о приведении

В этом пункте будет доказано, что всякий сингулярный пучок эквивалентен квазидиагональному пучку блочной размерности 2×2 специального вида. Обозначим через r наибольший из порядков миноров матрицы $A + \lambda B$, не равных тождественно по $\lambda \in \mathbb{C}$ нулю. Число r называется рангом пучка (A, B). Предполагается, что пучок (A, B)

[1] Ясно, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа пучка (A, B).

сингулярен, поэтому выполнено одно из неравенств: $r < m$ или $r < n$. Как обычно, m — количество строк пучка, n — количество столбцов пучка. Для определенности будем пока считать, что $r < n$. Поскольку пучок (A, B) сингулярен, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется ненулевой вектор $x(\lambda) \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$(A + \lambda B)x(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \ \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Решая однородную систему уравнений вида (5.1) методом, описанным в п. 3, с. 159, получим, что компоненты вектора $x(\lambda)$ вычисляются по формулам $P_{l_k}(\lambda)/Q_{m_k}(\lambda)$, где P_{l_k}, Q_{m_k} — некоторые полиномы, $k = 1, 2, \ldots, n$. Умножая вектор $x(\lambda)$ на произвольную функцию λ мы вновь получаем решение системы (5.1). Можно считать поэтому, что вектор $x(\lambda)$ есть полином:

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda x_1 + \cdots + \lambda^\varepsilon x_\varepsilon,\ \varepsilon \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Среди всех возможных полиномов, удовлетворяющих (5.1), будем выбирать полином минимальной степени. Соответствующее число ε называют *минимальным индексом* сингулярного пучка (A, B).

Лемма 1. *Минимальные индексы эквивалентных пучков совпадают.*

Доказательство. Если $x(\lambda)$ — полином минимальной степени, удовлетворяющий (5.1), то для любых невырожденных матриц U, V $U(A - \lambda B)VV^{-1}x(\lambda) = 0\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^n$. Степени полиномов $V^{-1}x(\lambda)$ и $x(\lambda)$, очевидно, совпадают. $\square$

Подставляя полином (5.2) в уравнение (5.1), собирая коэффициенты при одинаковых степенях λ и приравнивая их нулю, получим однородную систему линейных уравнений для определения векторов x_0, x_1, $\ldots$, x_ε, эквивалентную (5.1):

$$Ax_0 = 0, Bx_0 + Ax_1 = 0, \ldots, Bx_{\varepsilon-1} + Ax_\varepsilon = 0, Bx_\varepsilon = 0 \text{ [1]}. \tag{5.3}$$

Если $\varepsilon > 0$ — минимальный индекс пучка (A, B), то система уравнений

$$Ax_0 = 0, Bx_0 + Ax_1 = 0, \ldots, Bx_{k-1} + Ax_k = 0, Bx_k = 0. \tag{5.4}$$

при любом $k < \varepsilon$ имеет только тривиальное решение. Таким образом, справедлива

[1] Матрица системы (5.3), очевидно, является блочно-двухдиагональной.

Лемма 2. *Если $\varepsilon > 0$ — минимальный индекс пучка (A, B), то столбцы матрицы системы* (5.4) *при любом $k < \varepsilon$ линейно независимы.*

Лемма 3. *Пусть ε — минимальный индекс пучка (A, B). Тогда векторы $x_0, x_1, \ldots, x_\varepsilon$, определяемые как решение системы* (5.3), *линейно независимы. Векторы $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_\varepsilon$ также линейно независимы.*

Доказательство. Покажем сначала, что ни один из векторов $\{x_i\}_{i=0}^{\varepsilon}$ не может равняться нулю. В самом деле, если $x_0 = 0$, то полином $\lambda^{-1}x(\lambda)$ имеет степень $\varepsilon - 1$ и удовлетворяет соотношению (5.1), что противоречит минимальности индекса ε. Если $x_j = 0$ при некотором $j \geqslant 1$, то $Ax_j = 0$. Векторы $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ не все равны нулю и, как следует из (5.3), удовлетворяют системе уравнений (5.4) при $k = j-1$, что противоречит минимальности индекса ε. Точно так же устанавливается, что ни один из векторов $\{Ax_i\}_{i=1}^{\varepsilon}$ не равен нулю. Покажем, что векторы $\{Ax_i\}_{i=1}^{\varepsilon}$ линейно независимы. Если предположить противное, то найдется такое целое $h \in [1, \varepsilon]$ и такие не все одновременно равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$, что

$$Ax_h = \alpha_1 Ax_{h-1} + \alpha_2 Ax_{h-2} + \cdots + \alpha_{h-1} Ax_1. \tag{5.5}$$

Пусть $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1 - \alpha_1 x_0$, $y_2 = x_2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_0, \ldots,$

$$y_{h-1} = x_{h-1} - \alpha_1 x_{h-2} - \cdots - \alpha_{h-1} x_0.$$

Используя уравнения (5.3), а затем (5.7), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &Ay_0 = Ax_0 = 0,\\ &Ay_1 = Ax_1 - \alpha_1 Ax_0 = -Bx_0 = -By_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ay_2 = Ax_2 - \alpha_1 Ax_1 - \alpha_2 Ax_0 = -Bx_1 + \alpha_1 Bx_0 =\\ = -B(x_1 - \alpha_1 x_0) = -By_1, \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} &Ay_{h-1} = -By_{h-2},\\ &By_{h-1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что полином $y(\lambda) = y_0 + \lambda y_1 + \cdots + \lambda^{h-1} y_{h-1}$ степени $h - 1 < \varepsilon$ удовлетворяет соотношению вида (5.1), а это противоречит минимальности индекса ε. Осталось доказать линейную независимость векторов $\{x_i\}_{i=0}^{\varepsilon}$. Пусть $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\varepsilon x_\varepsilon = 0$ при некоторых $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varepsilon$. Тогда $\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \cdots + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0$.

Вследствие линейной независимости векторов $\{Ax_i\}_{i=1}^{\varepsilon}$ получаем, что $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_\varepsilon = 0$, значит $\alpha_0 x_0 = 0$, но $x_0 \neq 0$, поэтому $\alpha_0 = 0$. $\square$

Лемма 4. *Всякий пучок (A, B) с минимальным индексом $\varepsilon > 0$ эквивалентен квазитреугольному пучку (A_1, B_1), где*

$$A_1 = \begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(0)} & D \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(1)} & F \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$L_\varepsilon^{(0)} = (0, I_\varepsilon), \quad L_\varepsilon^{(1)} = (I_\varepsilon, 0), \tag{5.7}$$

а минимальный индекс пучка $(\hat{A}, \hat{B})$ не меньше ε.

Доказательство. В соответствии с леммой 3 в пространстве $\mathbb{C}^n$ можно ввести базис, первыми $\varepsilon+1$ векторами которого являются векторы $\{(-1)^i x_i\}_{i=0}^{\varepsilon}$. Аналогично, в пространстве $\mathbb{C}^m$ можно ввести базис, первыми векторами которого являются векторы $\{(-1)^i Ax_i\}_{i=1}^{\varepsilon}$[1]. Равенства (5.3) показывают, что переход к указанным базисам приводит к пучку с матрицами (5.6). Докажем вторую часть теоремы. Заметим, прежде всего, что не существует полинома $y(\lambda)$ степени меньшей ε, удовлетворяющего тождеству

$$(L_\varepsilon^{(0)} + \lambda L_\varepsilon^{(1)}) y(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Действительно, в этом случае полином $x(\lambda) = (y(\lambda), 0)$ степени меньшей ε удовлетворял бы тождеству

$$(A_1 + B_1) x(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.9}$$

а этого быть не может, поскольку минимальные индексы эквивалентных пучков (A, B) и (A_1, B_1) должны совпадать. Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы существует полином $z(\lambda)$ степени меньшей ε, удовлетворяющий тождеству

$$(\hat{A} + \hat{B}) z(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.10}$$

Если нам удастся найти полином $v(\lambda)$ такой, что

$$(L_\varepsilon^{(0)} + \lambda L_\varepsilon^{(1)}) v(\lambda) + (D + \lambda F) z(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.11}$$

то вектор $x(\lambda) = (v(\lambda), z(\lambda)) \in \mathbb{C}^n$ будет удовлетворять тождеству (5.9). Положим, что

$$z(\lambda) = z_0 + \lambda z_1 + \cdots + \lambda^{\varepsilon-1} z_{\varepsilon-1}, \quad v(\lambda) = v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^{\varepsilon-1} v_{\varepsilon-1}.$$

[1] Чередование знаков в этих базисах обусловлено удобством записи некоторых формул в дальнейшем.

Подставим эти выражения в (5.11), соберем коэффициенты при одинаковых степенях λ и приравняем их нулю. В результате, получим систему уравнений

$$L_\varepsilon^{(0)}v_0 = -g_0,\ L_\varepsilon^{(1)}v_0 + L_\varepsilon^{(0)}v_1 = -g_1,\ \dots,\ L_\varepsilon^{(1)}v_{\varepsilon-2} + L_\varepsilon^{(0)}v_{\varepsilon-1} = -g_{\varepsilon-1},$$
$$L_\varepsilon^{(1)}v_{\varepsilon-1} = -g_\varepsilon, \quad (5.12)$$

где $g_0 = Dz_0$, $g_1 = Fz_0 + Dz_1, \dots, g_{\varepsilon-1} = Fz_{\varepsilon-2} + Dz_{\varepsilon-1}$, $g_\varepsilon = Fz_{\varepsilon-1}$. По доказанному минимальный индекс пучка $(L_\varepsilon^{(0)}, L_\varepsilon^{(1)})$ равен ε, поэтому в силу леммы 2 ранг матрицы системы (5.12) равен $\varepsilon(\varepsilon+1)$ (числу ее столбцов), количество уравнений системы (5.12), как нетрудно подсчитать, также равно $\varepsilon(\varepsilon+1)$. Следовательно, система (5.12) однозначно разрешима при любой правой части. Таким образом, полином $x(\lambda) = (v(\lambda), z(\lambda))$ имеет степень $\varepsilon - 1$ и удовлетворяет тождеству (5.9). Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Теорема 1 (редукции). *Пусть минимальный индекс пучка (A, B) равен $\varepsilon > 0$, ранг пучка меньше n. Тогда пучок (A, B) эквивалентен пучку*

$$\left(\begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(0)} & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix}\right), \tag{5.13}$$

где, как и выше, $L_\varepsilon^{(0)} = (0, I_\varepsilon)$, $L_\varepsilon^{(1)} = (I_\varepsilon, 0)$, а минимальный индекс пучка $(\hat{A}, \hat{B})$ не меньше ε.

Доказательство. Пусть (A_1, B_1) — пучок эквивалентный (A, B), который был сконструирован в ходе доказательства леммы (5.4). Элементарные вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} I_\varepsilon & Q \\ 0 & I_{m-\varepsilon} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} I_{\varepsilon+1} & -P \\ 0 & I_{n-\varepsilon-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(0)} & R \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_\varepsilon & Q \\ 0 & I_{m-\varepsilon} \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} I_{\varepsilon+1} & -P \\ 0 & I_{n-\varepsilon-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\varepsilon^{(1)} & S \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix}.$$

Здесь P, Q — неопределенные пока прямоугольные матрицы подходящих размеров,

$$R = D + Q\hat{A} - L_\varepsilon^{(0)}P, \quad S = F + Q\hat{B} - L_\varepsilon^{(1)}P.$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что матрицы P, Q можно выбрать так, чтобы $R, S = 0$. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_{\varepsilon+1}$ — строки матрицы P. Нетрудно убедится, что матрица $L_\varepsilon^{(0)}P$ состоит из строк

$p_2, p_3, \ldots, p_{\varepsilon+1}$, а матрица $L_\varepsilon^{(1)}P$ — из строк $p_1, p_2, \ldots, p_\varepsilon$. Поэтому, если $R, S = 0$, то

$$q_j\hat{A} + q_{j+1}\hat{B} + f_{j+1} + d_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varepsilon - 1. \tag{5.14}$$

Малые буквы с индексами здесь обозначают строки соответствующих матриц. Будем трактовать (5.14) как систему уравнений относительно элементов строк $(-1)^j q_j$, $j = 1, 2, \ldots, \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что матрица этой системы по форме совпадает с матрицей системы (5.4) при $k = \varepsilon - 2$. Поскольку минимальный индекс пучка $(\hat{A}, \hat{B})$ по лемме 4 не меньше чем ε, то ранг этой матрицы равен $(\varepsilon-1)(n-\varepsilon-1)$, т. е. числу ее столбцов. Количество уравнений системы (1), как нетрудно подсчитать, также равно $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$. Поэтому система (1) разрешима при любых D и F. Определив матрицу Q, можно затем легко найти матрицу P, решая системы уравнений $L_\varepsilon^{(0)}P = D + Q\hat{A}$, $L_\varepsilon^{(0)}P = F + Q\hat{B}$. $\square$

Замечание 1. Напомним, что мы предполагали до сих пор, что ранг пучка (A, B) меньше n. Если ранг пучка (A, B) меньше m, то переходя к пучку (A^T, B^T), нетрудно установить, что пучок (A, B) эквивалентен пучку

$$\left(\begin{pmatrix} (L_\eta^{(0)})^T & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (L_\eta^{(1)})^T & 0 \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}\right),$$

где η — минимальный индекс пучка (A^T, B^T), а минимальный индекс пучка $(\tilde{A}^T, \widetilde{B}^T)$ не меньше η. Приняты следующие наименования: ε — правый минимальный индекс, η — левый минимальный индекс пучка (A, B).

§ 6. Каноническая форма Кронекера

В этом пункте будет показано, что произвольный сингулярный пучок (A, B) эквивалентными преобразованиями можно привести к квазидиагональному виду, причем каждый из диагональных блоков будет двухдиагональной матрицей. Предположим сначала, что правый минимальный индекс пучка (A, B) равен нулю. Это означает, что существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такой, что $Ax, Bx = 0$. Иными словами, дефект блочной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

порядка 2×1 положителен. Обозначим его через h_r. Выбирая в качестве первых h_r базисных векторов пространства $\mathbb{C}^n$ векторы базиса $\operatorname{Ker}(M)$, мы, очевидно, приведем пучок (A, B) к виду $((0(m, h_r), A_0), (0(m, h_r), B_0))$, где $0(m, h_r)$ — нулевая матрица размера $m \times h_r$, а правый минимальный индекс пучка (A_0, B_0) положителен. Предположим, что левый минимальный индекс пучка (A_0, B_0) равен нулю. Тогда, фактически, повторяя предыдущие построения, мы приведем исходный пучок (A, B) к квазидиагональному виду $(\operatorname{diag}(0(h_l, h_r), A_1), \operatorname{diag}(0(h_l, h_r), B_1))$, где h_l — размерность ядра блочной матрицы $M_0 = (A_0, B_0)$ порядка 1×2. При этом, очевидно, и правый и левый минимальные индексы пучка (A_1, B_1) положительны. Предположим для определенности, что ранг пучка (A_1, B_1) меньше числа его столбцов. Тогда по теореме 1 пучок (A_1, B_1) эквивалентен пучку $(\operatorname{diag}(L^{(0)}_{\varepsilon_1}, \hat{A}_1), \operatorname{diag}(L^{(1)}_{\varepsilon_1}, \hat{B}_1))$, где $\varepsilon_1 > 0$, а правый минимальный индекс пучка $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$ не меньше ε_1. Продолжая этот процесс мы придем к пучку

$$(\operatorname{diag}(0(h_l, h_r), L^{(0)}_{\varepsilon_1}, L^{(0)}_{\varepsilon_2} \dots, L^{(0)}_{\varepsilon_p}, \hat{A}_p),\\ \operatorname{diag}(0(h_l, h_r)), L^{(1)}_{\varepsilon_1}, L^{(1)}_{\varepsilon_2} \dots, L^{(1)}_{\varepsilon_p}, \hat{B}_q),$$

где $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_1 \dots \leqslant \varepsilon_p$, а ранг пучка $(\hat{A}_p, \hat{B}_p)$ равен числу его столбцов.

Предположим, что число строк пучка $(\hat{A}_p, \hat{B}_p)$, больше его ранга (в противном случае этот пучок регулярен). Поскольку левый минимальный индекс пучка (A_1, B_1) положителен, то, как нетрудно убедиться, левый минимальный индекс пучка $(\hat{A}_p, \hat{B}_p)$ также положителен. Вновь последовательно применяя теорему 1 (см. также замечание 1), приведем пучок $(\hat{A}_p, \hat{B}_p)$ к виду

$$((L^{(0)}_{\eta_1})^T, (L^{(0)}_{\eta_2})^T \dots, (L^{(0)}_{\eta_q})^T, \hat{A}_q), , (L^{(1)}_{\eta_1})^T, (L^{(1)}_{\eta_2})^T \dots, (L^{(1)}_{\eta_q})^T, \hat{B}_q),$$

где $0 < \eta_1 \leqslant \eta_1 \dots \leqslant \eta_q$, а пучок $(\hat{A}_q, \hat{B}_q)$ регулярен и, следовательно, может быть приведен к канонической форме Вейерштрасса (см. теорему 1, с. 304).

Таким образом, доказано, что пучок произвольный сингулярный пучок может быть приведен к эквивалентному виду

$$(\operatorname{diag}(0(h_l, h_r), L^{(0)}_{\varepsilon_1}, L^{(0)}_{\varepsilon_2} \dots, L^{(0)}_{\varepsilon_p}, (L^{(0)}_{\eta_1})^T, (L^{(0)}_{\eta_2})^T \dots, (L^{(0)}_{\eta_q})^T, J, I_{n-k})),\\ \operatorname{diag}(0(h_l, h_r)), L^{(1)}_{\varepsilon_1}, L^{(1)}_{\varepsilon_2} \dots, L^{(1)}_{\varepsilon_p}, (L^{(1)}_{\eta_1})^T, (L^{(1)}_{\eta_2})^T \dots,\\ (L^{(1)}_{\eta_q})^T, I_k, H)). \quad (6.2)$$

Здесь n — порядок пучка $(\hat{A}_q, \hat{B}_q)$, k — количество его характеристических чисел, J — соответствующая жорданова матрица, H — нильпотентная жорданова матрица (подробнее см. теорему 1, с. 304).

Пара матриц (6.2) есть так называемая *каноническая форма* Кронекера сингулярного пучка в самом общем случае. Понятно, что в конкретных частных ситуациях оба числа h_r, h_l или одно из них может равняться нулю, может отсутствовать и любая группа диагональных блоков пучка (6.2).

§ 7. Приложения к системам дифференциальных уравнений

Канонические формы Жордана, Вейерштрасса, Кронекера находят важные применения в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Начнем с рассмотрения *задачи Коши* для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, разрешенных относительно производных:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \tag{7.1}$$
$$x(0) = x_0. \tag{7.2}$$

Здесь A — заданная квадратная матрица прядка n, f — заданная непрерывная вектор-функция переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}^n$, вектор $x_0 \in \mathbb{C}^n$ задан, вектор-функцию x требуется найти.

Напомним (см. упражнение 3, с. 298), что

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}, \tag{7.3}$$
$$e^{tA}|_{t=0} = I. \tag{7.4}$$

Непосредственно подстановкой с использованием соотношений (7.3), (7.4) легко проверяется, что решение задачи (7.1), (7.2) дается формулой

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)d\tau. \tag{7.5}$$

В простейшем случае, когда $n = 1$, т. е. $A = \lambda, x_0, f(t) \in \mathbb{C}$, решение задачи (7.1), (7.2) вычисляется так:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \int\limits_0^t f(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}d\tau. \tag{7.6}$$

Пусть S — невырожденная матрица, приводящая матрицу A к форме Жордана, т. е. $A = SJS^{-1}$, где

$$J = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k)),$$

см. п. 15.6, р. 285. Тогда задача (7.1), (7.2) преобразуется к виду

$$\dot{y}(t) = Jy(t) + g(t), \tag{7.7}$$
$$y(0) = y_0, \tag{7.8}$$

где $y = S^{-1}x$, $g = S^{-1}f$, $y_0 = S^{-1}y(0)$. Задача (7.7), (7.8), очевидно, распадается на независимые системы уравнений

$$\dot{y}_{n_i}(t) = J_{n_i}(\lambda_{n_i})y_{n_i}(t) + g_{n_i}(t), \tag{7.9}$$
$$y_{n_i}(0) = y_{0,n_i}, \tag{7.10}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, достаточно научиться решать задачу вида

$$\dot{y}(t) = J(\lambda)y(t) + g(t), \tag{7.11}$$
$$y(0) = y_0, \tag{7.12}$$

где $J(\lambda)$ — жорданова клетка, порядок которой будем обозначать через m. Запишем однородную систему, соответствующую (7.11), покомпонентно

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t),\\
\dot{y}_2(t) &= \lambda y_2(t) + y_3(t),\\
\cdots\cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{y}_m(t) &= \lambda y_m(t).
\end{aligned}$$

Из последнего уравнения найдем

$$y_m(t) = y_m(0)e^{\lambda t},$$

следовательно,

$$\dot{y}_{m-1}(t) = \lambda y_{m-1}(t) + y_m(0)e^{\lambda t}.$$

Отсюда по формуле (7.6) получим

$$y_{m-1}(t) = (y_m(0)t + y_{m-1}(0))e^{\lambda t}.$$

Аналогично,

$$y_{m-2}(t) = \Big(y_m(0)\frac{t^2}{2} + y_{m-1}(0)t + y_{m-2}(0)\Big)e^{\lambda t}, \ldots$$

Наконец,

$$y_1(t) = \left(y_m(0)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + y_{m-1}(0)\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + y_2(0)t + y_1(0) \right) e^{\lambda t}.$$

Записывая полученные соотношения в матричном виде, будем иметь

$$y(t) = E_{J(\lambda)}(t)y(0),$$

где

$$E_{J(\lambda)}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{m-2}/(m-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t^{m-3}/(m-3)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что для матричной функции $E_{J(\lambda)}(t)$ выполнены соотношения вида (7.3), (7.4) при $A = J(\lambda)$.

Таким образом,

$$E_{J(\lambda)}(t) = e^{tJ(\lambda)}, \tag{7.13}$$

и решение задачи (7.7), (7.8) можно вычислить по формуле

$$y(t) = E_{J(\lambda)}(t)y_0 + \int\limits_0^t E_{J(\lambda)}(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

которая часто используется в теории дифференциальных уравнений при анализе систем вида (7.1).

Упражнение. Докажите формулу (7.13), опираясь на результаты упражнения 2, с. 298.

Указание. Используйте равенство $J(\lambda) = \lambda I + J(0)$.

2. Переходим к рассмотрению систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных:

$$B\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t). \tag{7.14}$$

Сначала будем предполагать, что $A, B \in M_n$, и пучок (A, B) регулярен. Для любых невырожденных матриц $U, V \in M_n$ имеем

$$UBVV^{-1}\dot{x}(t) = UAVV^{-1}x(t) + Uf(t). \tag{7.15}$$

Предположим, что матрицы U, V приводят пучок (A, B) к канонической форме Вейерштрасса. Полагая тогда $y = V^{-1}x$, $g = Uf(t)$, получим (см. теорему 1, с. 304)

$$\operatorname{diag}(I_k, H)\dot{y} = \operatorname{diag}(J, I_{n-k})y + g. \tag{7.16}$$

Система (7.16) распадается на независимые подсистемы вида

$$\dot{y} = J(\lambda)y + g, \tag{7.17}$$

где $J(\lambda)$ — жорданова клетка, отвечающая характеристическому числу λ пучка (A, B), и

$$J(0)\dot{y} = y + g, \tag{7.18}$$

где $J(0)$ — нильпотентная клетка Жордана. Обозначим ее порядок через m и запишем систему (7.18) покомпонентно: $\dot{y}_2 = y_1 + g_1$, $\dot{y}_3 = y_2 + g_2$, $\dots$, $\dot{y}_m = y_{m-1} + g_{m-1}$, $y_m + g_m = 0$. Отсюда, начиная с последнего уравнения, находим $y_m = -g_m$, $y_{m-1} = -g_{m-1} - \dot{g}_m$. Вообще,

$$y_i = -\sum_{k=i}^{m} \frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}} g_k, \quad i = 1, 2, \dots m. \tag{7.19}$$

Способ решения системы (7.17) описан выше.

Таким образом, задача Коши для системы (7.14) в случае, когда пучок (A, B) регулярен, разрешима, однако ее решение, как следует из соотношения (7.19), может включать в себя производные функции f и потому при недостаточной гладкости f может оказаться разрывным.

Если пучок (B, A) сингулярен, то система (7.14), как будет показано ниже, разрешима лишь при выполнении некоторых условий для вектор функции $f(t)$. Приведя пучок (B, A) к канонической форме Кронекера (6.2), при помощи некоторых матриц U, V (см. (7.15)), мы получим распадающуюся систему дифференциальных уравнений, которая наряду с уже исследованными будет, вообще говоря, включать в себя и подсистемы следующего вида:

$$\begin{aligned} 0(h_l, h_r)\dot{y}(t) &= 0(h_l, h_r)y + g, && (7.20)\\ L_\varepsilon^{(0)}\dot{y}(t) &= L_\varepsilon^{(1)}y + g, && (7.21)\\ (L_\eta^{(0)})^T\dot{y}(t) &= (L_\eta^{(1)})^T y + g. && (7.22) \end{aligned}$$

Из (7.20), очевидно, вытекает, что для разрешимости системы (7.14) необходимо, чтобы первые h_l компонент вектора Uf были равны нулю.

Отметим, что система (7.21) содержит меньше уравнений, чем неизвестных, т. е. недоопределена, напротив, система (7.22) переопределена: в ней уравнений больше, чем неизвестных.

Записывая систему (7.21) покомпонентно, получим (см. (5.7), с. 309)

$$\dot{y}_2 = y_1 + g_1, \dot{y}_3 = y_2 + g_2, \dots, \dot{y}_{\varepsilon+1} = y_\varepsilon + g_\varepsilon. \tag{7.23}$$

Выбирая в качестве y_1 произвольную интегрируемую на каждом конечном промежутке функцию, мы можем последовательно определить из (7.23) все остальные компоненты вектора y.

Система (7.22) в покомпонентной записи выглядит так:

$$0 = y_1 + g_1,\ \dot{y}_1 = y_2 + g_2,\ \ldots,\ \dot{y}_{\varepsilon-1} = y_\varepsilon + g_\varepsilon,\ \dot{y}_\varepsilon = g_{\varepsilon+1}.$$

Отсюда $y_1 = -g_1$, $y_2 = -g_2 - \dot{g}_1,\ \ldots,\ y_\varepsilon = -g_\varepsilon - \dot{g}_{\varepsilon-1} - \cdots - \frac{d^{\varepsilon-1}}{dt^{\varepsilon-1}} g_1$,

$$g_{\varepsilon+1} = -\frac{d}{dt}\left(g_\varepsilon + \dot{g}_{\varepsilon-1} + \cdots + \frac{d^{\varepsilon-1}}{dt^{\varepsilon-1}} g_1\right). \tag{7.24}$$

Равенство (7.24) есть необходимое условие разрешимости системы (7.22). Понятно, что оно определяет некоторые дополнительные условия на компоненты вектор-функции $f(t)$, необходимые для разрешимости исходной системы (7.14).

Глава 17
Нормы векторов и матриц

§ 1. Основные неравенства

При помощи теоремы 2, с. 276, легко доказывается, что функция $-\ln(x)$ выпукла на интервале $(0,\infty)$. Поэтому для любых положительных чисел a, b и любых $p, q > 1$ и таких, что $1/p + 1/q = 1$,

$$\ln(a^p/p + b^q/q) \geqslant \ln(a^p)/p + \ln(b^q)/q = \ln(ab),$$

следовательно, $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$. Очевидно, что последнее неравенство верно и при $ab = 0$. Далее, поскольку $|ab| \leqslant |a||b|$, то

$$|ab| \leqslant |a|^p/p + |b|^q/q \tag{1.1}$$

для любых, вообще говоря, комплексных чисел a, b. Неравенство (1.1) называют *неравенством Юнга*[1].

Теорема 1 (неравенство Гёльдера[2]). *Пусть $x, y \in \mathbb{C}^n$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Доказываемое неравенство выполнено, если хотя бы один из векторов x, y равен нулю. Для ненулевых x, y, используя неравенство Юнга, получим при $l = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{|x_l|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}} \frac{|y_l|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|x_l|^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p} + \frac{|y_l|^q}{q\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q}.$$

Суммируя все эти неравенства, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q},$$

[1] Уильям Генри Юнг (William Henry Young; 1863 — 1942) — английский математик.
[2] Отто Людвиг Гёльдер (Otto Ludwig Hölder; 1859 — 1937) — немецкий математик.

откуда, очевидно, следует (1.2). □

При $p = 2$ неравенство (1.2) называют *неравенством Коши.*

Теорема 2 (неравенство Минковского). *Пусть* $x, y \in \mathbb{C}^n$, $p > 1$. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Будем считать x, y такими, что левая часть неравенства (1.3) положительна, так как в противном случае неравенство (1.3) выполняется очевидным образом. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|y_k|. \tag{1.4}$$

Оценим суммы в правой части последнего неравенства, используя неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}, \tag{1.6}$$

где $1/p + 1/q = 1$ и, следовательно, $(p-1)q = p$. Поэтому из (1.4)–(1.6) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\right),$$

откуда, учитывая равенство $1 - 1/q = 1/p$, получим (1.3). □

§ 2. Нормы на пространстве $\mathbb{C}^n$

1. Наряду с введенным выше понятием длины (или модуля) вектора $x \in \mathbb{C}^n$ во многих случаях оказывается удобным использовать более общее понятие, а именно, понятие нормы вектора.

Будем говорить, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ введена *норма*, если каждому вектору $x \in \mathbb{C}^n$ однозначно поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$ (читается: норма x). При этом должны быть выполнены следующие условия (*аксиомы нормы*):

1) $\|x\| \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$, равенства $\|x\|=0$ и $x=0$ эквивалентны;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для любых $x \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Условие 3) обычно называют *неравенством треугольника.*

Отметим неравенство

4) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$,

которое вытекает из аксиомы 3). В самом деле,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|.$$

Аналогично,

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|.$$

Неравенство 4) есть просто более краткая запись этих неравенств.

2. Приведем примеры норм на пространстве $\mathbb{C}^n$.

1) Пусть $p \geqslant 1$. Равенство $\|x\|_p = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$ определяет норму. Действительно, аксиомы 1), 2) выполнены очевидным образом, а неравенство 3) при $p = 1$ непосредственно вытекает из свойств модуля, а при $p > 1$ совпадает с неравенством Минковского (1.3).Отметим, что $\|x\|_2^2 = |x|^2 = (x, x)$, для любого $x \in \mathbb{C}^n$, здесь и далее в этой главе $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^n$.

2) Положим $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$. Элементарно проверяется, что это равенство определяет норму.

3) Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица. Функция $\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}$ есть норма на пространстве $\mathbb{C}^n$. Для обоснования этого факта достаточно вспомнить, что соотношение $(x, y)_A = (Ax, y)$ определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. упражнение 1, с. 197, а также п. 2, с. 117).

3. Любая норма непрерывна на всем пространства $\mathbb{C}^n$. В самом деле, пусть x, y — произвольные точки $\mathbb{C}^n$. Представим их в виде разложений по естественному базису пространства $\mathbb{C}^n$: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k i^k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k i^k$. Используя теперь неравенство треугольника, получим $\|x - y\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|i^k\| |x_k - y_k|$, откуда, очевидно, вытекает, что если x стремится к y, то $\|x - y\|$ стремится к нулю.

4. Будем говорить, что последовательность $\{x^k\} \subset \mathbb{C}^n$ *сходится* к вектору $x \in \mathbb{C}^n$ *по норме*, если $\lim\limits_{k\to\infty} \|x - x^k\| = 0$. В п. 3, фактически, показано, что если последовательность векторов сходится *покомпонентно*, то она сходится и по любой норме, введенной на пространстве $\mathbb{C}^n$. Ниже будет установлено, что справедливо и обратное утверждение.

5. Говорят, что нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ *эквивалентны* если существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\|x\|_{(1)} \leqslant \|x\|_{(2)} \leqslant c_2\|x\|_{(1)} \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Любые две нормы на пространстве* $\mathbb{C}^n$ *эквивалентны.*

Доказательство. Отношение эквивалентности норм, очевидно, транзитивно. Поэтому достаточно показать, что любая норма $\|\cdot\|$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$, т. е. показать, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что

$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x| \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n. \tag{2.2}$$

Пусть $S_1(0)$ — множество всех векторов из пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию $|x| = 1$ ($S_1(0)$ — сфера единичного радиуса с центром в нуле). Это множество ограничено и замкнуто в пространстве $\mathbb{C}^n$. Функция $\varphi(x_1, x_2 \dots, x_n) = \|x\|$, как показано в п. 3, непрерывна на $\mathbb{C}^n$. Поэтому по теореме Вейерштрасса (см. курс математического анализа) существуют точки x^1, x^2, принадлежащие $S_1(0)$, и такие, что $\|x^1\| = \min\limits_{x\in S_1(0)} \|x\|$, $\|x^2\| = \max\limits_{x\in S_1(0)} \|x\|$. Положим $c_1 = \|x^1\|$, $c_2 = \|x^2\|$. Ясно, что $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2$. Причем c_1 не может равняться нулю, так как в противном случае $x^1 = 0$, но, с другой стороны, $x^1 \in S_1(0)$, поэтому $|x^1| = 1$, и, стало быть, $x^1 \neq 0$. Итак, для любого $x \in S_1(0)$

выполнены неравенства $0 < c_1 \leqslant \|x\| \leqslant c_2$. Пусть теперь x — произвольный вектор из $\mathbb{C}^n$, не равный нулю. Тогда, очевидно, вектор $(1/|x|)x$ принадлежит $S_1(0)$, следовательно, $c_1 \leqslant \|(1/|x|)x\| \leqslant c_2$, откуда вытекает, что для вектора x выполнены неравенства (2.2). Если $x = 0$, то неравенства (2.2) выполняются очевидным образом. □

6. Из теоремы 1 вытекает, что всякая норма на пространстве $\mathbb{C}^n$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$, поэтому из сходимости последовательности векторов по любой норме вытекает ее покомпонентная сходимость. Важно иметь в виду, что постоянные c_1, c_2, вообще говоря, зависят от n, т. е. от размерности пространства $\mathbb{C}^n$. Приведем, например, следующие оценки:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n \text{ при любом } p \geqslant 1; \tag{2.3}$$

$$\|x\|_p \leqslant \|x\|_q \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \text{ если } p \geqslant q \geqslant 1; \tag{2.4}$$

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \text{если } q > p \geqslant 1; \tag{2.5}$$

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \text{ при любом } p \geqslant 1. \tag{2.6}$$

Прежде чем доказывать эти неравенства заметим, что они являются точными, т. е. для каждого из них можно указать такой ненулевой вектор x, на котором неравенство превращается в равенство. Именно, первые два неравенства обращаются в равенства, например, при $x = (1, 0, \ldots, 0)$, а последние два — при $x = (1, 1, \ldots, 1)$.

Приведем теперь соответствующие доказательства.

1) Пусть $\|x\|_\infty \equiv \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| = |x_i|$. Очевидно, что

$$|x_i| = (|x_i|^p)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

2) Выполнив очевидные выкладки, получим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q |x_k|^{p-q}\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_\infty^{(p-q)/p} \|x\|_q^{q/p},$$

откуда, используя (2.3), приходим к (2.4).

3) Представим $|x_k|^p$ в виде $|x_k|^p \cdot 1$ и используем для оценки $\|x\|_p$ неравенство Гёльдера с показателями $t = q/p > 1$ и $r = t/(t-1) = = q/(q-p)$. Получим, что $\|x\|_p =$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{(q-p)/(pq)} = n^{1/p-1/q}\|x\|_q.$$

Доказательство неравенства (2.6) читатель легко выполнит самостоятельно.

Упражнение. Показать, что для любого $x \in \mathbb{C}^n$ выполнено предельное соотношение $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$.

7. Норма вектора называется *абсолютной*, если она зависит только от модулей компонент вектора. Например, норма $\|\cdot\|_p$ при $p \geqslant 1$ абсолютна, норма на пространстве $\mathbb{C}^2$, определяемая равенством

$$\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 - \mathrm{Re}(x_1 x_2))^{1/2},$$

не абсолютна.

Пусть $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $0 \leqslant d_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x \in \mathbb{C}^n$. Тогда для любой абсолютной нормы $\|Dx\| \leqslant \|x\|$. Очевидно, достаточно убедиться в этом, когда $D = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, d_k, 1, \dots, 1)$, $d_k \in [0,1]$. Имеем

$$Dx = \frac{1}{2}(1-d_k)(x_1, x_2, \dots, -x_k, \dots, x_n) + \frac{1}{2}(1-d_k)x + d_k x,$$

следовательно, $\|Dx\| \leqslant \frac{1}{2}(1-d_k)\|x\| + \frac{1}{2}(1-d_k)\|x\| + d_k\|x\| = \|x\|$.

Норма на пространстве $\mathbb{C}^n$ называется *монотонной*, если из неравенств $|x_k| \leqslant |y_k|$, $k = 1, 2, \dots, n$, следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. Всякая монотонная норма является абсолютной. Действительно, если норма монотонна, то для любого вектора x выполнены неравенства

$$\|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\| \leqslant \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant \|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\|.$$

Обратно, всякая абсолютная норма монотонна. В самом деле, если для векторов x, y имеем, что $|x_k| \leqslant |y_k|$, $k = 1, 2, \dots, n$, то существует матрица $D = \mathrm{diag}(d_1 e^{i\varphi_1}, d_2 e^{i\varphi_2}, \dots, d_n e^{i\varphi_n})$[1], $0 \leqslant d_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, такая, что $x = Dy$. Используя теперь определение абсолютной нормы и неравенство, установленное в п. 7, нетрудно убедиться, что $\|x\| \leqslant \|y\|$.

§ 3. Теорема Хана — Банаха. Дуальные нормы

1. Будем говорить, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задан *вещественный линейный* функционал f, если каждому $x \in \mathbb{C}^n$ поставлено в соответствие однозначно вещественное число $f(x)$ и

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

[1] Напомним, что по определению $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Будем говорить, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задан *линейный* функционал f, если каждому $x \in \mathbb{C}^n$ поставлено в соответствие однозначно комплексное число $f(x)$ и это соответствие линейно, т. е.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

2. Если на пространстве $\mathbb{C}^n$ определена некоторая норма $\|\cdot\|$, то каждому линейному функционалу f (вещественному или комплексному) можно поставить в соответствие его *норму* $\|f\|$, полагая

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\ x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} |f(x)|. \tag{3.3}$$

Для каждого линейного функционала

$$\|f\| < \infty. \tag{3.4}$$

Докажем неравенство (3.4) применительно к вещественному случаю. Для комплексного случая рассуждения аналогичны и несколько проще. Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\|z\| = 1$. Будем считать, что $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Имеем

$$f(z) = f(\sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) i_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k f(i_k) + y_k f(ii_k)),$$

следовательно, $|f(z)| \leqslant \max(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |f(i_k)|, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |f(ii_k)|) \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$. Поскольку все нормы на пространстве $\mathbb{C}^n$ эквивалентны, отсюда вытекает, что $|f(z)| \leqslant c\|z\| = c$, где c — постоянная, зависящая только от n, а это и означает справедливость (3.4).

Теорема 1 (Хан — Банах). *Пусть L — подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, f — линейный функционал, определенный на L,*

$$\|f\| = \sup_{x\in L,\, \|x\|=1} |f(x)|. \tag{3.5}$$

Существует линейный функционал F, определенный на $\mathbb{C}^n$ такой, что $F(x) = f(x)$ для всех $x \in L$ и

$$\|F\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|=1} |F(x)| = \|f\|^{1)}. \tag{3.6}$$

---

1) Говорят, что F есть продолжение функционала f на все пространство $\mathbb{C}^n$ с сохранением нормы.

Доказательство. Предположим сначала, что f — вещественный линейный функционал. Естественно, мы считаем, что f — не нуль тождественный, поэтому без ограничения общности рассуждений можно полагать, что $\|f\| = 1$. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $L = \mathbb{C}^n$, и пусть $u \notin L$, а $L_1 \supset L$ — множество векторов вида $x + tu$, где $x \in L$, $t \in \mathbb{R}$. Вследствие неравенства треугольника для любых $x, y \in L$ имеем

$$f(x) - f(y) \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x + u\| + \|y + u\|,$$

поэтому $f(x) - \|x + u\| \leqslant f(y) + \|y + u\|$, и, значит существует число a такое. что

$$\sup_{x \in L}(f(x) - \|x + u\|) \leqslant a \leqslant \inf_{x \in L}(f(x) + \|x + u\|). \tag{3.7}$$

Определим функционал f_1 на L_1, полагая $f_1(x + tu) = f(x) - at$ (проверьте, что f_1 вещественный линейный функционал!). Из (3.7) следует, что $|f(x) - a| \leqslant \|x + u\|\ \forall x \in L$, значит,

$$|f_1(x + u)| \leqslant \|x + u\| \quad \forall x \in L.$$

При $t \neq 0$ получаем $f_1(x + tu) = tf_1(t^{-1}x + u)$, поэтому

$$|f_1(x + tu)| = |t||f_1(t^{-1}x + u)| \leqslant |t|\|t^{-1}x + u)\| = \|x + tu\|,$$

или $|f_1(x)| \leqslant \|x\|\ \forall x \in L_1$. Рассуждая точно так же, построим вещественный линейный функционал f_2, определенный на множестве векторов $L_2 \supset L_1$ вида $x + t(iu)$, где $x \in L_1$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что

$$|f_2(x)| \leqslant \|x\|\ \forall x \in L_2.$$

Нетрудно видеть, что множество L_2 совпадает, с подпространством пространства $\mathbb{C}^n$, натянутым на базис подпространства L и вектор u. Таким образом, построено продолжение вещественного линейного функционала f, заданного на L, на более широкое подпространство. Последовательно увеличивая размерность подпространств, мы построим вещественный линейный функционал F, определенный на всем пространстве $\mathbb{C}^n$, такой, что $F(x) = f(x)\ \forall x \in\ L$, и

$$|F(x)| \leqslant \|x\|\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Из последней оценки и определения (3.5) вытекает, что $\|F\| = \|f\|$.

Пусть теперь f — линейный (комплексный) функционал, определенный на L. Представим его в виде $f(x) = g(x) + ih(x)\ \forall\, x \in L$, где g, h — линейные вещественные функционалы, определенные на L. Вследствие линейности f получаем

$$f(ix) = g(ix) + ih(ix) = if(x) = ig(x) - h(x),$$

откуда $h(x) = -g(ix)$, поэтому $f(x) = g(x) - ig(ix)$. По условию $\|f\| = 1$, следовательно, $\|g\| \leqslant 1$. Используя конструкцию, описанную в предыдущей части доказательства, построим линейный вещественный функционал $G(x)$, определенный на всем пространстве $\mathbb{C}^n$, такой, что $G(x) = g(x)\ \forall\, x \in L$, $|G(x)| \leqslant \|x\|\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$. Пусть далее $F(x) = G(x) - iG(ix)\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$. Ясно, что $F(x) = f(x)\ \forall\, x \in L$. Покажем, что функционал F линеен. Для этого (в дополнение к предыдущему) достаточно установить, что $F(ix) = iF(x)\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$, а это непосредственно следует из определения. Действительно,

$$F(ix) = G(ix) + iG(x) = i(G(x) - iG(ix)).$$

Осталось убедится в справедливости равенства (3.6). Фиксируем произвольно $x \in \mathbb{C}^n$. Выберем вещественное число θ так, чтобы $F(x)e^{i\theta}$ было неотрицательно. Тогда

$$|F(x)| = F(e^{i\theta}x) = G(e^{i\theta}x) \leqslant \|e^{i\theta}x\| = \|x\|.$$

Вместе с (3.5) это неравенство гарантирует выполнение (3.6). □

Следствие 1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Существует линейный функционал F, определенный на $\mathbb{C}^n$, такой, что $F(x_0) = \|x_0\|$, $\|F\| = 1$.*

Доказательство. Ведем в рассмотрение подпространство L пространства $\mathbb{C}^n$ векторов вида $\alpha x_0, \alpha \in \mathbb{C}$. Определим на этом подпространстве линейный функционал f, полагая $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Тогда, очевидно, $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$. Осталось, пользуясь теоремой Хана — Банаха, продолжить функционал f на все пространство $\mathbb{C}^n$ с сохранением нормы. □

3. Пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как евклидово, определив на нем скалярное произведение (например, стандартное). По теореме Рисса (см. с. 188) всякому линейному функционалу f на $\mathbb{C}^n$ можно поставить в соответствие один и только один вектор $y \in \mathbb{C}^n$ такой что $f(x) = (x, y)\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$, и, наоборот, всякий вектор $y \in \mathbb{C}^n$ порождает линейный функционал: $f(x) = (x, y)\ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма на пространстве $\mathbb{C}^n$. Для каждого $y \in \mathbb{C}^n$ положим

$$\|y\|_* = \|f\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, x \neq 0} \frac{|(x, y)|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\| = 1} |(x, y)|. \tag{3.8}$$

Элементарно проверяется что соотношение (3.8) определяет норму на пространстве $\mathbb{C}^n$. Эта норма называется *дуальной* по отношению к исходной норме. Следующая теорема показывает, что понятие дуальности норм взаимно.

Теорема 2. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— произвольная норма пространстве* $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_*$ *— дуальная по отношению к ней норма. Тогда*

$$\|x\| = \sup_{y\in\mathbb{C}^n,\, \|y\|_*=1} |(x,y)|. \tag{3.9}$$

Доказательство. Непосредственно из определения дуальной нормы вытекает, что для любого не равного нулю $y \in \mathbb{C}^n$ справедливо неравенство $\|x\| \geqslant |(x,y)|/\|y\|_*$, причем в силу следствия 1 можно указать такой вектор y, для которого $\|x\| = |(x,y)|/\|y\|_*$. Эти рассуждения показывают, что равенство (3.9) выполнено. □

В ходе доказательства теоремы 2 мы установили, что справедливо

Следствие 2. *Для любых* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *выполнено неравенство*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|_*. \tag{3.10}$$

Неравенство (3.10) называют *обобщенным* неравенством Коши — Буняковского.

Пример. Нормы $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ при $p>1$, $1/p+1/q=1$ дуальны, если под скалярным произведением на $\mathbb{C}^n$ понимать стандартное скалярное произведение. В самом деле, для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ по неравенству Гёльдера (см. (1.2)) имеем $|(x,y)| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$. Пусть $x_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим $y_k = \rho_k^{p-1} e^{-i\varphi_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Элементарные вычисления показывают, что $|(x,y)| = \|x\|_p\|y\|_q$. Следовательно, $\|x\|_p = \sup\limits_{y\in\mathbb{C}^n,\, y\neq 0} |(x,y)|/\|y\|_q$.

Упражнение. Докажите, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ дуальны относительно стандартного скалярного произведения на $\mathbb{C}^n$.

§ 4. Нормы на пространстве матриц

1. Как и ранее, через $M_{m,n}$ будем обозначать множество всех прямоугольных матриц с m строками и n столбцами с комплексными, вообще говоря, элементами. При $m = n$ будем писать M_n. Определив на множестве $M_{m,n}$ обычным образом операции сложения двух матриц и умножения матрицы на число, мы превратим его в комплексное линейное пространство размерности mn. На этом линейном пространстве введем норму, т. е. поставим в соответствие каждой матрице $A \in M_{m,n}$ число $\|A\|$ так, что:

1) $\|A\| \geqslant 0$ для любой матрицы $A \in M_{m,n}$, равенства $\|A\| = 0$ и $A = 0$ эквивалентны;

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ для любой матрицы $A \in M_{m,n}$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$;

3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ для любых матриц $A, B \in M_{m,n}$.

Говорят в этом случае, что на пространстве матриц $M_{m,n}$ введена *векторная норма*. Понятно, что она обладает всеми свойствами, которые были изучены в предыдущем параграфе применительно к норме векторов.

Часто используют так называемые *согласованные нормы* на пространстве матриц. При этом дополнительно к 1)–3) должна выполняться аксиома

4) $\|AB\|_{mp} \leqslant \|A\|_{mn}\|B\|_{np}$ для любых матриц $A \in M_{mn}, B \in M_{np}$.

Здесь нижними индексами помечены нормы на соответствующих пространствах матриц.

Не всякие векторные нормы на пространстве матриц является согласованными. Пусть, например,

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \tag{4.1}$$

для $A \in M_n$. Очевидно, это — векторная норма, но она не является согласованной на M_n. Действительно, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } AA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

причем $\|A\| = 1$, $\|AA\| = 2$, и неравенство $\|AA\| \leqslant \|A\|\|A\|$ не выполнено.

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|$ — согласованная норма на M_n, $S \in M_n$ — произвольная невырожденная матрица. Покажите, что формула $\|A\|_{(s)} = \|SAS^{-1}\| \quad \forall A \in M_n$ определяет согласованная норму на M_n.

2. Приведем важные примеры согласованных матричных норм.

1) Положим $\|A\|_{l_1} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ для $A \in M_n$. Очевидно, три первых аксиомы нормы выполнены. Проверим аксиому 4). По определению

для $A, B \in M_n$ имеем

$$\|AB\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|,$$

следовательно,

$$\|AB\|_{l_1} \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|.$$

Добавляя к сумме в правой части последнего неравенства неотрицательные слагаемые, усилим неравенство:

$$\|AB\|_{l_1} \leqslant \sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}||b_{mj}|.$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}||b_{mj}| = \sum_{i,k}^{n} |a_{ik}| \sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}| = \|A\|_{l_1} \|B\|_{l_1}.$$

2) Положим $\|A\|_E = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ для $A \in M_{m,n}$. Эта норма порождается естественным скалярным произведением на пространстве $\mathbb{C}^{mn}$, поэтому три первых аксиомы для нее выполняются. Норму $\|A\|_E$ обычно называют *евклидовой* нормой или нормой *Фробениуса*[1)]. Докажем справедливость четвертой аксиомы для этой нормы, опираясь на неравенство Коши (см. с. 319). Пусть $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,p}$. Тогда

$$\|AB\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^{m,p} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{m,p} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 =$$
$$= \sum_{i,k=1}^{m,n} |a_{ik}|^2 \sum_{k,j=1}^{n,p} |b_{kj}|^2 = \|A\|_E^2 \|B\|_E^2.$$

Упражнение. Доказать, что норма $\|A\| = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$ является согласованной на пространстве M_n.

[1)] Фердинанд Георг Фробениус (Ferdinand Georg Frobenius; 1849 — 1917) — немецкий математик.

3. Пусть $A \in M_{m,n}$, $\| \cdot \|_{(m)}$, $\| \cdot \|_{(n)}$ — некоторые нормы на пространствах $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$, соответственно. Тогда существует неотрицательное число N_A такое, что

$$\|Ax\|_{(m)} \leqslant N_A \|x\|_{(n)} \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n. \tag{4.2}$$

В самом деле, поскольку всякая норма $\| \cdot \|$ на $\mathbb{C}^n$ эквивалентна норме $\| \cdot \|_\infty$, то $c_1 \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_{(n)}$ $\forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_{(m)} \leqslant c_2 \|x\|_\infty$ $\forall\, x \in \mathbb{C}^m$, где c_1, c_2 — положительные не зависящие от x постоянные. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|Ax\|_{(m)} \leqslant c_2 \|Ax\|_\infty = c_2 \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leqslant c_2 \|x\|_\infty \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant$$
$$\leqslant (c_2/c_1) \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_{(n)}.$$

Обозначим через $\nu(A)$ точную нижнюю грань всех чисел N_A, для которых выполнено (4.2). Очевидно, что можно дать и другое, эквивалентное, определение функции ν на пространстве $M_{m,n}$:

$$\nu(A) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_n = 1} \|Ax\|_m. \tag{4.3}$$

Понятно, что

$$\|Ax\|_m \leqslant \nu(A) \|x\|_n \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Упражнение. Докажите, что для функции ν выполнены все аксиомы согласованной матричной нормы.

Матричную норму, сконструированную указанным способом, называют *подчиненной* норме векторов.

Упражнение. Докажите, что при любом способе определения норм на пространствах $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ существует вектор $x^0 \in \mathbb{C}^n$ такой, что $\|x^0\|_n = 1$ и

$$\|Ax^0\|_m = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_n = 1} \|Ax\|_m,$$

т. е. в определении (4.3) символ точной верхней грани можно заменить на символ максимума.

Нетрудно убедиться, что при любом способе задания нормы на $\mathbb{C}^n$ подчиненная норма единичной матрицы (порядка n) равна единице.

Не всякая норма, определенная на M_n, подчинена какой либо норме векторов. Например, норма Фробениуса не подчинена никакой норме векторов, так как $\|I\|_E = \sqrt{n}$. Норма (4.1) также не является операторной, так как она не согласованная норма на M_n

4. Приведем примеры вычисления подчиненных матричных норм.

1) Пусть норма на пространстве $\mathbb{C}^n$ определена, как в п. 2, с. 320, равенством $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. Тогда подчиненная норма матрицы есть

$$\|A\|_1 = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$$

Нетрудно видеть, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_1 = 1$,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Предположим, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, и положим, что $\tilde{x}$ есть вектор естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$ такой, что $\tilde{x}_k = 1$, а все остальные координаты вектора $\tilde{x}$ равны нулю. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_1 = 1$, а $\|A\tilde{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$. Таким образом, доказано, что

$$\|A\|_1 = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\, \|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Поэтому норму $\|A\|_1$ часто называют *столбцовой* нормой матрицы A.

2) Определим норму на $\mathbb{C}^n$ равенством $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Тогда для любого $x \in \mathbb{C}^n$ такого, что $\|x\|_\infty = 1$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Положим, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ и определим вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ при помощи соотношений

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \bar{a}_{kj}/|a_{kj}|, & a_{kj} \neq 0, \\ 1, & a_{kj} = 0, \end{cases}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, черта, как обычно, есть знак комплексного сопряжения. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$, причем элементарные выкладки показывают, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|,$$

а для $i = k$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|,$$

т. е. $\|A\tilde{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Таким образом,

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Норму $\|A\|_\infty$ часто называют *строчной* нормой матрицы A.

3) Введем на пространствах $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ норму, согласованную со стандартным скалярным произведением, т. е. положим $\|x\|_2 = |x|$. Для любого $x \in \mathbb{C}^n$ имеем $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$. Матрица A^*A эрмитова и неотрицательна. Поэтому существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $A^*Ae^k = \rho_k^2 e^k$, $\rho_k = \rho_k(A)$ — неотрицательные числа, сингулярные числа матрицы A, $k = 1, 2, \ldots, n$ (см. по этому поводу п. 2, с. 268, и приводимые там ссылки). Представим вектор x в виде разложения по базису $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$ и предположим, что $\|x\|_2 = 1$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 1$, $\|Ax\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k^2 |\xi_k|^2 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k^2$. Пусть $\rho_j = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k$. Полагая $\tilde{x} = e^j$, получим $\|A\tilde{x}\|^2 = \rho_j^2$. Таким образом, доказано, что $\max\limits_{x \in \mathbb{C}^n,\, \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k$, т. е.

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k(A). \tag{4.4}$$

Отметим следующий интересный для многих приложений частный случай. Будем считать, что матрица $A \in M_n$ эрмитова, т. е. $A = A^*$. Тогда, очевидно $\rho_k(A) = |\lambda_k(A)|$, $k = 1, 2, \dots, n$, где через $\lambda_k(A)$ обозначены собственные числа матрицы A. Таким образом, для любой эрмитовой матрицы

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A)| = \max_{x \in \mathbb{C}^n,\, x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} = \rho(A), \tag{4.5}$$

где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A (см. с. 168). Норму $\|A\|_2$ в связи с этим часто называют *спектральной*.

Упражнения.

1) Докажите, что

$$\|A^+\|_2 = 1/\rho_r \tag{4.6}$$

для любой матрицы A. Здесь ρ_r — минимальное сингулярное число матрицы A (см. с 274).

2) Докажите, что если матрица A обратима, то

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

(см. с. 272).

Замечание 1. В связи с этим часто применяют обозначение $\operatorname{cond}(A) = \operatorname{cond}_2(A)$.

5. Вычисление сингулярных чисел матрицы, вообще говоря, — довольно сложная задача. Поэтому полезно получить некоторую оценку величины $\|A\|_2$, просто выражаемую через элементы матрицы A. Докажем, что для любой матрицы $A \in M_{mn}$ справедливо неравенство $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_E$. С этой целью заметим, что элементарные выкладки приводят к равенству[1] $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum\limits_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2$. С другой стороны, $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k^2(A) \geqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k^2(A)$, следовательно,

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_k(A) \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \|A\|_E. \tag{4.7}$$

Упражнение. Докажите, что для любой матрицы A: 1) нормы $\|A\|_2$ и $\|A\|_E$ не меняются при умножении A (слева или справа) на любую унитарную матрицу; 2) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

[1] Здесь след матрицы вычисляется как сумма элементов ее главной диагонали см. с. 176.

6. Знание согласованной нормы матрицы оказывается, в частности, полезным при оценке ее спектрального радиуса, а именно, для любой квадратной матрицы A справедливо неравенство

$$\rho(A) \leqslant \|A\|, \tag{4.8}$$

где $\|A\|$ — любая согласованая норма матрицы A. В самом деле, пусть λ, x — собственная пара матрицы A, а X — квадратная матрица, столбцами (одинаковыми) которой служит вектор x. Тогда, очевидно, $AX = \lambda X$ и

$$|\lambda|\|X\| = \|AX\| \leqslant \|A\|\|X\|$$

для любой согласованной матричной нормы, причем $\|X\| \neq 0$, так как вектор x по определению собственного вектора не равен нулю. Таким образом, для любого собственного числа λ матрицы A верно неравенство $|\lambda| \leqslant \ \|A\|$, а это эквивалентно (4.8).

Из оценки (4.8) очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Если некоторая согласованная норма матрицы $A \in M_n$ меньше единицы, то A — сходящаяся матрица.*

Теорема 1. *Для любой согласованной нормы, определенной на пространстве M_n, и для любой матрицы $A \in M_n$ справедливо равенство*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Если λ — собственное число матрицы A, то λ^k для любого целого положительного k есть собственное число матрицы A^k. Поэтому, применяя неравенство (4.8), получим $(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leqslant \|A^k\|$, следовательно, $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}$ для любого целого положительного k. Далее, пусть ε — произвольное положительное число. Тогда матрица $(\rho(A) + \varepsilon)^{-1}A$ сходящаяся, так как все ее собственные числа по модулю меньше единицы. Следовательно, $(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку любая норма — непрерывная функция (см. п. 3, с. с. 327), то $\|(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда вытекает, что можно указать такое $N > 0$, что для всех $k \geqslant N$ выполнено неравенство $\|(\rho(A) + \varepsilon)^{-k}A^k\| \leqslant 1$, или $\|A^k\|^{1/k} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших k справедливы оценки $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$, а это утверждение эквивалентно (4.9). □

Упражнение. Опираясь на формулу (4.9), докажите, что

$$\rho(A + B) \leqslant \rho(A) + \rho(B), \quad \rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$$

для любых перестановочных матриц A и B.

Теорема 2. *Для любой матрицы* $A \in M_n$

$$\rho(A) = \inf_{S \in M_n,\, \det(S) \neq 0} \|SAS^{-1}\|_1 = \inf_{S \in M_n,\, \det(S) \neq 0} \|SAS^{-1}\|_\infty. \qquad (4.10)$$

Доказательство. Проведем рассуждения применительно к норме $\|\cdot\|_1$. Для нормы $\|\cdot\|_\infty$ все рассуждения, фактически, дословно повторяются. Матрицы A и SAS^{-1} подобны. Поэтому их спектры совпадают, следовательно, $\rho(A) = \rho(SAS^{-1})$. Отсюда, используя (4.8), получаем, что

$$\rho(A) \leqslant \|SAS^{-1}\|_1 \quad \forall\, S \in M_n,\ \det(S) \neq 0. \qquad (4.11)$$

По теореме Шура, с. 182, существует унитарная матрица U такая, что

$$U^*AU = T, \qquad (4.12)$$

где T — верхняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — все собственные числа матрицы A. Пусть

$$D = \operatorname{diag}(d, d^2, \ldots, d^n),$$

где d — положительное число. Положим

$$Q = DTD^{-1}. \qquad (4.13)$$

Нетрудно убедиться, что

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d^{-1}t_{12} & d^{-2}t_{13} & \ldots & d^{-(n-2)}t_{1,n-1} & d^{-(n-1)}t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & d^{-1}t_{23} & \ldots & d^{-(n-3)}t_{2,n-1} & d^{-(n-2)}t_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & d^{-(n-4)}t_{3,n-1} & d^{-(n-3)}t_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & d^{-1}t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

Фиксируем теперь некоторое положительное число ε. Выбирая d достаточно большим, можно добиться того, что сумма модулей элементов каждого столбца матрицы Q будет не больше $\rho(A) + \varepsilon$. Вследствие (4.12), (4.13) получаем $SAS^{-1} = Q$, где $S = DU^{-1}$, причем $\|SAS^{-1}\|_1 = \|Q\|_1 \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. Поскольку выполнения последнего неравенства можно добиться за счет выбора d для произвольного положительного ε, то вместе с (4.11) это обеспечивает справедливость первого равенства в (4.10). $\square$

Упражнения.

1) Как следствие теоремы 2 докажите, что для любой матрицы $A \in M_n$
$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|. \tag{4.15}$$
Поясним, что здесь точная нижняя грань берется по всем согласованным нормам на M_n.

2) Докажите, что в равенстве (4.15) символ точной нижней грани, вообще говоря, нельзя заменить на символ минимума.

7. В заключение этого параграфа остановимся на важном классе норм на пространстве матриц, так называемых *нормах Фань Цзы*

Теорема 3. *Пусть $A \in M_{m,n}$, $\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A), \ldots, \sigma_q(A) \geqslant 0$, $q = \min(m,n)$, — сингулярные числа матрицы A (включаются и нули). Тогда $\|A\|_{k,p} = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_j^p(A)\right)^{1/p}$, где $1 \leqslant k \leqslant q$, $p > 1$ — фиксированные числа, есть норма на пространстве $M_{m,n}$. При $m = n$ норма $\|A\|_{k,p}$ является согласованной.*

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждаются лишь неравенства
$$\|A+B\|_{k,p} \leqslant \|A\|_{k,p} + \|B\|_{k,p} \quad \forall\, A, B \in M_{m,n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant q,\ p > 1, \tag{4.16}$$
$$\|AB\|_{k,p} \leqslant \|A\|_{k,p}\|B\|_{k,p} \quad \forall\, A, B \in M_n,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ p > 1. \tag{4.17}$$
Для обоснования (4.16) достаточно воспользоваться теоремой 1, с. 280, затем следствием 1, с. 278, и, наконец, неравенством Минковского, с. 319. Справедливость (4.17) сразу же вытекает из следствия 1, с. 281. □

Норму $\|A\|_{k,p}$ принято называть нормой Фань Цзы.

Замечание 2. Поскольку для любой матрицы A и любых унитарных матриц U, V соответствующих размеров все сингулярные числа матриц A и UAV совпадают, то можно сказать, что норма $\|A\|_{k,p}$ унитарно инвариантна. При $k = 1$ получаем спектральную норму, при $k = q$, $p = 2$ норму Фробениуса. Для единичной матрицы при любом $k > 1$ норма Фань Цзы больше единицы и потому она не является операторной. В соответствии с теоремой 6, с. 283, нормы $\|A\|_{k,1} = \sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_j(A)$, $1 \leqslant k \leqslant q$, могут быть вычислены по формулам (5.9), (5.10), с. 283.

§ 5. Раствор подпространств (пары проекторов)

1. Пусть L, M — подпространства $\mathbb{C}^n$, P_L, P_M — ортогональные проекторы $\mathbb{C}^n$ на L, M, соответственно. Величина

$$\vartheta(L, M) = \|P_L - P_M\|_2$$

называется *раствором подпространств* L, M. Непосредственно из определения следует, что функция ϑ обладает свойством расстояния (метрики):

1) $\vartheta(L, M) \geqslant 0$, равенства $\vartheta(L, M) = 0$ и $L = M$ эквивалентны;

2) $\vartheta(L, M) = \vartheta(M, L)$;

3) $\vartheta(L, M) \leqslant \vartheta(L, N) + \vartheta(N, M)$ для любых подпространств L, M, N пространства $\mathbb{C}^n$.

2. В дальнейшем оказываются полезными следующие величины:

$$d_{L,M} = \max_{x \in L, \|x\|_2 = 1} \|x - P_M x\|_2, \quad \sigma_{L,M} = \min_{x \in L, \|x\|_2 = 1} \|P_M x\|_2.$$

Они связаны равенством

$$d_{L,M}^2 = 1 - \sigma_{L,M}^2. \tag{5.1}$$

Действительно, используя соотношения $P_M = P_M^*$, $P_M = P_M^2$ (см. с. 140, с. 195), можем написать, что

$$\|x - P_M x\|_2^2 = (x, x) + (P_M x, P_M x) - (x, P_M x) - (P_M x, x) =$$
$$= (x, x) + (P_M x, P_M x) - 2(P_M x, P_M x) = \|x\|_2^2 - \|P_M x\|_2^2.$$

Поэтому $\max\limits_{x \in L,\, \|x\|_2 = 1} \|x - P_M x\|_2^2 = 1 - \min\limits_{x \in L,\, \|x\|_2 = 1} \|P_M x\|_2^2$.

3. Величину $d_{L,M}$ можно вычислить по формуле

$$d_{L,M} = \|(I - P_M)P_L\|_2.$$

В самом деле, по определению

$$\|(I - P_M)P_L\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\, x \neq 0} \frac{\|(I - P_M)P_L x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\|(I - P_M)P_L x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \frac{\|(I - P_M)P_L x\|_2}{\|P_L x\|_2},$$

если $P_L x \neq 0$. Поэтому

$$\|(I-P_M)P_L\|_2 \leqslant \sup_{y\in L,\, y\neq 0} \frac{\|(I-P_M)y\|_2}{\|y\|_2} = d_{L,M}.$$

С другой стороны, для $x\in L$, $x\neq 0$,

$$\frac{\|(I-P_M)x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|(I-P_M)P_L x\|_2}{\|x\|_2},$$

следовательно,

$$d_{L,M} = \sup_{x\in L,\, x\neq 0} \frac{\|(I-P_M)P_L x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sup_{x\in \mathbb{C}^n,\, x\neq 0} \frac{\|(I-P_M)P_L x\|_2}{\|x\|_2} = \\ = \|(I-P_M)P_L\|_2.$$

Теорема 1. *Для любых подпространств $L, M \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство*

$$\|P_L - P_M\|_2 = \max(d_{L,M}, d_{M,L}).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P_L - P_M = P_L(I-P_M) - (I-P_L)P_M.$$

Поэтому, используя равенство $P_L(I-P_L)=0$ (см. с. 140), для любого $x\in\mathbb{C}^n$ получим

$$\begin{aligned}\|(P_L-P_M)x\|_2^2 &= \|P_L(I-P_M)x\|_2^2 + \|(I-P_L)P_M x\|_2^2 = \\ &= \|P_L(I-P_M)(I-P_M)x\|_2^2 + \|(I-P_L)P_M P_M x\|_2^2 \leqslant \\ &\leqslant \|P_L(I-P_M)\|_2^2\|(I-P_M)x\|_2^2 + \|(I-P_L)P_M\|_2^2\|P_M x\|_2^2 \leqslant \\ &\leqslant \max(\|P_L(I-P_M)\|_2^2, \|(I-P_L)P_M\|_2^2)(\|(I-P_M)x\|_2^2 + \|P_M x\|_2^2) = \\ &= \max(\|P_L(I-P_M)\|_2^2, \|(I-P_L)P_M\|_2^2)\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\|P_L(I-P_M)\|_2 = \|(P_L(I-P_M))^*\|_2 = \|(I-P_M))P_L\|_2$$

(см. упражнение на с. 333), значит, $\|P_L-P_M\|_2 \leqslant \max(d_{L,M}, d_{M,L})$. Справедливо и обратное неравенство. Действительно,

$$(I-P_L)P_M = P_M - P_L P_M = P_M^2 - P_L P_M = (P_M - P_L)P_M,$$

поэтому $\|(I-P_L)P_M\|_2 \leqslant \|P_L - P_M\|_2$. Аналогично,

$$\|(I-P_M)P_L\|_2 \leqslant \|P_L-P_M\|_2. \ \square$$

Укажем на очевидное

Следствие 1. *Для любых подпространств* $L, M \in \mathbb{C}^n$ *справедливы неравенства*
$$0 \leqslant \vartheta(L, M) \leqslant 1.$$

Теорема 2. *Если* $\vartheta(L, M) < 1$*, то* $\dim L = \dim M$.

Доказательство. Вследствие теоремы 3, с. 144, достаточно установить, что оператор P_L отображает M на L взаимно однозначно. По условию теоремы $\|P_L - P_M\|_2 < 1$, значит, оператор $I - (P_L - P_M)$ имеет обратный (см. теорему 2, с. 297, и следствие 1, с. 334), поэтому $\mathrm{Im}(I - (P_L - P_M)) = \mathbb{C}^n$. Иными словами, $(I - (P_L - P_M))\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$. Действуя на обе части этого равенства оператором P_L, получим, что $P_L P_M \mathbb{C}^n = L$, значит, $P_L M = L$, т. е. оператор P_L отображает пространство M на все L. Осталось показать, что это отображение взаимно однозначно. Если предположить противное, то найдется ненулевой вектор $x_0 \in M$ такой, что $P_L x_0 = 0$. Тогда $x_0 = P_M x_0 - P_L x_0$, откуда получаем неравенство $\|x_0\|_2 \leqslant \|P_M - P_L\|_2 \|x_0\|_2 < \|x_0\|_2$, которое не может быть выполнено. □

Теорема 3. *Если* $\dim L = \dim M$*, то* $d_{L,M} = d_{M,L}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\sigma_{L,M} = 0$, т. е. существует вектор $x \in L$, $\|x\|_2 = 1$, такой, что $P_M x = 0$ (иными словами, $x \in M^\perp$). Покажем, что тогда и $\sigma_{M,L} = 0$, т. е. найдется вектор $y \in M$, $\|y\|_2 = 1$ такой, что $P_L y = 0$. Обозначим через $L_x^\perp$ ортогональное дополнение одномерного подпространства, натянутого на x, до L. Очевидно, что $\dim L_x^\perp = \dim L - 1$. Пусть, далее, $(L_x^\perp)^\perp$ — ортогональное дополнение $L_x^\perp$ до $\mathbb{C}^n$. Тогда
$$\dim(L_x^\perp)^\perp = n - \dim L + 1, \quad \dim(L_x^\perp)^\perp + \dim M = n + 1.$$
Следовательно, существует вектор y, $\|y\|_2 = 1$, принадлежащий $(L_x^\perp)^\perp \cap M$. Поскольку $x \in M^\perp$, то y ортогонален x, т. е. $y \in L^\perp$, поэтому $P_L y = 0$. Заметим теперь, что если $\sigma_{L,M}, \sigma_{M,L} = 0$, то $d_{L,M} = d_{M,L} = 1$ (см. (5.1)). Таким образом, можно считать далее, что $\sigma_{L,M} > 0$. Из определения $\sigma_{L,M}$ вытекает существование вектора $x \in L$, $\|x\|_2 = 1$ такого, что $\|P_M x\|_2^2 = \sigma_{L,M}^2$. Покажем, что $P_M x - \sigma_{L,M}^2 x \in L^\perp$. Для этого, используя определение $\sigma_{L,M}$, напишем, что
$$(P_M(x + v), x + v) \geqslant \sigma_{L,M}^2 (x + v, x + v) \quad \forall\, v \in L.$$
В результате элементарных выкладок отсюда получаем, что
$$(1 - \sigma_{L,M}^2)(v, v) + (P_M x - \sigma_{L,M}^2 x, v) + (v, P_M x - \sigma_{L,M}^2 x) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in L.$$

Заменив v на tv, $t \in \mathbb{R}$, будем иметь, что

$$t^2(1 - \sigma_{L,M}^2)(v, v) + t(P_M x - \sigma_{L,M}^2 x, v) + t(v, P_M x - \sigma_{L,M}^2 x) \geqslant 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) вытекает, что $\mathrm{Re}(P_M x - \sigma_{L,M}^2 x, v) = 0$. Заменив v на iv в (5.2), получим, что $\mathrm{Im}(P_M x - \sigma_{L,M}^2 x, v) = 0$. Поэтому $(P_M x - \sigma_{L,M}^2 x, v) = 0$ для любого $v \in L$, т. е. $P_M x - \sigma_{L,M}^2 x \in L^{\perp}$, следовательно,

$$P_L P_M x - \sigma_{L,M}^2 P_L x = P_L P_M x - \sigma_{L,M}^2 x = 0.$$

Пусть $y = \sigma_{L,M}^{-1} P_M x$. Тогда $y \in M$,

$$\|y\|_2 = 1, \; P_L y = \sigma_{L,M} x, \; \|P_L y\|_2 = \sigma_{L,M},$$

значит, $\sigma_{M,L} \leqslant \sigma_{L,M}$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\sigma_{L,M} \leqslant \sigma_{M,L}$. Таким образом, получаем, что $\sigma_{L,M} = \sigma_{M,L}$. $\square$

Следствие 2. *Если* $\dim L = \dim M$, *то*

$$\vartheta(L, M) = \|P_L - P_M\|_2 = \|(I - P_M)P_L\|_2 = \|(I - P_L)P_M\|_2.$$

Упражнение. Проанализируйте геометрический смысл функции ϑ и доказанных в этом пункте утверждений применительно к подпространствам трехмерного евклидова пространства.

Глава 18

Элементы теории возмущений

§ 1. Задача на собственные значения для эрмитовой матрицы

1. Пусть A, B — эрмитовы матрицы порядка n. Записав очевидное равенство $A = B + (A - B)$ и воспользовавшись неравенствами (12.1), с. 210, а затем неравенством (4.8), с. 334, получим, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A - B)| \tag{1.1}$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leqslant \|A - B\|, \tag{1.2}$$

где $\|\cdot\|$ — любая согласованная матричная норма. Выбирая, например, в качестве нормы матрицы норму Фробениуса (см. с. 329), получим, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Неравенства (1.1)–(1.3) обычно называют неравенствами Вейля.

Полагая, что $|a_{ij} - b_{ij}| \leqslant \varepsilon$, будем иметь, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leqslant n\varepsilon. \tag{1.4}$$

Нетрудно убедиться, что если $A = I$, а все элементы матрицы E равны $\varepsilon > 0$, то $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A) - \lambda_k(A + E)| = n\varepsilon$, т. е. оценка (1.3) неулучшаема на множестве всех эрмитовых матриц.

2. В следующей теореме рассматриваются специальные возмущения эрмитовой матрицы.

Теорема 1 («относительная» теорема Вейля). *Пусть*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$$

есть собственные числа эрмитовой матрицы $A \in M_n$,

$$\tilde\lambda_1 \geqslant \tilde\lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \tilde\lambda_n$$

есть собственные числа матрицы X^*AX, где X — произвольная невырожденная матрица. Тогда

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leqslant \lambda_i \|I - X^*X\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

где $\|\cdot\|$ — любая согласованная матричная норма.

Доказательство. Фиксируем целое $i \in [1, n]$ и запишем очевидное равенство $X^*(A - \lambda_i I)X = H + F$, где $H = X^*AX - \lambda_i I$, $F = \lambda_i(I - X^*X)$. Легко проверяется, что i-м собственным числом матрицы $A - \lambda_i I$ будет нуль. Используя теорему Сильвестра, с. 205, нетрудно убедиться, что i-м собственным числом матрицы $X^*(A - \lambda_i I)X$ также будет нуль. Матрица H в качестве i-го собственного числа имеет $\tilde{\lambda}_i - \lambda_i$, поэтому, применяя неравенство (1.2), получим (1.5). $\square$

Теорема 1 показывает, что при замене матрицы A на X^*AX с невырожденной матрицей X нулевые собственные числа сохраняются, а для ненулевых гарантируется оценка относительной погрешности.

$$\frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{|\lambda_i|} \leqslant \|I - X^*X\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Следующая теорема описывает, как влияют возмущения эрмитовой матрицы на ее собственные подпространства.

Теорема 2. *Пусть A, B — эрмитовы матрицы порядка n, $\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$, $\lambda_1(B) \geqslant \lambda_2(B) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(B)$ — их собственные числа. Фиксируем некоторое целое $k \in [1, n]$ и пусть $\lambda_k(A)$ имеет кратность r, так что $\lambda_{k-1}(A) > \lambda_k(A) > \lambda_{k+r}(A)$*[1]*. Пусть, далее, L_k — собственное подпространство (размерности r) матрицы A, отвечающее $\lambda_k(A)$, M_k — подпространство размерности r пространства $\mathbb{C}^n$, натянутое на ортогональные собственные векторы матрицы B, отвечающие ее собственным числам $\lambda_k(B)$, $\lambda_{k+1}(B)$, $\ldots$, $\lambda_{k+r-1}(B)$. Пусть*

$$\operatorname{gap}_k(A) = \min(\lambda_{k-1}(A) - \lambda_k(A), \lambda_k(A) - \lambda_{k+r}(A)),$$

$$\|A - B\|_2 < \operatorname{gap}_k(A)/2. \tag{1.6}$$

Тогда

$$\vartheta(L_k, M_k) \leqslant \frac{\|A - B\|_2}{\operatorname{gap}_k(A) - \|A - B\|_2} < 1. \tag{1.7}$$

[1]При $k = 1$ и $k = n$ эти неравенства очевидным образом модифицируются.

Доказательство. Пусть $x \in L_k$, $\|x\|_2 = 1$. Представим вектор x в виде ортогонального разложения: $x = P_{M_k}x + y$, где $y \in M_k^{\perp}$. Тогда $\|x - P_{M_k}x\|_2 = \|y\|_2$. Запишем очевидное неравенство

$$|((A-B)x, y)| \leqslant \|A-B\|_2\|y\|_2. \tag{1.8}$$

С другой стороны, по определению вектора x имеем

$$((A-B)x, y) = \lambda_k(A)(x, y) - (Bx, y).$$

Заметим теперь, что $(x, y) = (y, y)$, $(Bx, y) = (x, By) = (y, By)$. Мы учли здесь, что $B = B^*$, а подпространство $M_k^{\perp}$ инвариантно относительно оператора B. Следовательно,

$$((A-B)x, y) = \lambda_k(A)(y, y) - (By, y). \tag{1.9}$$

При $y \neq 0$ получаем, что

$$\lambda_k(A)(y, y) - (By, y) = \left(\lambda_k(A) - \frac{(By, y)}{(y, y)}\right)\|y\|_2^2. \tag{1.10}$$

По определению подпространства $M_k^{\perp}$

$$(By, y)/(y, y) \geqslant \lambda_{k-1}(B), \quad (By, y)/(y, y) \leqslant \lambda_{k+r}(B)$$

(см. лемму 1, с. 207). Отсюда вследствие неравенства (1.2) и условия (2.3) будем иметь, что

$$|\lambda_k(A) - (By, y)/(y, y)| \geqslant \mathrm{gap}_k(A) - \|A-B\|_2. \tag{1.11}$$

Из (2.3), (1.8)–(1.11) очевидным образом вытекают неравенства

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{\|A-B\|_2}{\mathrm{gap}_k(A) - \|A-B\|_2} < 1, \tag{1.12}$$

которые и означают справедливость (2.4). □

Иногда более полезной оказывается оценка, которую дает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и кратность собственного числа $\lambda_k(A)$ равна единице. Тогда*

$$\vartheta(L_k, M_k)\sqrt{1 - \vartheta^2(L_k, M_k)} \leqslant \frac{\|A-B\|}{\mathrm{gap}_k(A)}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $x \in M_k$, $\|x\|_2 = 1$. Представим вектор x в виде ортогонального разложения: $x = \tilde{x} + y$, где $\tilde{x} = P_{L_k}x$, $y \in L_k^{\perp}$. Из оценки (1.12) вытекает, что

$$\|\tilde{x}\| = \sqrt{1 - \|y\|^2} > 0. \tag{1.14}$$

Полагая $B = A + E$, можем написать

$$(A + E)(\tilde{x} + y) = \lambda_k(B)(\tilde{x} + y). \tag{1.15}$$

Кроме того, очевидно, $A\tilde{x} = \lambda_k(A)\tilde{x}$. Вычитая почленно эти равенства и выполняя элементарные преобразования, получим

$$(A - \lambda_k(A)I)y = (\eta I - E)x, \tag{1.16}$$

где $\eta = \lambda_k(B) - \lambda_k(A)$. Умножим обе части равенства (1.15) скалярно на $\tilde{x}$ и учтем, что $(A\tilde{x}, \tilde{x}) = \lambda_k(A)(\tilde{x}, \tilde{x})$, $(y, \tilde{x}) = 0$, $(Ay, \tilde{x}) = 0$, так как $y, Ay \in L_k^{\perp}$. В результате, получим, что

$$\eta = (Ex, \tilde{x})/\|\tilde{x}\|_2^2. \tag{1.17}$$

Умножим теперь обе части равенства (1.16) скалярно на y и учтем (1.17). После элементарных преобразований будем иметь, что

$$((A - \lambda_k(A)I)y, y) = (Ex, ((y, y)/\|\tilde{x}\|_2^2)\tilde{x} - y). \tag{1.18}$$

Как показано в ходе доказательства теоремы 2,

$$((A - \lambda_k(A)I)y, y) \geqslant \operatorname{gap}_k(A)\|y\|_2^2. \tag{1.19}$$

Векторы $\tilde{x}, y$ ортогональны, поэтому

$$\begin{aligned} \|((y, y)/\|\tilde{x}\|_2^2)\tilde{x} - y\|_2 = (|(y, y)|^2/\|\tilde{x}\|_2^2 + \|y\|_2^2)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant (\|y\|_2^2/\|\tilde{x}\|_2^2 + 1)^{1/2}\|y\|_2 = \|y\|_2/\|\tilde{x}\|_2. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Из (1.18)–(1.20) и (1.14), очевидно, вытекает (1.13). □

Замечание 1. В вещественном случае для одномерных подпространств $\vartheta(L_k, M_k) = \sin\alpha$, где α — угол между подпространствами L_k и M_k (докажите!). Поэтому оценку (1.13) часто записывают так:

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \|A - B\|/\operatorname{gap}_k(A).$$

4. Полученные до сих пор в этом параграфе оценки можно рассматривать как априорные. По известным возмущениям матрицы они позволяют судить о возмущениях ее собственных чисел и собственных векторов. В некоторых ситуациях более полезными оказываются так называемые *апостериорные* оценки, которые дают представление о погрешности на основе использования результатов уже выполненных вычислений. Итак, пусть нормированный вектор x рассматривается как приближение к нормированному собственному вектору матрицы A, а α — приближение к соответствующему собственному числу. Достигаемую при этом точность естественно характеризовать вектором невязки $r(x,\alpha) = Ax - \alpha x$. Если A — эрмитова матрица, то, как нетрудно убедиться,

$$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|r(x,\alpha)\|_2 = \|Ax - \rho(x)x\|_2,$$

где $\rho(x) = (Ax, x)$[1]. Это означает, что величина (Ax, x) дает в определенном смысле наилучшее приближение к собственному числу эрмитовой матрицы A, если известено приближение к соответствующему собственному вектору.

5. Следующая теорема показывает, что *невязка*

$$r(x) = Ax - \rho(x)x,$$

действительно, может быть использована для оценки точности приближений при решении спектральных задач.

Теорема 3. *Пусть $A \in M_n$ — эрмитова матрица, $\lambda = \lambda_i$ — ее простое собственное число, u — соответствующий нормированный собственный вектор,*

$$x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_2 = 1,\ \rho = (Ax, x) \neq \lambda,\ |\rho - \lambda| < \mathrm{gap}_k(A),\ r = Ax - \rho x,$$

L, M — одномерные подпространства $\mathbb{C}^n$, натянутые на u, x, соответственно, $\gamma = \min\limits_{\mu\in\sigma(A),\ \mu\neq\lambda} |\rho - \mu|$. Тогда

$$\vartheta(L, M) \leqslant \|r\|_2/\gamma, \quad |\lambda - \rho| \leqslant \|r\|_2^2/\gamma. \tag{1.21}$$

Доказательство. Представим вектор x в виде ортогонального разложения $x = \tilde{x} + y$, $\tilde{x} \in L$, $y \in L^{\perp}$. Тогда $r = (\lambda - \rho)\tilde{x} + Ay - \rho y$. Используя принадлежность Ay подпространству $L^{\perp}$, получим, что

$$\|r\|_2^2 = (\lambda - \rho)^2\|\tilde{x}\|_2^2 + \|Ay - \rho y\|_2^2. \tag{1.22}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|Ay - \rho y\|_2^2 \geqslant \gamma^2\|y\|_2^2. \tag{1.23}$$

Из (1.22), (1.23) сразу же следует первая оценка в (1.21). Далее, из определения r вытекает, что $(r, x) = 0$. Записывая это равенство более подробно, получим, что

$$(\lambda - \rho)\|\tilde{x}\|_2^2 + ((A - \rho I)w, w)\|y\|_2^2 = 0, \tag{1.24}$$

[1] Указание: при заданном x запишите $\|r(x,\alpha)\|_2^2$ как квадратный трехчлен относительно α.

где $w = \|y\|_2^{-1} y$, $\|w\|_2 = 1$. Используя равенство $\|\tilde{x}\|_2^2 = 1 - \|y\|_2^2$, из (1.24), выполняя элементарные преобразования, найдем, что

$$\|y\|_2^2 = (\rho - \lambda)/((A - \lambda)w, w). \tag{1.25}$$

Из (1.24) имеем также, что $\|x\|_2^2 = ((A - \rho I)w, w)\|y\|_2/(\rho - \lambda)$. Подставляя это выражение в (1.22), получим в результате простых выкладок, что

$$\|r\|_2^2 = ((A - \rho I)w, (A - \lambda I)w)\|y\|_2^2. \tag{1.26}$$

Равенства (1.26), (1.25) показывают, что

$$\|r\|_2^2 = |\rho - \lambda| \frac{|((A - \rho I)w, (A - \lambda I)w)|}{|((A - \lambda I)w, w)|}. \tag{1.27}$$

Представив w в виде разложения по ортонормированной системе собственных векторов матрицы A, получим

$$\|r\|_2^2 = |\rho - \lambda| \frac{\Big|\sum\limits_{j \neq i} (\lambda_j - \rho)(\lambda_j - \lambda_i)|c_j|^2\Big|}{\Big|\sum\limits_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)|c_j|^2\Big|}, \tag{1.28}$$

где c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$ — коэффициенты указанного разложения. Из условий теоремы очевидно, следует, что все числа $(\lambda_j - \rho)(\lambda_j - \lambda_i)$ при $j \neq i$ положительны. Отсюда вытекает, что

$$\Big|\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \rho)(\lambda_j - \lambda_i)|c_j|^2\Big| \geqslant \gamma \Big|\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)|c_j|^2\Big|,$$

т. е. и вторая оценка в (1.21) выполняется. □

§ 2. Сингулярные числа и сингулярные базисы

1. Из леммы 1, с. 280, оценки (1.1), с. 341, и неравенства (1.13), с. 271, непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пусть $A, B \in M_{m,n}$ — произвольные матрицы, $q = \min(m, n)$, $\rho_1(A)$, $\rho_2(A)$, $\ldots$, $\rho_q(A)$, $\rho_1(B)$, $\rho_2(B)$, $\ldots$, $\rho_q(B)$ есть сингулярные числа этих матриц (для единообразия записей в их число включены и нули). Тогда*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant q} |\rho_k(A) - \rho_k(B)| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \rho_k(A - B), \tag{2.1}$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\rho_k(A) - \rho_k(B)| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij} - b_{ij}|^2\right)^{1/2}. \tag{2.2}$$

2. Справедлива также теорема, аналогичная теореме 2, с. 342.

Теорема 2. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}$ *— произвольные матрицы,* $q = \min(m, n)$, $\rho_1(A)$, $\rho_2(A)$, $\ldots$, $\rho_q(A)$, $\rho_1(B)$, $\rho_2(B)$, $\ldots$, $\rho_q(B)$ *есть сингулярные числа этих матриц, упорядоченные по невозрастанию. Пусть* $\rho_k(A)$ *— положительное сингулярное число матрицы* A, r *— его кратность. Пусть* $L_{u,k}$ *— подпространство пространства* $\mathbb{C}^n$, *натянутое на правые сингулярные векторы матрицы* A, *соответствующие* $\rho_k(A)$, $L_{v,k}$ *— подпространство, натянутое на левые сингулярные векторы матрицы* A, *соответствующие* $\rho_k(A)$. *Обозначим через* $M_{u,k}$ *подпространство, натянутое на правые сингулярные векторы матрицы* B, *соответствующие сингулярным числам* $\rho_k(B)$, $\rho_{k+1}(B)$, $\ldots$, $\rho_{k+r-1}(B)$, *а через* $M_{v,k}$ *— подпространство, натянутое на левые сингулярные векторы матрицы* B, *соответствующие этим же сингулярным числам. Пусть, далее,*

$$\operatorname{gap}_k(A) = \min(\rho_{k-1}(A) - \rho_k(A), \rho_k(A) - \rho_{k+r}(A))^{\,1)},$$

$$\|A - B\|_2 < \operatorname{gap}_k(A)/2. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\max(\vartheta(L_{u,k}, M_{u,k}), \vartheta(L_{v,k}, M_{v,k})) \leqslant \frac{\|A-B\|_2}{\operatorname{gap}_k(A) - \|A-B\|_2} < 1. \tag{2.4}$$

Упражнение. Докажите теорему 2.

§ 3. Характеристические числа произвольной матрицы

1. Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — произвольная квадратная матрица Положим

$$R_i(A) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_j(A) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq j} |a_{ij}|,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 1 (Гершгорин[2]). *Все характеристические числа произвольной квадратной матрицы* A *порядка* n *лежат в объединении кругов*

$$G_i^R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a_{ii}| \leqslant R_i(A)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

[1] См. сноску на с. 342

[2] Семён Аронович Гершгорин (1901–1933) — советский математик.

Доказательство. Пусть λ, x — собственная пара матрицы A и пусть x_i максимальная по модулю компонента вектора x. Очевидно, $x_i \neq 0$. Из определения собственной пары вытекает равенство

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} a_{ij}x_j,$$

следовательно, $|a_{ii} - \lambda||x_i| \leqslant R_i(A)|x_i|$, и $|a_{ii} - \lambda| \leqslant R_i(A)$. Таким образом, каждое характеристическое число матрицы A принадлежит одному из кругов G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Поскольку все характеристические числа матриц A, A^T совпадают, то все они лежат также в объединении кругов

$$G_i^C = \{z | |z - a_{ii}| \leqslant C_i(A)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Это есть так называемый столбцовый вариант теоремы Гершгорина.

Теорему 1 можно трактовать как теорему о возмущениях диагональной матрицы $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Она показывает, что если недиагональные элементы матрицы A малы, то ее характеристические числа мало отличаются от характеристических чисел матрицы D.

2. Следующие две теоремы, называемые теоремами Бауэра — Файка, в определенном смысле, распространяют теорему Гершгорина на более общий класс матриц, подобных диагональным, иначе говоря, на матрицы простой структуры (см. п. 3, с. 172).

Теорема 2. *Пусть для квадратной матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ существует невырожденная матрица V такая, что*

$$V^{-1}AV = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \tag{3.3}$$

$B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — произвольная квадратная матрица. Тогда все характеристические числа матрицы $A + B$ лежат в объединении кругов

$$G_i = \{z | |z - \lambda_i| \leqslant \|B\|\|V\|\|V^{-1}\|\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Под нормой матрицы здесь может пониматься любая норма, подчиненная абсолютной норме векторов.

Доказательство. Пусть λ, x есть собственная пара матрицы $A + B$. Тогда $(\lambda I - \Lambda)V^{-1}x = V^{-1}BVV^{-1}x$, откуда (см. п 7, с. 323) получаем $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda - \lambda_i|\|V^{-1}x\| \leqslant \|B\|\|V^{-1}\|\|V\|\|V^{-1}x\|$, но $V^{-1}x \neq 0$, следовательно, $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda - \lambda_i| \leqslant \|B\|\|V^{-1}\|\|V\|$, поэтому $\lambda \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда все характеристические числа матрицы $A+B$ лежат в объединении кругов*

$$G_i = \{z||z-\lambda_i| \leqslant ns_i\|B\|_2\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где $s_i = \|u^i\|_2\|v^i\|_2/|(u^i, v^i)|$, v^i — i-й столбец матрицы V, u_i — i-й столбец матрицы $U = (V^{-1})^*$.

Замечание. Ясно, что v_i, λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — собственные пары матрицы A, $u_i, \bar\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — собственные пары матрицы A^*. Каждое из чисел s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, не меньше единицы. Их называют *коэффициентами перекоса* соответствующих собственных векторов матрицы A. Если λ — алгебраически простое характеристическое число матрицы A, то, очевидно, $\bar\lambda$— алгебраически простое характеристическое число матрицы A^*. Отвечающие им собственные подпространства одномерны и, следовательно, соответствующий коэффициент перекоса определяется однозначно.

Доказательство теоремы 3. Характеристические числа матриц $A+B$ и $\Lambda+V^{-1}BV = \Lambda+\widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = U^*BV$, совпадают. Используя столбцовую теорему Гершгорина, получим, что все собственные числа матрицы $\Lambda+\widetilde{B}$ лежат в объединении кругов

$$G_i' = \{z||z-\lambda_i-\tilde b_{ii}| \leqslant C_i(\widetilde{B})\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим теперь, что $|z-\lambda_i-\tilde b_{ii}| \geqslant |z-\lambda_i| - |\tilde b_{ii}|$, $C_i(\widetilde{B}) + |\tilde b_{ii}| = \|\tilde b^i\|_1$, где, как обычно, $\tilde b^i$ — i-й столбец матрицы $\widetilde{B}$. Отсюда вытекает, что все собственные числа матрицы $A+B$ лежат в объединении кругов

$$G_k'' = \{z||z-\lambda_k| \leqslant \|\tilde b^k\|_1\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Оценим $\|\tilde b^k\|_1$. Введем в рассмотрение векторы $t^k \in \mathbb{C}^n$ с компонентами

$$t_j^k = \begin{cases} \tilde b_j^k/|\tilde b_j^k|, \ \tilde b_j^k \neq 0, \\ 0, \ \tilde b_j^k = 0. \end{cases}$$

Элементарно проверяется равенство $\|\tilde b^k\|_1 = (\widetilde{B}i^k, t^k)$, где i^k — столбец единичной матрицы. Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\|\tilde b^k\|_1 = (BVi^k, Ut^k) \leqslant \|B\|_2\|U\|_2\|v^k\|_2\|t^k\|_2. \tag{3.6}$$

Нетрудно убедиться, что $\|t^k\|_2 \leqslant \sqrt{n}$. Далее, вследствие (4.7), с. 333, имеем $\|U\|_2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^n \|u^k\|_2^2\right)^{1/2}$. Столбцы матрицы U определяются, очевидно, с точностью до постоянных ненулевых множителей. Нормируем их так, чтобы $\|u^k\|_2 = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, при этом столбцы матрицы V должны быть нормированы так, чтобы $(v^k, u^k) = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. При этом будем иметь $\|v^k\|_2 = \|v^k\|_2\|u^k\|_2/|(u^k, v^k)| = s_k$. Таким образом, из (3.6) получаем, что $\|\tilde{b}^k\|_1 \leqslant n s_k \|B\|_2$. $\square$

3. При сравнении оценок (3.4), (3.5) полезной оказывается

Теорема 4. *При любой нормировке столбцов матрицы V выполнено неравенство*

$$\|V\|_2\|V^{-1}\|_2 \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} s_k. \tag{3.7}$$

Столбцы матрицы V можно нормировать так, что

$$\|V\|_2\|V^{-1}\|_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k. \tag{3.8}$$

Доказательство. Очевидно, что $Vi_2^k = v^k$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $\|V\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|Vx\|_2 \geqslant \|v^k\|_2$. Точно так же $\|V^{-1}\|_2 = \|U\|_2 \geqslant \|u^k\|_2$, и неравенство (3.7) доказано. Нормируем теперь столбцы матрицы V так, чтобы $\|v^k\|_2 = s_k^{1/2}$. Тогда вследствие равенства $(v_k, u_k) = 1$ получаем, что $\|u^k\|_2 = s_k^{1/2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, очевидно, вытекает, что $\|V^{-1}\|_E = \|V\|_E = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} s_k\right)^{1/2}$. Оценка (3.8) следует теперь из неравенства (4.7), с. 333. $\square$

Замечание. Матрица V, столбцы которой образуют базис пространства $\mathbb{C}^n$, состоящий собственных векторов матрицы A, не определяется однозначно. При любом выборе V справедливо неравенство $\|V\|\|V^{-1}\| \geqslant 1$. Равенство здесь достигается, например, тогда, когда в качестве нормы матриц выбрана спектральная норма, а матрица V унитарна. По теореме 4, с. 200 матрица унитарно подобна диагональной тогда и только тогда, когда она — нормальная матрица. Таким образом, если A — нормальная матрица, λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — ее характеристические числа, то при любой матрице B все характеристические числа матрицы $A + B$ лежат в объединении кругов $G_i = \{z | |z - \lambda_i| \leqslant \|B\|_2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

§ 4. Возмущения и обратимость матрицы

1. Пусть $A \in M_n$ — обратимая матрица, т. е. $\det A \neq 0$. Пусть, далее, $B \in M_n$. Возникает вопрос, при каких условиях на B матрица $A+B$ будет также обратимой? Поскольку $A+B = A(I + A^{-1}B)$, то для существования матрицы, обратной к $A+B$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы $A^{-1}B$ не содержал -1. Отсюда вытекают следующие практически важные достаточные условия обратимости матрицы $A+B$:

1) матрица $A+B$ обратима, если матрица $A^{-1}B$ сходящаяся, т. е. $\rho(A^{-1}B) < 1$;
2) матрица $A+B$ обратима, если $\|A^{-1}B\| < 1$;
3) матрица $A+B$ обратима, если $\|A^{-1}\|\|B\| < 1$.

Здесь и далее в этом пункте под нормой матрицы понимается согласованная матричная норма. Третье условие часто записывают так:

$$\mathrm{cond}\,(A)(\|B\|/\|A\|) < 1, \tag{4.1}$$

где $\mathrm{cond}\,(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$. Это число называют числом обусловленност матрицы A (ср. с п. 9, с. 272). Условие (4.1) можно интерпретировать следующим образом: матрица $A+B$ обратима, если относительное возмущение матрицы A, т. е. $\|B\|/\|A\|$, мало по сравнению с ее числом обусловленности.

2. Пример. Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — произвольная квадратная матрица Будем говорить, что A — матрица с *диагональным преобладанием по строкам*, если[1)]

$$|a_{ii}| > R_i(A) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

и A — матрица с *диагональным преобладанием по столбцам*, если

$$|a_{ii}| > C_i(A) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Покажем, что если A — матрица с диагональным преобладанием по строкам, то она невырождена. Пусть $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Вследствие условия (4.2) матрица D невырождена. Запишем матрицу A в виде $A = D + (A - D)$. Вновь используя условие (4.2), получим, что $\|D^{-1}(A-D)\|_\infty < 1$, значит выполнено условие 2, и матрица A невырождена. Поскольку определители матриц A и A^T совпадают, то матрица с диагональным преобладанием по столбцам также невырождена.

Упражнение. Покажите, что если выполнено условие (4.2), или (4.3), то все главные миноры матрицы A отличны от нуля.

[1)]См. обозначения в § 3, с. 347.

Теорема 1. *Пусть матрицы A и $\tilde{A} = A + B$ обратимы. Тогда*
$$\frac{\|A^{-1} - \tilde{A}^{-1}\|}{\|\tilde{A}^{-1}\|} \leqslant \|A^{-1}B\|. \tag{4.4}$$
Если $\|A^{-1}B\| < 1$, то
$$\|\tilde{A}^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B\|}, \tag{4.5}$$
$$\frac{\|A^{-1} - \tilde{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}B\|}{1 - \|A^{-1}B\|}. \tag{4.6}$$

Доказательство. По условию теоремы $I = (A + B)\tilde{A}^{-1}$, следовательно, $A^{-1} = (I + A^{-1}B)\tilde{A}^{-1}$, поэтому $A^{-1} - \tilde{A}^{-1} = A^{-1}B\tilde{A}^{-1}$. Отсюда, очевидно, следует (4.7). Далее, $\tilde{A}^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\tilde{A}^{-1}$, значит, $\|\tilde{A}^{-1}\| = \|A^{-1}\| + \|A^{-1}B\|\|\tilde{A}^{-1}\|$, откуда вытекает (4.5). Наконец, (4.6) — очевидное следствие (4.7), (4.5). □

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть матрицы A и $\tilde{A} = A+B$ обратимы. Тогда*
$$\frac{\|A^{-1} - \tilde{A}^{-1}\|}{\|\tilde{A}^{-1}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|). \tag{4.7}$$
Если $\operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|) < 1$, то
$$\|\tilde{A}^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|)}, \tag{4.8}$$
$$\frac{\|A^{-1} - \tilde{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|)}{1 - \operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|)|}. \tag{4.9}$$

3. Следующая теорема показывает, что «расстояние» от невырожденной матрицы A до ближайшей вырожденной матрицы характеризуется величиной $1/\operatorname{cond}(A)$.

Теорема 2. *Пусть матрица A обратима, матрица $A + B$ вырождена, тогда*
$$\|B\|/\|A\| \geqslant 1/\operatorname{cond}(A). \tag{4.10}$$
Если при этом под нормой матрицы понимать норму, подчиненную некоторой норме векторов, то можно указать такую матрицу B, что
$$\|B\|/\|A\| = 1/\operatorname{cond}(A), \tag{4.11}$$

а матрица $A + B$ вырождена.

Доказательство. Как было указано выше, если матрица A а обратима, а матрица $A + B$ вырождена, то спектр матрицы $A^{-1}B$ содержит число -1, значит $\rho(A^{-1}B) \geqslant 1$, но

$$\rho(A^{-1}B) \leqslant \|A^{-1}B\| \leqslant \|A^{-1}\|\|B\|,$$

т. е. $\|B\| \geqslant 1/\|A^{-1}\|$. Последнее неравенство эквивалентно (4.10). Переходим к доказательству второй части теоремы. Из определения подчиненной нормы матрицы следует, что существует вектор x такой, что $\|x\| = 1$, $\|A^{-1}x\| = \|A^{-1}\|$. Положим $y = \|A^{-1}\|^{-1}A^{-1}x$. Тогда $\|y\| = 1$, $Ay = \|A^{-1}\|^{-1}x$. По следствию 1, с. 326, на пространстве $\mathbb{C}^n$ существует линейный функционал f такой, что $f(y) = \|y\| = 1$, и $\|f\| = \sup\limits_{v \in \mathbb{C}^n,\, \|v\|=1} |f(v)| = 1$. Определим матрицу B действием ее на векторы при помощи соотношения

$$Bv = -(f(v)/\|A^{-1}\|)x \quad \forall\, v \in \mathbb{C}^n.$$

Ясно, что $By = -\|A^{-1}\|^{-1}x$, поэтому $(A + B)y = 0$, значит,

$$\det(A + B) = 0.$$

Кроме того,

$$\|B\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n,\, \|v\|=1} \|Bv\| = \|A^{-1}\|^{-1} \sup_{v \in \mathbb{C}^n,\, \|v\|=1} |f(v)| = \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Полученное равенство эквивалентно (4.11). $\square$

§ 5. Устойчивость систем линейных уравнений

1. В этом параграфе норма матриц считается согласованной с нормой векторов. Следующая теорема устанавливает связь относительного возмущениям матрицы системы и ее правой части с относительным возмущением решения. Главную роль в получаемых здесь оценках играет число обусловленности матрицы системы уравнений.

Теорема 1. *Пусть матрица A обратима, матрица B такова, что $\|A^{-1}B\| < 1$, вектор x — решение системы уравнений*

$$Ax = y, \tag{5.1}$$

вектор $\tilde{x}$ — решение системы уравнений

$$\tilde{A}\tilde{x} = y + b, \quad \tilde{A} = A + B. \tag{5.2}$$

Тогда

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\|A^{-1}B\|}\left(\frac{\|b\|}{\|y\|}+\frac{\|B\|}{\|A\|}\right). \tag{5.3}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\|A^{-1}\|\|B\| < 1,$$

то

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)(\|B\|/\|A\|)}\left(\frac{\|b\|}{\|y\|}+\frac{\|B\|}{\|A\|}\right). \tag{5.4}$$

Доказательство. По условию теоремы матрицы A^{-1} и $\tilde{A}^{-1}$ существуют, поэтому $x = A^{-1}y$, $\tilde{x} = \tilde{A}^{-1}(y+b)$, следовательно, $\tilde{x} - x = \tilde{A}^{-1}b + (\tilde{A}^{-1} - A^{-1})y$, и

$$\|x-\tilde{x}\| \leqslant \|\tilde{A}^{-1}\|\|b\| + \|\tilde{A}^{-1} - A^{-1}\|\|y\|,$$

откуда, используя (4.5), (4.6) и неравенство $\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|$, после элементарных преобразований получим (5.3). Оценка (5.4) есть очевидное следствие (5.3). □

2. Во многих случаях особенно полезной оказывается оценка погрешности через невязку приближенного решения. Введем используемую в дальнейшем вспомогательную величину. Пусть матрица A обратима, $x \neq 0$, $Ax = y$. Положим $\eta = \|A\|\|x\|/\|y\|$. Очевидно, что $\eta \geqslant 1$, и поскольку $\|x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|y\|$, то $\eta \leqslant \|A\|\|A^{-1}\| = \operatorname{cond}(A)$. Для $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ положим $r = A\tilde{x} - y$. Тогда $x - \tilde{x} = A^{-1}r$,

$$\|x-\tilde{x}\| \leqslant \|A^{-1}\|\|r\|.$$

Поэтому

$$\|x-\tilde{x}\|/\|x\| \leqslant (\operatorname{cond}(A)/\eta)\|r\|/\|y\|, \tag{5.5}$$

и как следствие

$$\|x-\tilde{x}\|/\|x\| \leqslant \operatorname{cond}(A)\|r\|/\|y\|. \tag{5.6}$$

Оценка (5.5) показывает, что чем ближе величина η к величине $\operatorname{cond}(A)$, тем лучше относительная погрешность оценивается относительной невязкой приближенного решения.

3. Пусть $\tilde{x}$ — приближенное решение системы уравнений $Ax = y$. В некоторых случаях, например, при так называемом обратном анализе ошибок оказывается полезным представить вектор $\tilde{x}$ как точное решение системы с возмущенной матрицей:

$$(A + B)\tilde{x} = y. \tag{5.7}$$

При этом естественно стремиться к тому, чтобы матрица B имела минимально возможную норму (согласованную с нормой векторов). Возможность выбора такой матрицы B обосновывает

Теорема 2. *Пусть $x \in \mathbb{C}^n$, $\tilde{x} \neq 0$, $r = A\tilde{x} - y$. Существует матрица B такая, что выполнено уравнение* (5.7), *и $\|B\| = \|r\|/\|\tilde{x}\|$. При этом, если существует матрица $D \neq B$ такая, что*

$$(A + D)\tilde{x} = y,$$

то $\|D\| \geqslant \|B\|$.

Доказательство. Для обоснования последнего утверждения теоремы достаточно заметить, что $D\tilde{x} = -r$, следовательно, $\|D\tilde{x}\| = \|r\|$, поэтому $\|D\| \geqslant \|r\|/\|\tilde{x}\|$. Определим теперь матрицу B при помощи соотношения $Bv = -(f(v)/\|\tilde{x}\|)r \ \forall\, v \in \mathbb{C}^n$, где f — линейный функционал на пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условиям $f(\tilde{x}) = \|\tilde{x}\|$, $\|f\| = 1$[1]. Тогда $B\tilde{x} = -r$, т. е. уравнение (5.7) выполнено, а $\|B\| = \|f\|\|r\|/\|\tilde{x}\| = \|\|r\|/\|\tilde{x}\|$. □

4. Во всех предыдущих оценках предполагались известными величины возмущений правой части и матрицы системы уравнений в смысле некоторых норм. Однако зачастую более реально определять эти возмущения покомпонентно, а именно, предполагать, что задано некоторое $\varepsilon > 0$, и

$$|B| \leqslant \varepsilon |A|, \quad |b| \leqslant \varepsilon |y|. \tag{5.8}$$

Здесь и далее до конца пункта знак модуля означает, что рассматривается матрица (вектор), состоящий из модулей компонент. Неравенства понимаются покомпонентно. Таким образом, оценки (5.8) означают, что относительная погрешность задания каждого элемента матрицы системы и ее правой части не превосходит ε.

Теорема 3 (Бауэр — Скил). *Пусть x — решение системы* (5.1), *$\tilde{x}$ — решение системы* (5.2), *матрица A невырождена, выполнены условия* (5.8) *и, кроме того,*

$$\varepsilon \| |A^{-1}||A| \| < 1. \tag{5.9}$$

[1] См. доказательство теоремы 2.

Тогда

$$\|x - \tilde{x}\| \leqslant \varepsilon \frac{\||A^{-1}|(|A||x| + |y|)\|}{1 - \varepsilon\||A^{-1}||A|\|}. \tag{5.10}$$

Здесь под нормой вектора понимается любая монотонная норма, а под нормой матрицы согласованная с ней норма.

Доказательство. Из уравнений (5.1), (5.2) находим, что

$$\tilde{x} - x = A^{-1}(Bx + b + B(\tilde{x} - x)),$$

следовательно,

$$|\tilde{x} - x| = |A^{-1}|(|B||x| + |b| + |B||\tilde{x} - x|),$$

откуда, используя условия (5.8) и учитывая принятые соглашения о нормах векторов и матриц, получаем, что

$$\|\tilde{x} - x\| \leqslant \varepsilon\|\||A^{-1}|(|A||x| + |y|)\| + \varepsilon\||A^{-1}||A|\|\|\tilde{x} - x\|,$$

откуда, в силу (5.9), приходим к (5.10). □

Полезно отметить, что если правая часть системы задана точно, т. е. $b = 0$, то вместо (5.10) получаем, что

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\varepsilon\||A^{-1}||A|\|}{1 - \varepsilon\||A^{-1}||A|\|}.$$

Эта оценка показывает, как относительная погрешность решения зависит от относительной точности задания матрицы системы. Число $\kappa_{BS}(A) = \||A^{-1}||A|\|$ в связи с этим принято называть относительным числом обусловленности матрицы A, или числом *обусловленности Бауэра — Скила.*

Нетрудно убедиться, что при сделанных предположениях о нормах векторов и матриц $\kappa_{BS}(A) \geqslant 1$ для любой матрицы A, причем для любой диагональной матрицы $\kappa_{BS} = 1$. Таким образом, диагональные системы уравнений идеально обусловлены по отношению к возмущению матрицы.

§ 6. Возмущения псевдорешения

В этом параграфе мы исследуем устойчивость псевдорешения по отношению к возмущениям матрицы и правой части системы. Под нормой векторов на протяжении этого пункта понимается евклидова норма, под нормой матриц подчиненная ей, т. е. спектральная норма.

Лемма 1. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$,

$$\eta = \|A^+\| \|A - B\| < 1^{1)}.$$

Тогда

$$\|B^+\| \leqslant \frac{1}{1-\eta} \|A^+\|. \tag{6.1}$$

Доказательство. Вследствие (2.1), с. 346, и (4.5), с. 333, справедливо неравенство

$$\rho_r(B) - \rho_r(A) \geqslant -\|A - B\|.$$

Используя (4.6), с. 333, перепишем это неравенство в виде

$$\frac{1}{\|B^+\|} - \frac{1}{\|A^+\|}) \geqslant -\|A - B\|.$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем (6.1). □

Лемма 2. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}$ *— произвольные матрицы,*

$$P_A = AA^+, \quad P_B = BB^+.$$

Тогда

$$\|P_A(I - P_B)\| = \|P_B(I - P_A)\| \leqslant \|A - B\| \min(\|A^+\|, \|B^+\|). \tag{6.2}$$

Доказательство. По построению матрицы P_A и P_B — есть ортогональные проекторы, определенные на $\mathbb{C}^m$ (см. п. 3, с. 275), поэтому равенство $\|P_A(I - P_B)\| = \|P_B(I - P_A)\|$ следует из результатов предыдущего пункта. Там же показано, что

$$\|P_B(I - P_A)\| = \|(I - P_A)P_B\|.$$

Заметим теперь, что

$$(I - P_A)P_B = (I - AA^+)P_B = (I - AA^+)(A + B - A)B^+,$$

но $(I - AA^+)A = 0$ (см. свойство 5 на с. 275). Поэтому

$$\|P_B(I - P_A)\| = \|(I - P_A)P_B\| = \|(I - P_A)(B - A)B^+\| \leqslant \\ \leqslant \|(B - A)B^+\| \leqslant \|(B - A)\| \|B^+\|.$$

Точно так же $\|P_A(I - P_B)\| \leqslant \|(B - A)\| \|A^+\|$. □

1) Напомним, что A^+ — матрица пседообратная к A.

Теорема 1. *Пусть* $A, \tilde{A} \in M_{m,n}$, $m \geqslant n$, *— матрицы полного ранга. Пусть, далее,* x *— псевдорешение системы уравнений*

$$Ax = y, \tag{6.3}$$

$\tilde{x}$ *— псевдорешение системы*

$$\tilde{A}\tilde{x} = y + b, \quad \tilde{A} = A + B.$$

$r = y - Ax$, $\tilde{r} = \tilde{y} - \tilde{A}\tilde{x}$ *— соответствующие им невязки. Предположим, что* $\|A^+\|\|B\| < 1$. *Тогда*

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \leqslant \frac{\kappa_2(A)}{1 - \kappa_2(A)(\|B\|/\|A\|)} \left(\frac{\|B\|}{\|A\|} \left(1 + \kappa_2(A) \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \right) + \right. \left. + \frac{\|b\|}{\|y\|} \left(1 + \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \right) \right), \tag{6.4}$$

$$\frac{\|r - \tilde{r}\|}{\|y\|} \leqslant \left(\frac{\|b\|}{\|y\|} + 2\kappa_2(A) \frac{\|B\|}{\|A\|} \right). \tag{6.5}$$

Здесь $\kappa_2(A) = \|A^+\|\|A\|$.

Доказательство. По определению псевдообратного оператора имеем, что

$$\tilde{x} - x = \tilde{A}^+(y + b) - x = \tilde{A}^+(r + Ax + b) - x = \tilde{A}^+(r + \tilde{A}x + b - Bx) - x.$$

Поскольку по условию теоремы $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = n$, то используя разложение вектора x по сингулярным векторам матрицы $\tilde{A}$ нетрудно убедиться, что $\tilde{A}^+\tilde{A}x = x$, следовательно,

$$\tilde{x} - x = \tilde{A}^+(r + b - Bx). \tag{6.6}$$

Заметим теперь, что в силу свойства 6, псевдообратного оператора (см. с. 274) $\tilde{A}^+r = \tilde{A}^+\tilde{A}\tilde{A}^+r = \tilde{A}^+P_{\tilde{A}}r$. Учтем теперь, что

$$P_A r = AA^+(y - Ax) = A(A^+y) - AA^+Ax = Ax - Ax = 0, \tag{6.7}$$

т. е. $\tilde{A}^+r = \tilde{A}^+P_{\tilde{A}}(I - P_A)r$. Отсюда в силу лемм 1, 2 получаем, что

$$\|\tilde{A}^+r\| \leqslant \frac{\|A^+\|^2}{1 - \|A^+\|\|B\|}\|B\|\|r\| =$$

$$= \frac{\|A^+\|^2\|A\|^2}{1 - \|A^+\|\|A\|(\|B\|/\|A\|)} \frac{\|B\|\|r\|}{\|A\|^2\|x\|}\|x\|, \quad (6.8)$$

аналогично, с использованием очевидного неравенства

$$\|y\| \leqslant \|y\| + \|A\|\|x\|$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}^+(b - Bx)\| \leqslant \|\tilde{A}^+\|(\|(b\| + \|B\|\|x\|) \leqslant \\ \leqslant \frac{\|A^+\|}{1 - \|A^+\|\|B\|}(\|b\|/\|x\| + \|B\|)\|x\| = \\ = \frac{\|A^+\|\|A\|}{1 - \|A^+\|\|A\|(\|B\|/\|A\|} \left(\frac{\|b\|\|r\|}{\|y\|\|A\|\|x\|} + \frac{\|b\|}{\|y\|} + \frac{\|B\|}{\|A\|}\right)\|x\|. \quad (6.9) \end{aligned}$$

С учетом оценок (6.8), (6.9) из (6.6) получаем (6.4). Обратимся теперь к оценке $r - \tilde{r}$. Из определения r и $\tilde{r}$ получаем

$$r - \tilde{r} = y + b - (A + B)\tilde{x} - y + Ax = b + \tilde{A}(x - \tilde{x}) - Bx.$$

Справедливо равенство $\tilde{A}(x - \tilde{x}) = -\tilde{A}\tilde{A}^+(r - Bx + b)$. В самом деле, $\tilde{A}\tilde{A}^+(r - Bx + b) = \tilde{A}\tilde{A}^+(y + b - \tilde{A}x) = \tilde{A}\tilde{A}^+\tilde{y} - \tilde{A}\tilde{A}^+\tilde{A}x = \tilde{A}\tilde{x} - \tilde{A}x$. Поэтому $r - \tilde{r} = (I - \tilde{A}\tilde{A}^+)(b - Bx) - \tilde{A}\tilde{A}^+r$. Поскольку $I - \tilde{A}\tilde{A}^+$ есть проектор, то $\|r - \tilde{r}\| \leqslant \|b - Bx\| + \|\tilde{A}\tilde{A}^+r\|$. Вспомним, что $r = r - P_A r$. Поэтому $\|\tilde{A}\tilde{A}^+r\| \leqslant \|P_{\tilde{A}}(I - P_A)\|\|r\|$, откуда вследствие леммы 2 получаем оценку $\|\tilde{A}\tilde{A}^+r\| \leqslant \|A^+\|\|B\|\|r\|$. Таким образом, $\|r - \tilde{r}\| \leqslant \|b\| + \|B\|\|x\| + \|A^+\|\|B\|\|r\|$. Учтем теперь, что $x = A^+y$, $\|r\| = \min\limits_{v \in \mathbb{C}^n} \|y - Av\| \leqslant \|y\|$. В результате, после элементарных преобразований получим (6.5). $\square$

Замечание 1. Оценки (6.4), (6.5) показывают, что возмущения псевдорешения определяются величиной $\kappa_2(A)$. Ее принято называть *числом обусловленности псевдорешения.* Отметим, что если система уравнений (6.3) совместна, то $r = 0$, и оценка (6.4) переходит в оценку вида (5.4). Ясно также, что если A — квадратная невырожденная матрица, то $\kappa_2(A) = \mathrm{cond}_2(A)$.

Глава 19

Неотрицательные матрицы

В этой главе изучаются спектральные свойства матриц с неотрицательными элементами. Совокупность излагаемых здесь результатов принято называть *теорией Перрона — Фробениуса*[1].

§ 1. Простейшие свойства неотрицательных матриц

Вектор $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ называется *неотрицательным* (пишут $x \geqslant 0$), если $x_k \geqslant 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ называется *положительным* ($x > 0$), если $x_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично, матрица A называется *неотрицательной* ($A \geqslant 0$), если $a_{kl} \geqslant 0$ для всех k, l, *положительной* ($A > 0$), если $a_{kl} > 0$ для всех k, l.

По определению $x \geqslant y$ ($x > y$) для $x, y \in \mathbb{R}^n$, если $x_k \geqslant y_k$ ($x_k > y_k$) для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Для матриц A, B одинакового порядка полагаем $A \geqslant B$ ($A > B$), если $a_{kl} \geqslant b_{kl}$ ($a_{kl} > b_{kl}$) для всех k, l.

Аналогично понимаются неравенства противоположного смысла для векторов и матриц.

В дальнейшем будем использовать обозначения: $|x| = \{|x_k|\}_{k=1}^n$ для $x \in \mathbb{C}^n$, $|A| = \{|a_{kl}|\}$ для любой матрицы A[2].

Отметим некоторые простейшие свойства неотрицательных векторов и матриц: если $A > 0$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, то $Ax > 0$; если $A \geqslant 0$, $x \geqslant y$, то $Ax \geqslant Ay$; если $A \geqslant 0$, $x > 0$, $Ax = 0$, то $A = 0$.

Если $A > 0$, $\rho(A) < 1$, то $(I - A)^{-1} > 0$. Действительно, если $\rho(A) < 1$, то $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$ (см. с. 297).

Лемма 1. *Для любой квадратной матрицы A справедливо неравенство $\rho(A) \leqslant \rho(|A|)$. Если $|A| \leqslant B$, то $\rho(|A|) \leqslant \rho(B)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|AB| \leqslant |A||B|$ для любых матриц A, B; $\|A\|_E \leqslant \|B\|_E$, если $|A| \leqslant |B|$. Поэтому из нера-

[1] Оскар Перрон (Oskar Perron; 1880 — 1975) — немецкий математик.

[2] Некоторые обозначения и термины, введенные в настоящей главе, не совпадают с использованными в предыдущих главах.

венства $|A| \leqslant B$ вытекает, что $\|A^k\|_E \leqslant \||A|^k\|_E \leqslant \|B^k\|_E$ для любого $k \geqslant 1$, следовательно,

$$\|A^k\|_E^{1/k} \leqslant \||A|^k\|_E^{1/k} \leqslant \|B^k\|_E^{1/k}, \ k = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Воспользуемся теперь теоремой 1, с. 334, и перейдем к пределу в неравенствах (1.1). $\square$

Квадратная матрица P порядка $n \geqslant 1$ называется матрицей *перестановок*, если каждая ее строка и каждый ее столбец содержат ровно по одному ненулевому элементу, равному единице. Ясно, что матрица P ортогональна, т. е. $P^{-1} = P^T$. Для любого $x \in \mathbb{C}^n$ векторы x и Px отличаются лишь порядком следования элементов.

Квадратная матрица A называется *разложимой*, если найдется такая матрица перестановок P, что

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы. В противном случае матрица A называется *неразложимой*. Матрицы A и PAP^T различаются лишь перестановкой строк и столбцов (с одинаковыми номерами).

Лемма 2. *Если матрица A неотрицательна и неразложима, то ее спектральный радиус положителен.*

Доказательство. Неразложимая матрица, очевидно, не может содержать нулевых строк, поэтому $Ay > 0$ для любого положительного вектора y. Но тогда $A^p y > 0$ для любого целого $p \geqslant 1$. Поэтому матрица A не нильпотентна и, следовательно, среди ее характеристических чисел есть ненулевые. $\square$

Следствие 1. *Спектральный радиус положительной матрицы положителен.*

Лемма 3. *Если неотрицательная матрица A порядка n неразложима, то $(I + A)^{n-1} > 0$.*

Доказательство. Достаточно установить, что

$$(I + A)^{n-1} y > 0 \quad \forall\, y \geqslant 0, y \neq 0. \tag{1.3}$$

Ясно, что если $y \geqslant 0$, $y \neq 0$, то

$$z = (I + A)y \tag{1.4}$$

есть ненулевой неотрицательный вектор, причем ненулевых компонент у него не меньше чем у вектора y. Очевидно также, что нулевые компоненты вектора z имеют те же номера, что и нулевые компоненты вектора y. Если матрица A такова, что для любого ненулевого неотрицательного вектора y вектор z имеет больше ненулевых компонент чем вектор y, то соотношение (1.3) доказано. В противном случае можно указать такую матрицу перестановок P, что $Py = (y^1, 0)$, $Pz = (z^1, 0)$, где y^1, z^1 — положительные векторы одинаковой длины $n_1 < n$. Из (1.4) в результате элементарных выкладок получаем

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix} + PAP^T \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Представим матрицу $B = PAP^T$ в блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где B_{11} — квадратная матрица размера n_1. Из (1.5) следует, что $B_{21}y^1 = 0$. Поскольку $y^1 > 0$, $B_{21} \geqslant 0$, отсюда вытекает, что $B_{21} = 0$, т. е. матрица A разложима. $\square$

§ 2. Положительные матрицы

Теорема 1. *Пусть $A > 0$. Тогда $\rho(A) > 0$, и существует положительный вектор x такой, что*

$$Ax = \rho(A)x. \tag{2.1}$$

Доказательство. Положительность $\rho(A)$ непосредственно вытекает из положительности матрицы A (см. следствие 1). Очевидно, что существует характеристическое число λ матрицы A такое, что $|\lambda| = \rho(A)$. Найдется не равный нулю вектор $u \in \mathbb{C}^n$ такой, что $Au = \lambda u$. Тогда $\rho(A)|u| \leqslant A|u|$, и $y = A|u| - \rho(A)|u| \geqslant 0$. Если при этом $y = 0$, то $\rho(A)$ — собственное число матрицы A, причем, поскольку $|u| \geqslant 0$ и $|u| \neq 0$, то $A|u| > 0$ и поэтому $|u| > 0$, т. е. теорема доказана. Если принять, что $y \neq 0$, то вследствие положительности матрицы A получаем, что $Ay > 0$. Пусть $z = A|u|$. Ясно, что $z > 0$. С другой стороны, $Ay = Az - \rho(A)z > 0$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $Az - (\rho(A) + \varepsilon)z > 0$. Последнее неравенство можно записать в виде $(I - (1/(\rho(A) + \varepsilon))A)z < 0$, но матрица $(I - (1/(\rho(A) + \varepsilon))A)^{-1}$ существует и положительна (см. п. 1, с. 360), следовательно, $z < 0$. Получили противоречие. Остается принять, что $y = 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $A > 0$. Тогда собственное подпространство матрицы A, отвечающее $\rho(A)$, одномерно.*

Доказательство. Пусть не равные нулю векторы x, y таковы, что $Ax = \rho(A)x$, $Ay = \rho(A)y$. Как следует из доказательства предыдущей теоремы, тогда $|x| > 0$, $|y| > 0$. Положим $z = y_1 x - x_1 y$. Получим $z_1 = 0$, $Az = \rho(A)z$. Вектор z не может быть собственным вектором, отвечающим $\rho(A)$, так как имеет нулевую компоненту. Значит, $z = 0$, т. е. векторы x, y пропорциональны. $\square$

Лемма 1. *Пусть $A > 0$. Тогда все жордановы клетки жордановой формы матрицы A, отвечающие $\rho(A)$, имеют первый порядок.*

Доказательство. Очевидно, достаточно установить, что все жордановы клетки жордановой формы матрицы $B = \rho(A)^{-1}A$, отвечающие ее собственному числу, равному единице, имеют первый порядок. Предположим противное, и пусть $J = SBS^{-1}$ — жорданова форма матрицы B. Из формулы (9.5), с. 296, тогда сразу же следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|J^k\|_\infty = \infty$, но $J^k = SB^kS^{-1}$, $\|J^k\|_\infty \leqslant \|S\|_\infty \|B^k\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \|B^k\|_\infty = \infty$. С другой стороны, по теореме 1 существует положительный вектор x такой, что $Bx = x$, и тогда $B^k x = x$ при любом целом неотрицательном k. Поскольку $B > 0$, $x > 0$, то, как нетрудно убедиться, $\|x\|_\infty = \|B^k x\|_\infty \geqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \|B^k\|_\infty$, т. е. $\|B^k\|_\infty \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i / \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$. $\square$

Как известно (см. п. 4, с. 292), количество жордановых клеток, отвечающих характеристическому числу матрицы, совпадает с его геометрической кратностью. Поэтому из теоремы 2 и леммы 1 сразу же следует

Теорема 3. *Пусть $A > 0$. Тогда алгебраическая кратность характеристического числа $\rho(A)$ матрицы A равна единице.*

Теорема 4. *Положительная матрица A не может иметь характеристических чисел, равных по модулю $\rho(A)$ и отличных от $\rho(A)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такой, что $Ax = \lambda x$, $|\lambda| = \rho(A)$, $\lambda \neq \rho(A)$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что $A|x| = \rho(A)|x|$, $|x| > 0$. Очевидно также, что $|Ax| = \rho(A)|x|$, следовательно, $|Ax| = A|x|$. В частности, $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}|x_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{1j}x_j|$

(здесь n — порядок матрицы A). Модуль суммы ненулевых комплексных чисел может быть равен сумме их модулей лишь при условии, что существуют положительные числа α_2, α_3, $\dots \alpha_n$ такие, что $a_{1j}x_j = \alpha_j a_{11} x_1$, $j = 2, 3, \dots, n$ [1]. Следовательно,

$$x = x_1 y, \tag{2.2}$$

где $y = (1, y_2, \dots, y_n)$, $y_j = \alpha_j a_{11}/a_{1j} > 0$, $j = 2, 3, \dots, n$. Поэтому $Ax = x_1 Ay = \lambda x = \lambda x_1 y$ и, поскольку $x_1 \neq 0$, то $Ay = \lambda y$. Отсюда вследствие положительности y получаем, что $Ay = \rho(A)y$. Таким образом x и y — собственные векторы матрицы A, отвечающие различным собственным числам. Вопреки (2.2) они не могут быть пропорциональными (см. теорему 4, с. 169). $\square$

Теорема 5. *Пусть $A > 0$. Если собственный вектор матрицы A неотрицателен, то он отвечает ее собственному числу $\rho(A)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $x \neq 0$, $x \geqslant 0$ и $Ax = \lambda x$. Матрица A^T положительна, поэтому существует положительный вектор y такой, что $A^T y = \rho(A^T) y$. Спектральные радиусы взаимно транспонированных матриц, очевидно, совпадают, следовательно, $A^T y = \rho(A) y$. Умножим почленно это равенство скалярно[2] на вектор x. После очевидных преобразований получим $\lambda(x, y) = \rho(A)(x, y)$. Ясно, что $(x, y) > 0$, поэтому $\lambda = \rho(A)$. $\square$

§ 3. Неотрицательные матрицы

Теорема 1. *Пусть $A \geqslant 0$. Тогда существует вектор $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, такой, что $Ax = \rho(A)x$.*

Доказательство. Положим $A_k = A + (1/k)B$, где B — положительная матрица, k — положительное целое число. Матрица A_k положительна. По теореме 1, с. 362, существует вектор $x^k > 0$ такой, что $A_k x^k = \rho(A_k) x^k$. Можно считать также, что $\|x^k\|_2 = 1$. Множество векторов x^k, $k = 1, 2, \dots$, ограничено в пространстве $\mathbb{R}^n$. По теореме Больцано — Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x^{k_i}\}$, сходящаяся к некоторому вектору x. Очевидно, что $x \geqslant 0$ и $\|x\|_2 = 1$, т. е. $x \neq 0$. В силу леммы 1, с. 360, последовательность $\{\rho(A_k)\}$ не возрастает и ограничена снизу числом $\rho(A)$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(A_k) = r \geqslant \rho(A)$. Переходя к пределу в равенствах

[1] Сделайте рисунок!

[2] Здесь и далее под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

$A_{k_i}x^{k_i} = \rho(A_{k_i})x^{k_i}$ при $i \to \infty$, получим $Ax = rx$, т. е. r — характеристическое число матрицы A, поэтому $r \leqslant \rho(A)$, следовательно, $r = \rho(A)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть A — неотрицательная матрица порядка n. Тогда*

$$\rho(A) = \max_{x \geqslant 0,\ x \neq 0} \min_{1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим $f(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \neq 0} (Ax)_i / x_i$ для $x \geqslant 0$, $x \neq 0$. Нетрудно убедиться, что $f(x)x \leqslant Ax$. Тем более,

$$f(x)x \leqslant A_k x, \tag{3.2}$$

где A_k — матрица, определенная в доказательстве предыдущей теоремы. Как мы уже знаем, существует положительный вектор y такой, что $A_k^T y = \rho(A_k)y$. Из (3.2) очевидным образом получаем, что $f(x)(x, y) \leqslant (A_k x, y) = \rho(A_k)(x, y)$. Отсюда вследствие положительности (x, y) вытекает, что $f(x) \leqslant \rho(A_k)$. Как было установлено при доказательстве предыдущей теоремы, $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(A_k) = \rho(A)$, поэтому $f(x) \leqslant \rho(A)$ для любого $x \geqslant 0$, $x \neq 0$. В то же время, теорема 1 гарантирует существование неотрицательного ненулевого вектора z такого, что $Az = \rho(A)z$. Очевидно, что $f(z) = \rho(A)$. $\square$

Упражнение. Докажите, что

$$\rho(A) = \min_{x \geqslant 0,\ x \neq 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

§ 4. Неразложимые неотрицательные матрицы

Теорема 1. *Пусть A — неразложимая неотрицательная матрица. Тогда существует положительный вектор x такой, что $Ax = \rho(A)x$.*

Доказательство. Из теоремы 1 предыдущего параграфа вытекает существование ненулевого неотрицательного вектора x такого, что $Ax = \rho(A)x$. Покажем, что на самом деле $x > 0$. Пусть n — порядок матрицы A. Для выбранного нами вектора x выполнено равенство $(I + A)^{n-1}x = (1 + \rho(A))^{n-1}x$. По лемме 3, с. 361, матрица $(I + A)^{n-1}$ положительна, следовательно, вектор $y = (I + A)^{n-1}x$ положителен, но тогда и вектор $x = (1 + \rho(A))^{1-n}y$ положителен. $\square$

Упражнение. Докажите, что теорема 5, с. 364, справедлива и для неотрицательных неразложимых матриц.

Теорема 2. *Пусть A — неразложимая неотрицательная матрица. Тогда алгебраическая кратность характеристического числа $\rho(A)$ матрицы A равна единице.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A (с учетом их кратностей). Существует невырожденная матрица T такая, что $A = TJT^{-1}$, где J — треугольная матрица с диагональными элементами, равными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (например, J — жорданова форма A). Очевидно, $(I + A)^{n-1} = T(I + J)^{n-1}T^{-1}$ и, следовательно, все характеристические числа матрицы $(I + A)^{n-1}$ совпадают с диагональными элементами треугольной матрицы $(I + J)^{n-1}$, т. е. вычисляются по формулам $(1 + \lambda_k)^{n-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно убедиться (сделайте рисунок!), что $|1 + \lambda_k| \leqslant 1 + \rho(A)$, для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_k = \rho(A)$. По теореме 1 среди характеристических чисел матрицы A есть равные $\rho(A)$. Поэтому спектральный радиус матрицы $(I + A)^{n-1}$ равен $(1 + \rho(A))^{n-1}$. Матрица $(I + A)^{n-1}$ при принятых нами условиях положительна, следовательно, $(1 + \rho(A))^{n-1}$ — ее алгебраически простое характеристическое число, значит, среди всех характеристических чисел матрицы A (с учетом их кратностей) найдется только одно, равное $\rho(A)$. $\square$

Через $S(A)$ будем далее обозначать окружность с центром в начале координат радиуса $\rho(A)$. Окружность $S(A)$ называют *спектральной окружностью* матрицы A. Если матрица A неразложима и неотрицательна, то среди ее характеристических чисел может оказаться несколько, лежащих на $S(A)$. Такова, например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристические числа этой матрицы делят ее спектральную окружность пополам.

Оказывается, что характеристические числа любой неразложимой неотрицательной матрицы распределяются по ее спектральной окружности аналогично.

Чтобы установить это, нам потребуется

Теорема 3. *Пусть A — неразложимая неотрицательная матрица, $|B| \leqslant A$. Если при этом $\rho(B) = \rho(A)$, и μ — характеристическое число матрицы B такое, что $\mu = q_0\rho(A)$, $|q_0| = 1$, то матрицы B и q_0A подобны.*

Доказательство. По условию теоремы существует не равный нулю вектор x такой, что $Bx = \mu x$. Справедлива цепочка соотноше-

ний
$$\rho(A)|x| = |\mu x| = |Bx| \leqslant |B||x| \leqslant A|x|. \tag{4.1}$$
Покажем, что $z = A|x| - \rho(A)|x| = 0$. Прежде всего заметим, что $z \geqslant 0$. Далее, поскольку матрица A^T так же, как и матрица A, неотрицательна и неразложима, то по теореме 1 существует положительный вектор y такой, что $A^Ty = \rho(A)y$. Тогда получаем, что $(z, y) = (A|x|, y) - \rho(A)(|x|, y) = 0$, а это невозможно, если $z \neq 0$. Таким образом, $A|x| = \rho(A)|x|$, и из (4.1) вытекает, что $(A - |B|)|x| = 0$. Поскольку $A - |B| \geqslant 0$, а вследствие теорем 1, 2 справедливо неравенство $|x| > 0$, отсюда получаем, что $|B| = A$. Положим $q_k = x_k/|x_k|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $D = \operatorname{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Очевидно, что $|q_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$,
$$D|x| = x,\ BD|x| = Bx = q_0\rho(A)x = q_0DA|x|,$$
следовательно, $(q_0^{-1}D^{-1}BD - A)|x| = 0$. Пусть $C = q_0^{-1}D^{-1}BD$. Нетрудно видеть, что $|C| = |B|$, значит, $|C| = A$, и, таким образом, $(|C| - C)|x| = 0$. Отделяя вещественную и мнимую части матрицы $C - |C|$, получим, что $(|C| - \operatorname{Re} C)|x| = 0$. Очевидно, что $\operatorname{Re} C \leqslant |C|$, следовательно, $|C| = \operatorname{Re} C$, т. е. $C = |C|$, $C = A$, и $B = Dq_0AD^{-1}$. $\square$

Теорема 4. *Пусть A — неразложимая неотрицательная матрица и пусть λ_0, λ_1, $\ldots$, λ_{p-1} — все характеристические числа матрицы A, принадлежащие $S(A)$*[1]*. Тогда все они алгебраически простые и*
$$\lambda_k = \rho(A)\left(\cos\frac{2\pi k}{p} + i\sin\frac{2\pi k}{p}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1. \tag{4.2}$$

Доказательство. При $p = 1$ доказываемое утверждение — очевидное следствие теорем 1, 2. Пусть $p > 1$, и пусть $\lambda = q\rho(A) \in S(A)$ есть характеристическое число матрицы A. Используем теорему 3, полагая $B = A$, $\mu = \lambda$. Получим, что матрицы A и qA подобны. Значит, их характеристические числа (с учетом кратностей) совпадают. Каждое характеристическое число матрицы A, принадлежащее $S(A)$, есть $q\rho(A)$ при соответствующем выборе q, $|q| = 1$. По теореме 2 число $\rho(A)$ — алгебраически простое характеристическое число матрицы A. Поэтому все характеристические числа матрицы A, лежащие на $S(A)$, алгебраически простые. Пусть $q\rho(A)$, $\tilde{q}\rho(A) \in S(A)$ — характеристические числа матрицы A. Тогда $A = qDAD^{-1} = \tilde{q}\tilde{D}A\tilde{D}^{-1}$, следовательно,
$$A = \tilde{D}D\tilde{q}qAD^{-1}\tilde{D}^{-1} = (\tilde{D}D)\tilde{q}qA(\tilde{D}D)^{-1}, \quad A = D^{-1}q^{-1}AD.$$

[1] Для определенности считаем их упорядоченными по неубыванию аргумента.

Отсюда вытекает, что $(\tilde{q}q)\rho(A)$, $q^{-1}\rho(A)$ — характеристические числа матрицы A. Таким образом, если $\rho(A)$, $q_1\rho(A)$, $\ldots$, $q_{p-1}\rho(A)$ — все характеристические числа матрицы A, принадлежащие $S(A)$, то множество чисел $G = \{q_0 = 1,\ q_1, \ldots, q_{p-1}\}$ таково, что если $q \in G$, то $q^{-1} \in G$, если $q, \tilde{q} \in G$, то $q\tilde{q} \in G$. Упорядочим все числа из G по возрастанию аргумента. Ясно, что $q_k \in G$ лишь если $q_k/q_1 = q_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, p-1$; $q_{p-1}q_1 \in G$ лишь при условии, что $q_{p-1}q_1 = 1$. Отсюда следует, что $\arg q_k = (2\pi/p)k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, т. е. формула (4.2) доказана. $\square$

Замечание 1. Из доказательства теоремы 4 следует, что если на спектральной окружности лежат p характеристических чисел неразложимой неотрицательной матрицы A, то матрицы A и q_1A, где $q_1 = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$ подобны. Поэтому вся система характеристических чисел матрицы A инвариантна относительно поворота плоскости на угол $2\pi/p$.

Упражнение. Сделайте рисунок, показывающий расположение всех характеристических чисел неразложимой неотрицательной матрицы A. Особо разберите случай, когда матрица A невырождена, а n — простое число.

Замечание 2. В ходе доказательства теоремы 4 установлено, что множество G — конечная абелева группа. Обоснование на языке теории групп того, что точки G — корни степени p из единицы см., например, в [10] (по списку дополнительной литературы), задача 1637.

Глава 20

Введение в численные методы линейной алгебры

§ 1. Прямые методы решения систем уравнений

В этом и последующем параграфах изучаются методы решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b. \tag{1.1}$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ предполагается невырожденной и, вообще говоря, комплексной. Под скалярным произведением векторов $x, y \in \mathbb{C}^n$, как правило, будем понимать стандартное скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, соответственно, $|x| = (x, x)^{1/2}$.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разбить на два класса: прямые и итерационные. Прямые методы характеризуются тем, что если пренебречь ошибками округления то решение системы может быть получено за конечное число арифметических операций (зависящее лишь от порядка системы). Таков, например, метод Гаусса. Обычно прямые методы используют представление матрицы системы уравнений в виде произведения достаточно простых сомножителей.

1. Метод Гаусса разложения матриц на треугольные множители. В п. 6, с. 55, было показано, что если A — произвольная невырожденная матрица порядка n, то при помощи метода Гаусса с выбором главных элементов можно построить элементарные нижние треугольные матрицы L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, с ненулевыми элементами на главной диагонали, матрицы перестановок P_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и верхнюю треугольную матрицу U с единичными элементами на главной диагонали такие, что

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U. \tag{1.2}$$

После того, как представление (1.2) получено, решение системы линейных уравнений

$$Ax = b \tag{1.3}$$

при любой правой части b может быть выполнено путем вычисления вектора

$$f = L_n P_n \cdots L_1 P_1 b, \tag{1.4}$$

а затем решения системы уравнений

$$Ux = f \tag{1.5}$$

с треугольной матрицей U. Вычисление вектора f и решение системы уравнений (1.5) требуют около $2n^2$ арифметических операций, т. е. существенно менее трудоемко, чем построение представления (1.2) (см. п. 6, с. 55).

Вычисление вектора f также можно оформить как решение системы линейных уравнений с треугольной невырожденной матрицей. С этой целью проанализируем подробнее строение матрицы $P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_n L_n^{-1}$. Матрица P_2 отличается от единичной перестановкой столбцов с номерами два и i, $i \geqslant 2$ (см. описание метода Гаусса в п. 6, с. 55). Поэтому матрица $L_1^{-1} P_2$ отличается от L_1^{-1} перестановкой столбцов с номерами два и i, следовательно $L_1^{-1} P_2 = P_2 \hat{L}_1^{-1}$, где матрица $\hat{L}_1^{-1}$ отличается от L_1^{-1} перестановкой элементов элементов с номерами два и i ее первого столбца. Таким образом, очевидно, справедливо следующее равенство:

$$P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_n \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \cdots \tilde{L}_n^{-1},$$

где каждая из матриц $\tilde{L}_i^{-1}$ может отличаться от матрицы $\tilde{L}_i^{-1}$ лишь перестановкой элементов i-го столбца, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Можно написать теперь, что

$$A = PLU,$$

где $P = P_1 P_2 \cdots P_n$, $L = \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \cdots \tilde{L}_n^{-1}$ есть невырожденная нижняя треугольная матрица.

Если матрицы P, L, U построены, решение системы (1.3) вычисляется путем последовательного выполнения следующих этапов:

строится вектор $\tilde{b} = P^{-1} b = P_n P_{n-1} \cdots P_1 b$,

решается система уравнений $Ly = \tilde{b}$ с нижней треугольной матрицей,

решается система уравнений $Ux = y$ с верхней треугольной матрицей.

Способ построения матриц P, L, U описан в п. 6, с. 55.

Укажем класс матриц, для которых при реализации метода Гаусса можно отказаться от выбора главных элементов, т. е. считать, что все матрицы P_1, P_2, $\ldots$, P_n единичные.

Теорема 1. *Для того чтобы квадратная матрица A была представима в виде*

$$A = LU, \tag{1.6}$$

где L — нижняя треугольная невырожденная матрица, U — верхняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были отличны от нуля.

Доказательство. Необходимость. Пусть A_{11} — главная подматрица матрицы A. Запишем равенство (1.6) в блочном виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\det A_{11} = \det(L_{11}U_{11}) = \det L_{11} \neq 0$, так как все элементы главной диагонали матрицы L отличны от нуля.

Достаточность. Используем индукцию по порядку матрицы A. Для матрицы первого порядка утверждение теоремы выполняется тривиальным образом. Пусть оно верно для некоторого $k \geqslant 1$. Докажем, что тогда оно будет верным и для матрицы порядка $k+1$. Запишем матрицу A_{k+1} порядка $k+1$ в блочном виде

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & a_k \\ b_k & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Здесь A_k — матрица порядка k, a_k — столбец длины k, b_k — строка длины k. Матрица A_k по условию теоремы невырождена и по индуктивному предположению может быть представлена в виде $A_k = L_kU_k$, где L_k — нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на диагонали, а U_k — верхняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами. Покажем, что матрицу A_{k+1} можно представить в виде произведения двух блочных матриц:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ l_k & l_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & u_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Здесь l_k — искомая строка длины k, u_k — искомый столбец длины k. Подсчитывая произведение сомножителей в правой части равенства (1.8) и приравнивая результат поблочно матрице A_{k+1} (см. (1.7)), получим

$$L_kU_k = A_k,\ l_kU_k = b_k,\ L_ku_k = a_k,\ l_ku_k + l_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1}.$$

Отсюда можно найти l_k, u_k, решая системы уравнений

$$l_k U_k = b_k, \tag{1.9}$$

$$L_k u_k = a_k, \tag{1.10}$$

и затем вычислить

$$l_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - l_k u_k. \tag{1.11}$$

При этом $l_{k+1,k+1}$ не может обратиться в нуль, так как вследствие равенства (1.8) имеем $\det(A_{k+1}) = \det(L_k) l_{k+1,k+1}$, а определитель матрицы A_{k+1} по сделанному нами предположению отличен от нуля. Таким образом, искомое треугольное разложение матрицы A_{k+1} построено. □

Из только что доказанной теоремы вытекает, что, по крайней мере, в следующих двух случаях при реализации метода Гаусса можно отказаться от выбора главных элементов: 1) матрица A эрмитова и положительно определена (см. теорему 4, с. 212), 2) A есть матрица с диагональным преобладанием (см. упражнение на с. 351).

2. Метод Холесского. В случае, когда матрица эрмитова и положительно определена, можно добиться существенного сокращения числа операций и памяти, необходимых для разложения ее на треугольные множители. В основе соответствующего алгоритма лежит

Теорема 2. *Пусть матрица A эрмитова и положительно определена. Тогда существует нижняя треугольная матрица L с положительными элементами на диагонали такая, что $A = LL^*$.*

Доказательство. Используем индукцию по порядку матрицы A. Для матрицы порядка $k = 1$ имеем тривиальное равенство $A_1 = a_{11} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{11}}$. Пусть нужное разложение получено для некоторого $k \geqslant 1$. Покажем, как его построить для матрицы порядка $k+1$. Запишем матрицу A_{k+1} как блочную:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & a_k \\ a_k^* & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

В силу предположения индукции $A_k = L_k L_k^*$, где L_k — нижняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали. Будем искать разложение матрицы A на треугольные множители в виде

$$A_{k+1} = L_{k+1} L_{k+1}^* = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ l_k^* & l_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_k^* & l_k \\ 0 & l_{k+1,k+1} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Выполняя умножение в правой части последнего равенства и сравнивая поблочно результат с матрицей A_{k+1}, получим систему линейных уравнений

$$L_k l_k = a_k \tag{1.13}$$

для определения вектора l_k и уравнение $l_k^* l_k + l_{k+1,k+1}^2 = a_{k+1,k+1}$ для элемента $l_{k+1,k+1}$. Можно считать, что $l_{k+1,k+1} > 0$, так как вследствие (1.12) имеем: $|A_{k+1}| = |A_k|\, l_{k+1,k+1}^2$, причем $|A_k|, |A_{k+1}| > 0$, так как по условию матрицы A_k, A_{k+1} положительно определены. Таким образом, для построения матрицы L_{k+1} нужно решить систему уравнений (1.13) с треугольной матрицей, а затем вычислить $l_{k+1,k+1}$ по формуле $l_{k+1,k+1} = \sqrt{a_{k+1,k+1} - l_k^* l_k}$. $\square$

Доказательство теоремы 2, фактически, описывает алгоритм разложения на треугольные множители произвольной эрмитовой положительно определенной матрицы. Нетрудно видеть, что его реализация по затратам памяти и объему вычислений оказывается в два раза более экономичной, чем разложение на треугольные множители произвольной невырожденной матрицы.

После того, как матрица L построена, решение системы уравнений $Ax = b$ сводится к последовательному решению систем уравнений $Ly = b$, $L^* x = y$ с треугольными матрицами.

3. Унитарная триангуляция матриц. В этом пункте будет доказана

Теорема 3. *Пусть A — произвольная невырожденная матрица. Тогда существует унитарная матрица Q такая, что*

$$A = QU, \tag{1.14}$$

где U — верхняя треугольная матрица.

Если разложение (1.14) получено, то решение системы уравнений $Ax = b$ сводится к вычислению вектора $f = Q^* b$ и решению системы уравнений $Ux = f$ с треугольной матрицей.

При построении разложения (1.14) обычно используются специальные унитарные матрицы, к описанию которых мы переходим.

3.1. Матрицы вращения. Матрица

$$Q_{kl} = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n,$$

называется *матрицей вращения*, если $q_{kk} = c$, $q_{ll} = \bar{c}$, $q_{ii} = 1$ при $i \neq k, l$, $q_{kl} = -s$, $q_{lk} = \bar{s}$, все остальные элементы матрицы Q_{kl} равны нулю, причем $|c|^2 + |s|^2 = 1$.

Нетрудно видеть, что Q_{kl} — унитарная матрица.

Если числа c, s вещественны, то матрица $Q = Q_{kl}$ ортогональна. При этом порождаемое ей преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением представляет собой поворот на угол $\varphi = \operatorname{arctg}(s/c)$ в двумерном подпространстве (плоскости), натянутом на векторы i^k, i^l естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$. Матрица Q^T, обратная к Q, выполняет поворот в той же плоскости в обратном направлении.

Пусть x — произвольный вектор пространства $\mathbb{C}^n$. Ясно, что $(Qx)_i = \ x_i$ при $i \neq k, l$,

$$(Qx)_k = cx_k - sx_l,$$

$$(Qx)_l = \bar{s}x_k + \bar{c}x_l.$$

Положим $\rho = (|x_k|^2 + |x_l|^2)^{1/2}$. Пусть $c = 1, s = 0$, если $\rho = 0$, и $c = \bar{x}_k/\rho$, $s = -\bar{x}_l/\rho$, если $\rho > 0$. Тогда $(Qx)_k = \rho$, $(Qx)_l = 0$.

Теперь совершенно ясно, что если x — произвольный ненулевой вектор пространства $\mathbb{C}^n$, то выбирая последовательно числа $c_n, s_n, c_{n-1}, s_{n-1}, \ldots, c_2, s_2$, можно построить матрицы вращения $Q_{1,n}$, $Q_{1,n-1}$, $\ldots$, $Q_{1,2}$ такие, что $Qx = |x|\, i^1$. Здесь $Q = Q_{1,2} \cdots Q_{1,n-1} Q_{1,n}$.

Таким образом, любой ненулевой вектор при помощи ортогональной матрицы можно преобразовать в вектор, совпадающий по направлению с вектором i^1 естественного базиса.

Пусть теперь x, y — два произвольных ненулевых вектора пространства $\mathbb{C}^n$. Как только что было показано, существуют ортогональные матрицы Q_x и Q_y такие, что $Q_x x = |x| i^1$, $Q_y y = |y| i^1$. Отсюда вытекает, что $Qx = (|x|/|y|)y$, где $Q = Q_y^T Q_x$, т. е. для любой пары ненулевых векторов найдется унитарная матрица, преобразующая первый вектор в вектор, совпадающий по направлению со вторым.

3.2. Матрица отражения. Пусть $w = \{w_i\}_{i=1}^n$ — произвольно выбранный вектор единичной длины пространства $\mathbb{C}^n$. Матрица

$$R = I - 2ww^*$$

называется *матрицей отражения*. Поясним, что w трактуется здесь как вектор столбец, так что $R = \{\delta_{ij} - 2w_i\bar{w}_j\}_{i,j=1}^n$.

Матрица R эрмитова. Покажем, что она унитарна. Действительно,

$$R^*R = R^2 = I - 4ww^* + 4ww^*ww^* = I,$$

так как $w^*w = |w|^2 = 1$.

Заметим, далее, что

$$Rw = w - 2ww^*w = -w, \quad Rz = z - 2ww^*z = z, \tag{1.15}$$

если $w^*z = (w, z) = 0$, т. е. векторы w и z ортогональны

Пусть теперь x — произвольный вектор. По теореме 2, с. 137, он однозначно представим в виде $x = \alpha w + z$, где α некоторое число, z — некоторый вектор, ортогональный w. Из равенств (1.15) вытекает, что $Rx = -\alpha w + z$.

Можно сказать, таким образом, что матрица R выполняет отражение вектора x относительно $(n-1)$-мерной гиперплоскости, ортогональной вектору w. Это свойство матрицы R и позволяет называть ее матрицей отражения.

Рассмотрим следующую задачу. Даны ненулевой вектор a и вектор единичной длины e. Требуется построить матрицу отражения R, такую, что $Ra = \mu e$, где μ — число (ясно, что $|\mu| = |a|$, поскольку матрица R унитарна).

Нетрудно видеть (сделайте рисунок!), что решение задачи — матрица отражения, определяемая вектором

$$w = (a - |a|e)/|a - |a|e| \tag{1.16}$$

или вектором $w = (a + |a|e)/|a + |a|e|$. При вычислениях для минимизации погрешностей округления следует выбрать вектор w с бо́льшим знаменателем.

Полезно отметить, что если a — произвольный ненулевой вектор то матрица отражения R может быть построена так, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^n$

$$(a, Rx) = |a|x_k, \tag{1.17}$$

где k — заданное целое число, лежащее в пределах от 1 до n. Для этого, очевидно, в формуле (1.16) нужно положить $e = i^k$.

3.3. Доказательство теоремы 3. Пусть a^1 — первый столбец матрицы A, $e^1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $w^1 = (a^1 \pm |a^1|e^1)/|a^1 \pm |a^1|e^1||$ (знак выбирается, как указано выше), $R_1 = E - 2w^1w^{1*}$. Образуем матрицу $A_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{i,j=1}^n = R_1A$. Ясно, что первый столбец этой матрицы коллинеарен вектору e^1 и, следовательно, имеет вид $(a_{11}^{(1)}, 0, \ldots, 0)^T$, причем $|a_{11}^{(1)}| = |a^1| \neq 0$.

Рассмотрим столбец $\widetilde{a}^2 = (a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \ldots, a_{n2}^{(1)})^T$ длины $n-1$. Понятно, что $\widetilde{a}^2 \neq 0$, так как в противном случае $|A_1| = 0$, но, с другой стороны, поскольку определитель эрмитовой унитарной матрицы равен ± 1, то $|A_1| = \pm |A|$, а матрица A по предположению невырождена.

Пусть $\widetilde{w} = (\widetilde{a}^2 \pm |\widetilde{a}^2|\widetilde{e}^1)/|\widetilde{a}^2 \pm |\widetilde{a}^2|\widetilde{e}^1||$, где $\widetilde{e}^1 = (1, 0, \dots, 0)$ — вектор длины $n-1$. Положим $\widetilde{R}_2 = \widetilde{E} - 2\widetilde{w}\widetilde{w}^*$, где $\widetilde{E}$ — единичная матрица размерности $n-1$, и образуем унитарную матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^T & \widetilde{R}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь 0 — нулевая строка длины $n-1$. Пусть $A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{i,j=1}^n = R_2 A_1$. Нетрудно видеть, что первые столбцы матриц A_1, A_2 совпадают, а второй столбец матрицы A_2 имеет вид $(a_{12}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, 0, \dots, 0)^*$, причем $|a_{22}^{(2)}| = |\widetilde{a}^2| \neq 0$. Выполняя аналогичные построения, получим унитарные матрицы $R_3, R_4, \dots, R_n$ такие, что $R_n R_{n-1} \cdots R_1 A = A_n$, где A_n — верхняя треугольная матрица с ненулевыми элементами $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$ на диагонали, следовательно, $A = QU$, где $U = A_n$, $Q = R_1^* R_2^* \cdots R_n^*$ суть унитарная матрица. $\square$

Доказательство теоремы 3, фактически, дает и алгоритм построения матриц Q, U. Нетрудно убедиться, что их вычисление требует приблизительно в два раза больше арифметических операций, чем разложение матрицы на треугольные множители по методу Гаусса. Важным положительным качеством описанного алгоритма является возможность его непосредственного применения для произвольной невырожденной матрицы без какой-либо перенумерации ее строк.

Упражнение. Постройте алгоритм, аналогичный описанному при доказательстве теоремы 3 и основанный на использовании матриц вращения.

§ 2. Итерационные методы Якоби и Зейделя

При реализации прямых методов важно, чтобы все данные располагались в оперативной (быстрой) памяти компьютера. Если порядок системы настолько велик, что ее матрица может быть сохранена только с использованием внешней (медленной) памяти, например, жесткого диска, то время, затрачиваемое на решение системы, существенно увеличивается. Для больших систем предпочтительнее оказываются итерационные методы. Основная идея этих методов состоит в построении последовательности векторов x^k, $k = 1, 2, \dots$, сходящейся к решению x системы (1.1). За приближенное решение принимается вектор x^k при достаточно большом k.

В качестве критерия останова итерационного процесса обычно принимают либо достаточную близость двух соседних приближений x^k и x^{k+1}, либо достаточную малость невязки $Ax^k - b$.

Всюду в дальнейшем через z^k будем обозначать вектор $x^k - \hat{x}$, где $\hat{x}$ — решение системы (1.1), т. е. *погрешность приближения* с номером k.

1. Метод Якоби[1]. Будем считать, что все диагональные элементы матрицы A отличны от нуля. Перепишем систему (1.1), разрешая каждое уравнение относительно переменной, стоящей на диагонали:

$$\hat{x}_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \hat{x}_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \hat{x}_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Выберем некоторое начальное приближение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и построим последовательность векторов $x^1, x^2, \ldots,$ определяя вектор x^{k+1} по уже найденному вектору x^k при помощи соотношений:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Формулы (2.2) определяют итерационный метод решения системы (1.1), называемый *методом Якоби.*

Укажем легко проверяемое достаточное условие сходимости этого метода. Напомним, что для матрицы A выполнено *условие диагонального преобладания*, если

$$q = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Пусть матрица A системы* (1.1) — *матрица с диагональным преобладанием. Тогда итерационный метод Якоби сходится при любом начальном приближении x^0; справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|z^k\|_\infty \leqslant q^k \|z^0\|_\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\hat{x}$ — решение системы уравнений (1.1). Вычитая почленно из равенства (2.2) равенство (2.1), получим

$$z_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

[1] Карл Густав Якоб Якóби (Carl Gustav Jacob Jacobi; 1804 — 1851) — немецкий математик.

следовательно,

$$|z_i^{k+1}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}|z_j^k|+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}|z_j^k|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j^k|= \\ = q\max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j^k|,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, откуда вытекает, что

$$\|z^{k+1}\|_\infty \leqslant q\|z_j^k\|_\infty$$

для любого $k = 0, 1, \ldots$, поэтому

$$\|z^k\|_\infty \leqslant q^k\|z_j^0\|_\infty \to 0$$

при $k \to \infty$, поскольку $0 < q < 1$, а это и означает, что $x^k \to x$. $\square$

Оценка (2.4) показывает, что, чем меньше q, т. е. чем выше диагональное преобладание матрицы A, тем быстрее сходится метод Якоби.

2. Метод Зейделя. Метод релаксации. Формулы (2.2) допускают естественную модификацию. Именно, при вычислении x_i^{k+1} будем использовать уже найденные компоненты вектора x^{k+1}, т. е. $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots x_{i-1}^{k+1}$. В результате приходим к итерационному *методу Зейделя*[1]:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

Метод Зейделя позволяет более экономно расходовать память компьютера, поскольку в данном случае вновь получаемые компоненты вектора x^{k+1} можно размещать на месте соответствующих компонент вектора x^k, в то время как при реализации метода Якоби все компоненты векторов x^k, x^{k+1} должны одновременно находиться в памяти компьютера.

Достаточное условие сходимости и оценку скорости сходимости метода Зейделя дает

Теорема 2. *Пусть матрица A — матрица с диагональным преобладанием. Тогда метод Зейделя сходится при любом начальном приближении x^0; справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\|z_j^k\|_\infty \leqslant q^k\|z^0\|_\infty. \tag{2.6}$$

[1] Филипп Людвиг Зейдель (Philipp Ludwig von Seidel; 1821 — 1896) — немецкий математик и астроном.

Доказательство. Вычитая почленно из равенства (2.5) равенство (2.1), получим

$$z_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Пусть $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^{k+1}| = |z_l^{k+1}|$. Из l-того уравнения системы (2.7) вытекает, что

$$|z_l^{k+1}| \leqslant \alpha_l \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^{k+1}| + \beta_l \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j^{k}|,$$

где

$$\alpha_l = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|}, \quad \beta_l = \sum_{j=l+1}^{n} \frac{|a_{lj}|}{|a_{ll}|},$$

следовательно,

$$\|z^{k+1}\|_\infty \leqslant \frac{\beta_l}{1 - \alpha_l} \|z^k\|_\infty.$$

Из условия (2.3) получаем, что $\alpha_l + \beta_l \leqslant q < 1$, но тогда и $q\alpha_l + \beta_l \leqslant q$, таким образом, $\beta_l/(1-\alpha_l) \leqslant q$, поэтому $\|z^{k+1}\|_\infty \leqslant q \max \|z^k\|_\infty$. Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими рассуждениями из доказательства предыдущей теоремы. □

Зачастую существенного ускорения сходимости можно добиться за счет введения в расчетные формулы числового параметра. В качестве примера приведем итерационный процесс

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega) x_i^k + \omega \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}} \right), \tag{2.8}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots$ Этот метод называется *методом релаксации*, число ω — *релаксационным параметром*. При $\omega = 1$ метод переходит в метод Зейделя.

Ясно, что по затратам памяти и объему вычислений на каждом шаге итераций метод релаксации не отличается от метода Зейделя.

§ 3. Элементы общей теории итерационных методов

1. Далее наряду со стандартным скалярным произведением будем использовать так называемое *энергетическое скалярное произведение* и соответствующую ему норму на пространстве $\mathbb{C}^n$. Именно, если $D \in M_n$ — эрмитова положительно определенная матрица, то по определению $(x, y)_D = (Dx, y)$. Читателю предлагается самостоятельно убедиться что указанное соотношение действительно определяют скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^n$. Будем полагать также, что $\|x\|_D = (Dx, x)^{1/2}$.

2. Придадим итерационным методам, рассмотренным в предыдущих пунктах, матричные формулировки. Начнем с метода Якоби. Нетрудно видеть, что равенства (2.2) можно записать в матричном виде

$$D(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b, \tag{3.1}$$

где $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Для того, чтобы придать матричную форму записи методам Зейделя и релаксации, обозначим через L нижнюю треугольную матрицу, поддиагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы A, а все диагональные элементы равны нулю. Через R обозначим верхнюю треугольную матрицу такую, что $A = L + D + R$. Равенства (2.8) могут быть переписаны тогда в следующем виде:

$$\frac{1}{\omega}(D + \omega L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b. \tag{3.2}$$

3. Будем рассматривать общий класс итерационных методов, определяемых соотношениями

$$\frac{1}{\tau}B(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.3}$$

Здесь B — невырожденная матрица, $\tau > 0$ — число, называемое *итерационным параметром.* Для того, чтобы найти вектор x^{k+1} по уже известному вектору x^k, нужно решить систему линейных уравнений

$$Bx^{k+1} = f^k, \tag{3.4}$$

где $f^k = Bx^k - \tau(Ax^k - b)$.

Очевидно, при построении итерационного метода (3.3) матрица B должна выбираться так, чтобы решение системы уравнений вида (3.4) выполнялось намного быстрее, чем решение исходной системы уравнений (1.1).

Итерационные методы Якоби, Зейделя и релаксации являются частными случаями метода (3.3). Например, в случае метода Якоби $B = D$, $\tau = 1$.

4. Наша ближайшая цель — получить условия на матрицу B и параметр τ, обеспечивающие сходимость метода (3.3).

Если $\hat{x}$ — решение системы (1.1), то, очевидно,

$$\frac{1}{\tau}B(\hat{x}-\hat{x})+A\hat{x}=b. \tag{3.5}$$

Вычитая почленно равенства (3.3), (3.5), получим

$$\frac{1}{\tau}B(z^{k+1}-z^k)+Az^k=0, \tag{3.6}$$

откуда

$$z^{k+1}=Sz^k, \tag{3.7}$$

где

$$S=I-\tau B^{-1}A. \tag{3.8}$$

и, следовательно,

$$z^k=S^kz^0, \tag{3.9}$$

Понятно, что сходимость итерационного метода (3.3) определяется свойствами матрицы S.

Теорема 1. *Для того, чтобы итерационный метод* (3.3) *сходился при любом начальном приближении x^0, необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус $\rho(S)$ матрицы S был меньше единицы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть λ — собственное число матрицы S такое, что $|\lambda|\geqslant 1$, e — соответствующий этому собственному числу нормированный собственный вектор матрицы S. Выберем в качестве начального приближения в итерационном методе (3.3) вектор $x^0=x+e$, где x — решение уравнения (1.1). Тогда в соответствии с (3.9) имеем $z^k=\lambda^ke$, следовательно, $|z^k|=|\lambda|^k$. Очевидно, либо $|z^k|\to\infty$ при $k\to\infty$, либо $|z^k|=1$ для всех $k=1,2,\ \ldots,$ т. е. метод (3.3) не сходится.

Достаточность. Если спектральный радиус матрицы S меньше единицы, то она является сходящейся матрицей (см. с. 297), т. е. $S^k\to 0$ при $k\to\infty$, и тогда из (3.9) вытекает, что $z^k\to 0$ при $k\to\infty$. □

Из теоремы 1 и оценки (4.8), с. 334, сразу же вытекает

Следствие 1. *Для сходимости итерационного метода* (3.3) *достаточно, чтобы для какой-либо согласованной нормы выполнялось условие $\|S\|<1$.*

Например, при $\tau=1$ итерационный метод (3.3) сходится, если матрицы A и B достаточно близки, т. е. $\|B^{-1}\|\|B-A\|<1$. Используя оценку (4.8), с. 352, получим отсюда, что итерационный метод (3.3) сходится, если $\tau = 1$ и

$$\frac{\|B - A\|}{\|A\|} \operatorname{cond}(A) < 1/2.$$

Опираясь на теорему 1, получим часто используемое для систем уравнений с эрмитовой положительно определенной матрицей условие сходимости итерационного процесса (3.3).

Теорема 2 (Самарский[1]). *Пусть матрица A положительно определена и пусть для любого не равного нулю вектора x из $\mathbb{C}^n$ выполнено неравенство*

$$(B_1 x, x) > (\tau/2)(Ax, x), \tag{3.10}$$

где $B_1 = (1/2)(B + B^*)$. Тогда матрица B невырождена, и итерационный процесс (3.3) *сходится при любом начальном приближении x^0. Обратно, если матрица A положительно определена и итерационный процесс* (3.3) *сходится при любом начальном приближении x^0, то выполнено условие* (3.10).

Доказательство. Невырожденность матрицы B сразу же следует из условия (3.10) и положительной определенности матрицы A (см. упражнение 3 на с. 197). Покажем, что если выполнено условие (3.10), то $\rho(S) < 1$, где S — матрица, определенная равенством (3.8). Вследствие теоремы 1 отсюда будет вытекать сходимость итерационного метода (3.3). Пусть λ, x — собственная пара матрицы S. Тогда $Bx - \tau Ax = \lambda Bx$, поэтому

$$\lambda = \frac{(Bx, x) - \tau(Ax, x)}{(Bx, x)}.$$

Используя формулу (8.1), с. 62, представим матрицу B в виде

$$B = B_1 + iB_2, \tag{3.11}$$

где $B_1 = (1/2)(B + B^*)$, B_2 — эрмитовы матрицы. Тогда

$$\lambda = \frac{(B_1 x, x) - \tau(Ax, x) + i(B_2 x, x)}{(B_1 x, x) + i(B_2 x, x)},$$

следовательно,

$$|\lambda|^2 = \frac{((B_1 x, x) - \tau(Ax, x))^2 + (B_2 x, x)^2}{(B_1 x, x)^2 + (B_2 x, x)^2}.$$

[1] Александр Андреевич Самарский (1919 — 2008) — советский, российский математик.

Запишем последнее равенство в виде

$$|\lambda|^2 = \frac{(1-a)^2 + b^2}{1+b^2}, \tag{3.12}$$

где $a = \tau(Ax, x)/(B_1x, x)$, $b = (B_2x, x)/(B_1x, x)$. Из условия (3.10) получаем, что $0 < a < 2$, поэтому $|1-a| < 1$, откуда, очевидно, вытекает, что $|\lambda| < 1$. Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что если итерационный процесс (3.3) сходится при любом начальном приближении, то по теореме 1 все собственные числа матрицы S по модулю строго меньше единицы, и тогда из представления (3.12) получаем, что $0 < a < 2$, следовательно, условие (3.10) выполнено. □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для погрешностей итерационного процесса* (3.3) *при любом* $k \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$(Az^{k+1}, z^{k+1}) < (Az^k, z^k), \tag{3.13}$$

если $z^k \neq 0$.

Доказательство. Используя тривиальное тождество

$$z^k = (1/2)(z^{k+1} + z^k) - (1/2)(z^{k+1} - z^k),$$

преобразуем уравнение (3.6) к виду

$$\frac{1}{\tau}(B - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k) + (1/2)A(z^{k+1} + z^k) = 0.$$

Умножая теперь скалярно обе части последнего равенства на вектор $2(z^{k+1} - z^k)$ и используя представление (3.11), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tau}((B_1 - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k)+ \\ + i\frac{2}{\tau}(B_2(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k)+ \\ + (Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) + i\,\mathrm{Im}(Az^k, z^{k+1}) = 0,\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tau}((B_1 - (\tau/2)A)(z^{k+1} - z^k), z^{k+1} - z^k)+ \\ + (Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) = 0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Если $z^k \neq 0$, то вследствие невырожденности оператора B из (3.6) вытекает, что $z^{k+1} - z^k \neq 0$. Тогда на основании условия (3.10) из равенства (3.14) получаем, что $(Az^{k+1}, z^{k+1}) - (Az^k, z^k) < 0$. □

5. Если матрица A положительно определена, то уравнение (1.1), с. 369, эквивалентно задаче минимизации функции (функционала)

$$F(x) = (Ax, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, b)\,^{1)}. \tag{3.15}$$

Действительно, пусть $\hat{x}$ — решение уравнения (1.1), с. 369. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) = (Ax, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, A\hat{x}) = \\ = (Ax, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, A\hat{x}) + (A\hat{x}, \hat{x}) - (A\hat{x}, \hat{x}) = \\ = (A(x - \hat{x}), x - \hat{x}) - (A\hat{x}, \hat{x}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

следовательно, функции $F(x)$ и $F_0(x) = (A(x - \hat{x}), x - \hat{x})$ отличаются на постоянное слагаемое. Поскольку матрица A положительно определена, то единственной точкой минимума функции F_0, а стало быть, и функции F является $\hat{x}$. Вследствие (3.16) неравенство (3.13) можно записать в виде

$$F(x^{k+1}) < F(x^k). \tag{3.17}$$

Таким образом, можно сказать, что при выполнении условий теоремы 2 итерационный процесс (3.3) является *релаксационным*[2)]: каждое последующее приближение уменьшает значение функционала F. Используя полученные в предыдущем пункте общие результаты, исследуем сходимость метода релаксации (3.2).

Теорема 4. *Пусть матрица A положительно определена,*

$$0 < \omega < 2. \tag{3.18}$$

Тогда итерационный метод (3.2) *сходится при любом начальном приближении x^0.*

Доказательство. Будем опираться на теорему 2. В рассматриваемом случае $B = D + \omega L$, $\tau = \omega$, $B_1 = D + (\omega/2)(L + L^*)$, $A = D + L + L^*$, и условие (3.10) принимает вид $(Dx, x) > (\omega/2)(Dx, x)$ для любого $x \neq 0$. Все диагональные элементы положительно определенной матрицы положительны (см. упражнение 3 на с. 198), поэтому матрица D положительно определена, и условие (3.10) выполнено, если выполнено условие (3.18). $\square$

Теорема 5. *Условие* (3.18) *необходимо для сходимости итерационного процесса* (2.8).

[1)] Функционал F часто называют *энергетическим*. Это связано с задачами физики, в которых возникают уравнения с положительно определенными матрицами.

[2)] Релаксация (лат. relaxatio) — уменьшение напряжения, ослабление.

Доказательство. Запишем равенство (3.8) в виде

$$(D + \omega L)S = (D + \omega L) - \omega A = (1 - \omega)D - \omega R. \tag{3.19}$$

Поскольку L и R — строго треугольные матрицы, а D — диагональная матрица, все диагональные элементы которой отличны от нуля, то, вычисляя определители левой и правой частей равенства (3.19), получим, что $\det(S) = (1 - \omega)^n$, следовательно (см. (4.7), с. 175),

$$\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| = |1 - \omega|^n, \tag{3.20}$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$,λ_n — характеристические числа матрицы S. Если условие (3.18) нарушено, то $|1 - \omega| > 1$, и среди собственных чисел λ_k матрицы S есть хотя бы одно, модуль которого больше единицы, но тогда по теореме 1 найдется начальное приближение x^0, при котором итерационный процесс (2.8) не сходится. $\square$

6. Приведем пример решения задачи об оптимальном выборе итерационного параметра.

Из доказательства теоремы 1 видно, что итерационный процесс (3.3) сходится тем быстрее, чем меньше спектральный радиус матрицы $S = I - \tau B^{-1}A$. В связи с этим возникает задача отыскания такого (*оптимального*) значения итерационного параметра τ, при котором величина $\rho(S)$ принимает минимальное значение.

Наиболее просто эта задача решается в случае, когда матрицы A, B положительно определены. Поскольку в рассматриваемом случае $B = B^*$, т. е. в представлении (3.11) матрица B_2 равна нулю, то из (3.12) получаем, что для любой собственной пары λ, x матрицы S справедливо равенство

$$|\lambda| = \left|1 - \tau\frac{(Ax, x)}{(Bx, x)}\right|. \tag{3.21}$$

Нетрудно видеть, что если x — собственный вектор матрицы S, то x — собственный вектор матрицы $B^{-1}A$ и, следовательно, x — собственный вектор задачи

$$Ax = \lambda Bx \tag{3.22}$$

(см. подробнее п. 4, с. 305). Очевидно, справедливо и обратное: любой собственный вектор задачи (3.22) есть собственный вектор матрицы S.

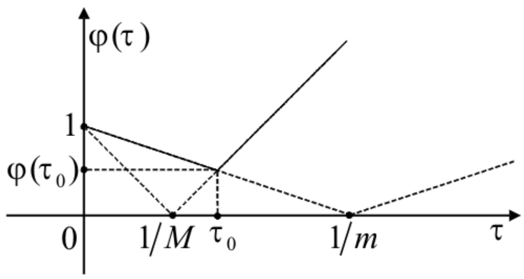


Рис. 1. К выбору оптимального итерационного параметра

Для любой собственной пары x, λ задачи (3.22) справедливо равенство $(Ax, x) = \lambda(Bx, x)$. Поэтому все собственные числа задачи (3.22) положительны. Пусть m — минимальное, а M максимальное из этих чисел. Тогда для любого собственного вектора x матрицы S справедливы неравенства

$$m \leqslant \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \leqslant M. \tag{3.23}$$

Полученные оценки являются точными, поскольку соответствующие неравенства (3.23) превращаются в равенства, если в качестве x взять собственный вектор, отвечающий m или M.

Нетрудно видеть, что функция $g(\mu) = |1 - \tau\mu|$ вещественного переменного μ на любом ограниченном отрезке вещественной оси достигает максимального значения на одном из концов этого отрезка. Поэтому, используя соотношения (3.21), (3.23), получаем, что

$$\rho(S) = \varphi(\tau) = \max\{|1 - \tau m|, |1 - \tau M|\}. \tag{3.24}$$

График функции $\varphi(\tau)$ при $\tau \geqslant 0$ изображен на рис. 1. Нетрудно убедиться, что

$$\min_{\tau \geqslant 0} \varphi(\tau) = \varphi(\tau_0) = \rho_0 = (M - m)/(M + m), \tag{3.25}$$

где $\tau_0 = 2/(M + m)$.

Таким образом, итерационный процесс (3.3) при оптимальном значении итерационного параметра $\tau = \tau_0$ сходится тем быстрее, чем больше m/M, т. е. чем меньше разброс собственных чисел задачи (3.22).

Упражнение. Покажите, что если матрицы A, B эрмитовы и положительно определены, то итерационный метод (3.3) сходится при любом $\tau \in (0, 2/M)$.

7. При сделанных в предыдущем пункте предположениях о матрицах A, B удается получить оценки скорости сходимости сходимости итерационного метода (3.3)

Теорема 6. *Пусть матрицы A, B эрмитовы и положительно определены. Тогда для приближений, построенных по итерационному методу* (3.3) *при $\tau = \tau_0$, справедливы следующие оценки:*

$$\|x^k - \hat{x}\|_A \leqslant \rho_0^k \|x^0 - \hat{x}\|_A, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.26}$$

Доказательство. Используя (3.7), нетрудно убедиться, что

$$A^{1/2} z^{k+1} = (I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}) A^{1/2} z^k,$$

следовательно,

$$\|z^{k+1}\|_A \leqslant \|(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})\|_2 \|z^k\|_A.$$

Матрица $I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$, очевидно, эрмитова. Поэтому

$$\|(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})\|_2 = \rho(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}).$$

Пусть y, λ — собственная пара матрицы $A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$, т. е.

$$A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} y = \lambda y. \tag{3.27}$$

Матрица $B^{-1} A^{1/2}$ обратима. Полагая $y = A^{-1/2} B x$, получим, что собственные значения задачи (3.27) совпадают с собственными значениями задачи (3.22). Поэтому, проводя рассуждения полностью совпадающие с выполненными в п. 6, получим, что $\|z^{k+1}\|_A \leqslant \rho_0 \|z^k\|_A$, откуда, очевидно, следует (3.26). $\square$

Упражнение. Покажите, что если выполнены условия теоремы 6, то справедливы оценки

$$\|x^k - \hat{x}\|_B \leqslant \rho_0^k \|x^0 - \hat{x}\|_B, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.28}$$

§ 4. Итерационные методы вариационного типа

В этом параграфе рассматривается задача о решении системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{4.1}$$

с эрмитовой положительно определенной матрицей $A \in M_n$. Как было показано в предыдущем параграфе, для решения таких уравнений можно применять итерационные методы с оптимальным выбором параметров. Следует однако иметь в виду, что вычисление оптимальных значений параметров требует знания границ спектра некоторой вспомогательной задачи на собственные значения. Итерационные методы вариационного типа свободны от этого недостатка. Входящие в них параметры меняются от шага к шагу и вычисляются в ходе итерационного процесса. При этом методы автоматически настраивается на оптимальную скорость сходимости.

1. Метод наискорейшего спуска. Пусть x^0 — некоторое начальное приближение к решению уравнения (4.1). Все последующие приближения будем вычислять по формуле

$$x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1}(Ax^k - b), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

Параметр τ_{k+1} на каждом шаге итерационного метода будем выбирать так чтобы минимизировать энергетическую норму погрешности

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|_A = (A(x^{k+1} - \hat{x}), x^{k+1} - \hat{x})^{1/2}.$$

Пусть, как и выше

$$r^k = Ax^k - b, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что $\|x^{k+1} - \hat{x}\|_A = \|r^{k+1}\|_{A^{-1}}$. Из (4.2) очевидным образом следует, что $r^{k+1} = r^k - \tau_{k+1}Ar^k, \quad k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, параметр τ_{k+1} должен быть выбран так, чтобы минимизировать величину $\|r^k - \tau_{k+1}Ar^k\|_{A^{-1}}$. Полученная задача может быть интерпретирована как задача о наилучшем приближении в смысле нормы $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ вектора $r^k \in \mathbb{C}^n$ элементом одномерного подпространства, натянутого на Ar^k. Как нам уже известно (см. §3, с. 132), элемент наилучшего приближения существует и должен удовлетворять условию

$$(r^k - \tau_{k+1}Ar^k, Ar^k)_{A^{-1}} = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\tau_{k+1} = \frac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)}. \tag{4.4}$$

Формулы (4.2), (4.3), (4.4) полностью определяют метод наискорейшего спуска.

2. Исследуем сходимость метода наискорейшего спуска

Теорема 1. *Если A — эрмитова положительно определенная матрица, то метод* (4.2), (4.3), (4.4) *сходится при любом начальном приближении x^0. Имеет место следующая оценка скорости сходимости*

$$\|x^k - \hat{x}\|_A \leqslant \rho_0^k \|x^0 - \hat{x}\|_A, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

где $\rho_0 = (M - m)/(M + m) = (\operatorname{cond}(A) - 1)/(\operatorname{cond}(A) + 1)$, M, m — максимальное и минимальное собственные числа матрицы A соответственно.

Доказательство. Из соотношения (4.2) и способа определения параметра τ_{k+1} вытекает, что

$$\|z^{k+1}\|_A = \|z^k - \tau_{k+1} A z^k\|_A \leqslant \|z^k - \tau_0 A z^k\|_A,$$

где $\tau_0 = 2/(M + m)$. Далее, как при доказательстве теоремы 6, с. 387 (полагая $B = I$), получим, что $\|z^k - \tau_0 A z^k\|_A \leqslant \rho_0 \|z^k\|_A$. $\square$

3. В случае, когда матрица A и вектор b вещественны, метод наискорейшего спуска допускает простую интерпретацию, оправдывающую его название. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \right)$$

есть градиент дифференцируемой функции F в точке x. Элементарные вычисления дают, что для функции F, определенной равенством (3.15), с. 384, $\nabla F(x) = 2(Ax - b)$. Отсюда следует (см. (4.2)), что при любом $\tau_{k+1} > 0$ точка x^{k+1} лежит на луче, проходящем через точку x^k в направлении наибыстрейшего убывания функции F (см. курс математического анализа). Описанный выше способ определения параметра τ_{k+1} означает, что точка x^{k+1} есть точка минимума функции F на указанном луче (см. (3.16), с. 384).

4. Как показывает оценка (4.5), сходимость метода наискорейшего спуска существенно замедляется с ухудшением обусловленности матрицы A. Однако на практике довольно часто удается исправить положение, переходя к решению эквивалентной системы, матрица которой имеет меньшее число обусловленности.

Пусть B — эрмитова положительно определенная матрица. Преобразуем систему (4.1) к следующему виду:

$$B^{-1/2} A B^{-1/2} B^{1/2} x = B^{-1/2} b.$$

Полагая

$$C = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad y = B^{1/2}x, \quad f = B^{-1/2}b, \tag{4.6}$$

получим

$$Cy = f. \tag{4.7}$$

Матрица C эрмитова и положительно определена (докажите!).

Запишем формулы метода наискорейшего спуска и соответствующую оценку погрешности применительно к уравнению (4.7):

$$y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1}(Cy^k - f), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.8}$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_C^k, r_C^k)}{(Cr_C^k, r_C^k)}, \tag{4.9}$$

где

$$r_C^k = Cy^k - f, \tag{4.10}$$

$$\|y^k - \hat{y}\|_C \leqslant \rho_0^k(B)\|y^0 - \hat{y}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.11}$$

$\rho_0(B) = (M_B - m_B)/(M_B + m_B) = (\mathrm{cond}(C) - 1)/(\mathrm{cond}(C) + 1)$, M_B, m_B — максимальное и минимальное собственные числа матрицы C соответственно.

На первый взгляд, полученные формулы кажутся практически бесполезными, так как матрица C и вектор f не определены конструктивно. Тем не менее, попробуем эти формулы преобразовать.

Умножим обе части уравнения (4.8) на $B^{-1/2}$ и воспользуемся затем равенствами (4.6). В результате получим

$$x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1}w^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.12}$$

где $w^j = B^{-1}r^j$, $r^j = Ax^j - b$, $x^j = B^{-1/2}y^j$, $j = 0, 1, \ldots$ Далее, преобразуем формулу (4.13) с использованием (4.6), (4.10). Получим

$$\tau_{k+1} = \frac{(w^k, r^k)}{(Aw^k, w^k)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.13}$$

Наконец, аналогичные преобразования приводят оценку (4.11) к виду

$$\|x^k - \hat{x}\|_A \leqslant \rho_0^k(B)\|x^0 - \hat{x}\|_A, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.14}$$

Вычисления по формулам (4.12), (4.13) обычно проводятся следующим образом. Сначала по известному приближению x^k вычисляется невязка $r^k = Ax^k - b$, затем путем решения уравнения

$$Bw^k = r^k \tag{4.15}$$

находится так называемая поправка w^k, при помощи формулы (4.13) вычисляется итерационный параметр τ_{k+1}, и, наконец, по формуле (4.12) находится следующее приближение x^{k+1}. Важно подчеркнуть, что каждый шаг полученного итерационного метода требует решения системы линейных алгебраических уравнений вида (4.15).

Как показывает оценка (4.14), скорость сходимости метода определяется собственными числами задачи $Cy = \lambda y$. Более подробная ее запись с использованием (4.6) дает $B^{-1/2}AB^{-1/2}y = \lambda y$. Матрица $B^{-1/2}$ обратима, поэтому, полагая $B^{-1/2}y = x$, приходим к эквивалентной задаче $Ax = \lambda Bx$, уже рассматривавшейся нами ранее (см. (3.22), с. 385).

Выбор матрицы B должен быть подчинен двум противоречивым требованиям. С одной стороны, матрица B в определенном смысле должна быть близка к матрице A, так как отношение M_B/m_B должно быть, как можно, ближе к единице. С другой стороны, матрица B должна быть существенно проще матрицы A, так чтобы решение системы уравнений вида (4.15) было намного менее трудоемким, чем решение системы уравнений с матрицей A.

Сравнение оценок (3.26) и (4.14) показывает, что метод наискорейшего спуска сходится не медленнее, чем метод (3.3) при оптимальном выборе итерационного параметра.

Метод, описанный в настоящем пункте, часто называют *предобусловленным* методом наискорейшего спуска.

5. Метод сопряженных градиентов. Этот метод решения уравнения (4.1) можно рассматривать как непосредственное обобщение метода наискорейшего спуска: по заданному начальному приближению $x^0 \in \mathbb{C}^n$ строятся векторы $x^1, x^2, \ldots$ при помощи соотношений

$$x^k = x^0 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} A^{j-1}(Ax^0 - b), \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{4.16}$$

при каждом k числа $\alpha_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяются так, чтобы норма погрешности $\|x^k - \hat{x}\|_A$ принимала минимальное значение.

Теорема 2. *При каждом $k = 1, 2, \ldots$ приближение x^k, определенное указанным выше способом, существует, и, более того, оно единственно.*

Доказательство. Применяя те же обозначения, что и в предыдущих пунктах, из (4.16) получим, что

$$r^k = r^0 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} A^j r^0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.17}$$

Отсюда следует, что

$$\|x^k - \hat{x}\|_A = \|r^k\|_{A^{-1}} = \|r^0 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} A^j r^0\|_{A^{-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.18}$$

Таким образом, можно считать, что параметры $\alpha_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, k$, выбираются из условия минимума нормы, записанной в правой части равенства (4.18). Иными словами, разыскивается элемент наилучшего приближения к r^0 в смысле нормы $\| \cdot \|_{A^{-1}}$ в подпространстве, натянутом на векторы Ar^0, $A^2 r^0$, $\dots$, $A^k r^0$. Как известно (см. §3, с. 132), такой элемент существует и определяется однозначно. Поэтому и вектор r^k определяется при помощи соотношения (4.17) однозначно. Зная r^k, вектор x^k определим однозначно при помощи (4.3). $\square$

6. Теорема 2 гарантирует существование приближений по методу сопряженных градиентов, но не указывает эффективного способа их вычисления. Построение соответствующих расчетных формулы основано на устанавливаемых ниже свойствах последовательности невязок r^k, $k = 0, 1, \dots$

Лемма 1. *При любом* $k = 1, 2, \dots$ *выполнены равенства*

$$(r^k, A^j r^0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k - 1. \tag{4.19}$$

Доказательство. Как отмечалось в ходе доказательства теоремы 2, вектор $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} A^j r^0$ есть ортогональная проекция вектора r^0 в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{A^{-1}}$ на подпространство, натянутое на векторы $A^j r^0$, $j = 1, 2, \dots, k$. Поэтому (см. §3, с. 132) для вектора r^k, определяемого формулой (4.17), выполнены равенства

$$(r^k, A^j r^0)_{A^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

эквивалентные (4.19). $\square$

Следствие 1. *При любом* $k = 1, 2, \dots$ *выполнены равенства*

$$(r^k, r^j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k - 1. \tag{4.20}$$

Доказательство. Запишем сначала r^j по формуле (4.17), а затем воспользуемся леммой 1. □

Лемма 2. *Пусть*

$$r^0 = e^1 + e^2 + \cdots + e^p, \tag{4.21}$$

где $e^1, e^2, \ldots, e^p$ *— собственные векторы матрицы* A*, отвечающие ее попарно различным собственным числам*[1]*. Тогда* $r^p = 0$ *и* $r^k \neq 0$ *при* $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Доказательство. По теореме 6, с. 203, векторы

$$r^0, Ar^0, \ldots, A^{p-1}r^0 \tag{4.22}$$

линейно независимы, поэтому векторы r^k, определяемые соотношениями (4.17), при $k < p$ не могут равняться нулю. Пусть теперь $k = p$. Обозначим через L_p подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, натянутое на векторы $e^1, e^2, \cdots, e^p$. Очевидно, что $\dim L_p = p$. Векторы (4.22) принадлежат L_p и образуют его базис. Вследствие обратимости матрицы A векторы $Ar^0, A^2r^0, \ldots, A^pr^0$, также образуют базис в L_p. По построению вектор $\sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j^{(p)} A^j r^0$ есть элемент наилучшего приближения к вектору $r^0 \in L_p$, поэтому $r^p = r^0 - \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j^{(p)} A^j r^0 = 0$. □

Следствие 2. *При любом начальном приближении* $x^0 \in \mathbb{C}^n$ *метод сопряженных градиентов самое большее через* n *итераций дает точное решение системы* (4.1).

Справедливость этого утверждения сразу же вытекает из того факта, что любой вектор r^0 пространства $\mathbb{C}^n$ представим в виде (4.21) при некотором $p \leqslant n$ (см. (8.1), с. 201).

Замечание 1. Метод сопряженных градиентов может трактоваться, таким образом, и как прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Однако этот вывод справедлив лишь при отсутствии ошибок округления, что при реальных вычислениях недостижимо. На практике метод сопряженных градиентов используется исключительно как итерационный.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2*. Тогда* $\alpha_k^{(k)} \neq 0$ *при любом* $k = 1, 2, \ldots, p$.

[1] Эти векторы линейно независимы (см. теорему 4, с. 169).

Доказательство. Предположим, что $\alpha_p^{(p)} = 0$. Тогда из (4.17) при $k = p$ получаем, что

$$r^0 - \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j^{(p)} A^j r^0 = 0,$$

а это противоречит линейной независимости системы векторов (4.22). Если $\alpha_k^{(k)} = 0$ при некотором $k < p$, то из (4.17) вытекает, что

$$r^k = r^0 - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j^{(k)} A^j r^0. \tag{4.23}$$

По лемме 2 имеем, что $r^k \neq 0$, по лемме 1 для r^k выполнены соотношения (4.19). Получили, что ненулевой вектор r^k одновременно является линейной комбинацией некоторого набора векторов и ортогонален к каждому из векторов этого набора, чего быть не может. □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда при любом $k \leqslant p - 1$ векторы*

$$r^0, r^1, \ldots, r^{k-1}, Ar^{k-1} \tag{4.24}$$

образуют базис в подпространстве S_{k+1}, натянутом на векторы r^0, Ar^0, ..., $A^k r^0$.

Доказательство. Принадлежность векторов системы (4.24) подпространству S_{k+1} сразу же вытекает из равенств (4.17). Осталось доказать их линейную независимость. По следствию 1 векторы $r^0, r^1, \ldots, r^{k-1}$ линейно независимы. В силу (4.17) они принадлежат S_k. Вектор Ar^{k-1} можно записать в виде

$$Ar^{k-1} = Ar^0 - \sum_{j=1}^{k-2} \alpha_j^{(k-1)} A^{j+1} r^0 + \alpha_{k-1}^{(k-1)} A^k r^0,$$

причем по лемме 3 величина $\alpha_{k-1}^{(k-1)}$ отлична от нуля. Отсюда вытекает, что вектор Ar^{k-1} не принадлежит S_k. Таким образом, векторы (4.24) линейно независимы. □

Из леммы 4 непосредственно вытекает

Следствие 3. *При любом $k \leqslant p - 1$ существуют и однозначно определены числа $\gamma_0^{(k)}$, $\gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_k^{(k)}$ такие, что*

$$r^k = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{(k)} r^j + \gamma_k^{(k)} A r^{k-1}. \tag{4.25}$$

7. Покажем теперь, как можно вычислить коэффициенты в разложении (4.25).

Пусть $k = 1$. Тогда $r^1 = \gamma_0^{(1)} r^0 + \gamma_1^{(1)} A r^0$. С другой стороны, по формуле (4.17) получаем, что

$$r^1 = r^0 - \alpha_1^{(1)} A r^0. \tag{4.26}$$

Векторы r^0, Ar^0 линейно независимы, следовательно, $\gamma_0^{(1)} = 1$. Используя теперь равенство $(r^1, r^0) = 0$ (см. (4.20)), получим, что

$$\gamma_1^{(1)} = -\frac{(r^0, r^0)}{(Ar^0, r^0)}. \tag{4.27}$$

Из (4.3), (4.26), (4.27), очевидно, вытекает, что

$$x^1 = x^0 - \frac{(r^0, r^0)}{(Ar^0, r^0)}(Ax^0 - b). \tag{4.28}$$

т. е. первое приближение по методу сопряженных градиентов, как и следовало ожидать, совпадает с первым приближением по методу наискорейшего спуска.

Далее, пусть $k > 1$. При любом $l < k$ вследствие (4.25), (4.20) получаем, что

$$0 = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{(k)} (r^j, r^l) + \gamma_k^{(k)} (Ar^{k-1}, r^l). \tag{4.29}$$

Используя эрмитовость матрицы A, а затем равенство (4.17), будем иметь, что

$$(Ar^{k-1}, r^l) = (r^{k-1}, Ar^l) = (r^{k-1}, Ar^0 - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j^{(l)} A^{j+1} r^0).$$

На основании (4.19) отсюда получаем, что $(Ar^{k-1}, r^l) = 0$, если $l < k - 2$. Возвращаясь к (4.30) и вновь используя (4.20), найдем, что $\gamma_0^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_{k-3}^{(k)} = 0$. Поэтому (см. (4.25))

$$r^k = \gamma_{k-2}^{(k)} r^{k-2} + \gamma_{k-1}^{(k)} r^{k-1} + \gamma_k^{(k)} A r^{k-1}. \tag{4.30}$$

Запишем r^{k-2}, r^{k-1} по формуле (4.17) и подставим в (4.30). Получим, что

$$r^k = (\gamma_{k-2}^{(k)} + \gamma_{k-1}^{(k)}) r^0 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j^{(k)} A^j r^0 \tag{4.31}$$

с некоторыми коэффициентами $\delta_j^{(k)}$. Сравнивая (4.31) с (4.17) и используя линейную независимость системы векторов (4.22), будем иметь, что $\gamma_{k-2}^{(k)}+\gamma_{k-1}^{(k)} = 1$. Таким образом, соотношению (4.30) можно придать следующий вид:

$$r^k = r^{k-1} + \beta_k(r^{k-1} - r^{k-2}) + \gamma_k A r^{k-1}. \tag{4.32}$$

Осталось найти числа β_k, γ_k. Умножая равенство (4.32) почленно сначала на r^{k-1}, а затем на r^{k-2}, получим систему линейных уравнений для их определения:

$$\begin{aligned} \beta_k(r^{k-1}, r^{k-1}) + \gamma_k(Ar^{k-1}, r^{k-1}) &= -(r^{k-1}, r^{k-1}), \\ -\beta_k(r^{k-2}, r^{k-2}) + \gamma_k(Ar^{k-1}, r^{k-2}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Построенные нами формулы позволяют последовательно вычислить все приближения по методу сопряженных градиентов. В самом деле, используя соотношения (4.3) и умножая обе части равенства (4.32) на A^{-1}, в дополнение к (4.28), (4.33) будем иметь

$$x^k = x^{k-1} + \beta_k(x^{k-1} - x^{k-2}) + \gamma_k(Ax^{k-1} - b) \tag{4.34}$$

при $k = 2, 3, \ldots$

Важно подчеркнуть, что в отличие от всех рассмотренных нами ранее итерационных методов метод сопряженных градиентов требует при вычислении каждого последующего приближения x^k, $k \geqslant 2$, знания не одного, а двух предыдущих приближений, т. е. x^{k-1}, x^{k-2}. Это предъявляет дополнительные требования к памяти компьютера.

8. Известны и другие расчетные формулы для построения последовательности x^2, x^3, $\ldots$, различающиеся объемом необходимых вычислений и требуемой к памятью компьютера. При отсутствии ошибок округлений все они в силу теоремы 2 эквивалентны. Но при решении той или иной конкретной системы уравнений результаты их работы могут различаться (иногда значительно) именно из-за неизбежных ошибок округления.

Приведем пример расчетных формул метода сопряженных градиентов, отличных от (4.33), (4.34):

$$\alpha_1 = 1,$$

$$\tau_k = \frac{(r^{k-1}, r^{k-1})}{(Ar^{k-1}, r^{k-1})}, \quad \alpha_k = \left(1 - \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} \frac{(r^{k-1}, r^{k-1})}{(r^{k-2}, r^{k-2})} \frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)^{-1},$$

$$x^k = \alpha_k x^{k-1} + (1 - \alpha_k)x^{k-2} - \tau_k \alpha_k (Ax^{k-1} - b).$$

для $k = 2, 3, \ldots$

9. Получим оценку скорости сходимости метода сопряженных градиентов.

Теорема 3. *При любом* $k \geqslant 1$

$$\|x^k - \hat{x}\|_A \leqslant q_k \|x^0 - \hat{x}\|_A. \tag{4.35}$$

Здесь

$$q_k = \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}}, \quad \rho_1 = \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}},$$

M, m *— максимальное и минимальное собственные числа матрицы* A *соответственно.*

Доказательство. Представим равенства (4.16) в виде

$$z^k = P_k(A) z^0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.36}$$

, где $P_k(A) = I - \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} A^j$. Отсюда следует, что[1)]

$$A^{1/2} z^k = P_k(A) A^{1/2} z^0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.37}$$

Числа $\alpha_j^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяющие приближения по методу сопряженных градиентов, таковы, что

$$\|z^k\|_A = \|A^{1/2} z^k\|_2 = \|P_k(A) A^{1/2} z^0\|_2 \leqslant \|Q_k(A) A^{1/2} z^0\|_2, \tag{4.38}$$

где $Q_k(A) = I - \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} A^j$, а $\beta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, — какие угодно числа. Из (4.38) получаем, что

$$\|z^k\|_A \leqslant \|Q_k(A)\|_2 \|z^0\|_A. \tag{4.39}$$

Будем считать, что все $\beta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, вещественны. Тогда матрица $Q_k(A)$ эрмитова, следовательно,

$$\|Q_k(A)\|_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |Q_k(\lambda_i(A))| \leqslant \max_{m \leqslant \mu \leqslant M} |Q_k(\mu)| \tag{4.40}$$

(см. (4.5), с. 333). Полином Q_k имеет степень k, причем $Q_k(0) = 1$. Понятно, что числа $\beta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, можно выбрать так, что

$$Q_k(\mu) = \frac{T_k\left(\frac{\mu\tau_0 - 1}{\rho_0}\right)}{T_k\left(-\frac{1}{\rho_0}\right)} \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

[1)]Мы использовали тот факт, что корень из эрмитова неотрицательного оператора $\mathcal{A}$ перестановочен с любым эрмитовым оператором, перестановочным с $\mathcal{A}$ (докажите!).

где T_k — полином Чебышева порядка k (см. п. 2.2, с. 126). а величины ρ_0, τ_0 определены так же, как в теореме 1, с. 389. Нетрудно проверить, что $|(\mu\tau_0 - 1)/\rho_0| \leqslant 1$ при $\mu \in [m, M]$. Поэтому (см. формулу (10.11), с. 127)

$$\max_{m\leqslant\mu\leqslant M} |Q_k(\mu)| = \frac{1}{\left|T_k\left(-\frac{1}{\rho_0}\right)\right|}. \tag{4.42}$$

Понятно, что $\rho_0 < 1$, следовательно, для вычисления $T_k(-1/\rho_0)$ нужно использовать формулу (10.10), с. 127. Проводя элементарные выкладки, получим, что

$$\max_{m\leqslant\mu\leqslant M} |Q_k(\mu)| = q_k. \tag{4.43}$$

Из (4.39), (4.40), (4.43) следует (4.35). $\square$

10. Оценка (4.35) показывает, что метод сопряженных градиентов сходится существенно быстрее метода наискорейшего спуска. Преимущество становится особенно заметным с увеличением отношения M/m, т. е. с ухудшением обусловленности матрицы A.

11. Оценка (4.35) не может быть улучшена, в том смысле, что не существует полинома Q_k степени k, равного единице в нуле, и такого, что $\max\limits_{m\leqslant\mu\leqslant M} |Q_k(\mu)| < q_k$. Предполагая противное, мы должны написать, что

$$\max_{m\leqslant\mu\leqslant M} |Q_k(\mu)| < \max_{m\leqslant\mu\leqslant M} \frac{\left|T_k\left(\frac{\mu\tau_0-1}{\rho_0}\right)\right|}{\left|T_k\left(-\frac{1}{\rho_0}\right)\right|} \tag{4.44}$$

для некоторого полинома Q_k степени k такого, что $Q_k(0) = 1$. Выполним в неравенстве (4.44) замену переменной, полагая

$$t = \frac{\mu\tau_0 - 1}{\rho_0}.$$

В результате, как нетрудно убедиться, получим, что

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\tilde{Q}_k(t)| < \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\tilde{T}_k(t)|, \tag{4.45}$$

где $\tilde{Q}_k(t) = Q_k((\rho_0 t + 1)/\tau_0)$, $\tilde{T}_k(t) = T_k(t)/T_k\left(-1/\rho_0\right)$. Пусть

$$t_j = \cos\frac{\pi j}{k}, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Используя формулу (10.11), с. 127, будем иметь, что

$$|\tilde{T}_k(t_j)| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\tilde{T}_k(t)|, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

причем при любых $j = 0, 1, \ldots, k-1$ знаки величин $\tilde{T}_k(t_j)$ и $\tilde{T}_k(t_{j+1})$ противоположны. Введем в рассмотрение полином R_k степени не выше k, полагая $R_k(t) = \tilde{Q}_k(t) - \tilde{T}_k(t)$. Нетрудно сообразить, что при любых $j = 0, 1, \ldots, k-1$ знаки величин $R_k(t_j)$ и $R_k(t_{j+1})$ также противоположны. Это означает, что полином R_k имеет на интервале $(-1, 1)$ не менее k корней. Кроме того, $R_k(-1/\rho_0) = 0$, а $-1/\rho_0 < -1$. Таким образом, полином R_k имеет не менее $k+1$ корней, что невозможно.

Задача. Аналогично пункту 4, с. 389, опишите и исследуйте предобусловленный вариант метода сопряженных градиентов.

§ 5. Метод Якоби решения задач на собственные значения

1. В этом параграфе излагается приближенный *метод Якоби*, который можно применять для приближенного отыскания собственных чисел и собственных векторов эрмитовых матриц. Как и все методы, используемые в настоящее время для приближенного решения задач на собственные значения, метод Якоби является итерационным. В самых общих чертах, идея его состоит в следующем. Пусть A — диагональная матрица. Тогда собственные числа матрицы A есть ее диагональные элементы. Метод Якоби для любой эрмитовой матрицы A дает способ построения последовательности матриц A_1, A_2, ..., A_k, ... таких, что каждая из матриц этой последовательности эрмитова, подобна матрице A и с увеличением номера k становится все более близкой к диагональной. В качестве приближенных значений собственных чисел матрицы A берутся диагональные элементы матрицы A_k, как только все ее внедиагональные элементы оказываются достаточно малыми.

Итак, пусть A — эрмитова матрица порядка n, $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица, отличающаяся от единичной лишь четырьмя элементами:

$$q_{k,k} = \cos\varphi, \; q_{ll} = \cos\varphi, \; q_{kl} = -q\sin\varphi, \; q_{lk} = \bar{q}\sin\varphi, \tag{5.1}$$

где $1 \leqslant k < l \leqslant n$, φ — вещественное число, q — вообще говоря, комплексное число, $|q| = 1$. Очевидно, Q — унитарная матрица[1].

Образуем по матрице A матрицу $\widehat{A} = Q^T A Q$ и попытаемся выбрать параметры матрицы Q, т. е. числа k, l, φ, q, так, чтобы матрица $\widehat{A}$ была максимально близка к диагональной.

[1] Матрица Q есть частный случай матрицы вращения, описанной в п. 3.1, с. 373.

Нетрудно убедиться, что матрица $\tilde{A} = Q^T A$ отличается от матрицы A лишь элементами строк с номерами k, l, причем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k,j} &= \ \ a_{kj} \cos\varphi + a_{lj}\bar{q} \sin\varphi, \\ \tilde{a}_{l,j} &= -a_{kj} q \sin\varphi + a_{lj}\cos\varphi, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Аналогично, матрица $\hat{A} = \tilde{A}Q$ отличается от матрицы $\tilde{A}$ лишь элементами столбцов с номерами k, l, причем

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j,k} &= \ \ \tilde{a}_{jk} \cos\varphi + \tilde{a}_{jl} q \sin\varphi, \\ \hat{a}_{j,l} &= -\tilde{a}_{jk}\bar{q} \sin\varphi + \tilde{a}_{jl}\cos\varphi, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из (5.2), (5.3) сразу же следует, что

$$|\tilde{a}_{k,j}|^2 + |\tilde{a}_{l,j}|^2 = |a_{k,j}|^2 + |a_{l,j}|^2, \quad |\hat{a}_{j,k}|^2 + |\hat{a}_{j,l}|^2 = |a_{j,k}|^2 + |a_{j,l}|^2, \quad j = 1, \dots, n, \tag{5.4}$$

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q}(a_{ll} - a_{kk}) \cos\varphi \sin\varphi + a_{kl}\cos^2\varphi - \bar{q}^2 a_{lk} \sin^2\varphi. \tag{5.5}$$

Вычислим сумму квадратов модулей внедиагональных элементов матрицы $\hat{A}$. Используя соотношения (5.2) – (5.4), нетрудно получить, что

$$\sum_{i\neq j} |\widehat{a}_{ij}|^2 = \sum_{i\neq j} |a_{ij}|^2 - 2|a_{kl}|^2 + |\hat{a}_{kl}|^2. \tag{5.6}$$

Определим теперь числа k, l из условия

$$|a_{kl}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}|. \tag{5.7}$$

Поскольку A — эрмитова матрица, то $a_{lk} = \bar{a}_{kl}$, и из (5.5) с учетом того, что $1/\bar{q} = q$, будем иметь, что

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q}\left(\frac{a_{ll} - a_{kk}}{2} \sin 2\varphi + q a_{kl}\cos^2\varphi - \bar{q}\bar{a}_{kl} \sin^2\varphi\right).$$

Будем считать, что $a_{kl} \neq 0$. В противном случае матрица диагональна, и ее собственные числа определяются тривиальным образом. Положим

$$q = |a_{kl}|/a_{kl}. \tag{5.8}$$

Тогда

$$\hat{a}_{kl} = \bar{q}\left(\frac{a_{ll} - a_{kk}}{2} \sin 2\varphi + |a_{kl}|\cos 2\varphi\right). \tag{5.9}$$

Выберем затем угол φ так, чтобы

$$|a_{kl}|\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{ll} - a_{kk})\sin 2\varphi = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2|a_{kl}|}{a_{kk} - a_{ll}}. \tag{5.10}$$

При указанном выборе параметров, определяющих матрицу Q, сумма квадратов модулей внедиагональных элементов матрицы $\widehat{A}$ принимает наименьшее значение.

Теперь можно описать метод Якоби. Пусть $A_0 = A$. Образуем последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots$ при помощи рекуррентной формулы

$$A_{p+1} = Q_p^T A_p Q_p, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{5.11}$$

где параметры матрицы Q_p определяются так, чтобы сделать сумму квадратов внедиагональных элементов матрицы A_{p+1} минимально возможной, т. е. по формулам вида (5.7), (5.8), (5.10).

Вычисления проводят до тех пор, пока все внедиагональные элементы матрицы A_p не станут достаточно малыми. Тогда в качестве приближений к собственным числам матрицы A принимают диагональные элементы матрицы A_p, а столбцы матрицы $Q_0 Q_1 \cdots Q_p$ считают приближениями к собственным векторам матрицы A.

2. При исследовании сходимости метода Якоби существенно используется

Теорема 1. *Пусть параметры матрицы Q определяются согласно формулам* (5.7), (5.8), (5.10). *Тогда*

$$\sum_{i \neq j} |\widehat{a}_{ij}|^2 \leqslant \rho \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2, \tag{5.12}$$

где

$$0 < \rho = 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1$$

при $n > 2$.

Доказательство. Вследствие (5.10) из (5.6) получаем

$$\sum_{i \neq j} |\widehat{a}_{ij}|^2 = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 - 2|a_{kl}|^2, \tag{5.13}$$

а на основании (5.7)

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \leqslant |a_{kl}|^2 n(n-1). \tag{5.14}$$

Здесь учтено, что матрица порядка n имеет $n^2 - n$ внедиагональных элементов. Из (5.13), (5.14) очевидным образом следует (5.12). $\square$

3. Докажем сходимость метода Якоби. Пусть $A_p = \{a_{ij}^{(p)}\}_{i,j=1}^n$. Из рекуррентной формулы (5.11) и леммы 1 вытекает, что

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(p)}|^2 \leqslant \rho \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(p-1)}|^2 \leqslant \rho^p \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Это означает, что по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно указать целое положительное число p такое, что

$$|a_{ij}^{(p)}| \leqslant \varepsilon/n, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Обозначим через Λ_p диагональную матрицу, на диагонали которой расположены диагональные элементы матрицы A_p. В соответствии с оценками (5.15), а также (1.4), с. 341, можем написать:

$$|\lambda_k(A_p) - \lambda_k^{(p)}| \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_k^{(p)}$, $k = 1, \ldots, n$, — диагональные элементы матрицы Λ_p, упорядоченные по неубыванию, $\lambda_k(A_p)$ — так же упорядоченные собственные числа матрицы A_p. Вследствие (5.11) имеем $A_p = T_p^T A T_p$, где $T_p = Q_0 Q_1 \ldots Q_p$, т. е. матрицы A_p и A подобны, а значит, их собственные числа совпадают, поэтому

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k^{(p)}| \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.16}$$

Таким образом, выполнив определенное количество итераций, мы получим приближенные значения собственных чисел матрицы A с любой наперед заданной точностью.

4. Применяя метод Якоби для приближенного отыскания собственных чисел и собственных векторов симметричной вещественной матрицы, в формулах (5.1) параметр q следует положить равным единице. Соответственно в формуле (5.10) нужно заменить $|a_{kl}|$ на a_{kl}. Все выше полученные оценки при этом сохраняются.

Предметный указатель

Аксиомы
— линейного пространства, 98, 100
— нормы
— — матричной, 328
— — векторной, 320
— скалярного произведения (в комплексном пространстве), 113
— скалярного произведения (в вещественном пространстве), 112
Базис
— Фурье, 124
— Лагранжа, 111
— Ньютона, 111
— декартов
— — обобщенный, 72
— основной, 81, 124
— пространства, 72
— — $\mathbb{C}^n$ естественный, 107
— — конечномерного, 108
— сингулярный, 268
— в пространстве полиномов
— — естественный, 111
— взаимный, 81, 124
— жорданов, 286
Базиса
— ориентация, 76
Блок
— жорданов, 285
Цилиндр, 267
— эллиптический, 252
— гиперболический, 252
— параболический, 252
Число
— комплексное, 8
— мнимое, 7
— обусловленности, 272
— — Бауэра — Скила, 356
— — псевдорешения, 359
— сингулярное, 268
Диагональное преобладание, 377
Дополнение
— ортогональное, 137
Эллипс, 243
Эллипса
— центр симметрии, 244
— эксцентриситет, 244
— фокусы, 244
— оси симметрии, 244
— полуоси, 244
— вершины, 244
Эллипсоид, 255, 266
Форм квадратичных
— закон инерции, 230
Форма
— квадратичная, 226
— — положительно определенная, 230
— линейная, 188
Формы
— квадратичной
— — инерция, 230
— — канонический вид, 227
Формула
— Муавра, 14
— Родрига, 122
— Сильвестра, 173
— интерполяционная
— — Лагранжа, 42
— площади треугольника, 83
Формулы
— Крамера, 41
— Вьета, 23
Функции квадратичной
— форма приведенная, 234
— инварианты
— — аффинные, 232
— — ортогональные, 232
Функционал
— Тихонова, 194
— линейный, 188
Функция
— квадратичная, 231
— выпуклая, 275
Фурье
— коэффициенты, 123
Гипербола, 243
Гиперболы
— асимптоты, 245
— центр симметрии, 245
— вершины, 245
Гиперболоид, 266

— двуполостный, 258
— однополостный, 257
Гиперплоскость, 137
Гиперповерхности второго порядка
— каноническая форма, 267
— приведенная форма, 265
Гиперповерхность второго порядка, 265
Инверсия, 27
Клетка
— жорданова, 285
Комплексных чисел
— деление, 10
— сложение, 8
— умножение, 9
— вычитание, 8
Комплексное число
— нулевое, 9
— сопряженное, 10
Комплексного числа
— аргумент, 12
— мнимая часть часть, 8
— модуль, 10
— тригонометрическое представление, 12
— вещественная часть, 8
Конус, 266
— эллиптический, 256
Корень
— из комплексного числа, 14
— из оператора, 204
Кривая второго порядка, 238
Матриц
— произведение, 47
— сумма, 45
Матрица
— Гильберта, 136
— Грама, 118
— блочная, 64
— диагональная, 44
— двояко стохастическая, 277
— единичная, 44
— эрмитова, 62
— косоэрмитова, 62
— кососимметричная, 63
— квадратная, 29
— неотрицательная, 197, 277, 360
— неразложимая, 361
— невырожденная, 51
— нильпотентная, 181
— нижняя треугольная
—— элементарная, 45
— нормальная, 64
— нулевая, 43
— обратная, 52
—— левая, 52
—— правая, 52
— ортогональная, 63
— отражения, 374
— перехода, 109
— перестановки, 44
— перестановок, 361
— положительная, 360
— положительно определенная, 197
— преобразования переменных, 226
— присоединенная, 52
— прямоугольная, 43
— разложимая, 361
— с диагональным преобладанием
—— по столбцам, 351
—— по строкам, 351
— сходящаяся, 297
— симметричная, 63
— системы линейных алгебраических уравнений, 38
— сопряженная, 62
— стохастическая, 277
— транспонированная, 34, 50
— треугольная
—— нижняя, 36
—— верхняя, 36
— унитарная, 63
— вещественная, 63
— вырожденная, 51
— вращения, 373
— жорданова, 285
Матрицы
— форма Шура, 184
—— вещественная, 187
— характериситческие числа, 167
— характеристический полином, 167
— инерция, 230
— инварианты, 176
— конгруэнтные, 229
— норма
—— Фань Цзы, 336
—— Фробениуса (евклидова), 329
—— подчиненная, 330
—— согласованную, 328
—— спектральная, 333
—— столбцовая, 331
—— строчная, 332
—— векторная, 328

— перестановочные, 48
— подобные, 148
— ранг, 151
— собственный вектор, 167
— спектр, 167
— спектральная окружность, 366
— умножение
— — на число, 45
Матричная экспонента, 298
Матричные пучки
— эквивалентные, 301
Матричный пучок, 299
— эрмитов, 305
— — определеннй, 306
— регулярный, 299
— — неособый, 305
— сингулярный, 299
Матричного пучка
— характеристический полиномом, 299
— характеристическое число, 300
— регулярного
— — каноническая форма, 304
— сингулярного
— — каноническая форма, 313
— — минимальный индекс, 307
— собственный вектор, 300
Метод
— Гаусса, 55, 369
— Холесского, 372
— Лагранжа (выделения полных квадратов), 227
— Якоби, 377, 399
— Зейделя, 378
— наискорейшего спуска, 388
— регуляризации Тихонова, 193
— релаксации, 379
— сопряженных градиентов, 391
Минор
— базисный, 153
— диагональный, 174
— главный, 152
— окаймляющий, 153
Мнимая единица, 7
Многочлен, 16
— нулевой, 16
— приведенный (нормированный), 19
Многочлена
— коэффициенты, 16
— корень
— — кратный, 19
— — простой, 19
— порядок, 16
Многочленов
— деление, 18
Неравенство
— Бесселя, 134
— Гёльдера, 318
— Йенсена, 276
— Коши, 75, 319
— Коши — Буняковского, 116
— — обобщенное, 327
— Минковского, 113, 319
— Юнга, 318
— треугольника, 75, 113, 320
— треугольника (Минковского), 117
Невязка, 192
Невязки
— функция (функционал), 193
Норма
— на пространстве $\mathbb{C}^n$, 320
— — абсолютная, 323
— — дуальная, 327
— — энергетическая, 380
— — монотонная, 323
Нормы
— эквивалентные, 321
Оператор
— единичный, 140
— косоэрмитов, 195
— кососимметричный, 218
— линейный, 139
— неотрицательный, 197
— невырожденный, 149
— нильпотентный, 181
— нормальный, 199
— нулевой, 140
— обратимый, 142
— обратный, 141
— ортогональный, 219
— положительно определеннный, 197
— проектирования, 140
— — оротогонального, 140
— простой структуры, 172
— псевдообратный, 274
— растяжения
— — левый, 273
— — правый, 273
— разложения по базису, 143
— самосопряженный (эрмитов), 195
— скалярный, 146
— сопряженный, 189
— унитарный, 198

Оператора
— дефект, 150
— характеристический полином, 168
— характристические числа, 168
— индекс нильпотентности, 181
— инварианты, 174
— инвариантное подпространство, 163
— компоненты
— — контравариантные, 216
— — ковариантные, 216
— — смешанные, 216
— матрица, 145
— область значений
— — образ, 150
— определитель, 149
— полярное разложение, 273
— ранг, 150
— след, 176
— собственная пара, 165
— собственный вектор, 165
— собственное число, 165
— собственое подпространство, 165
— спектр, 168
— спектральное представление , 173
— сужение, 165
— ядро, 150
— жорданово представление, 285
Операторы
— эрмитовы конгруэнтные, 205
— перестановочные, 167
Операторов
— линейная комбинация, 140
— линейное пространство, 149
— — вещественное, 150
— произведение, 140
— пространство
— — евклидово, 215
— — евклидово вещественное, 219
— скалярное произведение, 215
Определитель, 29
— Вандермонда, 37
Определителя
— разложение
— — по столбцу, 33
Отображение, 139
— линейное, 139
Парабола, 247
Параболы
— директриса, 247
— фокус, 247
— вершина, 247
Параболоид, 267
— эллиптический, 253
— гиперболический, 255
Параметр
— итерационный, 380
— релаксационный, 379
Переменные
— свободные, 160
Перестановка, 26
— четная, 27
— нечетная, 27
Перестановки
— сигнатура, 27
Подпространств
— пересечение, 129
— раствор, 337
— сумма, 128
— — ортогональная, 130
— — прямая, 129
Подпространства
— базис, 129
— ортогональные, 130
— размерность, 129
Подпространство, 128
— циклическое, 292
— корневое, 292
— нулевое, 129
— тривиальное, 163
Полином, 16
Полиномы
— Чебышева, 126
— Лежандра, 126
Поверхность
— линейчатая, 258
Поверхность второго порядка, 250
Преобразование
— переменных
— — аффинное, 231
— подобия, 148
— пространства, 139
Приближение
— наилучшее, 132
Приближения
— наилучшего элемент, 138
Процесс
— ортогонализации Грама — Шмидта, 121
Проекция
— ортогональная, 134
Пространства
— изоморфные, 143

— размерность, 108
Пространство
— $\mathbb{C}^n$, 99
— $\mathbb{R}^n$, 97
— арифметическое, 113
— бесконечномерное, 109
— евклидово
—— комплексное (унитарное), 115
—— вещественное, 114
— конечномерное, 108
— линейное
—— комплексное, 100
—— вещественное, 99
— векторое, 100
Псевдорешение, 193
— нормальное, 270
Расстояние
— между двумя точками, 81
— от точки до прямой, 86
Разложение
— ортогональное, 137
— сингулярное (матрицы), 271
Решение
— линейного уравнения
—— частное, 156
—— общее, 156
— однородного линейного уравнения
—— общее, 156
— тривиальное, 39
Решений
— система фундаментальная
—— однородного уравнения, 156
Ряд Неймана, 297
Схема Горнера, 18
Сходимость
— по норме, 321
— покомпонентная, 321
Символ
— Кронекера, 32
Система координат
— декартова, 68
Система линейных алгебраических уравнений
— крамеровская, 38
— однородная, 38
Собственного числа кратность
— алгебраическая, 172
— геометрическая, 171
Столбец, 43
Строка, 43
Теорема
— Бауэра — Скила, 355
— Безу, 19
— Фань Цзы, 215
— Фредгольма, 192
—— матричная, 158
— Гершгорина, 347
— Грама — Шмидта, 120
— Хана — Банаха, 324
— Кэли — Гамильтона, 168
— Рисса, 188
— Самарского, 382
— Сильвестра, 205, 212
— Шура, 182, 213
—— обобщенная, 301
— Вейля, 281
—— (относительная), 341
— алгебры основная, 19
Теоремы
— Бауэра — Файка, 348
Теория Перрона — Фробениуса, 360
Тождество
— Пифагора, 116
Трансформация Гаусса, 193
Транспозиция, 27
Угол
— между прямыми, 87
— между векторами, 117
Умножение
— матриц, 47
— строки
—— на столбец, 45
—— на матрицу, 46
— матрицы
—— на вектор, 46
Уравнение
— отрезка прямой, 82
— плоскости, 88
—— нормальное, 88
—— общее, 89
— прямой, 84
—— каноническое, 92
—— нормальная форма, 85
—— общая форма, 85
—— в пространстве, 91
— сферы, 82
Вектор, 68, 97, 100
— циклический, 293
— единичный, 98, 99
— неотрицательный, 360
— нулевой, 68, 98, 99
— положительный, 360

Вектора
— декартовы координаты, 69
— компоненты, 97
— — контравариантные, 124
— — ковариантные, 124
— координаты, 72, 108
— модуль, 69, 113, 117
— умножение на число, 69, 98
Вектора циклического
— высота, 293
Векторы
— коллинеарные, 70, 102
— компланарные, 71
— ортогональные, 117
— равные, 98
Векторов
— диада, 215
— линейная комбинация, 103
— — нетривиальная, 103
— подсистема максимальная, 106
— система
— — линейно независимая, 104
— — линейно зависимая, 102
— — ортогональная, 119
— — ортонормированная , 119
— системы эквивалентные, 104
— системы ранг, 107
— скалярное произведение, 73, 114
— — энергетическое, 379
— — стандартное в пространстве $\mathbb{C}^n$, 114
— — стандартное в пространстве $\mathbb{R}^n$, 113
— сложение, 70, 98
— смешанное произведение, 79
— тензорное произведение, 215
— векторное произведение, 76
— вычитание, 71
— внешнее произведение, 217
Вращение
— несобственное, 224
— собственное, 224
Замена переменных
— линейная, 226

Литература

Основная литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. — Изд-во «Лань», 2009.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — Изд-во «Лань», 2008.

5. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. — Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

Дополнительная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2015.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969.

4. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — Изд-во «МЦНМО», 2011.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — Изд-во «Добросвет», «КДУ», 2009.

7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969.

8. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения . — М.: Мир, 2001.

9. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.

10. Икрамов Х.Д. Матричные пучки — теория, приложения, численные методы. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 1991, том 29, с. 3–106.

11. Икрамов Х Д. Задачник по линейной алгебре. — Изд-во «Лань», 2006.

12. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — Изд-во «Проспект», 2012.

13. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрим. — Казань: Казан. ун-т, 2014.

14. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука. — 1978.

15. Квасов Б.И. Численные методы анализа и линейной алгебры. Использование Matlab и Scilab (Электронный ресурс) — СПб. : Лань, 2016.

16. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — Изд-во «Лань», 2009.

17. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. — Изд-во «Лань», 2002.

18. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: «Физматлит», 1996.

19. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2005.

20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

21. Тихомиров В.М., Успенский В.В. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение. — 1997, 1. — С. 50–70.

22. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.

23. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Академия, 2007.

24. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.

25. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. — Изд-во «Лань», 2004.

26. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.

27. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

28. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные векторные пространства). — М: Наука, 1969.

29. Allen G.D. Lectures on Linear Algebra and Matrices. Texas A&M University. — URL: http://www.math.tamu.edu/~dallen / m640_03c / readings.htm, свободный, 31.05.2012.

30. Higham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. — SIAM, 1996.

31. Horn R.A., Johnson Ch.R. Topics in matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1991.

32. Itskov M. Tensor algebra and tensor analysis for engineers. — Springer, 2013.

33. Kuttler K. Elementary linear algebra. — Brigham Young University, 2009.

34. Lau D. Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie. Aufgaben mit Lösungen. — Springer-Verlag, 2007.

35. Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. With solutions to problems. — SIAM, 2000.

36. Stewart G.W., Sun J. Matrix perturbation theory. — Academic Press, 1990

37. Wildon M. A short proof of the existence of Jordan normal form. — URL: http://www.ma.rhul.ac.uk/ uvah099/Maths/JNFfinal.pdf, свободный, 20.07.2011.