Краткий экскурс по дробному дифференцированию

Начало возможности дробного дифференциального исчисления было положено в переписке Готфрида Вильгельма Лейбница и Якова Бернулли, в которой обсуждалась проблема нахождения производной $\dfrac{d^p y}{dx^p}$ при нецелых значениях p. Немного позже, в 1738 году, Леонард Эйлер выдвинул гипотезу о возможности дифференцирования степенной функции. В итоге, французскому математику Стефану Лякруа в 1820 году удалось получить явную формулу нахождения производной $\dfrac{d^{1/2}x^k}{dx^{1/2}}$ от степенной функции.

Параллельно с ним в 1822 году Жан-Батист Фурье ввел первое определение производной дробного положительного порядка и определил ее с помощью интегрального соотношения

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p \, d\lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cos\left(\frac{\pi p}{2} + tx - t\lambda\right)\, dt.$$

В 1823 году Нильсом Абелем была решена задача о поиске такой кривой, что точка, помещенная на любой из ее участков, скатится на «дно» этой кривой за одинаковое время. Эта кривая $y = \varphi(x)$ определяется из интегрального уравнения

$$\int\limits_a^x \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^\mu} = f(x),\ x > a$$

порядка $0 < \mu < 1$. Стоит отметить, что в левой части этого равенства стоит оператор дробного дифференцирования порядка $1 - \mu$.

В 1830-е годы Жозеф Лиувилль вводит понятие дробной производной, которая в настоящее время носит название лиувиллевской, но главное определение было введено как предел разностного отношения

$$D^p y(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^p y(x)}{h^p}.$$

Наряду с Ж. Лиувиллем другой математик Бернхард Риман в студенческие годы получил результат при помощи «дополнительных» функций для конструкции дробного интегрирования порядка $-\alpha$ или, что то же самое, дробного дифференцирования порядка α в виде

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Дальнейшее развитие математического аппарата было осуществлено в 1867 году Антоном Грюнвальдом и в 1868 году Алексеем Летниковым с помощью обобщения формулы Римана для конечно-разностного соотношения при нецелых значениях α порядка производной. В результате была получена аппроксимация дробной производной по формуле Грюнвальда-Летникова:

$$D^\alpha y(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^p y(x)}{h^p} = h^{-p}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k C_\alpha^k \cdot y(x - k\cdot h), \quad \text{где} \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Применение методов комплексного анализа на основе формулы Коши для нахождения производных высших порядков

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{f(t)\, dt}{(t-z)^{p+1}}$$

позволило в 1872 году математику Николаю Сонину получить формулу для дробных значений p. Основная сложность заключалась в ветвлении функции $(t-z)^{-p-1}$, и имела место зависимость от расположения контура $\mathcal{L}$, охватывающего точку z и разреза C, определяющего точку ветвления функции $(t-z)^{-p-1}$. Тем самым при $Re\ p < 0$ была получена формула

$$f^{(p)}(z) = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{p+1}},$$

где интегрирование ведется по отрезку $[z_0, z]$ в комплексной плоскости, для которой точка z_0 — точка пересечения разреза C и контура $\mathcal{L}$.

Впоследствии А. Летников получает формулу для интегрирования по окружности:

$$f^{(p)}(z) = \frac{\Gamma(1+p)}{2\pi r^p} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} f(z + re^{i\varphi})\,d\varphi,\ r = |z - z_0|.$$

Новый подход в развитии дробного дифференцирования был предложен А. Маршо в 1927 году. Так, была введена новая производная вида

$$(D^\alpha f)(x) = \text{const} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\ \alpha > 0,$$

где $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность порядка $l > \alpha$ функции f в точке x. Дополнительно можно отметить, что указанная конструкция применима к функциям с «плохим» поведением на бесконечности, т.е. возможен рост порядка не выше α при $x \to +\infty$.

В 1928 году Г. Харди и Д. Литтлвудом было доказано утверждение о том, что оператор дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1$ непрерывно действует из пространства $L_p,\ 1 < p < 1/\alpha$ в пространство L_q для случая $1/p + 1/q < \alpha$ на конечном отрезке. В случае достижения равенства этот результат был доказан С. Л. Соболевым для многомерного случая.

В 1930-е гг. получает большое развитие теория дробного интегрирования. Например, можно указать на потенциалы М. Рисса, полученные как отрицательные дробные степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Также определяются формулы дробного интегрирования по частям и приближения дробных интегралов тригонометрическими полиномами.

С начала 1940-х годов возникает теория операционного исчисления для дробных производных и интегралов в связке с преобразованием Лапласа и сингулярностью функций.

Во второй половине XX века развитый аппарат позволяет строить модели дробной динамики, которые позволяют решать актуальные проблемы в механике, геологии, экономических процессах и др. В качестве примера можно привести проблему распределения концентрации радиоизотопов в неоднородных геологических средах на больших расстояниях от источника [2]. Было получено, что распределение имеет более медленный степенной характер убывания, что отличается от ранее принятого экспоненциального темпа. Данные результаты дают повод задуматься о более безопасном развитии атомной энергетики.

Материал подготовил А. Д. Романенко

Список литературы

[1] **Самко, С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[2] David A. Benson, The Fractional Advection-Dispersion Equation: Development and Application. A dis-sertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Hydrogeology, 1998.