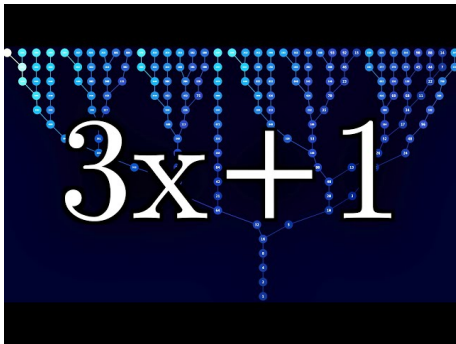


Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 21-23 января 2023 г.

Задача «Почти гипотеза $3X+1$ »



- Идея задачи — [Фольклор](#)
- Решение задачи и тесты — [Михаил Киндер](#)

Постановка задачи

- Дано натуральное число n ($2 \leq n \leq 10^{18}$).
- Разрешены две операции:
 - А. Преобразование целого числа x в число $3x + 1$;
 - В. Преобразование целого числа x в целое число $x/2$ (целочисленное деление).
- Требуется из 1 получить число n с помощью нескольких операций А и В?

Основные темы задачи:

- конструктивные алгоритмы;
- рекурсия;
- индукция.

Решение. Частные случаи

Частные случаи:

- Научимся получать небольшие числа:

- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2$. Ответ: AB;

- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 3$. Ответ: ABAB;

- $1 \xrightarrow{A} 4$. Ответ: A.

Описание рекурсии:

- Для решения задачи в общем виде воспользуемся идеей рекурсии.
- Предположим, что мы уже умеем получать все натуральные числа n до некоторого значения;
- Покажем, как можно получить бóльшие числа.

Решение. Частные случаи

Частные случаи:

- Научимся получать небольшие числа:
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2$. Ответ: AB;
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 3$. Ответ: ABAB;
- $1 \xrightarrow{A} 4$. Ответ: A.

Описание рекурсии:

- Для решения задачи в общем виде воспользуемся идеей рекурсии.
- Предположим, что мы уже умеем получать все натуральные числа n до некоторого значения;
- Покажем, как можно получить бóльшие числа.

Решение. Частные случаи

Частные случаи:

- Научимся получать небольшие числа:
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2$. Ответ: AB;
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 3$. Ответ: ABAB;
- $1 \xrightarrow{A} 4$. Ответ: A.

Описание рекурсии:

- Для решения задачи в общем виде воспользуемся идеей рекурсии.
- Предположим, что мы уже умеем получать все натуральные числа n до некоторого значения;
- Покажем, как можно получить бóльшие числа.

Решение. Частные случаи

Частные случаи:

- Научимся получать небольшие числа:
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2$. Ответ: AB;
- $1 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 3$. Ответ: ABAB;
- $1 \xrightarrow{A} 4$. Ответ: A.

Описание рекурсии:

- Для решения задачи в общем виде воспользуемся идеей рекурсии.
- Предположим, что мы уже умеем получать все натуральные числа n до некоторого значения;
- Покажем, как можно получить бóльшие числа.

Решение. Частный случай $n = 3x + 1$.

Переход к бóльшим числам

- Если целое n имеет вид $3x + 1$, то n можно получить из меньшего числа x с помощью одной операции A :
 $x \xrightarrow{A} 3x + 1$.
- Запомним символ A , добавив его к строке s , которая будет сохранять искомую последовательность шагов.
- Теперь те же рассуждения применим к числу x , и так далее.

Решение. Частный случай $n = 3x + 2$.

Переход к бóльшим числам

- Если целое n имеет вид $3x + 2$, то n можно получить из меньшего числа $2x + 1$ с помощью двух операций А и В:
$$2x + 1 \xrightarrow{A} 3(2x + 1) + 1 \xrightarrow{B} 3x + 2 = n;$$
- Добавим к строке s , которая будет сохранять искомую последовательность шагов символы ВА, и к меньшему числу $2x + 1$ снова применяем аналогичные рассуждения.
- Добавление символов ВА, а не АВ связано с тем, что в окончательной записи ответа символы строки s будут записаны в обратном порядке!

Решение. Частный случай $n = 3x$.

Переход к бóльшим числам

- Если целое n имеет вид $3x$, то n можно получить из меньшего числа $2x$ с помощью двух операций А и В:
 $2x \xrightarrow{A} 3 \cdot 2x + 1 \xrightarrow{B} (6x + 1)/2 = 3x = n$.
- Добавим к строке s символы ВА и к меньшему числу $2x$ снова применяем аналогичные рассуждения.

Пример $n = 28$.

- Число $28 = 3 \cdot 9 + 1$ даёт остаток 1 при делении на 3, оно получено из числа 9 с помощью операции A, при этом $s = \text{"A"}$.
- Далее, число $n_1 = 9 = 3 \cdot 3$ кратно 3, поэтому его можно получить из числа $2 \cdot 3 = 6$ с помощью операций A и B:
 $6 \xrightarrow{A} 19 \xrightarrow{B} 9 \xrightarrow{A} 28$, при этом $s = \text{"A"} + \text{"BA"} = \text{"ABA"}$.
- Следующий шаг – получаем число $n_2 = 6 = 3 \cdot 2$ из числа $2 \cdot 2 = 4$:
 $4 \xrightarrow{A} 13 \xrightarrow{B} 6$, $s = s + \text{"BA"} = \text{"ABAABA"}$.
- Наконец, число $n_3 = 4$ получено из 1: $1 \xrightarrow{A} 4$, при этом $s = s + \text{"A"} = \text{ABAABA A}$.
- Осталось записать символы строки s в обратном порядке:
 $\text{reverse}(s) = \text{AABAABA}$.

Собственно, всё...

Вопросы?