

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Институт вычислительной математики и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор -  
Заместитель председателя  
приемной комиссии



Р.Г. Минзарипов  
26 » 09 2017 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

2017

# Программа вступительных испытаний по математике

## Введение

Экзаменационная работа состоит из двух частей и содержит 19 задание. Часть 1 состоит из 8 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом - проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Задания 1–12 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Задания 13–19 с развёрнутым ответом. При выполнении заданий с развёрнутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов № 2 должно быть записано полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Справочные материалы выдаются вместе с текстом экзаменационной работы. При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.

### Система оценивания отдельных заданий и экзаменационной работы в целом

Правильное решение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий 13, 14 и 15 оценивается 2 баллами; 16 и 17 — 3 баллами; 18 и 19 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 32 балла. Максимальный балл за всю работу — 100.

### Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы

#### *Алгебра*

Числа, корни и степени, целые числа, степень с натуральным показателем, дроби, проценты, рациональные числа, степень с целым показателем, корень степени  $n > 1$  и его свойства, степень с рациональным показателем и ее свойства, свойства степени с действительным показателем.

#### *Основы тригонометрии*

Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла, радианная мера угла, синус, косинус, тангенс и котангенс числа, основные тригонометрические тождества, формулы приведения, синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов, синус и косинус двойного угла.

#### *Логарифмы*

Логарифм числа, логарифм произведения, частного, степени, десятичный и натуральный логарифмы, число  $e$ .

#### *Преобразования выражений*

Преобразования выражений, включающих арифметические операции;

преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень; преобразования выражений, включающих корни натуральной степени; преобразования тригонометрических выражений; преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования; модуль (абсолютная величина) числа.

### *Уравнения и неравенства*

#### *Уравнения*

Квадратные уравнения; рациональные уравнения; иррациональные уравнения; тригонометрические уравнения; показательные уравнения; логарифмические уравнения; равносильность уравнений, систем уравнений; простейшие системы уравнений с двумя неизвестными; основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных; использование свойств и графиков функций при решении уравнений; изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем; применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики; интерпретация результата, учет реальных ограничений.

#### *Неравенства*

Квадратные неравенства; рациональные неравенства; показательные неравенства; логарифмические неравенства; системы линейных неравенств; системы неравенств с одной переменной; равносильность неравенств, систем неравенств; использование свойств и графиков функций при решении неравенств; метод интервалов; изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

#### *Функции*

#### *Определение и график функции*

Функция, область определения функции; множество значений функции; график функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях; обратная функция. График обратной функции; преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.

#### *Элементарное исследование функций*

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания; четность и нечетность функции; периодичность функции; ограниченность функции; точки экстремума (локального максимума и минимума) функции; наибольшее и наименьшее значения функции.

#### *Основные элементарные функции*

Линейная функция, ее график; функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график; квадратичная функция, ее график; степенная функция с натуральным показателем, ее график; тригонометрические функции, их графики; показательная функция, ее график; логарифмическая функция, ее график; начала математического анализа.

#### *Производная*

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной; физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком; уравнение касательной к графику функции; производные суммы, разности, произведения, частного; производные основных элементарных функций; Вторая производная и ее физический смысл.

#### *Исследование функций*

Применение производной к исследованию функций и построению графиков; примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

#### *Первообразная и интеграл*

Первообразные элементарных функций; примеры применения интеграла в физике и геометрии.

#### *Геометрия*

##### *Планиметрия*

Треугольник; параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат; трапеция; окружность и круг; окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника; многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника; правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника.

##### *Прямые и плоскости в пространстве*

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых; параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства; параллельность плоскостей, признаки и свойства; перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах; перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства; параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.

##### *Многогранники*

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма; параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде; пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида; сечения куба, призмы, пирамиды; представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

##### *Тела и поверхности вращения*

Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка; конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка; шар и сфера, их сечения.

##### *Измерение геометрических величин*

Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности; угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника; расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися

прямыми, расстояние между параллельными плоскостями; площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора; площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы; объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

#### *Координаты и векторы*

Декартовы координаты на плоскости и в пространстве; формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы; вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число; коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам; компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам; координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами; элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

#### *Элементы комбинаторики*

Поочередный и одновременный выбор; формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона.

#### *Элементы статистики*

Табличное и графическое представление данных; числовые характеристики рядов данных.

#### *Элементы теории вероятностей*

Вероятности событий; примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач.

### **Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы**

Уметь выполнять вычисления и преобразования

- Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма
- Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
- Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции

Уметь решать уравнения и неравенства

- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

Уметь выполнять действия с функциями

- Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
- Вычислять производные и первообразные элементарных функций
- Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

- Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
- Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы
- Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами
- Уметь строить и исследовать простейшие математические модели
- Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
- Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
- Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

- Анализировать реальные числовые данные; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
- Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках

Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Список литературы

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
2. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). Изд-во «Просвещение».
5. Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни). Изд-во «Просвещение».
6. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия (профильный уровень). Изд-во «Дрофа».

Дополнительная литература:

1. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. М.: АСТ-ПРЕСС ШКОЛА.
2. Кравцев С.В. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Изд-во «Экзамен».
3. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО.
4. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. М.: Айрис-пресс.
5. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. М.: Изд-во «Дрофа».
6. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.
7. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: Учебно-методические материалы по математике / под. редакцией Фальке Л.Я. - М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2002
8. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: учебное пособие. Новиков А.И. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2010.  
<http://www.knigafund.ru>
9. Элементарная математика. Часть 1: Теория чисел. Алгебра: Учебное пособие. Хорошилова Е.В. Издательство: Издательство МГУ, 2010  
<http://www.knigafund.ru>

**Варианты экзаменационного задания по форме, содержанию и сложности соответствуют аналогичным заданиям проводимых в форме ЕГЭ. Например, демо версии можно найти по интернету:**

**<http://4ege.ru/matematika/53263-demoversiya-ege-2017-po-matematike.html>**

## Примерные задания:

### Часть 1

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответ в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

1. Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 350 рублей после понижения цены на 15%?

2. Для приготовления вишнёвого варенья на 1 кг вишни нужно 1,5 кг сахара. Какое наименьшее количество килограммовых упаковок сахара нужно, чтобы сварить варенье из 17 кг вишни?

3. Найдите площадь ромба, вершины которого имеют координаты (6;3), (9;4), (10;7), (7;6).

4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

5. Найдите корень уравнения  $\log_{x-2} 16 = 2$ . Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. В треугольнике ABC угол C равен  $90^\circ$ , CH — высота,  $AB = 27$ ,  $\cos A = \frac{2}{3}$ . Найдите AN.

7. Прямая  $y = 8x - 9$  является касательной к графику функции  $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$ . Найдите абсциссу точки касания.

8. Высота конуса равна 28, а длина образующей — 35. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

9. Найдите значение выражения

$$\sqrt{108} \cos^2 \left( \frac{23\pi}{12} \right) - \sqrt{27}.$$

10. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы:  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1350$  К,  $a = -7,5$  К/мин,  $b = 105$  К/мин. Известно, что при



температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 8 минут, второй и третий — за 9 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите наименьшее значение функции  $y = e^{2x} - 4e^x + 6$  на отрезке  $[0; 3]$ .

## Часть 2.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

13. а) Решите уравнение

$$2 \log_4^2(4 \cos x) - 7 \log_4(4 \cos x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\pi; 3, 5\pi]$ .

14. В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  точка  $M$  середина ребра  $A_1 C_1$ .

а) Постройте сечение призмы, проходящее через точки  $M$  и  $A$ , параллельно  $A_1 B_1$ .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $AA_1 B_1$ , если длина бокового ребра 12, а сторона основания 18.

15. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+2} + 8}{9^x - 4 \cdot 3^x + 3} \leq \frac{3^x - 11}{3^x - 3} + \frac{2}{3^x - 5}.$$

16. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  биссектриса  $BM$  и медиана  $AN$  пересекаются в точке  $E$ , при этом  $ME : BE = 5 : 9$ .

а) Докажите, что  $CM : AM = 4 : 5$ ;

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC = 18$ .

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $r$ .

18. При каких значениях параметра  $a$  любое решение неравенства  $4x^2 + 8x + 3 < 0$  содержится среди решений неравенства

$$2ax^2 - (7a - 4)x - 14 > 0?$$

19. На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа  $k$  можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше  $k$  ?