УДК 512.77+929

В.В. МОРОЗОВ, Д.А. ГУДКОВ И ПЕРВАЯ ЧАСТЬ 16-Й ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

Г.М. Полотовский

Аннотация

Раскрываются малоизвестные факты из истории решения 16-й проблемы Гильберта, в частности роль профессора В.В. Морозова (Казанский университет) в исправлении ошибок в первоначальной версии результатов Д.А. Гудкова о топологии плоских вещественных алгебраических кривых степени 6. Изложение основано на сохранившейся переписке Д.А. Гудкова и В.В. Морозова.

Ключевые слова: плоские алгебраические кривые, 16-я проблема Гильберта, Д.А. Гудков, В.В. Морозов, гипотеза Гудкова, сравнение по модулю 8.

В 1969 г. Д.А. Гудков [1] нашёл топологическую классификацию расположений ветвей неособых плоских вещественных проективных кривых степени 6 и на основании этого результата в 1971 г. высказал в [2] гипотезу, что для определённой топологической характеристики неособых кривых чётной степени выполняется сравнение по модулю 8. Эта гипотеза оказалась толчком к бурному развитию топологии вещественных алгебраических многообразий в последней трети прошлого века, продолжающемуся (может быть, менее интенсивно) до настоящего времени.

История открытия и публикации упомянутых результатов Д.А. Гудкова содержит ряд малоизвестных фактов, одним из которых является нестандартная роль В.В. Морозова в деятельности Д.А. Гудкова. Эти факты представляются весьма интересными, а отчасти и поучительными, но для их содержательного восприятия требуется знание ряда понятий и результатов из топологии вещественных алгебраических кривых. Конечно, нужные сведения можно найти в многочисленных обзорах, посвящённых данной тематике[1], однако для независимости изложения начну с необходимого математического материала.

1. Первая часть 16-й проблемы Гильберта

Пусть $F_m(x_0 : x_1 : x_2)$ – однородный многочлен степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2. Такой многочлен, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, называется плоской вещественной проективной алгебраической кривой степени m. Через $\mathbb{R}F_m$ ($\mathbb{C}F_m$) обозначается множество вещественных (комплексных) точек кривой F_m, то есть множество точек вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$) с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$, в которых многочлен F_m обращается в нуль.

Кривая F_m называется (вещественно) неособой, если частные производные $\partial F_m/\partial x_0$, $\partial F_m/\partial x_1$, $\partial F_m/\partial x_2$ одновременно не обращаются в нуль ни в какой

[1] Сошлюсь только на [3], поскольку он является последним по времени опубликования и содержит ссылки на более ранние обзоры.

точке из $\mathbb{R}P^2$. Вопрос о том, как может быть устроено множество $\mathbb{R}F_m$, иначе говоря, какого типа картинки в $\mathbb{R}P^2$ могут быть реализованы неособыми кривыми данной степени m, не менее естественен, чем вопрос о числе вещественных корней вещественного многочлена от одной переменной. На формальном языке задача формулируется так: для данного натурального m найти топологическую классификацию пар $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}F_m)$.

Некоторые фрагменты ответа на эту задачу давно известны. Так, легко показать, что каждая компонента связности (далее – ветвь) неособой кривой гомеоморфна окружности. Топологическая окружность может быть вложена в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, то есть так, что дополнение к этой окружности связно. Тогда она называется нечётной ветвью (рис. 1a)[2]. Другое возможное вложение окружности в $\mathbb{R}P^2$ – двустороннее. Такая ветвь называется овалом. Каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две связные части, одна из которых гомеоморфна диску и называется внутренней для этого овала, а вторая, внешняя, гомеоморфна листу Мёбиуса – см. рис. 1b. Нечётная ветвь, причём ровно одна, имеется тогда и только тогда, когда степень кривой нечётна. Сложнее вопрос о числе овалов неособой кривой. Ответ на него даёт теорема, доказанная А. Харнаком [4] в 1876 г., с которой обычно принято начинать изложение истории задачи.

Рис. 1

Теорема Харнака. *Пусть N – число ветвей неособой плоской вещественной алгебраической кривой степени m. Тогда*

1. $N \leq (m-1)(m-2)/2+1$*;*
2. *Для любого m предыдущее неравенство – точное, то есть имеются кривые, для которых достигается равенство.*

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом овалов называются M-кривыми.

Для степеней $m \leq 5$ ответ на естественный вопрос, каким может быть взаимное расположение овалов, легко получается с помощью теоремы Харнака и классической теоремы Э. Безу 1764 года[3]:

Теорема Безу. *Если кривые степеней m и n не имеют общих компонент, то они имеют не более $m \cdot n$ общих точек.*

Ситуация кардинально меняется при рассмотрении кривых степени 6. Ограничения, накладываемые теоремой Безу на взаимные расположения кривой степени m и прямой, допускают следующие 11 логических возможностей для взаимных расположений овалов M-кривой степени 6:

---

[2]В качестве модели проективной плоскости на рисунках используется диск Пуанкаре, то есть круг с попарно отождествлёнными диаметрально противоположными точками его граничной окружности.

[3]Харнаковское доказательство оценки на число ветвей (п. 1 теоремы Харнака) основано на этой же теореме Безу.

$$\frac{10}{1};\quad \frac{9}{1}1;\quad \frac{8}{1}2;\quad \frac{7}{1}3;\quad \frac{6}{1}4;\quad \frac{5}{1}5;\quad \frac{4}{1}6;\quad \frac{3}{1}7;\quad \frac{2}{1}8;\quad \frac{1}{1}9;\quad \langle 11\rangle. \tag{1}$$

Здесь и ниже используется кодировка расположений овалов, идущая от Гудкова: $\langle\alpha\rangle$ обозначает α овалов, расположенных вне друг друга; $\frac{\alpha}{1}\beta$ обозначает α овалов вне друг друга, охваченных одним овалом, вне которого вне друг друга расположены ещё β овалов.

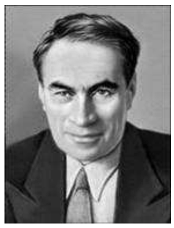
Харнак с помощью индуктивной по m процедуры построения неособых кривых степени m, придуманной им для доказательства точности оценки числа N, построил M-кривую, реализующую расположение $\frac{1}{1}9$ («кривая Харнака»). Позже задачей о неособых кривых степени 6 заинтересовался Д. Гильберт; в своей работе [5] он с помощью некоторого видоизменения процедуры Харнака реализовал ещё одно расположение из списка (1): $\frac{9}{1}1$. Попытки ответить на вопрос о реализуемости остальных возможностей из (1) к успеху не привели, и Гильберт включил эту задачу в свой знаменитый список математических проблем для XX века. Именно в первой части 16-й проблемы, в частности, говорится (цитируется по [6]):

«Максимальное число замкнутых и отдельно расположенных ветвей, которые может иметь плоская алгебраическая кривая n-го порядка, было определено Харнаком. Возникает дальнейший вопрос о взаимном расположении этих ветвей на плоскости. Что касается кривых шестого порядка, то я, – правда, на достаточно сложном пути – убедился, что те одиннадцать ветвей, которые получаются по Харнаку, никогда не расположены вне друг друга; всегда существует одна ветвь, внутри которой содержится ещё одна и вне которой находятся остальные девять, или наоборот».

Гильберт не случайно написал «убедился», а не «доказал», так что утверждение Гильберта следует понимать как гипотезу. Уже в начале XX в. эту гипотезу пытались подтвердить К. Роон [7] и ученицы Гильберта Г. Кан [8] и К. Лобенштейн [9]. В частности, все они пытались доказать нереализуемость расположения $\langle 11\rangle$, но, по их собственному признанию, успеха не достигли. Нереализуемость такого расположения кривыми степени 6 удалось доказать лишь в 1938 г. И.Г. Петровскому в его замечательной работе [10].

2. Результаты Д.А. Гудкова

В 1948 г. академик А.А. Андронов[4], один из создателей теории грубости динамических систем (см. [12]), предложил вернувшемуся в университет после окончания Великой Отечественной войны Дмитрию Андреевичу Гудкову[5] задачу: построить теорию бифуркаций алгебраических кривых.



А.А. Андронов (1901–1952)

Замысел Андронова заключался в том, чтобы «отработать» основные понятия теории бифуркаций на объекте более простом, чем динамические системы. Как рассказывал Гудков, немного позже И.Г. Петровский, узнав о предложенной Андроновым задаче, сказал примерно следующее: «Разрабатывать такую

[4]О жизни и деятельности А.А. Андронова, обладавшего редким набором замечательных человеческих качеств, имеется обширная литература. Ограничусь указанием самой свежей публикации [11], в которой можно найти дальнейшие ссылки.

[5]Д.А. Гудков получил диплом с отличием об окончании Горьковского (ныне Нижегородского) университета 2 июля 1941 г. Биографии Д.А. Гудкова посвящён ряд публикаций (см., например, [13–15]).

теорию, конечно, дело хорошее, но ещё лучше иметь при этом в виду какую-либо конкретную задачу – например, задачу Гильберта о кривых степени 6».

Гудков построил теорию грубости и степеней негрубости алгебраических кривых, изучил бифуркации кривых степени 6 и завершил топологическую классификацию неособых кривых степени 6. Отмечу, что бифуркационный подход к решению задачи был указан Гильбертом уже при формулировке второй части 16-й проблемы: *«В связи с этой чисто алгебраической проблемой я затрону еще один вопрос, который, как мне кажется, должен быть решен с помощью упомянутого метода непрерывного изменения коэффициентов и ответ на который имеет важное значение для топологии семейств кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, а именно, вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Y}{X}$, *где* X *и* Y *– целые рациональные функции* n*-й степени относительно* x *и* $y\ldots$» [6, с. 48].

Д.А. Гудков
(1918–1992)

Именно с помощью «упомянутого метода непрерывного изменения коэффициентов» пытались решить задачу о кривых степени 6 сам Гильберт и авторы работ [7–9], но в то время сделать это было вряд ли возможно ввиду отсутствия детально разработанной теории бифуркаций. Однако, считая, что К. Роон внёс значительный вклад в разработку идеи Гильберта, Гудков назвал основанный на теории бифуркаций способ, с помощью которого ему удалось решить задачу о кривых степени 6, методом Гильберта – Роона (сейчас принято название «метод Гильберта – Роона – Гудкова»).

Ответ, полученный Гудковым, показан на рис. 2: кривыми степени 6 реализуются те и только те схемы расположения овалов, коды которых лежат ниже ломаной линии[6]. Таким образом, гипотеза Гильберта не подтвердилась: оказалось, что кроме кривых Харнака $\dfrac{1}{1}9$ и Гильберта $\dfrac{9}{1}1$ существует ещё одна M-кривая

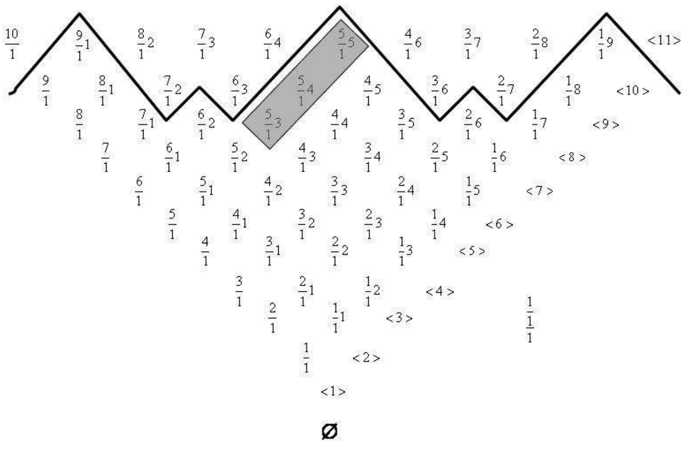


Рис. 2

[6] «Трёхэтажной дробью» из единиц на рис. 2 закодировано так называемое гнездо веса три, то есть три «концентрических» овала.

степени 6 – «кривая Гудкова» $\frac{5}{1}5$. Такая кривая не может быть построена методами Харнака и Гильберта. Гудков построил её с помощью длинной цепочки квадратичных преобразований. Первоначальное построение (точнее, это было чистое доказательство существования) кривой степени 6 со схемой $\frac{5}{1}5$ в докторской диссертации Гудкова было очень сложным, оно занимает 28 страниц.

Периодичность в двух верхних рядах таблицы рис. 2 бросается в глаза. Гудков нашёл формулировку доказанной им периодичности для M-кривых степени 6 в виде сравнения, проверил, что все M-кривые чётных степеней выше шести, которые он мог построить, тоже удовлетворяют этой формулировке, и в работе [2] выдвинул найденное им сравнение в качестве гипотезы:

Гипотеза Гудкова. *Для M-кривой чётной степени $2k$ выполнено сравнение*

$$\chi(B_+) \equiv k^2 (\mathrm{mod}\ 8), \tag{2}$$

где $\chi(B_+)$ – эйлерова характеристика множества B_+ точек в $\mathbb{R}P^2$, в которых многочлен, определяющий кривую, положителен – при условии, что знак этого многочлена выбран так, что множество B_+ ориентируемо[7].

Для кривых степени 6 сравнение (2) иллюстрирует рис. 3, где множество B_+ закрашено.

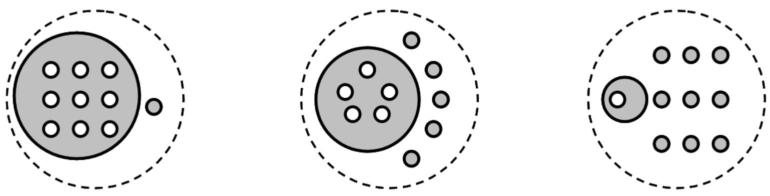


Рис. 3

В 1971 г. В.И. Арнольд [16] доказал сравнение (2) «наполовину» – по mod 4 вместо mod 8, а в 1972 г. В.А. Рохлин [17] доказал гипотезу Гудкова в полном объёме. Описанные события 1969–1972 гг. оказались переломным моментом в развитии топологии вещественных алгебраических многообразий: из своего рода экзотической задачи, которой изолированно занимались единицы, эта область превратилась в интенсивно развивающуюся ветвь математики. Отмечу, что одну из ключевых ролей в этом сыграло построение кривой степени 6 со схемой $\frac{5}{1}5$.

3. Переписка В.В. Морозова и Д.А. Гудкова

Главная интрига излагаемой истории заключается в следующем. В 1953 г. Д.А. Гудков защитил кандидатскую диссертацию [18], основной результат которой оказался неверным, а именно: в ней объявлялось, что схемы, расположенные в затенённом прямоугольнике на рис. 2, нереализуемы кривыми степени 6. У меня нет автореферата, и я не знаю других подробностей об этой диссертации, но в фонде Гудкова в музее Нижегородского университета хранится выданный

[7] В оригинальной формулировке Гудкова левая часть сравнения (2) записана в других комбинаторных терминах.


Решением
Совета Горьковского Государственного университета
от 11 марта 1953 г. (протокол N 15)
Гудкову Дмитрию Андреевичу
ПРИСУЖДЕНА УЧЕНАЯ СТЕПЕНЬ КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
Председатель Совета
Ученый Секретарь Совета

Рис. 4

ему диплом кандидата наук (рис. 4)[8]. Отмечу, что до защиты у Гудкова не было никаких опубликованных работ – вероятно, правила того времени допускали это.

Этот неверный результат был опубликован в 1954 г. в «Докладах АН СССР» [19]. Много позже Гудков написал в [20, с. 46]: «Соответствующего неверного доказательства я не успел опубликовать».

После защиты кандидатской диссертации Гудков продолжал интенсивно заниматься топологией алгебраических кривых. К середине 60-х годов материала накопилось много, и Гудков решил опубликовать подробное изложение развитого им метода Гильберта – Роона. Однако доказательства были очень сложными и изложение их требовало очень много места, так что с публикацией возникли естественные трудности. Историю того, как были преодолены эти трудности и как были обнаружены и исправлены ошибки работ [18] и [19], позволяет проследить переписка Д.А. Гудкова и В.В. Морозова, сохранившаяся в архиве Гудкова.

Эта переписка охватывает период 1966–1973 гг. и содержит более 30 писем, причём имеются письма в обоих направлениях: Гудков хранил либо рукописные черновики, либо машинописные копии своих писем. Письма перенумерованы в табл. 1 с указанием автора (Г – Гудков, М – Морозов) и датировки (в формате дд.мм.гг); иногда датировка неполная – тогда день не указан, а иногда примерная датировка восстановлена мной по содержанию переписки – в таких случаях дата набрана курсивом. Ниже будут даваться ссылки только на номера писем. Из текста переписки можно заключить, что, возможно, два или три письма утрачены.

В письме Г1 Гудков пишет: *«Высылаю Вам экземпляр рукописи по кривым 6-го порядка. С этим экземпляром Вы можете делать что угодно (в нём рисунки сделаны в тексте для удобства). Два официальных экземпляра высылаю в Новосибирский математический журнал*[9]*.* < . . . >

По предварительной договорённости с замредактором Новосибирского математического журнала – Решетняком, если Вы сочтёте работу заслуживающей напечатания, причём заслуживающей некоторых похвальных слов (а не просто "можно напечатать"), то работа будет напечатана (возможно в несколько приёмов).

Пользуясь Вашим любезным согласием рецензировать работу, высылаю Вам рукопись. Прошу не пугаться её объёма (время математиков дороже бумаги)».

[8]Интересно отметить, что текст на печати гласит: «Министерство Культуры СССР. Горьковский Государственный Университет». Прямо-таки создаётся впечатление, будто в те времена власти считали образование и математику частью общей культуры. К сожалению, такая мысль применительно к нашим дням как-то не приходит в голову.

[9]Так в тексте. Всюду ниже в письмах сохранена авторская орфография и пунктуация.

Табл. 1

номер	Г1	М2	М3	Г4	М5	М6	Г7	М8
дата	10.66	24.10.66	29.03.67	21.04.67	26.04.67	18.05.67	17.06.67	21.06.67

номер	Г9	М10	Г11	М12	Г13	Г14	Г15	Г16	М17
дата	*08*.67	05.09.67	*09.67*	05.10.67	11.10.67	*11.67*	11.67	*12.67*	11.01.68

номер	Г18	Г19	Г20	Г21	Г22	М23	М24	М25	М26
дата	*02*.68	*03*.68	03.68	15.03.68	01.69	17.05.69	18.06.69	29.10.69	12.12.69

номер	Г27	М28	Г29	Г30	М31	М32	М33	М34
дата	*12.69*	15.01.71	22.01.71	*03*.71	20.09.71	17.11.71	24.01.73	07.06.73

В кратком ответе (почтовая открытка) М2 Морозов только подтверждает получение письма Г1, но вот фрагменты из письма М3 нельзя не привести:

«Синьор! не знаю, успели Вы за это время предать меня проклятию, или ещё нет, и не смотря на то, что статью Вашу я ещё не прочитал до конца, но всё таки пора мне подать некие признаки жизни и вот, я их подаю. < . . . >

Разбиение на четыре части я вполне одобряю и изложенный Вами план этого разбиения также. Конечно, в статьях кое что можно сократить, однако, из разговора со Слугиным[10] *я вынес впечатление, что Вы лелеете в отношении меня далеко идущие и коварные замыслы, так тут придётся предупредить Вас сразу, что если эта работа поступит ко мне в качестве докторской диссертации, я не приму её, коль скоро она не окажется раза в полтора больше и без всех этих обычных "легко видеть" (знаю я эти штучки – а потом разбирайся, кому легко, а кому нет!)».*

Далее почти на двух страницах в М3 идут замечания по существу текста работы Гудкова. Приведу только одно из них: *«Основной недостаток Вашего изложения (а от изложения я совсем не в восторге – будь оно глаже, я уж давно прочитал бы всё сочинение), как мне кажется – чрезвычайное пристрастие Ваше к определениям и леммам; определений этих и лемм по моему больше чем нужно».*

Заканчивается М3 следующими словами: *«Ведь нужно признаться, что всё Ваше построение обладает большой сложностью и интуитивно чувствуется, что можно придать ему большую простоту и прозрачность, однако ж на вопрос "как" я ответить не могу – возможно, что это дело далёкого будущего.*

Пока что, на этом я кончаю. Слугин вероятно сообщил Вам о причинах, по которым я столь долго не давал о себе знать – впрочем, о них я говорил Вам в Москве».

По поводу «простоты и прозрачности» замечу, что, насколько я могу судить, изложение и применение метода Гильберта – Роона – Гудкова не стало проще, чем было в описываемое время. Но, хотя это письмо было написано ещё до очень сложного первоначального построения Гудковым кривой со схемой $\frac{5}{1}5$, предвидение Морозова оправдалось в части, касающейся построения кривых: с помощью изобретённой О.Я. Виро в начале 80-х годов техники построения вещественных алгебраических многообразий, названной им "patchworking", все три M-кривые степени 6 (см. рис. 3) строятся единообразно и несложно.

Что касается причин, о которых идёт речь в конце этого и в ряде других писем Морозова, то, по-видимому, имеется в виду состояние его здоровья.

В письме Г4 Гудков подробно отвечает на математические замечания из М3.

[10] Слугин Сергей Николаевич, профессор Нижегородского университета, в описываемые годы работал в Казани.

В открытке М5 (рис. 5) В.В. Морозов пишет: *«Я ни в коей мере не настаиваю на черезчур подробном изложении в статьях – мне очень понравилась инициатива одного автора, приславшего нам в ИВУЗМатематика статью – и страниц 20 выкладок к ней на потребу рецензента. Но что касается диссертаций – вот там нужна подробность. Что до оппонирования, то говорить об этом ещё рано. Надолго вперёд я не решился бы брать на себя обязательства».*

В письме М6 Морозов сообщает о своей беседе в Риге с академиком А.И. Мальцевым о «портфеле» редакции «Сибирского математического журнала»: *«У меня возникло большое сомнение, что Ваши работы они будут печатать и возник вопрос не разумнее ли Вам попробовать, если это возможно, напечатать Вашу работу отдельной брошюрой фотоофсетным способом в к-ве 600 экз. прямо у Вас в Горьком».*

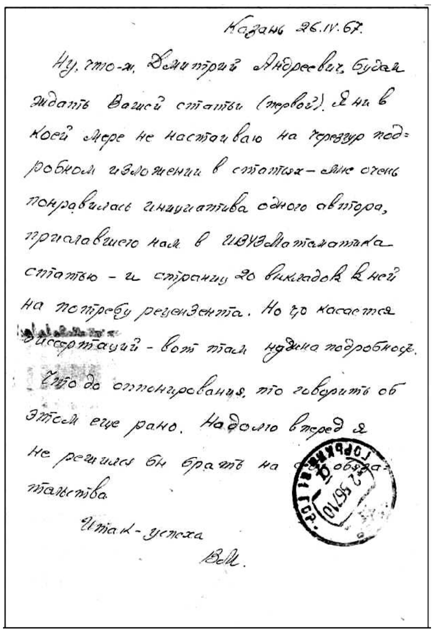

Казань 26.IV.67.
Ну, что-ж, Дмитрий Андреевич, буду
ждать Ваших статьи (первой). Я ни в
коей мере не настаиваю на черезчур под-
робном изложении в статьях – мне очень
понравилась инициатива одного автора,
приславшего нам в ИВУЗМатематика
статью – и страниц 20 выкладок к ней
на потребу рецензента. Но что касается
диссертаций – вот там нужна подробность.
Что до оппонирования, то говорить об
этом еще рано. Надолго вперед я
не решился бы брать на себя обяза-
тельства.
Итак – успеха
ВМ.

Рис. 5

Гудков отвечает в Г7: *«Обдумав всё я решил печатать свою работу в г. Горьком. Поэтому я съездил в Москву и, с помощью и благословения И.Г. Петровского, добился разрешения напечатать отдельный выпуск записок Г.Г.У с серией статей по неособым кривым 6-го порядка и неособым поверхностям 4-го порядка. < … > Статьи мои и Г.А. Уткина (моего ученика)».*

Гудков рассказывал мне, что при обсуждении этого вопроса Петровский сказал, что не может выделить под работу одного автора целый номер журнала «Математический сборник», главным редактором которого он был, после чего из своего ректорского кабинета позвонил в редакционно-издательский отдел Горьковского университета и договорился о публикации работы Гудкова в «Учёных записках ГГУ» при условии, что работа будет разбита на несколько отдельных статей.

В письме М8 Морозов пишет: *«по-моему, теперешний Ваш проект вполне разумен и даст возможность сократить сроки печатанья (по статьям в журналах это вышло бы года* $2\frac{1}{2}$*)»* и обещает рецензии для издательства Горьковского университета.

Письма 9–15 «математические» – Гудков отвечает на вопросы Морозова и, следуя замечанию из письма М5 (см. выше), пишет «на потребу рецензенту» подробные доказательства отдельных утверждений. Эти письма порой очень большие – так, Г15 содержит более 20 страниц математических доказательств. Результат этой деятельности не замедлил сказаться – в Г16 читаем:

«В 5-й статье я обнаружил ошибку, за которую мне очень совестно[11]*. < … > В 5-й статье это приведёт только к некоторому сокращению. Однако в 6-й статье доказательство несуществования некоторых типов кривых не проходит (по крайней мере в прежнем виде). Я пытался изменить доказательства, но пока не смог найти таких доказательств. Это относится к четырём кривым:* $\frac{6}{1}4$;

[11] Ошибка была по-существу техническая – Гудков пропустил одно логически возможное расположение ветвей некоторой особой кривой.

$\frac{6}{1}3$*;* $\frac{5}{1}4$ *и* $\frac{5}{1}5$*. Они настолько упорны, что я не уверен, что они не существуют».*

Таким образом, благодаря требовательности Морозова-рецензента, в конце 1967 г. Гудков обнаружил ошибку в своих доказательствах начала 50-х годов. В письмах Г18, Г19 Гудков пытается исправить эту ошибку[12]. В одном из них он сообщает: *« Все же я доказал, что неособая кривая C_6 не может иметь типов* $\frac{6}{1}4$*;* $\frac{6}{1}3$*;* $\frac{5}{1}4$*;* $\frac{5}{1}5$*».* Но в другом пишет: *«Доказано, что типы* $\frac{6}{1}4$ *и* $\frac{6}{1}3$ *не существуют. О кривых типов* $\frac{5}{1}4$ *и* $\frac{5}{1}5$ *пока лишь предполагаю, что* $\frac{5}{1}4$ *существует, а* $\frac{5}{1}5$ *нет*[13] *(рабочая гипотеза)».* Наконец, в самом начале весны 1968 г. Гудков получает верный результат – в Г20 он приводит верхние две строки из таблицы рис. 2 с правильной ломаной и пишет:

«Ваша уверенность в симметрии оправдалась. < ... > Идея о применении квадратичных преобразований[14] *появилась внезапно и в этом сыграло роль Ваше мнение о симметрии и о важности изучения расположения овалов кривых C_6. Конечно, я сам считаю эту задачу важной, но любая поддержка для меня играет очень большое значение».*

Гудков рассказывал мне, что Морозов говорил: «Никогда не поверю, что ответ такой несимметричный», но таких слов в переписке я не нашёл. Интуиция не подвела Морозова, но я думаю, что никаких конкретных аргументов в пользу симметричности таблицы схем неособых кривых степени 6 у него не было. Замечу, что если отметить на рис. 2, какому типу (I, II или неопределённому[15]) принадлежит данная схема, то симметрия нарушается: схема $\frac{4}{1}$ принадлежит неопределённому типу, а симметрично расположенная схема $<5>$ – типу II.

С письма Г21 начинается обсуждение вопросов, связанных с защитой докторской диссертации: *«Мне очень хотелось бы, чтобы Вы согласились быть моим оппонентом. Прилагаю план диссертации. < ... > Если Вы согласитесь, то мне хотелось бы посоветоваться с Вами о месте защиты, других оппонентах и степени подробности доказательств (в различных разделах работы). С этими вопросами я охотно приехал бы к Вам в апреле-мае (в удобное для Вас время)».*

В Г22 Гудков рассказывает о своём докладе на семинаре И.Г. Петровского в МГУ, сообщает, что закончил написание диссертации (кроме введения) и в конце пишет: *«Мне очень хотелось бы, чтобы Вы согласились быть моим оппонентом. На семинаре И.Г. Петровского у меня был разговор с Владимиром Игоревичем Арнольдом и Ольгой Арсеньевной Олейник по этому же вопросу, но окончательной договорённости ещё нет».*

В М23 Морозов благодарит Гудкова за полученные два экземпляра Учёных записок ГГУ [1]. Небольшое письмо М24 приведу полностью:

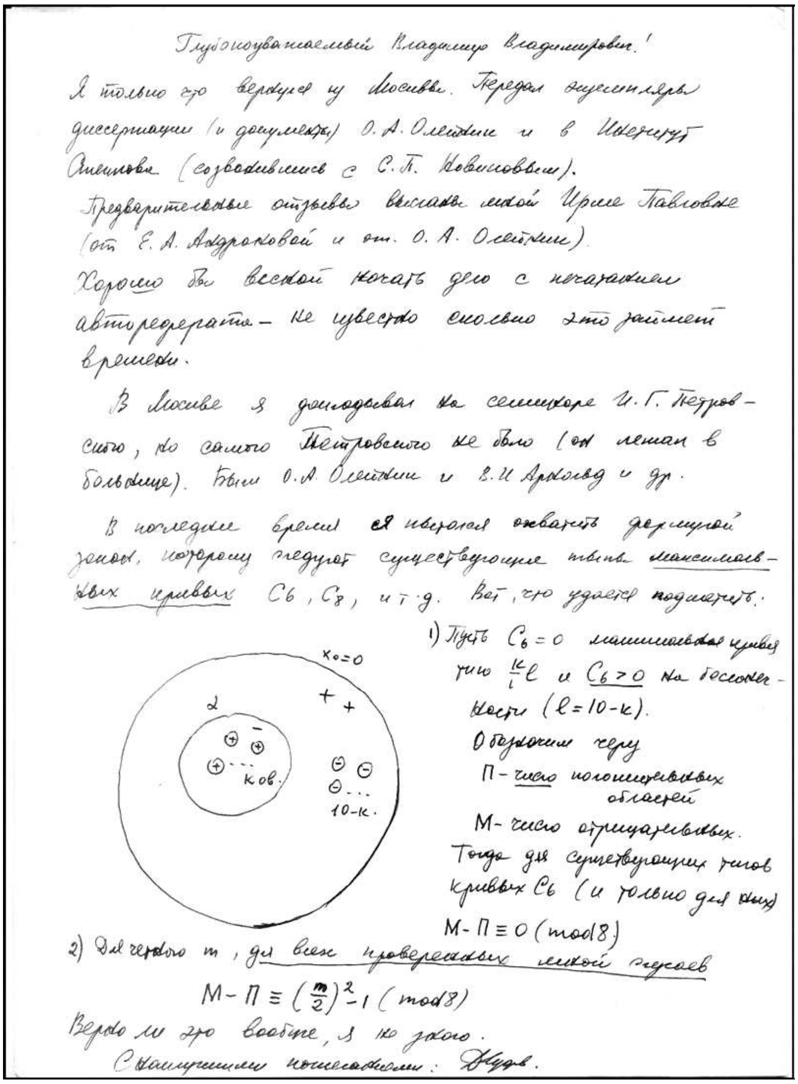
«Дмитрий Андреевич, прочитав В/письмо (текст введения ещё не прочитал) я весьма одобрил привлечение в оппонирование Олейник (а нельзя ли вместе и

[12] Мне не удалось восстановить, какое из этих писем написано раньше. Возможно, одно или даже оба из них – черновики неотправленных писем.

[13] Возможно, здесь сказалось давление авторитета Гильберта.

[14] Речь идёт о построении кривой со схемой $\frac{5}{1}5$ – см. выше п. 2.

[15] По определению схема кривой степени m имеет тип I (II), если для любой кривой F_m с такой схемой множество $\mathbb{R}F_m$ её вещественных точек разбивает (соответственно не разбивает) множество $\mathbb{C}F_m$ её комплексных точек. В остальных случаях, то есть когда для данной схемы имеются как кривая с $\mathbb{R}F_m$, разбивающим свою комплексификацию, так и кривая с $\mathbb{R}F_m$, не разбивающим свою комплексификацию, схема имеет неопределённый тип. Эти понятия были введены В.А. Рохлиным в [21] и там же приведено распределение по типам схем степени ≤ 6.



Глубокоуважаемый Владимир Владимирович!

Я только что вернулся из Москвы. Передал экземпляры диссертации (и документы) О.А. Олейник и в Институт Стеклова (созвонившись с С.П. Новиковым).

Предварительные отзывы высылаю моей Ирине Павловне (от Е.А. Андроновой и от О.А. Олейник).

Хорошо бы весной начать дело с печатанием автореферата — не известно сколько это займет времени.

В Москве я докладывал на семинаре И.Г. Петровского, но самого Петровского не было (он лежал в больнице). Были О.А. Олейник и В.И. Арнольд и др.

В последнее время я пытался охватить формулой закон, которому следуют существующие типы максимальных кривых C_6, C_8, и т.д. Вот, что удается подметить.

1) Пусть $C_6 = 0$ максимальная кривая типа $\frac{k}{1}l$ и $C_6 > 0$ на бесконечности ($l = 10-k$).
Обозначим через П – число положительных областей
М – число отрицательных.
Тогда для существующих типов кривых C_6 (и только для них)
$М - П \equiv 0 \pmod 8$

2) Для четного m, для всех проверенных мной случаев

$$М - П \equiv \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1 \pmod 8$$

Верно ли это вообще, я не знаю.

С наилучшими пожеланиями: Гудков.

Рис. 6

Петровского? Тогда в ВАКе совершенно не было бы задержки!), только непонятно мне осталось, под каким № Вы будете числить в автореферате свою специальность? 004 явно не подойдёт ни к тому, ни к другой. И вот какой вариант у меня возник (*он очень удобен, потому что не зависит от состояния моего здоровья*)*: если Вы возьмёте Андронову, Олейник и Петровского* (*или кого нибудь из Стекловского Ин-та*) *оппонентами, а меня оставите на роли передового предприятия?»*

И через полгода в очень короткой записке М26: *«Вы знаете, Д.А., что мне не хотелось бы быть оппонентом, но знаете также почему, но уж если иначе никак нельзя, то пусть будет по Вашему.* (*По моему, ставьте и 004 и 006 сразу; а там пусть разбираются сами*)*»*.

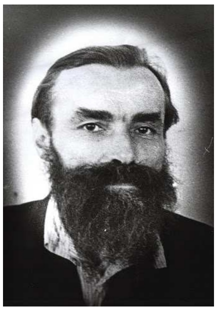
В письме Г27 (см. рис. 6) Гудков сообщает о диссертационных делах (предварительных отзывах, печатании автореферата и т. п.), но основное содержание этого письма – первая, насколько мне известно, формулировка сравнения Гудкова:

«Для чётного m, для всех проверенных мной случаев...» – и далее следует сравнение, равносильное (2) и формулировке в [2], но в других терминах[16].

В дальнейшей переписке (после защиты Гудковым диссертации) обсуждаются как собственно математические вопросы, так и разного рода организационные (публикация в «Известиях вузов. Математика» статей Гудкова и Уткина, поиск необходимой литературы и т. д.) В письме М31 В.В. Морозов пишет: *«Что касается меня, то я меняю знак – с этого учебного года перешёл на соцобеспечение и наслаждаюсь спокойствием старости».*

4. Заключительные замечания

После описанных выше в п. 2 математических событий Д.А. Гудков стал широко известным математиком[17], а топология вещественных алгебраических многообразий получила мощный импульс для дальнейшего развития. Замечу, что ничего подобного не было после работы Гудкова 1954 г. [19], хотя в ней также заявлялось решение задачи Гильберта. Объяснение очевидно: ошибка в [19] не позволила сформулировать никаких общих наблюдений о кривых произвольной степени. Как уже отмечалось выше, ключевым моментом явилось доказательство Гудковым существования кривой степени 6 со схемой $\frac{5}{1}5$, но для этого надо было заметить ошибку в [18, 19]. Из приведённой в п. 3 переписки стимулирующая роль В.В. Морозова в обнаружении этой ошибки представляется несомненной.



В.В. Морозов
(1910–1975)

Владимир Владимирович Морозов[18] был известным алгебраистом, специалистом по группам и алгебрам Ли. По мнению Е.Б. Винберга [30], ряд результатов В.В. Морозова до сих пор не имеет известности, адекватной их значению – в частности, это неопубликованные результаты его докторской диссертации[19], защищенной в 1943 г. Хочу особо отметить, что научные интересы самого В.В. Морозова были достаточно далеки от топологии вещественных алгебраических многообразий, хотя, возможно, в молодости он интересовался этим предметом: в списке публикаций Морозова в [26] указана статья [31], а также «Атлас чертежей “Кривые 3-го порядка” (1939)». Повидимому, этот «Атлас» – рукописная работа. К сожалению, обнаружить его не удалось.

Таким образом, В.В. Морозов взял на себя огромный труд по рецензированию очень трудной и тяжело написанной серии статей Д.А. Гудкова. Эта добросовестно выполненная Морозовым работа повлияла на открытие замечательного результата в топологии вещественных алгебраических кривых.

[16] Эта подчёркнутая Гудковым в 1969 г. фраза как-то не слишком согласуется с загадочным утверждением В.И. Арнольда в [22, с. 48]: «Он (Гудков – *Г.П.*) убеждал меня, что это сравнение выполняется не всегда». Более того, это и аналогичное утверждение В.И. Арнольда в [23, с. 18] противоречат его собственному утверждению в [24, с. 42]: «Для всех исследованных им (Гудковым – *Г.П.*) кривых чётной степени проявлялись замечательные сравнения по модулю 8». К моему большому сожалению, вдобавок к сказанному я должен отметить, что в [22–24] В.И. Арнольд без всяких оснований утверждал (чего он никогда не делал ранее!), что именно он открыл сравнение (2).

[17] Г.Вейль писал в [25]: «Математик, решивший одну из них (проблем Гильберта – *Г.П.*), занимал тем самым почётное место в математической общине».

[18] О жизни и деятельности В.В. Морозова см. [26–30]. Выпуск журнала, в котором опубликована статья [29], посвящён 100-летию со дня рождения В.В. Морозова.

[19] Сейчас она доступна в Интернете: http://www.vvmorozov2011.ksu.ru/index.php?id=2&idm=16.

Хочу закончить эту статью словами из письма Д.А. Гудкова А.П. Нордену от 2 апереля 1979 г.: *«Я всегда с удовольствием вспоминаю свою защиту у Вас в Казани в 1970 г. Та благожелательность, которая была мне оказана, превратила тяжёлую процедуру в довольно сносную и даже имевшую приятные стороны.*

Очень сожалею, что нет у Вас Владимира Владимировича Морозова, которому я очень обязан и часто его вспоминаю».

Summary

G.M. Polotovskiy. V.V. Morozov, D.A. Gudkov and the First Part of the 16th Hilbert Problem.

We reveal some little-known facts from the history of the solution of the 16th Hilbert problem. In particular, we consider the role of Professor V.V. Morozov (Kazan University) in the correction of errors in D.A. Gudkov's initial results about the topology of the plane real algebraic curves of degree 6. The study is based on the preserved correspondence between D.A. Gudkov and V.V. Morozov.

Key words: plane algebraic curves, 16th Hilbert problem, D.A. Gudkov, V.V. Morozov, Gudkov's conjecture, congruence modulo 8.

Литература

1. *Гудков Д.А., Уткин Г.А.* Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка // Учен. зап. Горьк. ун-та. – 1969. – Вып. 87. – С. 3–213.
2. *Гудков Д.А.* Построение новой серии *M*-кривых // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 200, № 6. – С. 1269–1272.
3. *Полотовский Г.М.* Топология вещественных алгебраических кривых: история и результаты // Ист.-матем. исслед. Вторая сер. – 2011. – Вып. 14 (49). – С. 177–212.
4. *Harnack A.* Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraishen Curven // Math. Ann. – 1876. – Bd. 10. – S. 189–199.
5. *Hilbert D.* Ueber die reellen Züge algebraisher Curven // Math. Ann. – 1891. – Bd. 38. – S. 115–138.
6. Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 239 с.
7. *Rohn K.* Die ebene Kurve 6 Ordnung mit elf Ovalen // Berichte über Verhandl. – 1911. – Bd. 63. – S. 540–555.
8. *Kahn G.* Eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten algebraischer Kurven: Inaugural Dissertation. – Göttingen: Univ. Buchdruckerei von W. Kaestner, 1909.
9. *Löbenstein K.* Ueber den Satz, dass ebene, algebraische Kurve 6 Ordnung mit 11 sich ein ander ausschlies-senden Ovalen nicht existiert: Inaugural Dissertation. – Göttingen: Univ. Buchdruckerei von W. Kaestner, 1910.
10. *Petrovsky I.* On the topology of real plane algebraic curves // Ann. Math. – 1938. – V. 39, No 1. – P. 189–209.
11. *Губина Е.В.* Академик А.А. Андронов (к 110-летию со дня рождения) // Математика в высшем образовании. – 2011. – № 9. – С. 73–82.
12. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247–251.
13. *Gordon E.I.* Recollection of D.A. Gudkov // AMS Translations, Ser. 2. – 1996. – V. 173: Topology of real algebraic Varieties and Related Topics. – P. 11–16.
14. *Polotovskiy G.M.* Dmitrii Andreevich Gudkov // AMS Translations, Ser. 2. – 1996. – V. 173: Topology of real algebraic Varieties and Related Topics. – P. 1–9.

15. *Полотовский Г.М.* Дмитрий Андреевич Гудков // Вестн. Нижегор. ун-та. Матем. моделир. и оптим. упр. – 2001. – Вып. 1(23). – С. 5–16.

16. *Арнольд В.И.* О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырёхмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прилож. – 1971. – Т. 5, Вып. 3. – С. 1–9.

17. *Рохлин В.А.* Сравнения по модулю 16 в 16-ой проблеме Гильберта // Функц. анализ и его прилож. – 1972. – Т. 6, Вып. 4. – С. 58–64.

18. *Гудков Д.А.* Установление всех существующих типов неособых плоских проективных кривых шестого порядка с действительными коэффициентами: Дис. …канд. физ.-мат. наук. – Горький. 1952. – 172 с.

19. *Гудков Д.А.* Полная топологическая классификация неособых действительных алгебраических кривых шестого порядка в действительной проективной плоскости // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 98, № 4. – С. 521–524.

20. *Гудков Д.А.* Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // Усп. матем. наук. – 1974. – Т. 29, Вып. 4. – С. 3–79.

21. *Рохлин В.А.* Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // Усп. матем. наук. – 1978. – Т. 33, Вып. 5. – С. 77–89.

22. *Арнольд В.И.* Вещественная алгебраическая геометрия. – М.: МЦНМО, 2009. – 86 с.

23. *Арнольд В.И.* Экспериментальное наблюдение математических фактов. – М.: МЦНМО, 2006. – 119 с.

24. *Арнольд В.И.* Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2002. – 103 с.

25. *Weyl H.* David Hilbert and His Mathematical Work // Bull. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 50, No 9. – P. 612–654.

26. *Заботин В.И., Эскин Л.Д., Ермолаев Ю.Б.* Владимир Владимирович Морозов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2002. – 22 с.

27. В.В. Морозов (15.12.1910 – 1.1.1975). – URL: http:// www.vvmorozov2011.ksu.ru/index.php?id=2&idm=3.

28. *Корешков Н.А.* Жизнь и деятельность В.В. Морозова: Доклад на Междунар. конф. «Алгебра и математическая логика», посвящ. 100-летию со дня рожд. В.В. Морозова (Казань, 25–30 сент. 2011 г.) – URL: http://video.yandex.ru/users/vvmorozov2011/view/25/?cauthor=vvmorozov2011&cid=1♯hq.

29. *Panyushev D.I., Vinberg E.B.* The work of Vladimir Morozov on Lie algebras // Transform. Groups. – 2010. – V. 15, No 4. – P. 1001–1013.

30. *Винберг Э.Б.* О работах В.В. Морозова по алгебрам Ли: Доклад на Междунар. конф. «Алгебра и математическая логика», посвящ. 100-летию со дня рожд. В.В. Морозова (Казань, 25–30 сент. 2011 г.) – URL: http://video.yandex.ru/users/vvmorozov2011/view/22/?cauthor= vvmorozov2011&cid=1♯hq.

31. *Морозов В.В.* К вопросу об особых точках плоских кривых // Труды Ин-та инж. коммун. строит. – Казань, 1935. – Т. 3. – С. 3–6.

Поступила в редакцию
09.02.12

Полотовский Григорий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и высшей алгебры Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского.

E-mail: *polotovsky@gmail.com*