

УДК 532.5:519.63

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ – ДАВЛЕНИЕ»

С.И. Мартыненко

Аннотация

Предложен новый подход к вычислению давления при решении полных уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость – давление» на структурированных сетках. В основе метода лежит использование интегральных форм уравнения неразрывности (уравнений постоянств массового расхода) и декомпозиции давления, исходя из которых формулируется вспомогательная задача. Решение вспомогательной задачи близко к решению полных уравнений Навье–Стокса, однако для его отыскания требуется выполнить гораздо меньший объем вычислений. В статье приводится методика построения вспомогательной задачи, описание вычислительного алгоритма и результаты решения тестовых и прикладных задач. Решение уравнений Навье–Стокса получено без дополнительных граничных условий для давления на омываемых поверхностях. Предложенный метод может быть использован как в сегрегированных, так и в совместных алгоритмах.

Введение

Традиционно расчет несжимаемых и сжимаемых вязких течений на основе полных уравнений Навье – Стокса осуществляется различными численными методами [1, 2]. Следуя данной традиции, сначала рассмотрим наиболее распространенные вычислительные алгоритмы для обоих случаев, а затем обсудим возможности построения унифицированного алгоритма. Далее, для наглядности, будем полагать течение изотермичным.

Двухмерные нестационарные уравнения Навье–Стокса в переменных «скорость – давление» для несжимаемых вязких сред могут быть записаны в следующей безразмерной форме:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Численное решение уравнений Навье–Стокса при больших значениях числа Рейнольдса Re связано с многочисленными трудностями, наиболее значимыми из

которых являются нелинейность и сингулярная возмущенность уравнений движения.

Структура уравнений Навье–Стокса осложняет построение эффективных вычислительных алгоритмов при любых значениях числа Рейнольдса. Результирующая линеаризованная система разностных уравнений содержит нулевой блок на главной диагонали, вызванный отсутствием давления в уравнении неразрывности (1). Поэтому данная система не может быть решена стандартными итерационными методами.

Первоначально для численного решения уравнений Навье–Стокса применялись сегрегированные (раздельные) алгоритмы, в которых сначала вычислялись компоненты скорости из уравнений движения, а затем некоторым образом корректировалось давление из условия, что компоненты скорости будут удовлетворять разностному аналогу уравнения неразрывности. В настоящее время наибольшее распространение получил метод SIMPLE, в котором для поправок к давлению (δ_p) предложено уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_p}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сходимость метода SIMPLE достигается посредством применения последовательной нижней релаксации, то есть давление пересчитывается по соотношению $p := p + \alpha_p \delta_p$ (равенство в смысле присвоения), где α_p есть параметр нижней релаксации [3].

К неустраняемым недостаткам метода SIMPLE и его модификаций следует отнести дополнительные граничные условия для давления, которые отсутствуют в исходной постановке задачи. Поэтому в приложениях часто используется метод искусственной сжимаемости [4]. Метод искусственной сжимаемости исключительно просто реализуется, поскольку для отыскания давления не требуется решения дополнительных краевых задач.

Однако раздельное отыскание компонент скорости и давления ухудшает сходимость итераций по нелинейности при решении уравнений движения. Поэтому сегрегированные алгоритмы применяются, как правило, к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса, а стационарные решения отыскиваются посредством счета на установление.

В первых совместных алгоритмах применялись прямые методы [5]. Совместные алгоритмы выглядят предпочтительнее сегрегированных, поскольку полнее сохраняется взаимосвязь между компонентами скорости и давлением в итерационном процессе. Однако объем вычислительной работы прямыми методами оказывается слишком большим, особенно если для аппроксимации уравнений Навье–Стокса используются достаточно мелкие сетки. Позднее были предложены другие методы, которые еще не получили широкого применения [6]. Заметим, что совместные алгоритмы трудно обобщить для решения уравнений Навье–Стокса для сжимаемых сред.

Двухмерные нестационарные уравнения Навье–Стокса для сжимаемых вязких сред могут быть записаны в следующем размерном виде:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (6)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

в) уравнение состояния

$$\rho = \rho(p), \quad \mu = \mu(p). \quad (7)$$

В прикладных задачах часто эффекты сжимаемости среды проявляются лишь в определенных подобластях. Очевидно, что унифицированный алгоритм, позволяющий рассчитывать течения как несжимаемых, так и сжимаемых, сред должен быть основан на решении уравнений Навье–Стокса (4)–(7) в переменных «скорость – давление» на разнесенной сетке.

1. Основополагающая идея: декомпозиция давления

Рассмотрим течение между параллельными пластинами, которое описывается уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой среды в приближении длинного канала:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

в) уравнение постоянства массового расхода

$$\int_0^1 u(x, y) dy = \int_0^1 u(0, y) dy. \quad (10)$$

Данные уравнения получены из (1)–(3) в предположении, что изменение давления поперек потока равно нулю ($p'_y = 0$). Поскольку давление изменяется только вдоль одной координаты, для упрощенных уравнений (8)–(10) были предложены высокоэффективные алгоритмы [1, 2, 7].

В самом деле, линеаризованный разностный аналог уравнения движения по X (9) может быть записан в виде

$$A_j u_{ij-1} + B_j u_{ij} + C_j u_{ij+1} = D_j - \frac{p_i - p_{i-1}}{h_x}.$$

Данное разностное уравнение содержит неизвестные компоненты скорости u_{ij} и давление p_i . Зададим некоторое значение p_i и решим разностное уравнение методом прогонки (то есть методом Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных). Полученные значения u_{ij} после применения метода Ньютона по нелинейности не

будут удовлетворять разностному аналогу уравнения постоянства массового расхода (10)

$$\sum_{j=1}^{N_y} (u_{ij} - u_{1j}) = 0$$

из-за произвольного задания p_i в правой части. Ранее было предложено несколько равнозначных способов вычисления p_i , но в данной работе использован метод секущих [7]. В основе этого метода лежит отыскание p_i путем решения трансцендентного уравнения

$$\mathcal{E}(p_i) = \sum_{j=1}^{N_y} (u_{ij} - u_{1j}).$$

Поскольку зависимость погрешности разностного аналога уравнения постоянства массового расхода \mathcal{E} от давления p_i близка к линейной, а метод секущих является точным для линейных задач, потребуется несколько итераций метода секущих для уменьшения абсолютной величины \mathcal{E} до уровня погрешности округления.

Заметим, что применение метода Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных не требует глобальной линеаризации матрицы коэффициентов, но скорость сходимости алгоритма будет невелика. Для ускорения сходимости можно после нескольких итераций Зейделя зафиксировать давление и выполнить несколько итераций с применением более быстро сходящихся итерационных методов.

Данное обстоятельство может быть использовано при решении полных уравнений Навье–Стокса. Для этого представим давление в виде

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + p^{xyz}(t, x, y, z), \quad (11)$$

где верхние индексы x , y , z и xyz показывают зависимость того или иного слагаемого от соответствующих пространственных координат. «Одномерные» слагаемые $p^x(t, x)$, $p^y(t, y)$ и $p^z(t, z)$ могут быть определены при помощи высокоэффективных методов, предложенных ранее для решения упрощенных уравнений (8)–(10), а «многомерное» слагаемое $p^{xyz}(t, x, y, z)$ – при помощи метода искусственной сжимаемости для избежания дополнительных граничных условий. Поскольку часть давления, а именно $p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z)$, вычисляется с использованием высокоэффективных методов, следует ожидать уменьшения объема вычислительной работы по сравнению с традиционными алгоритмами (то есть при $p^x(t, x) = p^y(t, y) = p^z(t, z) = 0$). Очевидно, что уменьшение объема вычислений будет зависеть от решаемой задачи. Наибольший эффект достигается для задач с выделенным направлением течения среды (течения в струях, соплах, каналах, обтекание тел и т. д.). В этом случае одно из «одномерных» слагаемых в (11) является доминирующим. Для задач без выделенного направления течения, например для задачи течения в каверне с движущейся крышкой, уменьшение вычислительной работы будет менее значительным.

Согласно (11), в N -мерном случае давление представимо в виде суммы $(N+1)$ -го слагаемого. Однако в уравнение движения будут входить градиенты только двух из них, например

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + p^{xyz}(t, x, y, z)) = \frac{\partial p^x}{\partial x} + \frac{\partial p^{xyz}}{\partial x}.$$

Для отыскания «одномерных» слагаемых p^x , p^y и p^z формулируется вспомогательная задача. Вычисления проводятся по схеме «предиктор-корректор», где в качестве предиктора выступает вспомогательная задача, а в качестве корректора – исходная.

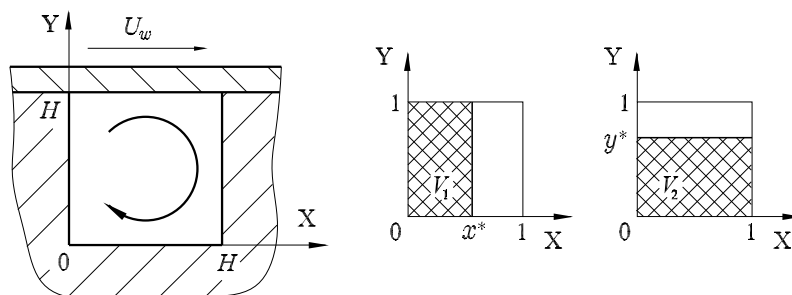


Рис. 1. Каверна с движущейся крышкой и контрольные объемы V_1 и V_2

2. Течения несжимаемых сред (эталонные задачи)

В данном разделе будет приведена методика построения вспомогательной задачи и представлены результаты расчетов течений без выделенного направления течения среды (течение в каверне с движущейся крышкой) и с выделенным направлением (обтекание ступеньки).

2.1. Течение в каверне. Рассмотрим задачу о стационарном течении несжимаемой среды в каверне $H \times H$ с крышкой, движущейся со скоростью U_w , для иллюстрации формулировки вспомогательной задачи. Положим, что плотность ρ и вязкость μ среды являются постоянными. В данном случае число Рейнольдса в уравнениях Навье – Стокса (1)–(3) определяется как

$$Re = \frac{\rho U_w H}{\mu}.$$

На стенках и крышке каверны граничные условия для безразмерных компонент скорости задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad u(x, 1) = 1, \\ v(x, 0) = v(0, y) = v(1, y) = v(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

Теперь сформулируем вспомогательную задачу течения в каверне, вычислительные затраты для расчета которой были бы сравнимы с расчетом уравнений Навье – Стокса в приближении длинного канала (8)–(10), но решение которой было бы близко к решению исходной задачи (1)–(3). Для этого сначала проинтегрируем уравнение неразрывности (1) по контрольным объемам V_1 и V_2 , показанным на рис. 1, и получим два уравнения постоянства массового расхода

$$\int_0^1 u(x, y) dy = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^1 v(x, y) dx = 0. \tag{13}$$

Во вспомогательной задаче вместо одного уравнения неразрывности (1) используются уравнения постоянства массового расхода (12) и (13), которые рассматриваются как априорная информация об искомом решении.

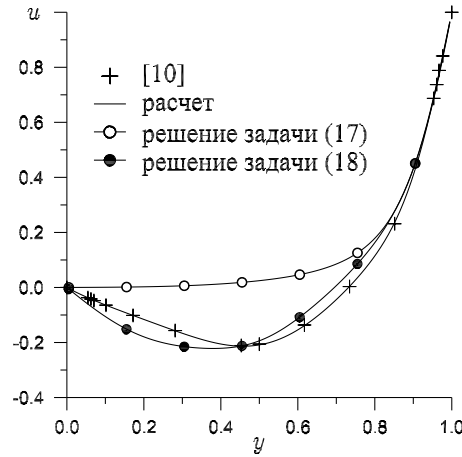


Рис. 2. Распределение компоненты скорости u в вертикальном сечении, проходящем через середину дна каверны (то есть $u(0.5, y)$) при $Re = 100$

С учетом (11) вспомогательная задача принимает вид:

а) уравнение движения по X и уравнение постоянства массового расхода (12)

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{dp^x}{dx} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 u(x, y) dy = 0, \end{cases} \quad (14)$$

б) уравнение движения по Y и уравнение постоянства массового расхода (13)

$$\begin{cases} \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{dp^y}{dy} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial y} \right] + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 v(x, y) dx = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где квадратные скобки означают, что производные $(p^{xy})'_x$ и $(p^{xy})'_y$ являются фиксированными (то есть вычисляются по значениям p^{xy} , взятым с предыдущей итерации), а фигурные скобки означают, что уравнения движения решаются согласованно с соответствующими уравнениями постоянств массового расхода (точно так, как при решении (8)–(10) [1, 2, 7]).

Для иллюстрации влияния вспомогательной задачи (14), (15) на сходимость алгоритма рассмотрим течение при $Re = 100$. При малых числах Рейнольдса, как правило, не возникает проблем, связанных со сходимостью итераций по нелинейности при решении уравнений движения. Выберем нулевое начальное значение компонент скорости и давления: $u^{(0)} = 0$, $v^{(0)} = 0$ и $p^{(0)} = 0$. В этом случае компонента скорости v точно удовлетворяет уравнению движения по Y и граничным условиям, поэтому в традиционных сегрегированных алгоритмах получение начального приближения к решению уравнений Навье–Стокса сводится к решению задачи

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

Вспомогательная задача (14)–(15) в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = -\frac{dp^x}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \int_0^1 u(x, y) dy = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Обе задачи в конечном итоге сводятся к системам вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, которые решались при помощи метода Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных. В методологических целях критерий останова итераций задан в виде

$$\frac{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} < 10^{-7}.$$

Расчет течения при $\text{Re} = 100$ осуществлялся на равномерной разнесенной сетке 101×101 с шагом $h_x = h_y = 1/100$.

Рис. 2 иллюстрирует те преимущества, которые возникают при использовании уравнений постоянств массового расхода (12) и (13) в качестве априорной информации. На этом рисунке сплошной линией показано полученное решение уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость–давление», а маркерами «+» – решение уравнений Навье–Стокса в переменных «вихрь–функция тока» [8]. Начальное приближение в традиционных сегрегированных алгоритмах, полученное из (16), близко к решению только в непосредственной близости от движущейся крышки ($y > 0.7$). Начальное приближение, полученное из (17), близко к искомому решению уравнений Навье–Стокса во всем вертикальном сечении. Заметим, что при решении вспомогательной задачи (14), (15) реализуются два итерационных процесса (для отыскания «одномерных» слагаемых методом секущих и для отыскания решения сеточных уравнений методом Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных). Поскольку скорость сходимости метода секущих существенно выше, чем метода Зейделя, то целесообразно выполнять только несколько итераций Зейделя при решении вспомогательной задачи. Другими словами, основное назначение вспомогательной задачи состоит именно в отыскании «одномерных» слагаемых в представлении (11).

Далее значения «одномерных» слагаемых в (11) фиксируются и осуществляется переход к исходной задаче, в которой уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\left[\frac{dp^x}{dx}\right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\left[\frac{dp^y}{dy}\right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (19)$$

Система, состоящая из уравнений (18) и (19), может быть решена методом последовательных приближений. Метод искусственной сжимаемости состоит в том, что после выполнения нескольких итераций для решения системы (18) и (19) при фиксированном давлении давление пересчитывается по формуле

$$p := p - \beta_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

где $:=$ есть равенство в смысле присвоения, а β_p – параметр нижней релаксации.

Рис. 3 показывает уменьшение погрешности разностного аналога уравнения неразрывности (1)

$$R^{uv} = \max_{ij} \left| \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x} + \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h_y} \right| \quad (20)$$

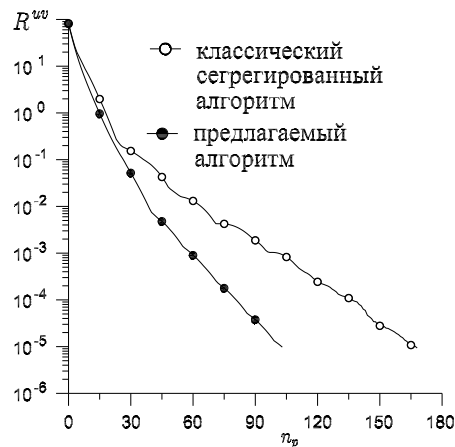


Рис. 3. Уменьшение погрешности разностного аналога уравнения неразрывности R^{uv} (20) в процессе выполнения итераций по давлению (n_p)

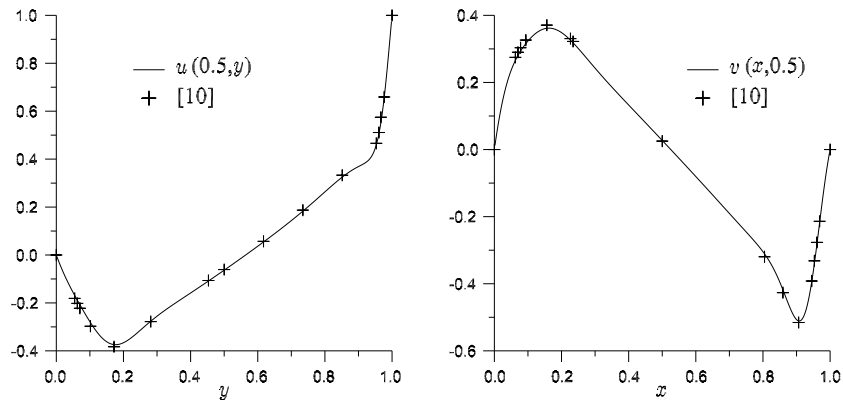


Рис. 4. Распределение компоненты скорости u в вертикальном сечении, проходящем через середину дна каверны (слева), и распределение компоненты скорости v в горизонтальном сечении, проходящем через середину боковых стенок каверны (справа), при $Re = 1000$

по мере сходимости итераций по давлению (n_p). Использование вспомогательной задачи позволило сократить время счета примерно на 50%.

Следующим этапом тестирования является расчет течения в каверне при $Re = 1000$. В этом случае итерации по нелинейности в конвективных членах уравнений движения будут расходиться при нулевом начальном приближении, поэтому необходимо принять дополнительные меры для обеспечения сходимости. В данной работе принят наиболее распространенный способ получения стационарного решения подобных задач путем счета на установление. Заодно будет показана применимость предлагаемого алгоритма к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса. Расчет течения в каверне при $Re = 1000$ осуществлялся на равномерной сетке 301×301 с шагом $h_x = h_y = 1/300$.

На рис. 4 показаны результаты сопоставления полученных компонент скорости u и v в характерных сечениях каверны с результатами решений уравнений Навье–Стокса в переменных «вихрь–функция тока» [8].

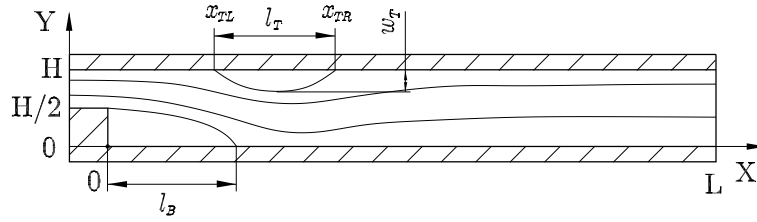


Рис. 5. Геометрия задачи об обтекании ступеньки

Сравнение объемов вычислений, полученных нашим методом и традиционным алгоритмом (то есть при $p^x = p^y = 0$), показало, что и в этом случае уменьшение времени счета составило от 30 до 50%. Заметим, что скорость сходимости итераций метода искусственной сжимаемости сравнительно невелика. Поэтому решение вспомогательной задачи лучше проводить через несколько десятков итераций метода искусственной сжимаемости. Тогда вычислительные усилия для решения вспомогательной задачи окажутся существенно меньше, чем для решения исходной задачи. Моделирование течения в каверне позволило экспериментально оценить минимальное уменьшение вычислительной работы, достигаемое при использовании вспомогательной задачи.

2.2. Обтекание ступеньки при $Re = 800$. Геометрия задачи о стационарном обтекании ступеньки показана на рис. 5. Рассматривается стационарное течение среды с постоянными свойствами в канале длины L и высоты H . На входе в канал расположена ступенька размера $H/2 \times H/2$. Предполагается, что компонента скорости u на входе в канал распределена по параболическому закону, а компонента скорости v равна нулю. При достаточно больших числах Рейнольдса образуются два вихря, один – непосредственно за ступенькой, а другой – на верхней стенке канала. В отличие от течения в каверне, при обтекании ступеньки существует выделенное направление течения среды.

Для удобства доопределим компоненты скорости, полагая их равными нулю в ступеньке, то есть

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad -H/2 \leq x \leq 0 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq H/2.$$

Тогда уравнения постоянств массового расхода в данной задаче принимают вид

$$\int_0^H u(0, y) dy = \int_0^H u(x, y) dy,$$

$$\int_0^L v(x, y) dx = - \int_0^y (u(L, \xi) - u(0, \xi)) dy.$$

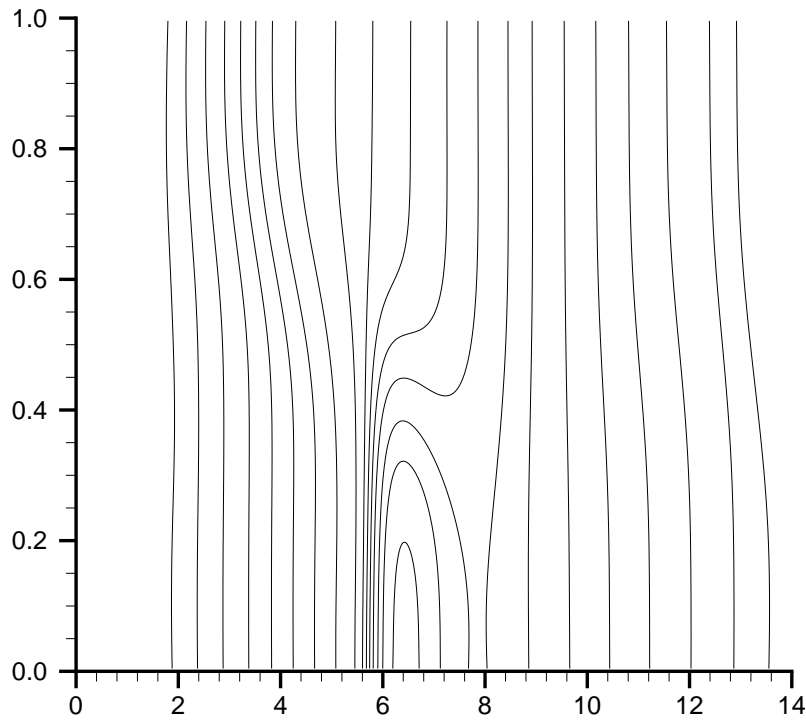
Расчет проводился на равномерной разнесенной сетке 101×1401 ($h_x = h_y = 1/100$). В табл. 1 приводится сопоставление полученных результатов¹ с ранее опубликованными данными.

¹В данной работе границей вихрей считались узлы, в которых сеточная функция u_{ij} меняет знак, то есть координаты точек отрыва и присоединения x_{TL} , x_{TR} и l_B определялись с точностью до величины шага сетки $h = 1/100$.

Табл. 1

Сравнение результатов моделирования течения при обтекании ступеньки ($Re = 800$)

Работа	l_B	l_T	w_T	x_{TL}	x_{TR}	Число узлов
[9]	6.0150	5.6600	–	4.8200	10.4800	
[10]	6.1000	5.6300	–	4.8500	10.4800	129681
[11]	6.0820	5.6260	–	4.8388	10.4648	245760
[11]	6.1000	5.6300	–	4.8600	10.4900	≥ 8000
[12]	6.0964	5.6251	–	4.8534	10.4785	3737
настоящая	6.1000	5.6300	0.28	4.8400	10.4700	141501

Рис. 6. Обтекание ступеньки: изобары при $Re = 800$

Сравнение времени решения задачи об обтекании ступеньки показывает, что объем вычислительной работы уменьшен приблизительно в 300 раз по сравнению с традиционными алгоритмами (при $L/H = 14$). Причина столь заметного уменьшения объема вычислений понятна из рис. 6, где показаны изобары. Очевидно, что, за исключением небольшой подобласти, изобары являются почти вертикальными линиями, то есть давление в данной задаче изменяется преимущественно в направлении течения потока. Поэтому «градиент давления» $(p^x)'_x$, отыскиваемый при помощи вспомогательной задачи, будет доминирующим. Преобладание $(p^x)'_x$ приводит к существенному уменьшению вычислительных усилий для отыскания слагаемого p^{xy} . Заметим, что при увеличении значения отношения длины канала к его высоте L/H будет наблюдаться дальнейший рост эффективности предложенного алгоритма.

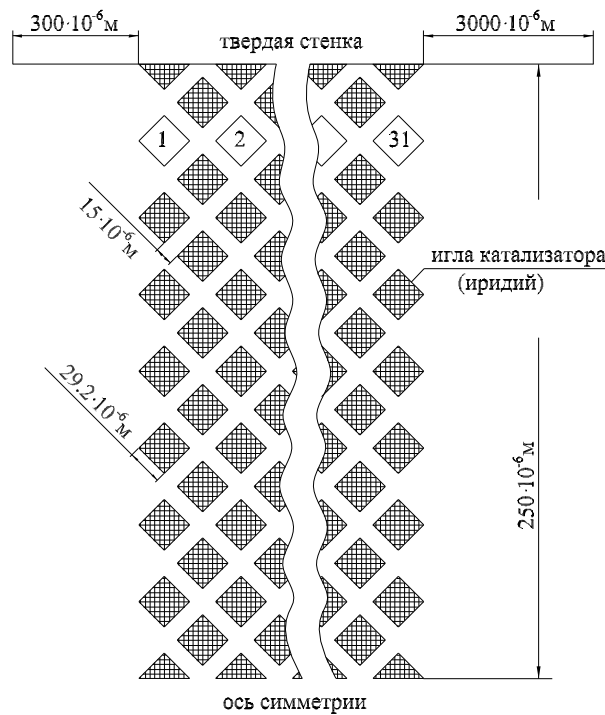


Рис. 7. Геометрия катализатора микродвигателя

3. Течение несжимаемых сред (прикладная задача)

Стремительное развитие электронных устройств оказало сильное влияние на разработку конструкций летательных аппаратов различного назначения. Необходимость снижения массы спутников послужила причиной разработки микродвигателей (МД) для систем ориентации. Тяга полноразмерных жидкостных ракетных двигателей возникает при горении смеси горючего и окислителя. В МД качественное смешение горючего и окислителя осуществить достаточно трудно, поэтому МД являются однокомпонентными. Важнейшим элементом однокомпонентных двигателей является катализатор, на котором осуществляется разложение рабочего тела. На рис. 7 показана типичная геометрия катализатора МД.

Очевидны трудности моделирования течения в подобном катализаторе при помощи вычислительных алгоритмов, в которых давление отыскивается путем решения задачи Неймана. Задание градиентов давления на омываемых поверхностях игл катализатора требует построения сетки, ортогональной вблизи границ. Отсутствие граничных условий для давления в предлагаемом алгоритме позволяет существенно упростить построение разнесенной сетки в данной области (рис. 8). Заметим, что условия прилипания и непротекания для компонент скорости на омываемых поверхностях катализатора аппроксимируются точно.

На рис. 9 показаны изолинии безразмерной функции тока вблизи первого ряда игл катализатора около оси симметрии ($Re = 350$). Расположение игл выбиралось таким образом, чтобы их обтекание было безвихревым. Однако к недостатку данной конструкции следует отнести интенсивное образование вихрей за последним рядом игл (рис. 10). Расчеты показали, что при $Re = 1000$ не существует стационарного решения уравнений Навье – Стокса и образуется дорожка Кармана, которая может привести к неустойчивой работе МД при больших значениях чи-

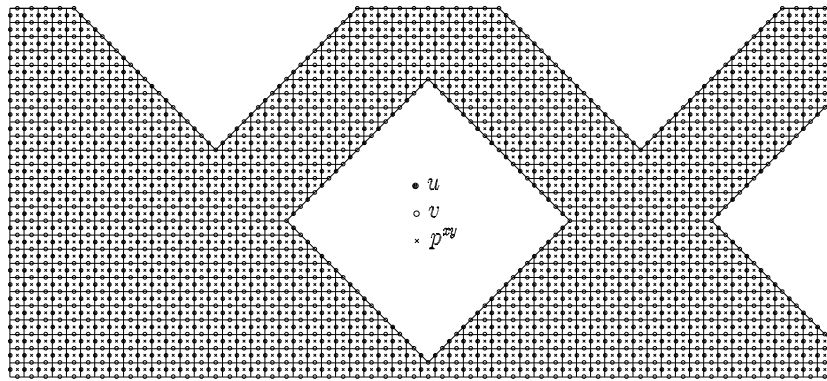


Рис. 8. Разнесенная сетка в катализаторе микродвигателя

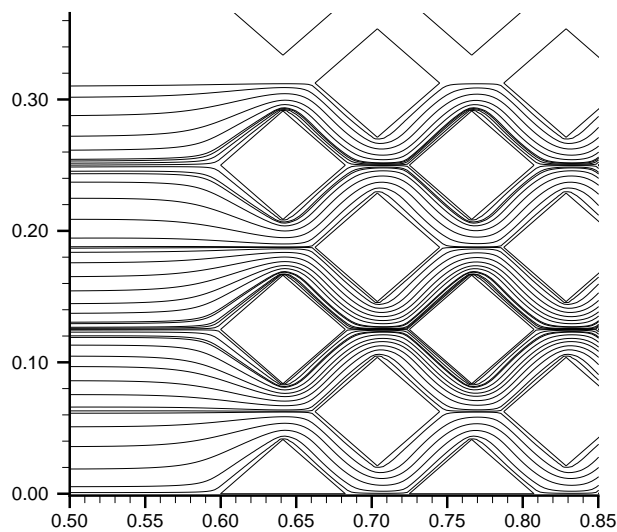


Рис. 9. Изолинии безразмерной функции тока вблизи первого ряда игл катализатора около оси симметрии

сел Рейнольдса. Распределение безразмерного давления вблизи первого ряда игл катализатора около оси симметрии показано на рис. 10.

4. Течение слабосжимаемых сред

В заключение рассмотрим течение слабосжимаемой среды для иллюстрации работоспособности предлагаемого алгоритма при $\rho \rightarrow \text{const}$. В качестве модельной задачи проведен расчет течения азота между параллельными пластинами с локальным сужением. Геометрия задачи показана на рис. 12, где $H = 250 \cdot 10^{-6}$ м. Давление азота на входе составляло 10^5 Па, температура 300 К, скорость азота распределена по параболическому закону. Число Рейнольдса на входе составило $\text{Re}_0 = 200$. Течение считается симметричным.

Отличительной особенностью численного решения вспомогательной задачи является локальность, то есть при ее решении не требуется глобальной линеаризации. После отыскания «одномерного» слагаемого p^x или p^y в данном сечении

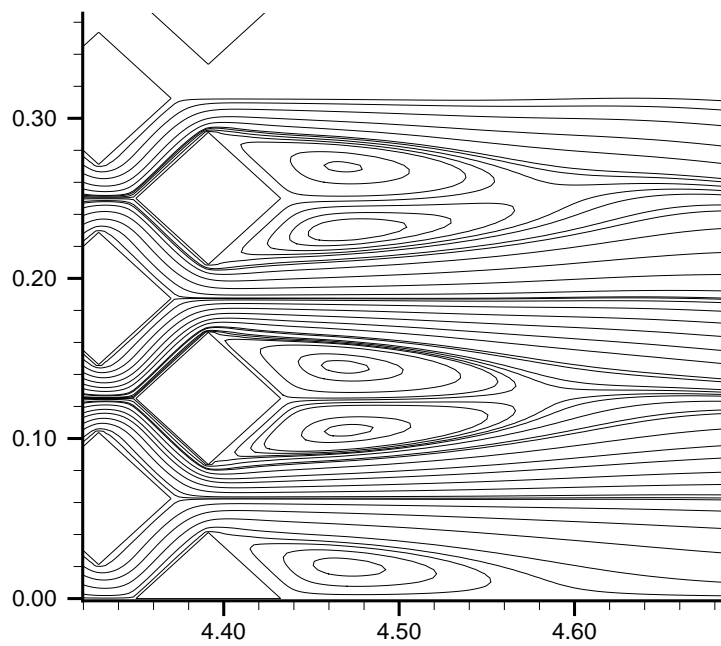


Рис. 10. Изолинии безразмерной функции тока вблизи последнего ряда игл катализатора около оси симметрии

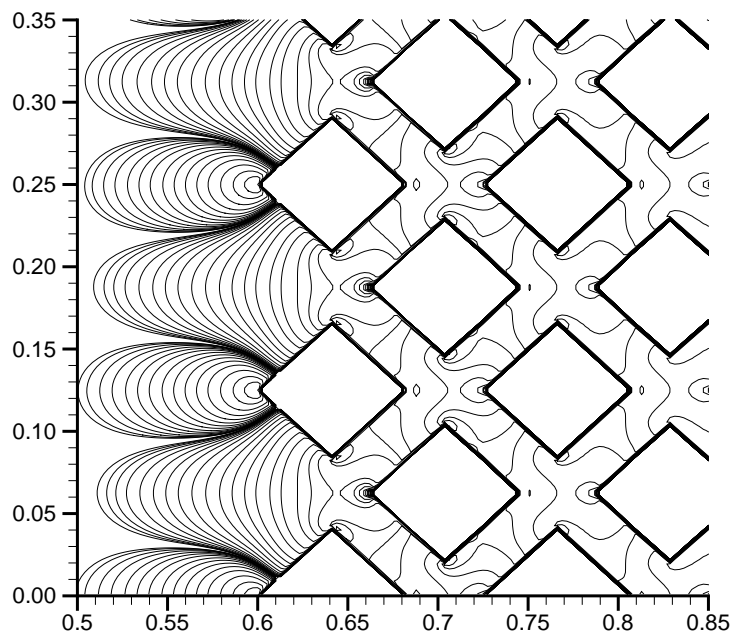


Рис. 11. Изобары вблизи первого ряда игл катализатора около оси симметрии

осуществляется пересчет значений плотности и вязкости по уравнению состояния. Как следствие, вычисление «многомерного» слагаемого p^{xy} может осуществляться при замороженных значениях плотности и вязкости.

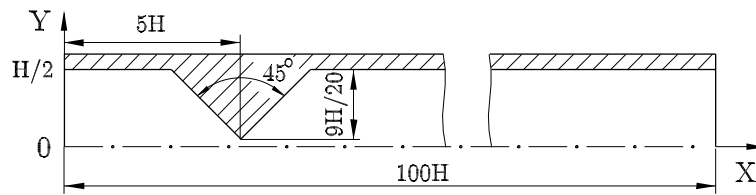


Рис. 12. Геометрия задачи о течении между пластинами с локальным сужением

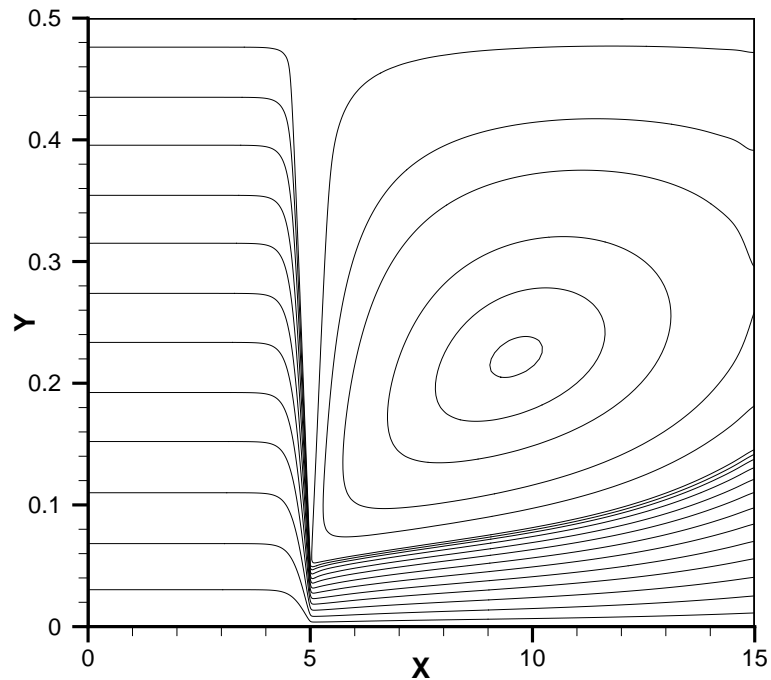


Рис. 13. Изолинии безразмерной функции тока при течении между пластинами

На рис. 13 показаны изолинии безразмерной функции тока за локальным сужением. Видно расширение струи и вихрь в пристеночной области.

Заключение

Предложенный алгоритм для решения уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость–давление» на структурированных сетках занимает промежуточное место между сегрегированными и совместными, поскольку компоненты скорости и «часть» давления (то есть сумма «одномерных» слагаемых) всегда отыскиваются совместно при решении вспомогательной задачи.

Организация вычислений по схеме «предиктор-корректор», где в качестве предиктора используется вспомогательная задача, позволяет уменьшить объем вычислений, необходимых для решения уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость–давление» на структурированных сетках. Уменьшение вычислительных усилий особенно заметно при моделировании течений с выделенным направлением течения среды.

Решение вспомогательной задачи не требует глобальной линеаризации матрицы коэффициентов результирующей системы алгебраических уравнений. Поэтому данный метод может быть легко обобщен для моделирования течений сжимаемых сред, теплофизические свойства которых далеки от свойств совершенного газа.

Основные результаты докладывались на седьмом Всероссийском семинаре «Точные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2007). Автор выражает искреннюю признательность организаторам и участникам семинара за ряд ценных замечаний.

Summary

S.I. Martynenko. Development of algorithms for solving the Navier–Stokes equations in “velocity – pressure” variables.

A new approach for pressure computation at solving the Navier–Stokes equations in primitive variables is proposed and developed. The approach is based on integral forms of the continuity equation (mass conservation equations) and pressure decomposition in order to reduce total computational efforts. The paper represents the algorithm description and results of benchmark and applied problems. Navier–Stokes equations are solved without additional boundary conditions for pressure. The approach can be used in decoupled and coupled solvers.

Литература

1. *Андерсон А., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен: в 2 т. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с.
2. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
3. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
4. *Chorin A.J* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *J. Comput. Phys.* – 1967. – V. 2. – P. 12–26.
5. *Vanka S.P., Leaf G.K.* An efficient finite-difference calculation procedure for multi-dimensional fluid flows // *AIAA Paper.* – 1984. – No 1244. – P. 12.
6. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 168 с.
7. *Briley W.R.* Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts // *J. Comp. Phys.* – 1974. – V. 14. – P. 8–28.
8. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // *J. Comp. Physics.* – 1982. – V. 48. – P. 387–411.
9. *Barton I.E.* The entrance effect of laminar flow over a backward-facing step geometry // *Internat. J. for Numerical Methods in Fluids.* – 1997. – V. 25. – P. 633–644.
10. *Gartling D.* A test problem for outflow boundary conditions-flow over a backward-facing step // *Internat. J. for Numerical Methods in Fluids.* – 1990. – V. 11. – P. 953–967.
11. *Gresho P.M., Gartling D.K., Torczynski J.R., Cliffe K.A., Winters K.H., Garratt T.G., Spence A., Goodrich J.W.* Is a steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing step at $Re=800$ stable? // *Internat. J. for Numerical Methods in Fluids.* – 1993. – V. 17. – P. 501–541.

12. *Keskar J., Lin D.A.* Computation of laminar backward-facing step flow at $Re=800$ with a spectral domain decomposition method // *Internat. J. for Numerical Methods in Fluids.* – 1999. – V. 29. – P. 411–427.

Поступила в редакцию
09.10.07
Переработанный вариант
15.11.07

Мартыненко Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела «Спецдвигатели и химмотология» Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва.

E-mail: *martyn_s@mail.ru*