

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТИПА КУЭТТА – ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н.В. Бурмашева, Е.Ю. Просвиряков

*Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН,
г. Екатеринбург, 620049, Россия*

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, 620002, Россия

Аннотация

Представлено новое точное решение, позволяющее прогнозировать свойства поля скорости, давления и распределения примеси при установившихся сдвиговых течениях вязких несжимаемых жидкостей в протяженном горизонтальном слое. Для описания концентрационной конвекции построена математическая модель на основе уравнений Обербека – Буссинеска с линейной зависимостью плотности от концентрации. Полагается, что одна из границ слоя (нижняя) является непроницаемой для растворенного в жидкости вещества (примеси) и на ней полагается справедливым эффект прилипания жидкости. Течение индуцируется неоднородным распределением примеси и давления на верхней границе рассматриваемого слоя. На верхней границе задается однородное распределение скоростей. Построенное решение принадлежит семействам Остроумова – Бириха и Линя – Сидорова – Аристова. Поле скоростей описывается двумерным профилем Куэтта, то есть обе компоненты скорости зависят от вертикальной поперечной координаты. Концентрация и давление описываются линейными формами относительно горизонтальных (продольных) координат с коэффициентами, зависящими от третьей координаты. Структура точного решения выбрана таким образом, чтобы тождественно удовлетворялось уравнение несжимаемости. Это позволило разрешить переопределенную квадратично нелинейную систему в частных производных. Незвестные функции, определяющие гидродинамические поля, после подстановки в стационарную систему уравнений Обербека – Буссинеска, дополненную уравнениями диффузии и несжимаемости, найдены посредством интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система имеет тринадцатый порядок и допускает точное полиномиальное решение. Показано, что данное решение способно описывать возникновение нескольких зон противотечений и немонотонный характер удельной кинетической энергии, имеющей до двух нулей. Полученные точные решения способны иллюстрировать множественную стратификацию поля касательных напряжений, поля давления и концентрационного поля. Таким образом, гидродинамические поля имеют сложную топологию, определяемую зависимостью скоростей, давления и концентрации от поперечной координаты.

Ключевые слова: концентрационная конвекция, точное решение, течение Куэтта – Пуазейля

Введение

Исследование концентрационной конвекции в настоящее время ведется чрезвычайно интенсивно экспериментальными методами [1–8]. В то же время теоретическое изучение уравнений Обербека – Буссинеска при учете изменения плотности

от функции концентрации по линейному закону осуществляется недостаточно [9, 10]. Действительно, уравнения тепловой и диффузионной конвекции совпадают с точностью значений диссипативных коэффициентов, но физические особенности течения определяются прежде всего граничными условиями [11–14]. Запас точных решений для уравнений естественной конвекции к настоящему времени достаточно широкий [15–40], что позволяет исследовать краевые задачи для различной геометрии потоков жидкости (однонаправленные, сдвиговые, трехмерные течения). Нахождение новых точных решений уравнений Обербека – Буссинеска необходимо для дальнейшего изучения гидродинамической устойчивости диффузионных течений, поскольку важным является не только класс возмущений, но и стартовое точное решение. В статье [9] была поставлена и решена задача о сдвиговом течении жидкости типа Куэтта для концентрационной конвекции. В этом случае движение индуцировалось неоднородным распределением примеси (например, морская вода) и заданием скоростей на верхней границе бесконечного горизонтального слоя [9]. Известно, что сдвиговые течения используются очень часто при моделировании и описании задач геофизической гидродинамики, при изучении тонких слоев в различных технических и технологических устройствах, в которых происходит перепад давления в одном или двух направлениях [21, 31, 33, 35, 41–47]. Такие вариации давления называют горизонтальными градиентами давления, а их наличие приводит к конвективному перемешиванию жидкости, поскольку они вызывают изменение градиентов концентрации и генерацию движения [16, 22, 33, 35, 44, 45, 48–50]. Таким образом, актуальной задачей является изучение концентрационной конвекции, индуцируемой горизонтальными градиентами давления. В этом случае возникают вторичные градиентные потоки, которые объясняют перепад солёности между водами Черного и Средиземного морей [50–52]. В настоящей работе решена модельная задача о конвективном концентрационном течении жидкости, индуцированном градиентами давления и концентрации при заданной скорости на верхней границе бесконечного горизонтального слоя жидкости.

1. Постановка задачи. Система уравнений

Система уравнений Обербек – Буссинеска, диффузии и несжимаемости, описывающих слоистые установившиеся течения вязкой бинарной несжимаемой жидкости, записывается следующим образом:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g\beta C \mathbf{k}, \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) C = d\Delta C, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$ – вектор скорости; $P(x, y, z)$ – деленное на постоянную среднюю плотность ρ отклонение давления от гидростатического; $C(x, y, z)$ – отклонение концентрации (солёности) от среднего значения; ν , d , β – коэффициенты кинематической вязкости, диффузии, концентрационного расширения жидкости соответственно.

Исследование решений такой задачи позволяет ответить на вопрос о том, каким образом в изотермической жидкости концентрация примеси влияет на свойства течения. Будем искать решение системы уравнений (1) в следующем виде [9, 34]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z), \quad V_y = V(z), \quad P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y, \\ C &= C_0(z) + C_1(z)x + C_2(z)y. \end{aligned} \quad (2)$$

В результате подстановки вида (2) в систему (1) приходим к системе

$$C_1'' = 0, \quad C_2'' = 0, \quad P_1' = g\beta C_1, \quad P_2' = g\beta C_2,$$

$$\nu U'' = P_1, \quad \nu V'' = P_2, \quad dC_0'' = UC_1 + VC_2, \quad P_0' = g\beta C_0. \quad (3)$$

Уравнения выписаны в том порядке, в каком будет произведено последовательное интегрирование системы (3). Решение системы (3) представляет собой набор полиномиальных функций различного порядка. Полиномом наибольшей (четырнадцатой) степени описывается фоновое давление P_0 . Соответственно, необходимо определить значения пятнадцати постоянных интегрирования, а для этого следует сформулировать соответствующее число краевых условий.

2. Постановка задачи. Краевые условия

Установившееся течение бинарной жидкости происходит в бесконечном горизонтальном тонком слое, ограниченном твердой непроницаемой плоскостью $z = 0$, по которой жидкость движется без проскальзывания [9]:

$$V_x|_{z=0} = V_y|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial n}\bigg|_{z=0} = 0.$$

Здесь n – вектор нормали к поверхности рассматриваемого слоя жидкости. Использование приближения крупномасштабности позволяет пренебречь искривлением свободной верхней границы тонкого слоя. Таким образом, верхняя граница жидкости описывается уравнением плоскости $z = h$. На верхней границе заданы скорость движения границы и распределение давления и концентрации примеси на ней [9, 31, 34, 41–43]:

$$V_x|_{z=h} = W \cos \phi, \quad V_y|_{z=h} = W \sin \phi, \quad P|_{z=h} = S_0 + S_1x + S_2y, \quad C|_{z=h} = ax + by.$$

С учетом структуры класса решений (2) перечисленные выше краевые условия принимают вид

$$\begin{aligned} U(0) = V(0) = 0, \quad U(h) = W \cos \phi, \quad V(h) = W \sin \phi, \\ P_0(h) = S_0, \quad P_1(h) = S_1, \quad P_2(h) = S_2, \\ \frac{dC_0}{dz}(0) = \frac{dC_1}{dz}(0) = \frac{dC_2}{dz}(0) = 0, \quad C_0(h) = 0, \quad C_1(h) = a, \quad C_2(h) = b. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение краевой задачи (3), (4) с учетом замены принимает вид

$$\begin{aligned} U &= Z [W \cos \phi + \psi_1(-1 + Z) + \psi_2(-1 + Z)(-2 + Z)]; \\ V &= Z [W \sin \phi + \gamma_1(-1 + Z) + \gamma_2(-1 + Z)(-2 + Z)]; \\ C_1 &= a; \quad C_2 = b; \\ C_0 &= (-1 + Z) \times \\ &\times [\lambda_1(-1 - Z - Z^2 + Z^3) + \lambda_2(8 + 8Z + 8Z^2 - 12Z^3 + 3Z^4) + \lambda_3(1 + Z + Z^2)]; \\ P_1 &= S_1 + \xi_1(-1 + Z); \\ P_2 &= S_2 + \xi_2(-1 + Z); \\ P_0 &= S_0 + \xi_3(-1 + Z)^2(-7 - 4Z - Z^2 + 2Z^3) + \\ &+ \xi_4(-1 + Z)^2(11 + 6Z + Z^2 - 4Z^3 + Z^4) + \xi_5(-1 + Z)^2(3 + 2Z + Z^2). \end{aligned} \quad (5)$$

В точном решении (5) для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$\psi_1 = \frac{h^2 S_1}{2\nu}, \quad \psi_2 = \frac{ag\beta h^3}{6\nu}, \quad \gamma_1 = \frac{h^2 S_2}{2\nu}, \quad \gamma_2 = \frac{bg\beta h^3}{6\nu},$$

$$\lambda_1 = \frac{(aS_1 + bS_2)h^4}{24d\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{(a^2 + b^2)gh^5\beta}{360d\nu}, \quad \lambda_3 = \frac{h^2W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{6d},$$

$$\xi_1 = ag\beta h, \quad \xi_2 = bg\beta h, \quad \xi_3 = \frac{(aS_1 + bS_2)gh^5\beta}{240d\nu},$$

$$\xi_4 = \frac{(a^2 + b^2)g^2h^6\beta^2}{720d\nu}, \quad \xi_5 = \frac{(a\cos\phi + b\sin\phi)gh^3W\beta}{24d}.$$

Точное решение (5) описывает неоднородное концентрационное течение Куэтта–Пуазейля в классе решений Линя–Сидорова–Аристова [53–55]. Отличительной особенностью полученного решения (5) является учет ветрового воздействия и неоднородного распределения давления и концентрации на верхней границе рассматриваемого бесконечного слоя вязкой бинарной жидкости.

Заметим, что если положить значения S_1 , S_2 обоих продольных градиентов давления на верхней границе слоя равными нулю, то коэффициенты ψ_1 , γ_1 , λ_1 , ξ_3 в точном решении (5) окажутся нулевыми. Получившиеся при этих значениях констант выражения (5) были подробно исследованы в [9].

Отметим также, что коэффициенты λ_1 , ξ_3 могут вырождаться не только при $S_1 = S_2 = 0$. Это означает, что при анализе такой краевой задачи необходимо сочетать выводы, приведенные в [9] (в части анализа свойств фонового давления и поля концентрации), с результатами, полученными ниже (в части анализа свойств поля скорости и градиентов поля давления).

3. Анализ поля скорости

Для удобства и краткости перепишем выражения (5) для скоростей U и V следующим образом:

$$U = Z [W \cos \varphi + \psi_1 (Z - 1) + \psi_2 (Z - 1)(Z - 2)] =$$

$$= Z [\psi_2 Z^2 - Z(3\psi_2 - \psi_1) + W \cos \varphi - \psi_1 + 2\psi_2] = Z f_1(z).$$

Аналогично,

$$V = Z [\gamma_2 Z^2 - Z(3\gamma_2 - \gamma_1) + W \sin \varphi - \gamma_1 + 2\gamma_2] = Z f_2(z).$$

Заметим, что полиномы f_1 и f_2 с точностью до одновременной замены ψ_i на γ_i , $i = 1, 2$, и $\sin \phi$ на $\cos \phi$ оказываются идентичны. Это говорит о том, что если найдется такое ненулевое k , что $\psi_i = k\gamma_i$, $i = 1, 2$, и $\sin \phi = k \cos \phi$, то скорости U и V будут связаны соотношением $U = kV$, значит, путем некоторого поворота системы горизонтальных осей течение сводится к однонаправленному.

Проанализируем свойства компонент вектора скорости (5). Скорость принимает одно нулевое значение внутри слоя жидкости при выполнении неравенства:

$$W \cos \varphi (W \cos \varphi - \psi_1 + 2\psi_2) < 0.$$

При выполнении неравенства

$$W \cos \varphi (W \cos \varphi - \psi_1 + 2\psi_2) > 0$$

у скорости U регистрируются две точки, в которых она равняется нулю (см. рис. 1, сплошная линия).

Аналогичные оценки справедливы и для скорости V : имеется одна нулевая точка, если

$$W \sin \varphi (W \sin \varphi - \gamma_1 + 2\gamma_2) < 0;$$

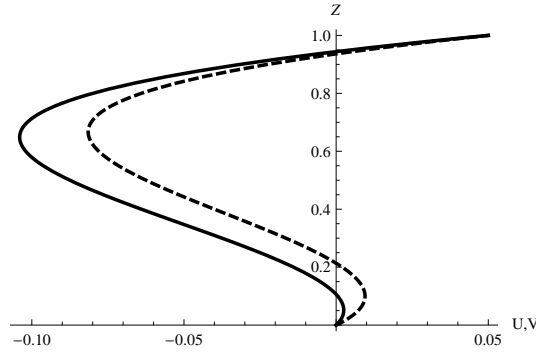


Рис. 1. Профили компонент U , V , м/с, вектора скорости

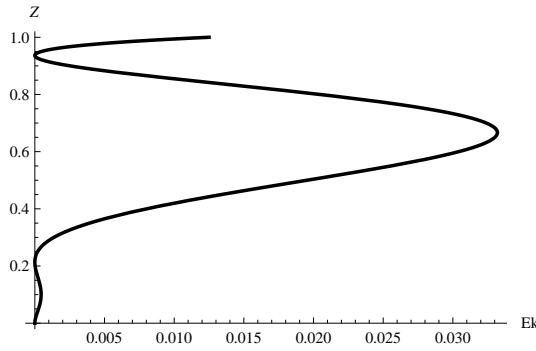


Рис. 2. Профиль удельной кинетической энергии E_k , кг/(м·с²), с максимальным числом нулевых точек

и если выполняется условие $W \sin \varphi (W \sin \varphi - \gamma_1 + 2\gamma_2) > 0$, то скорость V дважды принимает нулевое значение внутри рассматриваемого слоя (см. рис. 1, пунктирная линия).

Таким образом, удельная кинетическая энергия $E_k = \rho(U^2 + V^2)/2$ имеет не более двух нулевых точек внутри слоя (не считая нижней границы слоя, где по условию реализуется прилипание жидкости к твердой стенке); причем это возможно только в случае, когда скорости U и V обращаются в нуль одновременно (рис. 2).

Точки экстремума кинетической энергии E_k связаны со скоростями U и V следующим соотношением:

$$\frac{dE_k}{dZ} = \rho(UU' + VV') = 0.$$

Отметим, что в силу соотношений

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \eta U', \quad \tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \eta V'$$

нули производных U' и V' соответствуют точкам, в которых обращаются в нуль соответствующие касательные напряжения (здесь η – динамическая вязкость жидкости). Следовательно, имеем соотношение

$$\frac{dE_k}{dZ} = U\tau_{xz} + V\tau_{yz} = 0. \tag{6}$$

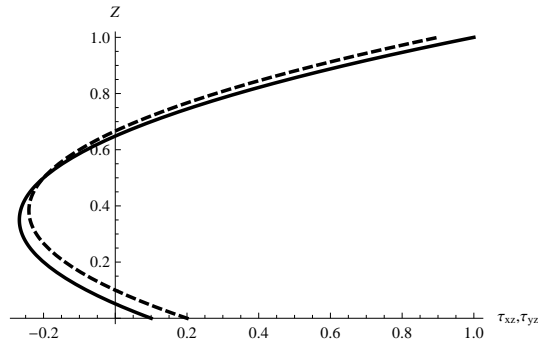


Рис. 3. Профили касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} , кг/(м·с²)

Очевидно, что точки, где обе скорости одновременно обращаются в нуль, являются точками экстремума кинетической энергии E_k . Это объясняется (помимо прямой подстановки значений $U = V = 0$ в равенство (6)) тем, что кинетическая энергия является неотрицательной функцией и при остановке потока (одновременном достижении скоростями нулевого значения) происходит разгон потока, а значит, и рост кинетической энергии E_k .

Критическими точками кинетической энергии E_k также являются точки, в которых одновременно вырождаются оба касательных напряжения (рис. 2). Справедливость этого утверждения доказывается непосредственной подстановкой значений $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ в соотношение (6).

Отметим, что если течение сводимо к однонаправленному, то $U = kV$ и $U' = kV'$, а значит, соотношение (6) принимает вид

$$(1 + k^2) U \tau_{xz} = 0.$$

Это равенство говорит о том, что иных экстремальных точек у кинетической энергии E_k (помимо указанных выше) нет.

Предположим, что течение несводимо к однонаправленному, то есть что $U \neq kV$. Тогда, помимо указанных выше точек, где одновременно вырождаются обе скорости и/или оба касательных напряжения, кинетическая энергия может обращаться в нуль и в некоторых других случаях, отвечающих соотношению (6). Например, когда $U = \tau_{yz} = 0$ или $V = \tau_{xz} = 0$.

Согласно выражениям (5), значения напряжений τ_{xz} , τ_{yz} можно рассчитать по следующим формулам:

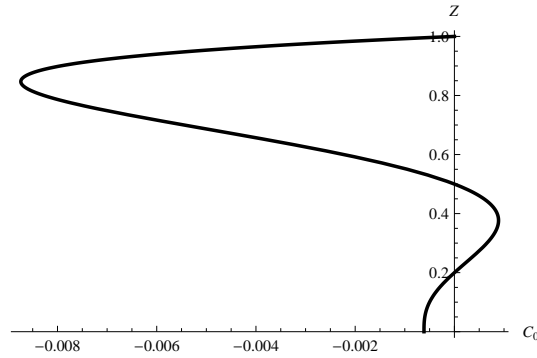
$$\tau_{xz} = \eta (3\psi_2 Z^2 - 2(3\psi_2 - \psi_1) Z + W \cos \varphi - \psi_1 + 2\psi_2),$$

$$\tau_{yz} = \eta (3\gamma_2 Z^2 - 2(3\gamma_2 - \gamma_1) Z + W \sin \varphi - \gamma_1 + 2\gamma_2).$$

Очевидно, каждая из этих функций обратится в нуль не более двух раз (рис. 3), оценки на параметры задачи для этого случая строятся аналогично тому, как это было сделано для скоростей.

4. Анализ поля концентрации

Отличительной особенностью точного решения (5) является постоянство горизонтальных градиентов поля концентрации. Поэтому нелинейность распределения этого поля основывается на свойствах поля фоновой концентрации C_0 . Рассмотрим его отдельно. Отметим, что, если положить $\lambda_1 = 0$, получим решение, которое

Рис. 4. Профили фоновой концентрации C_0 , м^{-3}

было подробно исследовано в [9]. Поэтому всюду далее можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, и решение (5) для фоновой концентрации представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_0 &= \lambda_1 (-1 + Z) \times \\ &\times [-1 - Z - Z^2 + Z^3 + \zeta_2 (8 + 8Z + 8Z^2 - 12Z^3 + 3Z^4) + \zeta_3 (1 + Z + Z^2)] = \\ &= \lambda_1 (-1 + Z) q(Z). \end{aligned}$$

Очевидно, что наибольшее число нулевых точек фоновой концентрации C_0 (то есть точек, в которых значение концентрации примеси (солености) совпадает со средним ее значением) равняется четырем. Этот случай реализуется, если значения полинома $q(Z)$ на границах рассматриваемого слоя имеют одинаковые знаки, а его производная имеет три нуля внутри этого слоя. Первое условие реализуется, если

$$(-1 + 8\zeta_2 + \zeta_3)(-2 + 15\zeta_2 + 3\zeta_3) > 0.$$

Второе условие равносильно тому, что дискриминант соответствующего кубического уравнения положителен:

$$\begin{aligned} &(-1 + 8\zeta_2 + \zeta_3) \times \\ &\times (-12 + 280\zeta_2 - 1900\zeta_2^2 + 4000\zeta_2^3 + 3\zeta_3 + 100\zeta_2\zeta_3 - 1700\zeta_2^2\zeta_3 - 32\zeta_2\zeta_3^2) > 0. \end{aligned}$$

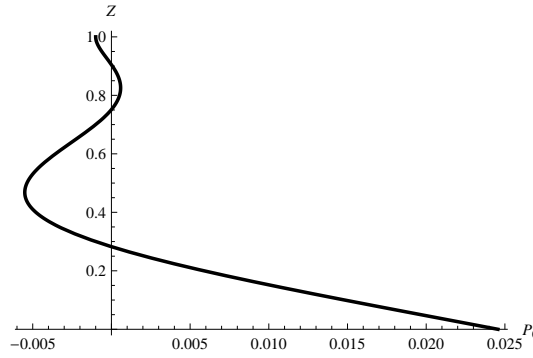
Совокупность этих двух неравенств является необходимым условием того, что фоновая концентрация имеет четыре нуля внутри исследуемого слоя. В качестве примера на рис. 4 приведен профиль фоновой концентрации C_0 при $\zeta_2 = 0.09605558961782143$, $\zeta_3 = 0.23216840384222323$.

При добавлении вторичных полей ($C_1x = ax$ и $C_2y = by$) форма профиля итогового поля концентрации $C = C_0 + C_1x + C_2y$ в конкретном сечении не изменится, поскольку слагаемые ax , by определяют только его сдвиг.

5. Анализ поля давления

Продольные градиенты давления P_1 , P_2 могут менять знак только в одной точке – точке $Z = 1 - S_i/\xi_i$, $i = 1, 2$, – и то при условии, что эта точка принадлежит рассматриваемому слою, а коэффициент ξ_i , $i = 1, 2$, отличен от нуля. В противном случае, оба градиента сохраняют знак.

Более сложным поведением отличается фоновое давление P_0 . Характер профиля фонового давления определяется сочетанием четырех параметров – S_0 , ξ_j ,

Рис. 5. Профиль фонового давления P_0 , $\text{м}^2/\text{с}^2$

$j = 3, 4, 5$. При этом функция P_0 является полиномом шестой степени, а значит, не может иметь более шести нулей на всей области определения, следовательно, фоновое давление P_0 имеет не более шести нулевых точек в рассматриваемом слое.

Отметим также, что параметр S_0 является константой и входит в выражение для давления P_0 аддитивным образом. Поэтому, если удастся определить число нулей вспомогательной функции $r(Z) = P_0(Z) - S_0$, легко будет сделать выводы относительно фонового давления P_0 .

Всюду далее будем полагать, что $\xi_3 \neq 0$, поскольку случай $\xi_3 = 0$ был рассмотрен авторами ранее [9]. Это предположение позволяет представить вспомогательную функцию $r(Z)$ в следующем виде:

$$r = \xi_3(-1 + Z)^2 \times \\ \times [-7 - 4Z - Z^2 + 2Z^3 + \varsigma_4(11 + 6Z + Z^2 - 4Z^3 + Z^4) + \varsigma_5(3 + 2Z + Z^2)],$$

где

$$\varsigma_4 = \frac{\xi_4}{\xi_3} = \frac{(a^2 + b^2)gh\beta}{3(aS_1 + bS_2)}, \quad \varsigma_5 = \frac{\xi_5}{\xi_3} = \frac{10\nu(a \cos \phi + b \sin \phi)W}{(aS_1 + bS_2)h^2}.$$

Такое преобразование позволяет сразу же уменьшить число корней исследуемого полинома, попадающих внутрь рассматриваемого слоя. Теперь можно с полной уверенностью утверждать, что число нулевых точек функции r , принадлежащих слою жидкости, не превосходит четырех. При этом может быть равно четырем, только если $\varsigma_4 \neq 0$, что равносильно условию $(a^2 + b^2) \neq 0$. На рис. 5 в качестве примера приведен профиль фонового давления P_0 при $S_0 = -0.001$, $\varsigma_4 = 0.5479567552865968$, $\varsigma_5 = 0.3326770472110828$.

Характер изолиний итогового поля давления P , в отличие от изолиний поля концентрации C , зависит от отношения (в абсолютном выражении) коэффициентов, входящих в состав фонового давления P_0 , и продольных градиентов P_1 , P_2 давления. При одних сочетаниях будут превалировать постоянные и линейные слагаемые (рис. 6, а), а при других – нелинейные слагаемые (рис. 6, б).

Заключение

В работе построено точное решение для установившейся сдвиговой концентрационной конвекции в протяженном горизонтальном слое с учетом возможных перепадов давления. Проведено исследование всех полей, определяющих свойства течения вязкой жидкости с примесью. Показана возможность краевого управления положением границ зон противотечений.

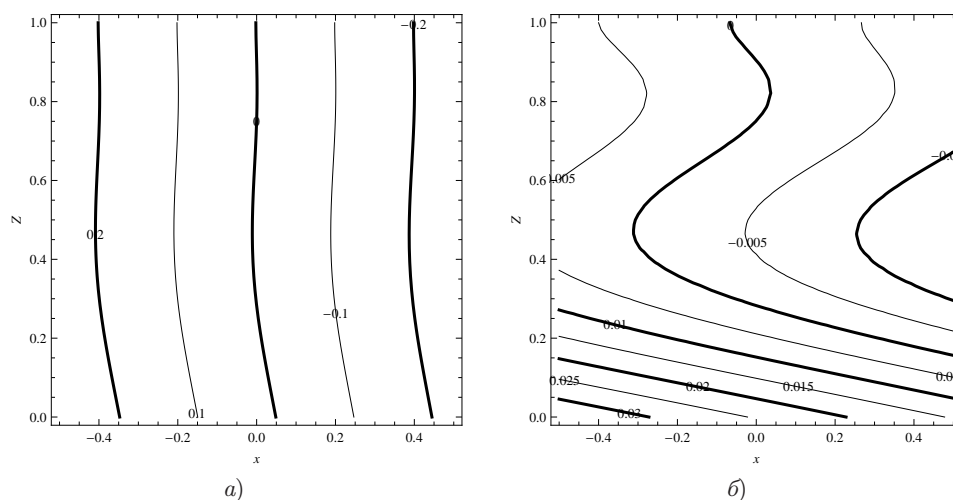


Рис. 6. Распределение изолиний давления в сечении $y = 0$ при $S_0 = -0.001$, $\varsigma_4 = 0.5479567552865968$, $\varsigma_5 = 0.3326770472110828$, $\xi_1 = 0.005$: (а) $S_1 = -0.15$, (б) $S_1 = -0.015$

Литература

1. Бирих Р.В., Мазунина Е.С. Термокапиллярная конвекция в плоском слое жидкости с концентрационными источниками тепла // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 1. – С. 3–12.
2. Колесников А.К., Якушин В.И. О конвективной неустойчивости смеси с концентрационными источниками тепла // Инж.-физ. журн. – 1979. – Т. 36, № 4. – С. 708–714.
3. Колесников А.К., Якушин В.И. О возникновении конвекции в смеси с концентрационными источниками тепла // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – № 6. – С. 21–27.
4. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Влияние интенсивности адсорбционно-десорбционных процессов на концентрационную конвекцию около капли в горизонтальном канале // Вычисл. механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 24–31.
5. Бирих Р.В., Мазунина Е.С., Мизев А.И., Рудаков Р.Н. Концентрационная конвекция, инициируемая затопленным источником ПАВ // Конвективные течения. – 2009. – № 4. – С. 063–084.
6. Бирих Р.В., Денисова М.О., Костарев К.Г. Возникновение конвекции Марангони, вызванной локальным внесением поверхностно активного вещества // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 6. – С. 56–68.
7. Зуев А.Л., Костарев К.Г. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции // Усп. физ. наук. – 2008. – Т. 178, № 10. – С. 1065–1085.
8. Зуев А.Л., Костарев К.Г. Экспериментальное исследование особенностей концентрационно-капиллярной конвекции // Вестн. Перм. науч. центра УрО РАН. – 2009. – № 4. – С. 4–15.
9. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Точное решение для установившихся конвективных концентрационных течений типа Куэтта // Вычисл. механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 3. – С. 337–349. – doi: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.27.
10. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Спевак Л.Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой жидкости // Вычисл. механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445–456.

11. *Федюшкин А.И.* Влияние гравитации на массоперенос при кристаллизации фосфатов кальция из растворов в термостатированных условиях: Препринт № 1092. – М.: Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2015. – 27 с.
12. *Гадияк Г.В., Чеблакова Е.А.* Конвекция и перенос тепла в жидкости при пониженной гравитации и учете термокапиллярных эффектов // Вычисл. технологии. – 1999. – Т. 4, № 5. – С. 10–23.
13. *Евстратова К.И., Кунина Н.А., Малахова Е.Е.* Физическая и коллоидная химия. – М.: Высш. шк., 1990. – 487 с.
14. *Бирих Р.В.* Колебательные режимы концентрационной конвекции и особенности постановки граничных условий на межфазных границах // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – С. 647–649.
15. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. – 256 с.
16. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикл. механика и техн. физика. – 1966. – № 3. – С. 69–72.
17. *Бирих Р.В., Пухначев В.В.* Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Докл. Акад. наук. – 2011. – Т. 436, № 3. – С. 323–327.
18. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. – 155 с.
19. *Бирих Р.В., Пухначев В.В., Фроловская О.А.* Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2015. – № 1. – С. 192–198.
20. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-в. Сер. физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 180–196. – doi: 10.14498/vsgtu1527.
21. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 736–751. – doi: 10.14498/vsgtu1568.
22. *Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu.* Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 341–360. – doi: 10.14498/vsgtu1670.
23. *Власова С.С., Просвиряков Е.Ю.* Конвективное движение охлаждаемой снизу жидкости по параболическому закону при учете теплообмена на свободной границе // Изв. вузов. Авиацион. техн. – 2016. – № 4. – С. 82–87.
24. *Гончарова О.Н., Резанова Е.В.* Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикл. механика и техн. физика. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 68–79.
25. *Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.* Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Труды ИММ УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 32–41. – doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.

26. *Князев Д.В.* Решения уравнений движения вязкой жидкости с нелинейной зависимостью вектора скорости от некоторых пространственных переменных // Прикл. механика и техн. физика. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 185–190. – doi: 10.15372/PMTF20180521.
27. *Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И.* Расслоение потока жидкости с немонотонной зависимостью напряжения течения от скорости деформации // Вычисл. механика сплошных сред. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 68–78.
28. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // Прикл. механика и техн. физика. – 1999. – Т. 40, № 2. – С. 24–33.
29. *Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 491–496.
30. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования и точные решения // Теорет. основы хим. технологии. – 2001. – Т. 35, № 6. – С. 563–573.
31. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теорет. основы хим. технологии. – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 114–124. – doi: 10.31857/S0040357119060034.
32. *Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu.* Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 341–360. – doi: 10.14498/vsgtu1670.
33. *Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu.* Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 528–541. – doi: 10.14498/vsgtu1770.
34. *Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu.* On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // J. King Saud Univ. – 2020. – V. 32, No 8. – P. 3364–3371. – doi: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
35. *Burmasheva N.V., Privalova V.V., Prosviryakov E.Y.* Layered Marangoni convection with the Navier slip condition // Sādhanā. – 2021. – V. 46. – Art. 55. – doi: 10.1007/s12046-021-01585-5.
36. *Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu.* Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid with allowance made for heat recovery // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 532–548. – doi: 10.14498/vsgtu1638.
37. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Исследование температурного поля в слоистых течениях вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости при задании двух термокапиллярных сил на свободной границе // DReaM. – 2019. – № 1. – С. 6–42.
38. *Burmasheva N.V., Prosviryakov Y.E.* Investigation of a velocity field for the Marangoni shear convection of a vertically swirling viscous incompressible fluid // AIP Conf. Proc. – 2018. – V. 2053, No 1. – Art. 040011.
39. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт 1-10. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. – 68 с.
40. *Андреев В.К., Степанова И.В.* Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2016. – № 2. – С. 13–24.
41. *Poiseuille J.-L.-M.* Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. – 1840. – V. 11. – P. 961–967.

42. *Poiseuille J.-L.-M.* Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. – 1840. – V. 11. – P. 1041–1048.
43. *Poiseuille J.-L.-M.* Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite) // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. – 1841. – V. 12. – P. 112–115.
44. *Аристов С.Н., Князев Д.В.* Новое точное решение задачи о вращательно-симметричном течении Куэтта–Пуазейля // Прикл. механика и техн. физика. – 2007. – Т. 48, № 5 – С. 71–77.
45. *Трошкин О.В.* К нелинейной устойчивости течений Куэтта, Пуазейля и Колмогорова в плоском канале // Докл. Акад. наук. – 2012. – Т. 443, № 1. – С. 29–33.
46. *Попов Д.И., Утемесов Р.М.* Эффективный спектральный метод для исследования устойчивости дисперсных течений // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2016. – № 1. – С. 52–57. – doi: 10.14258/izvasu(2016)1-08.
47. *Алексеев В.В., Гусев А.М.* Свободная конвекция в геофизических процессах // Усп. физ. наук. – 1983. – Т. 141, № 2. – С. 311–343.
48. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров: ВятГУ, 2011. – 207 с.
49. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2013. – № 3. – С. 53–58.
50. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* О влиянии солеобмена на циркуляцию жидкости в замкнутом водоеме // Морской гидрофиз. журн. – 1990. – № 4. – С. 38–42.
51. *Булгаков С.Н.* Исследование роли халинных факторов в формировании циркуляции и структуры вод Черного моря: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Севастополь, 1986. – 155 с.
52. *Булгаков С.Н., Кортаев Г.К.* Аналитическая модель струйной циркуляции в замкнутых водоемах // Морской гидрофиз. журн. – 1987. – № 3. – С. 434–446.
53. *Lin C.C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1957. – V. 1, No 1. – P. 391–395. – doi: 10.1007/BF00298016.
54. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механика и техн. физика. – 1989. – № 2. – С. 34–40.
55. *Аристов С.Н.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1990. – 32 с.

Поступила в редакцию
19.04.2022

Бурмашева Наталья Владимировна, кандидат технических наук, старший научный сотрудник; доцент департамента информационных технологий и автоматике

Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия
Уральский федеральный университет
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия
E-mail: nat_burm@mail.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; профессор департамента информационных технологий и автоматике

Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия
Уральский федеральный университет
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия
E-mail: *evgen_pros@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 4, pp. 285–301

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301

Exact Solution of the Couette–Poiseuille Type for Steady Concentration Flows

*N.V. Burmasheva**, *E.Yu. Prosviryakov***

*Institute of Engineering Science, Ural Branch, Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, 620049 Russia*

Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia

E-mail: **nat_burm@mail.ru*, ***evgen_pros@mail.ru*

Received April 19, 2022

Abstract

This article presents a new exact solution for predicting the properties of the velocity field, pressure, and impurity distribution in steady shear flows of viscous incompressible fluids in an extended horizontal layer. The solutal convection was described using a mathematical model based on the Oberbeck–Boussinesq equations with a linear dependence of density on concentration. It was assumed that the layer at one of its boundaries (the lower one) is impermeable to the substance (impurity) dissolved in the fluid so that the fluid-sticking effect applies to it. It was demonstrated that the flow is induced by an inhomogeneous distribution of impurities and pressure at the upper boundary of the layer. A uniform distribution of velocities is set at the upper boundary. The obtained solution belongs to the Ostroumov–Birikh and Lin–Sidorov–Aristov classes. The velocity field was described by the two-dimensional Couette profile, i.e., both velocity components depend on the vertical transverse coordinate. The concentration and pressure were described by linear forms relative to horizontal (longitudinal) coordinates, with coefficients depending on the third coordinate. The structure of the exact solution is such that the incompressibility equation is identically satisfied. Thus, an overdetermined, quadratically nonlinear partial differential system was resolved. After the substitution in the stationary system of the Oberbeck–Boussinesq equations supplemented by the equations of diffusion and incompressibility, the unknown functions that determine the hydrodynamic fields were found by integrating the system of ordinary differential equations. This system is of the 13th order and admits an exact polynomial solution that can be used to describe the occurrence of several counterflow zones and the nonmonotonic nature of the specific kinetic energy with up to two zeros. The obtained exact solutions illustrate the multiple stratifications of the shear stress, pressure, and concentration fields. Therefore, hydrodynamic fields

have a complex topology defined by the dependence of velocities, pressure, and concentration on the transverse coordinate.

Keywords: solutal convection, exact solution, Couette–Poiseuille flow

Figure Captions

Fig. 1. Profiles of the components U , V , m/s of the velocity vector.

Fig. 2. Profile of the specific kinetic energy E_k , kg/(m·s²) with the maximum number of zeros.

Fig. 3. Profiles of the shear stresses τ_{xz} , τ_{yz} , kg/(m·s²).

Fig. 4. Profiles of the background concentration C_0 , m⁻³.

Fig. 5. Profile of the background pressure P_0 , m²/s².

Fig. 6. Distribution of the pressure isolines in the cross section $y = 0$ at $S_0 = -0.001$, $\varsigma_4 = 0.5479567552865968$, $\varsigma_5 = 0.3326770472110828$, $\xi_1 = 0.005$: (a) $S_1 = -0.15$, (b) $S_1 = -0.015$.

References

1. Birikh R.V., Mazunina E.S. Thermocapillary convection in a plane liquid layer with concentration heat sources. *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 1–9. doi: 10.1134/S0015462809010013.
2. Kolesnikov A.K., Yakushin V.I. Convective instability of a mixture with concentration heat sources. *J. Eng. Phys.*, 1979, vol. 36, pp. 472–477. doi: 10.1007/BF00866975.
3. Kolesnikov A.K., Yakushin V.I. Convection in mixtures with nonuniform heat release proportional to the density of an active component. *Fluid Dyn.*, 1980, vol. 15, pp. 810–816. doi: 10.1007/BF01096628.
4. Birikh R.V., Rudakov R.N. Effect of the adsorption-desorption process intensity on solutal convection near a drop in a horizontal channel. *Fluid. Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 131–137. doi: 10.1134/S0015462811010157.
5. Birikh R.V., Mazunina E.S., Mizev A.I., Rudakov R.N. Solutal convection induced by submerged source of surface-active substance. *Konvekt. Tsecheniya*, 2009, no. 4, pp. 063–084. (In Russian)
6. Birikh R.V., Denisova M.O., Kostarev K.G. The development of Marangoni convection induced by local addition of a surfactant. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 890–900. doi: 10.1134/S0015462811060068.
7. Zuev A.L., Kostarev K.G. Certain peculiarities of the solutocapillary convection. *Phys.–Usp.*, 2008, vol. 51, no. 10, pp. 1027–1045. doi: 10.1070/PU2008v051n10ABEH006566.
8. Zuev A.L., Kostarev K.G. An experimental study of solutocapillary convection. *Vestn. Permsk. Nauchn. Tsentra Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, no. 4, pp. 4–15. (In Russian)
9. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution for Couette-type steady convective concentration flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 7, pp. 1199–1210. doi: 10.1134/S0021894421070051.
10. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456. (In Russian)
11. Fedyushkin A.I. Effect of gravity on the mass transfer during calcium phosphates crystallization under thermostatic conditions. Preprint. Moscow, Inst. Probl. Mekh. im. A.Yu. Ishlinskogo Ross. Akad. Nauk, 2015. 27 p. (In Russian)

12. Gadiyak G.V., Cheblakova E.A. Convection and heat transfer in fluid under hypogravitation allowing for thermo-capillary effects. *Vychisl. Tekhnol.*, 1999, vol. 4, no. 5, pp. 10–23. (In Russian)
13. Evstratova K.I., Kumina N.A., Malakhova E.E. *Fizicheskaya i kolloidnaya khimiya* [Physical and Colloid Chemistry]. Moscow, Vyssh. Shk., 1990. 487 p. (In Russian)
14. Birikh R.V. Oscillatory modes of solutal convection and specific features of boundary conditions at the interfaces. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4, pp. 647–649. (In Russian)
15. Ostroumov G.A. *Svobodnaya konveksiya v usloviyakh vnutrennei zadachi* [Free Convection in Internal Problem Conditions]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1952. 256 p. (In Russian)
16. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, pp. 43–44. doi: 10.1007/BF00914697.
17. Birikh R.V., Pukhnachev V.V. An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient. *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52. doi: 10.1134/S1028335811010095.
18. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Permsk. Gos. Univ., 2006. 155 p. (In Russian)
19. Birikh R.V., Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 173–179. doi: 10.1134/S0015462815010172.
20. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. doi: 10.14498/vsgtu1527. (In Russian)
21. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751. doi: 10.14498/vsgtu1568. (In Russian)
22. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. doi: 10.14498/vsgtu1670.
23. Vlasova S.S., Prosviryakov E.Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronaut.*, 2016, vol. 59, no. 4, pp. 82–87. doi: 10.3103/S1068799816040140.
24. Goncharova O.N., Rezanova E.V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 247–257. doi: 10.1134/S0021894414020072.
25. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 32–41. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41. (In Russian)
26. Knyazev D.V. Solving the motion equations of a viscous fluid with a nonlinear dependence between a velocity vector and some spatial variables. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 5, pp. 928–933. doi: 10.1134/S0021894418050218.

27. Kuznetsova Yu.L., Skul'skiy O.I. Shear banding of a fluid flow with a nonmonotonic dependence of the flow stress on the strain rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 7, pp. 1162–1174. doi: 10.1134/S002189441907006X.
28. Meleshko S.V., Pukhnachev V.V. One class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 208–216. doi: 10.1007/BF02468516.
29. Polyanin A.D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables. *Dokl. Phys.*, 2001, vol. 46, no. 10, pp. 726–731. doi: 10.1134/1.1415590.
30. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Equations of an unsteady-state laminar boundary layer: General transformations and exact solutions. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2001, vol. 35, no. 6, pp. 529–539. doi: 10.1023/A:1012945123859.
31. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230–239. doi: 10.1134/S0040579519060034.
32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. doi: 10.14498/vsgtu1670.
33. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 528–541. doi: 10.14498/vsgtu1770.
34. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *J. King Saud Univ.*, 2020, vol. 32, no. 8, pp. 3364–3371. doi: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
35. Burmasheva N.V., Privalova V.V., Prosviryakov E.Y. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sādhanā*, 2021, vol. 46, art. 55. doi: 10.1007/s12046-021-01585-5.
36. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid with allowance made for heat recovery. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 532–548. doi: 10.14498/vsgtu1638.
37. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary. *DReaM*, 2019, no. 1, pp. 6–42. (In Russian)
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov Y.E. Investigation of a velocity field for the Marangoni shear convection of a vertically swirling viscous incompressible fluid. *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 2053, no. 1, art. 040011.
39. Andreev V.K. Birikh's solutions of the convection equations and some generalizations. Preprint 1-10. Krasnoyarsk, IVM Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2010. 68 p. (In Russian)
40. Andreev V.K., Stepanova I.V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 136–147. doi: 10.1134/S0015462816020022.
41. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.*, 1840, vol. 11, pp. 961–967. (In French)
42. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.*, 1840, vol. 11, pp. 1041–1048. (In French)

43. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite). *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.*, 1841, vol. 12, pp. 112–115. (In French)
44. Aristov S.N., Knyazev D.V. New exact solution of the problem of rotationally symmetric Couette–Poiseuille flow. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 680–685. doi: 10.1007/s10808-007-0087-7.
45. Troshkin O.V. Nonlinear stability of Couette, Poiseuille, and Kolmogorov plane channel flows. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 181–185. doi: 10.1134/S1064562412020068.
46. Popov D.I., Utemesov R.M. Effective spectral projection method for stability analysis of disperse flows. *Izv. Altai. Gos. Univ.*, 2016, no. 1, pp. 52–57. doi: 10.14258/izvasu(2016)1-08. (In Russian)
47. Alkeseev V.V., Gusev A.M. Free convection in geophysical processes. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, vol. 26, no. 10, pp. 906–922. doi: 10.1070/PU1983v026n10ABEH004520.
48. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Layers of Fluid]. Kirov, VyatGU, 2011. 207 p. (In Russian)
49. Aristov S.N., Shvarts K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 330–335. doi: 10.1134/S001546281303006X.
50. Aristov S.N., Shvarts K.G. On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin. *Sov. J. Phys. Oceanogr.*, 1991, vol. 2, no. 4, pp. 293–298. doi: 10.1007/BF02346081.
51. Bulgakov S.N. A study of the role of haline factors in the formation of the Black Sea waters circulation and structure. *Cand. Phys.-Math. Sci. Diss.* Sevastopol, 1986. 155 p. (In Russian)
52. Bulgakov S.N., Korotaev G.K. Analytical model for stream circulation in enclosed water basins. *Morsk. Gidrofiz. Zh.*, 1987, no. 3, pp. 434–446. (In Russian)
53. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016.
54. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164.
55. Aristov S.N. Vortex flows in thin layers of fluid. *Extended Abstract of Doct. Phys.-Math. Sci. Diss.* Vladivostok, 1990. 32 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Бурмашева Н.В., Просвирыков Е.Ю. Точное решение типа Куэтта – Пуазейля для установившихся концентрационных течений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 285–301. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301. ⟩

⟨ **For citation:** Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of the Couette–Poiseuille type for steady concentration flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 285–301. doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301. (In Russian) ⟩