

УДК 539.3

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ УПРУГИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДЧАТОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ В ВИДЕ М-ГОФРА

В.Н. Паймушин

Аннотация

Построено приближенное аналитическое решение прямой задачи по определению осредненных упругих и прочностных характеристик складчатого заполнителя в виде М-гофра при растяжении и сжатии в поперечном направлении и сдвиге в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Полученные формулы для их определения, кроме основных физико-механических и геометрических определяющих параметров, содержат в себе безразмерные коэффициенты, подлежащие определению путем решения обратной задачи на основе результатов специально проводимых экспериментов в рамках использования теоретико-экспериментального метода А.В. Саченкова. Разработанная методика использована для определения исследуемых характеристик М-гофра, изготовленного из полимерной бумаги «NOMEX».

Ключевые слова: многослойные конструкции, заполнитель, складчатая структура, М-гофр, упругие и прочностные характеристики, энергетическое усреднение, пластина, устойчивость, критическая нагрузка, приближенные аналитические решения, структурные формулы, тест-образец, испытания, поперечное сжатие, сдвиг, идентификация.

Введение

В трехслойных и многослойных элементах конструкций в настоящее время, как правило, используются заполнители шестигранной сотовой структуры. Они являются предметом научных исследований в течение уже нескольких десятилетий. Результаты таких исследований освещены не только в научных статьях и монографиях [1, 2] и др., но и в различного рода изданиях обзорного и справочного характера ([3–5] и др.). Обеспечение необходимой несущей способности заполнителя, как наиболее слабого звена трехслойных конструкций, требует детального изучения его физико-механических характеристик, к которым в первую очередь относятся характеристики жесткости и прочности. При определении таких характеристик реальный заполнитель заменяется некоторой однородной по объему сплошной средой путем сведения исходной задачи к задаче определения усредненных характеристик на основе принципа эквивалентности реального и заменяющего его условного заполнителей [3, 4]. При такой замене реального заполнителя сплошной средой основными жесткостными характеристиками являются модуль упругости в направлении, перпендикулярном несущим слоям конструкции, и модули сдвига в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, а прочностными характеристиками – предельное напряжение при сжатии и предельные касательные напряжения при сдвигах в указанных плоскостях. Для заполнителя сотовой структуры формулы для определения указанных характеристик, отличающиеся от известных более точным описанием процессов поэтапного деформирования

и разрушения из-за потери устойчивости тех или иных стенок сот из четырех, составляющих ячейку периодичности, были получены в работе [6]. Все эти формулы, кроме основных определяющих параметров, содержат также безразмерные коэффициенты, которые являются корректирующими параметрами, подлежащими идентификации, исходя из данных специально проводимых экспериментов в рамках теоретико-экспериментального метода решения задач устойчивости пластин и оболочек А.В. Саченкова [7]. Этот метод ниже обобщается для определения жесткостных и прочностных характеристик заполнителя складчатой структуры в виде М-гофра [8, 9]. Для такого заполнителя простейшие модели деформирования при сжатии ранее были предложены в работах [9, 10] и др.

1. Постановка задачи осреднения

Вопросы изготовления и расчета многослойных (в частности, трехслойных) элементов конструкций с заполнителем сотовой структуры к настоящему времени достаточно хорошо изучены [1–6]. В последние два десятилетия был разработан ряд новых и весьма оригинальных технологических схем и процессов изготовления таких элементов конструкций, в которых в качестве заполнителей используются складчатые структуры (заполнители складчатой структуры) [8, 9]. Основным конструктивным признаком таких заполнителей является то, что они представляют собой многократно повторяющиеся комбинации из плоских тонкостенных элементов (граней), соединяемых между собой с образованием ребер. Их формообразование заключается в изгибе плоской заготовки толщиной t по сложной системе пространственно расположенных прямых линий, которые в процессе формообразования постоянно меняют свое взаимное расположение.

Одна из схем расположения линий изгиба плоской листовой заготовки показана на рис. 1, *a*, в соответствии с которой после окончания процесса формообразования получается складчатая структура высотой h , имеющая прямоугольные наклонные грани (стенки) размерами a , l и треугольные вертикальные стенки. Приведенные на рис. 1, *a*–*b* геометрические параметры связаны зависимостями

$$\frac{h}{l} = \sin \alpha, \quad b = 2l \cos \alpha. \quad (1.1)$$

При этом вертикальные стенки будут иметь толщину $\Delta = 2t$, если выполняется равенство

$$c = b, \quad (1.2)$$

и толщину $\Delta = 3t$, если

$$c = 2b. \quad (1.3)$$

Следовательно, структура рассматриваемого заполнителя полностью задается параметрами a , l , α и c , от которых при заданных упругих и прочностных характеристиках материала листовой заготовки и ее толщине t зависят осредненные упругие и прочностные параметры заполнителя.

На рис. 2 показан вид в плане сформированной структуры заполнителя для случая, когда $c = b + d$. У такой структуры каждая формирующаяся вертикальная стенка треугольной формы на периодически повторяющихся участках 1–9–4'–10 (рис. 1, *b*, вид сбоку) имеет толщину $\Delta = 3t$, а на участках 1–3'–9 и 2–4'–10 – толщину $\Delta = 4t$. Если $d \ll b$, то наличие участков 1–9–4'–10, примыкающих к наклонным ребрам 2'–3' и 1–2, при нагружении главным образом определяет механическое поведение вертикальных стенок заполнителя, наличие же участков типа 1–3'–9 и 2–4'–10 в первом приближении можно вообще не учитывать при описании механического поведения.

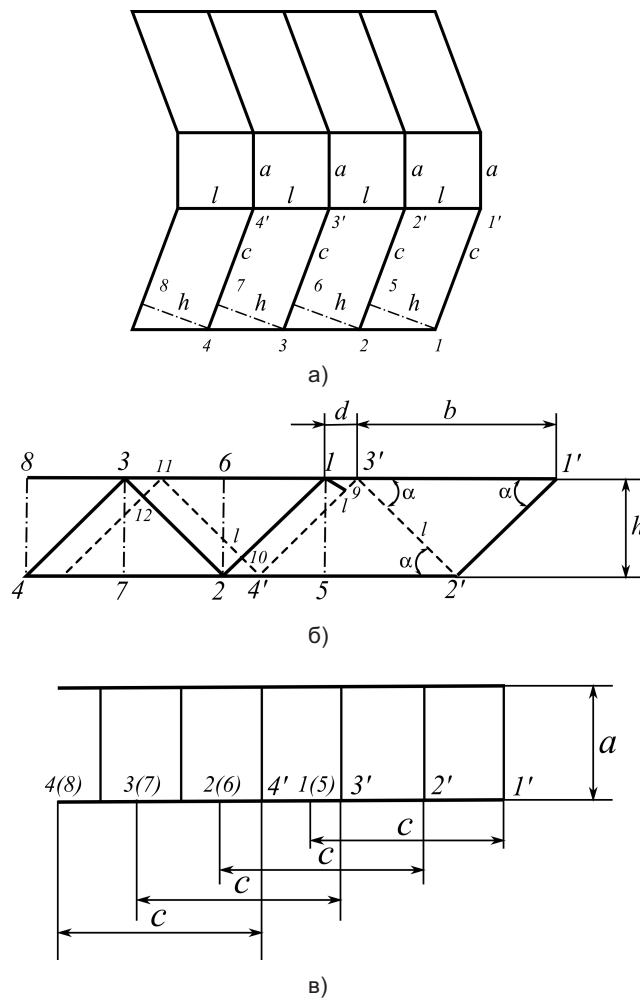


Рис. 1

Рассматриваемый наполнитель, как и сотовый, следует отнести к классу трансверсально-мягких [1–6], преимущественно воспринимающих в составе трехслойных конструкций нормальное напряжение растяжения-сжатия в направлении толщины h и поперечные касательные напряжения. При расчетах таких конструкций реальный наполнитель необходимо заменить некой однородной по объему сплошной средой, осредненные упругие и прочностные характеристики которой могут быть определены различными методами [2, 3]. Один из наиболее употребляемых основан на принципе энергетической эквивалентности работы реального и заменяющего его условного наполнителя, при использовании которого ниже дается вывод аналитических структурных формул для определения осредненных модулей упругости и предельных напряжений при растяжении-сжатии и сдвигах.

На рис. 2 в плоскости x_0y_0 показан вид в плане $ABC0_1$ выделенной из наполнителя ячейки периодичности (рис. 3) состоящей из двух наклонных стенок 1, 2, имеющих толщину t , и вертикальных стенок 3, 4, имеющих толщину $\Delta/2$. Ввиду весьма малой толщины листа t , а следовательно, и Δ , считаем, что $a + \Delta \approx a$. Срединные плоскости $\sigma_{(k)}$, $k = 1, 2$, отнесены к ортогональным декартовым координатам $0_1x_1y_1$ и $0_2x_2y_2$, причем ребро $x_1 = l$ первой стенки совпадает с ребром $x_2 = 0$ второй стенки.

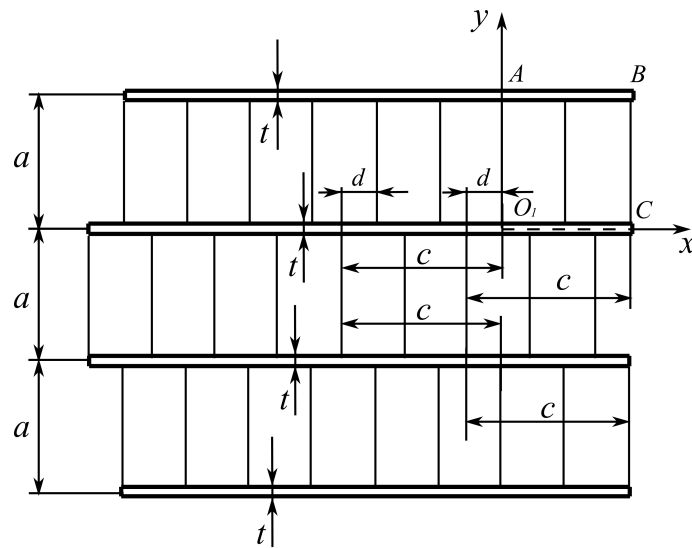


Рис. 2

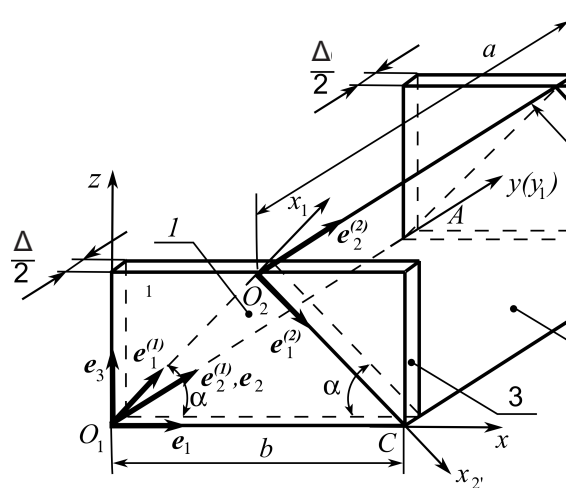


Рис. 3

Пространство выделенной ячейки периодичности отнесено к ортогональной декартовой системе координат O_1xyz , в которой $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq h$, плоскости $y = 0$ и $y = a$ совпадают со срединными плоскостями вертикальных стенок 3 и 4, а также имеют место равенства

$$\begin{aligned} y = y_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^{(1)}, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^{(k)} = \cos \alpha, \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^{(1)} = \sin \alpha, \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^{(2)} = -\sin \alpha, \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^{(2)} = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^{(k)} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – единичные орты пространственной системы координат O_1xyz , а $\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}$ – единичные орты плоской системы координат $O_kx_ky_k$, $k = 1, 2$.

Для описания механики деформирования введенных в рассмотрение пластинчатых элементов заполнителя в составе трехслойной конструкции введем ряд упрощающих предположений:

1) при нагружении стенок заполнителя до их потери устойчивости возникающее в них напряженно-деформированное состояние является безмоментным;

2) соединения стенок заполнителя между собой и с несущими слоями являются шарнирными;

3) все элементы заполнителя выполнены из изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , для определения критических значений возникающих в них напряжений допустимо использование соотношений классической теории устойчивости тонких пластин.

Возникающие в сечениях $x_k = \text{const}$, $y_k = \text{const}$ стенок 1, 2 векторы напряжений представим в виде

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \mathbf{e}_1 + \sigma_{i2}^{(k)} \mathbf{e}_2, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (1.5)$$

а для векторов перемещений $u^{(k)}$ точек $M_{(k)}(x_{(k)}, y_{(k)}) \in \sigma_{(k)}$ примем представления

$$\mathbf{u}^{(k)} = u^{(k)} \mathbf{e}_1 + v^{(k)} \mathbf{e}_2 + w^{(k)} \mathbf{m}^{(k)}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{e}_1^{(k)} \times \mathbf{e}_2^{(k)}$ – единичные векторы нормалей к плоскостям $\sigma_{(k)}$.

В линейном приближении компоненты векторов (1.6) с компонентами деформаций стенок 1, 2 связаны зависимостями

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_k}, \quad \varepsilon_{22}^{(k)} = \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y_k}, \quad 2\varepsilon_{12}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

в которых компоненты деформаций связаны с компонентами напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^{(k)} + \nu\varepsilon_{22}^{(k)}), \quad \sigma_{22}^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22}^{(k)} + \nu\varepsilon_{11}^{(k)}), \quad \sigma_{12}^{(k)} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}^{(k)}. \quad (1.8)$$

В сечениях $x = \text{const}$, $z = \text{const}$ вертикальных стенок 3, 4 при нагружении заполнителя возникают напряжения $\sigma_{11}^{(s)}$, $\sigma_{33}^{(s)}$, $\sigma_{13}^{(s)}$, $s = 3, 4$, составляющие векторы

$$\sigma_1^{(s)} = \sigma_{11}^{(s)} \mathbf{e}_1 + \sigma_{13}^{(s)} \mathbf{e}_3, \quad \sigma_3^{(s)} = \sigma_{13}^{(s)} \mathbf{e}_1 + \sigma_{33}^{(s)} \mathbf{e}_3. \quad (1.9)$$

Векторы перемещений точек их срединных плоскостей $y = 0$ и $y = a$ представим в виде разложений

$$\mathbf{u}^{(s)} = u^{(s)} \mathbf{e}_1 + v^{(s)} \mathbf{e}_2 + w^{(s)} \mathbf{e}_3, \quad s = 3, 4. \quad (1.10)$$

Через компоненты этих векторов формирующиеся компоненты деформации определяются зависимостями

$$\varepsilon_{11}^{(s)} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{33}^{(s)} = \frac{\partial w^{(s)}}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(s)} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x}, \quad (1.11)$$

при этом

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^{(s)} + \nu\varepsilon_{33}^{(s)}), \quad \sigma_{33}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{33}^{(s)} + \nu\varepsilon_{11}^{(s)}), \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13}^{(s)}. \quad (1.12)$$

В пространстве выделенной ячейки периодичности V вектор перемещений \mathbf{u} некоторой точки $M \in V$ представим разложением

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3. \quad (1.13)$$

Через компоненты вектора перемещений необходимые в дальнейшем кинематические соотношения запишутся в виде

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1.14)$$

которые с ненулевыми для трансверсально-мягкого заполнителя осредненными напряжениями связаны соотношениями упругости

$$\sigma_z = E_z \varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz}. \quad (1.15)$$

Здесь E_z , G_{xz} , G_{yz} – подлежащие определению осредненные упругие характеристики заполнителя, характеризующие его жесткости на растяжение-сжатие в направлении оси z и сдвиги в плоскостях x_0z и y_0z .

Для потенциальной энергии деформации элементов заполнителя в рамках принятых допущений будут иметь место выражения

$$\prod_{(k)} = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^l \left(\sigma_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + 2\sigma_{12}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} \right) dx_k dy_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.16)$$

$$\prod_{(s)} = \frac{\Delta}{4} \int_0^b \int_0^h \left(\sigma_{11}^{(s)} \varepsilon_{11}^{(s)} + 2\sigma_{13}^{(s)} \varepsilon_{13}^{(s)} + \sigma_{33}^{(s)} \delta \varepsilon_{33}^{(s)} \right) dx dy, \quad s = 3, 4, \quad (1.17)$$

а через осредненные компоненты напряжений и деформаций потенциальная энергия деформации заполнителя с осредненными упругими характеристиками будет определяться выражением

$$\prod = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \int_0^h (\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (1.18)$$

В силу принципа эквивалентности работы реального и заменяющего его условного заполнителей имеет место равенство

$$\prod = \prod_{(1)} + \prod_{(2)} + \prod_{(3)} + \prod_{(4)}, \quad (1.19)$$

исходя из которого, мы определяем осредненные характеристики E_z , G_{xz} и G_{yz} . Для их определения можно составить также равенства вида

$$\sum_{s=1}^2 \frac{\Delta}{2} \int_0^b \sigma^{(s)} dx + t \int_0^a \sigma_1^{(1)} dx_1 - t \int_0^a \sigma_1^{(2)} dx_2 = \int_0^b \int_0^a \sigma_3 dx dy, \quad (1.20)$$

где

$$\sigma_3 = \tau_{xz} \mathbf{e}_1 + \tau_{yz} \mathbf{e}_2 + \sigma_z \mathbf{e}_3 \quad (1.21)$$

есть вектор напряжений в сечении $z = \text{const}$ осредненного заполнителя, которому в стенках 3, 4 соответствуют сечения $z = \text{const}$ с векторами напряжений $\sigma_3^{(s)}$, в стенках 1 и 2 – сечения $x_1 = \text{const}$ с вектором напряжений $\sigma_1^{(1)}$ и $x_2 = \text{const}$ с вектором напряжений $-\sigma_1^{(2)}$.

2. Построение приближенного решения задачи

Предположим, что сечение $z = h$ заполнителя с осредненными характеристиками при нагружении через верхний несущий слой получает перемещение

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_1 + v_0 \mathbf{e}_2 + w_0 \mathbf{e}_3, \quad (2.1)$$

где u_0, v_0, w_0 – постоянные в пределах рассматриваемой грани заполнителя перемещения, а сечение $z = 0$ остается неподвижным. Поэтому в объеме ячейки периодичности для вектора \mathbf{u} примем аппроксимацию

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(z) = \frac{z}{h} \mathbf{u}_0 = \frac{z}{h} (u_0 \mathbf{e}_1 + v_0 \mathbf{e}_2 + w_0 \mathbf{e}_3), \quad (2.2)$$

в соответствии с которой перемещения вертикальных стенок 3 и 4 будут равны

$$u^{(s)} = \frac{z}{h} u_0, \quad v^{(s)} = \frac{z}{h} v_0, \quad w^{(s)} = \frac{z}{h} w_0. \quad (2.3)$$

При этом в силу (1.11)

$$\varepsilon_{11}^{(s)} = 0, \quad \varepsilon_{33}^{(s)} = \frac{w_0}{h}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(s)} = \frac{u_0}{h}, \quad s = 3, 4. \quad (2.4)$$

Для векторов перемещений вертикальных стенок примем аппроксимации

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{x_1}{l} \mathbf{u}_0^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \left(1 - \frac{x_2}{l}\right) \mathbf{u}_0^{(2)}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}_0^{(1)}$ – вектор перемещений точек ребра $x_1 = l$ первой стенки, а $\mathbf{u}_0^{(2)}$ – аналогичный вектор ребра $x_2 = 0$ второй стенки. Так как эти ребра лежат в плоскости $z = h$, то при совместном деформировании векторы $\mathbf{u}_0^{(k)}$ и \mathbf{u}_0 должны быть подчинены равенствам

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{u}_0^{(2)} = u_0^{(k)} \mathbf{e}_1^{(k)} + v_0^{(k)} \mathbf{e}_2^{(k)} + w_0^{(k)} \mathbf{e}_3^{(k)} = u_0 \mathbf{e}_1 + v_0 \mathbf{e}_2 + w_0 \mathbf{e}_3, \quad k = 1, 2. \quad (2.6)$$

Умножая их на $\mathbf{e}_1^{(k)}$ и $\mathbf{e}_2^{(k)}$, с учетом формул (1.4) получим зависимости

$$u_0^{(1)} = u_0 \cos \alpha + w_0 \sin \alpha, \quad u_0^{(2)} = u_0 \cos \alpha - w_0 \sin \alpha, \quad v_0^{(1)} = v_0^{(2)} = v_0, \quad (2.7)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \frac{x_1}{l} (u_0 \cos \alpha + w_0 \sin \alpha), & v^{(1)} &= \frac{x_1}{l} v_0, \\ u^{(2)} &= \left(1 - \frac{x_2}{l}\right) (u_0 \cos \alpha - w_0 \sin \alpha), & v^{(2)} &= \left(1 - \frac{x_2}{l}\right) v_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом согласно (1.7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(1)} &= \frac{1}{l} (u_0 \cos \alpha + w_0 \sin \alpha), & \varepsilon_{22}^{(1)} &= 0, & 2\varepsilon_{12}^{(1)} &= \frac{v_0}{l}, \\ \varepsilon_{11}^{(2)} &= -\frac{1}{l} (u_0 \cos \alpha - w_0 \sin \alpha), & \varepsilon_{22}^{(2)} &= 0, & 2\varepsilon_{12}^{(2)} &= -\frac{v_0}{l}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

а в соответствии с принятой аппроксимацией (2.2) компоненты вектора \mathbf{u} будут равны

$$u = \frac{z}{h} u_0, \quad v = \frac{z}{h} v_0, \quad w = \frac{z}{h} w_0, \quad (2.10)$$

следовательно,

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{33}^{(s)} = \frac{w_0}{h}, \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{13}^{(s)} = \frac{u_0}{h}, \quad \gamma_{yz} = \frac{v_0}{h}. \quad (2.11)$$

3. Модули упругости и характеристики прочности при растяжении и сжатии в поперечном направлении

Растяжение. Предположим, что при растяжении в направлении оси z точки грани $z = h$ ячейки периодичности получили перемещения $w(x, y, z = h) = w_0 = \text{const}$, $u_0 = v_0 = 0$. Так как в рассматриваемом случае

$$\sigma_z = E_z \varepsilon_z = E_z \frac{w_0}{h}, \quad \varepsilon_z = \frac{w_0}{h}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

то из (1.18) получим

$$\Pi = \frac{ab}{2} \sigma_z w_0, \quad (3.1)$$

$$\Pi = \frac{ab}{2} E_z \frac{w_0^2}{h}. \quad (3.2)$$

Имея в виду, что для стенок 3 и 4 при $w_0 \neq 0$

$$\varepsilon_{33}^{(s)} = \frac{w_0}{h}, \quad \varepsilon_{11}^{(s)} = 0, \quad 2\varepsilon_{13}^{(s)} = 0, \quad (3.3)$$

в силу соотношений

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{33}^{(s)} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{w_0}{h}, \quad \sigma_{11}^{(s)} = \nu \sigma_{33}^{(s)} \quad (3.4)$$

в соответствии с (1.17) получим

$$\prod_{(s)} = \frac{\Delta b}{4} \sigma_{33}^{(s)} w_0, \quad (3.5)$$

$$\prod_{(s)} = \frac{\Delta b}{4} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{w_0^2}{h}. \quad (3.6)$$

Для наклонных стенок 1 и 2 в силу $u_0 = v_0 = 0$ выражения (2.9) принимают вид

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{w_0}{l} \sin \alpha = \frac{w_0}{h} \sin^2 \alpha, \quad 2\varepsilon_{12}^{(1)} = 2\varepsilon_{12}^{(2)} = 0. \quad (3.7)$$

Следовательно, с учетом формул (1.8)

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{w_0}{h} \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \nu \sigma_{11}^{(1)} = \nu \sigma_{11}^{(2)}, \quad (3.8)$$

и в соответствии с (1.16)

$$\prod_{(k)} = \frac{ta}{2} \sigma_{11}^{(k)} w_0 \sin \alpha, \quad (3.9)$$

$$\prod_{(k)} = \frac{ta}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{w_0^2}{h} \sin^3 \alpha. \quad (3.10)$$

В дальнейшем верхними индексами (I), (II) будем обозначать величины, относящиеся к I и II этапам соответственно, индексами “+” и “-” – соответственно величины, относящиеся к растяжению и к сжатию.

Из равенства (1.19) при подстановке выражений (3.1), (3.5) и (3.9) следует зависимость

$$\sigma_z = \frac{\Delta}{a} \sigma_{33}^{(3)} + \frac{2t}{b} \sigma_{11}^{(1)} \sin \alpha, \quad (3.11)$$

а при подстановке выражений (3.2), (3.6) и (3.10) для определения осредненного модуля упругости заполнителя получаем формулу

$$E_z = E_z^{(1)+} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha \right). \quad (3.12)$$

В рассматриваемом случае уравнение (1.20) в силу

$$\sigma_3 = \sigma_z \mathbf{e}_3, \quad \sigma_3^{(s)} = \sigma_{33}^{(s)} \mathbf{e}_3, \quad \sigma_1^{(k)} = \sigma_{11}^{(k)} \mathbf{e}_1^{(k)}$$

принимает вид

$$\sigma_z \mathbf{e}_3 = \frac{\Delta}{a} \sigma_{33}^{(3)} \mathbf{e}_3 + \frac{t}{b} \sigma_{11}^{(1)} \left(\mathbf{e}_1^{(1)} - \mathbf{e}_1^{(2)} \right),$$

из которого с учетом формул (1.4) следует равенство (3.11). Так как в соответствии с выражениями (3.4) и (3.8) имеет место зависимость

$$\sigma_{11}^{(k)} = \sigma_{33}^{(s)} \sin^2 \alpha, \quad (3.13)$$

то полученное равенство (3.11) принимает вид

$$\sigma_z = \sigma_{11}^{(3)} \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha \right). \quad (3.14)$$

Поэтому при $\sin^3 \alpha \sim \varepsilon$, где ε – некоторая малая величина по сравнению с единицей, будет иметь место приближенная зависимость

$$\sigma_z \approx \frac{\Delta}{a} \sigma_{11}^{(3)}, \quad (3.15)$$

указывающая, что при растяжении заполнителя в направлении оси z , если $w_0 > 0$, то в первую очередь разрушаются вертикальные стенки ячейки периодичности. По четвертой (энергетической) теории прочности такое разрушение возможно при выполнении равенства

$$\sqrt{\left(\sigma_{11}^{(s)} \right)^2 + \left(\sigma_{22}^{(s)} \right)^2} - \sigma_{11}^{(s)} \sigma_{22}^{(s)} = \sigma_p, \quad (3.16)$$

где σ_p – предел прочности материала заполнителя при растяжении. Это равенство с учетом формул (3.8) принимает вид

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (3.17)$$

Следовательно, предельное осредненное напряжение заполнителя σ_z^{*+} , при достижении которого происходит начальное разрушение заполнителя, в силу (3.14) и (3.17) будет равно

$$\sigma_z^{*+} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{(1-\nu+\nu^2)}} \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha \right), \quad (3.18)$$

а для определения предельной деформации заполнителя $(w_0/h)^{*+}$ согласно (3.4) и (3.17) приходим к формуле

$$\varepsilon_z^{*+} = \left(\frac{w_0}{h}\right)^{*+} = \frac{(1-\nu^2)\sigma_p}{E\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (3.19)$$

Дальнейшее поведение зависимости $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z) = E_z w_0/h$ определяется способом нагружения заполнителя на растяжение. Если нагружение является кинематическим, то при достижении деформации значения $\varepsilon_z^{*+} = (w_0/h)^{*+}$ происходит скачкообразное падение уровня осредненного напряжения, для которого после разрушения вертикальных стенок вместо (3.11) должно выполняться равенство

$$\sigma_z = \frac{2t}{b} \sigma_{11}^{(1)} \sin \alpha. \quad (3.20)$$

При этом равенством

$$\sigma_z^{**+} = \frac{2t}{b} \frac{E}{1-\nu^2} \sin^2 \alpha \left(\frac{w_0}{h}\right)^{*+} = \frac{2t}{b} \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \quad (3.21)$$

будет определяться значение осредненного напряжения σ_z , до которого оно скачкообразно падает. При дальнейшем нагружении заполнителя процесс деформирования в соответствии с зависимостью $\sigma_z = E_z^{(II)+} w_0/h$ будет происходить с осредненным модулем упругости

$$E_z = E_z^{(II)+} = \frac{2Et}{b(1-\nu^2)} \sin^3 \alpha. \quad (3.22)$$

Если нагружение заполнителя является силовым, то в силу сохранения достигнутого уровня осредненного напряжения σ_z^{*+} с учетом (3.20) и (3.8) должно быть выполнено равенство

$$\sigma_z^{*+} = \frac{2t}{b} \frac{E}{1-\nu^2} \sin^3 \alpha \left(\frac{w_0}{h}\right)^{***+} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha\right), \quad (3.23)$$

откуда определяется значение деформации

$$\varepsilon_z^{***+} = \left(\frac{w_0}{h}\right)^{***+} = \frac{b\sigma_p(1-\nu^2)}{2tE\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha\right), \quad (3.24)$$

до которого оно скачкообразно должно увеличиться. Дальнейшее поведение зависимости $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ должно происходить согласно (3.20), а значит,

$$\sigma_z = \frac{2t}{b} \frac{E}{1-\nu^2} \sin^3 \alpha \frac{w_0}{h} \quad (3.25)$$

до достижения равенства

$$[\sigma^{[k]}] = \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} = \frac{E}{1-\nu^2} \sin^2 \alpha \left(\frac{w_0}{h}\right)^{****+}, \quad (3.26)$$

то есть до значения

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^{****+} = \frac{(1-\nu^2)\sigma_p}{E \sin^2 \alpha \sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (3.27)$$

При этом в соответствии с (3.25) должно выполняться равенство

$$\sigma_z^{****+} = \frac{2t}{b} \sin \alpha \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}. \quad (3.28)$$

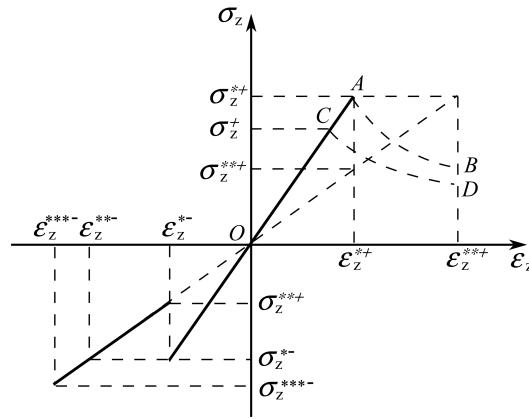


Рис. 4

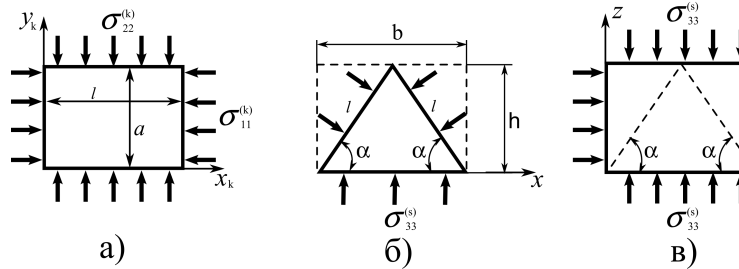


Рис. 5

Сравнивая (3.18), (3.21) и (3.28), можно видеть, что

$$\sigma_z^{***+} < \sigma_z^{**+} < \sigma_z^{*+}. \quad (3.29)$$

Следовательно, предельное растяжение заполнителя возможно только до значений σ_z^{*+} и ε_z^{*+} с модулем упругости $E_z^{(1)+}$, то есть на участке OA диаграммы деформирования $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ при растяжении (рис. 4). Очевидно, по такой же диаграмме деформирования должен происходить процесс растяжения заполнителя до разрушения не материала его стенок, а адгезионного слоя, соединяющего верхние и нижние ребра с несущими слоями трехслойного пакета. При этом осредненное напряжение σ_z на диаграмме может дойти только до уровня σ_z^+ , то есть до точки C (рис. 4), а ниспадающие ветви диаграммы растяжения должны идти по траектории CB , а не AB .

Сжатие. При $w_0 < 0$ все четыре стенки заполнителя оказываются в условиях сжатия (рис. 5). Следовательно, его предельная несущая способность будет определяться потерей устойчивости стенок. На рис. 5 изображены расчетные схемы для наклонных стенок 1, 2 (рис. 5, а), находящихся в условиях двухстороннего сжатия, и две возможные расчетные схемы для вертикальных стенок 3, 4 (см. рис. 5, б, в), из которых схема 5, б соответствует треугольной пластине толщиной Δ , для которой ребра $y_k = 0$, $y_k = a$ наклонных стенок служат в качестве опорных, а схема 5, в соответствует нагружению вертикальных стенок после потери устойчивости наклонных стенок.

Если все четыре кромки наклонных стенок считать шарнирно опертыми, то при $\phi_{(k)} = \sigma_{22}^{(k)}/\sigma_{22}^{(k)} = \nu$ критическое значение напряжения $\sigma_{11}^{(k)}$ будет определяться

по формуле

$$\sigma_{11}^{(k)*} = K_x^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 = K_x^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \sin^2 \alpha \left(\frac{t}{h}\right)^2, \quad (3.30)$$

где принято во внимание равенство $l = h/\sin \alpha$, а через $K_x^{(k)} = K_x^{(k)}(\lambda, \nu)$ обозначен безразмерный параметр критической нагрузки, зависящий от удлинения $\lambda = l/a$ и параметра $\phi_{(k)} = \nu$.

Для боковых стенок 3 и 4 для определения критических значений напряжения $\sigma_{33}^{(s)}$ по аналогии с формулой (3.30) можно записать формулы

$$\sigma_{33}^{(s)*} = K_z^1 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2, \quad (3.31)$$

$$\sigma_{33}^{(s)*} = K_z^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2, \quad (3.32)$$

в которых безразмерные коэффициенты K_z^1 и K_z^2 соответствуют схемам 5, б и 5, в. Из них коэффициент K_z^2 , как и коэффициент $K_x^{(k)}$ в формуле (3.30), при $\nu = 0.3$ в соответствии с известными классическими решениями [11] находится в пределах $3 \leq K_x^2 \leq 4$, а в случае равностороннего треугольника, когда $\alpha = 60^\circ$, можно принять $K_z^1 \sim 4$.

При сжатии заполнителя до потери устойчивости или вертикальных, или наклонных стенок его деформирование происходит, когда модуль упругости $E_z^{(1)-}$ равен $E_z^{(1)+}$, определяемому по формуле (3.12). Такое деформирование продолжится до тех пор, пока не будет выполнено вытекающее из (3.4) и (3.31) (или (3.32)) равенство

$$\frac{w_0}{h} = K_z \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2, \quad (3.33)$$

или вытекающее из (3.8) и (3.30) равенство

$$\varepsilon_z^{*-} = \left(\frac{w_0}{h}\right)^{*-} = K_x^{(k)} \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^2. \quad (3.34)$$

Так как $t < \Delta$, то сначала происходит потеря устойчивости наклонных стенок 1, 2, когда деформация w_0/h достигает значения $(w_0/h)^{*-}$ (формула (3.34), рис. 4). При этом вертикальные стенки 3 и 4 освобождаются от наклонных ребер, и дальнейшие построения необходимо проводить по расчетной схеме 5, в. В силу формулы (3.11) при $w_0/h = (w_0/h)^{*-}$ должны быть выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sigma_z^{*-} &= \frac{\Delta}{a} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^{*-} + \frac{2t}{b} \sigma_{11}^{(k)*} \sin \alpha = \\ &= \frac{\Delta}{a} \frac{E}{1-\nu^2} K_x^{(k)} \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha K_x^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 = \\ &= K_x^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h} \operatorname{tg} \alpha \sin^3 \alpha\right), \quad (3.35) \end{aligned}$$

полученные с учетом формул (1.1), (3.4) и (3.30). При сжатии дальнейшее деформирование заполнителя после потери устойчивости наклонных стенок также определяется способом нагружения. Если нагружение кинематическое, то при достижении деформацией значения $(w_0/h)^{*-}$ в соответствии с (3.11) и равенством $\sigma_{11}^{(k)} = 0$

осредненное напряжение σ_z с уровня σ_z^{*-} должно упасть до уровня (рис. 4)

$$\sigma_z^{**} = \frac{\Delta}{a} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^{*-} = K_x^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\Delta}{a} \left(\frac{t}{h}\right)^2. \quad (3.36)$$

Дальнейшее нагружение заполнителя будет происходить в случае зависимости

$$\sigma_z = \frac{\Delta}{a} \sigma_{33}^{(3)} = \frac{\Delta}{a} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{w_0}{h} \quad (3.37)$$

с осредненным модулем упругости заполнителя

$$E_z^{(II)-} = \frac{\Delta E}{a(1-\nu^2)} \quad (3.38)$$

до значения σ_z^{***} (рис. 4), определяемого равенством

$$\sigma_z^{***} = \frac{\Delta}{a} \sigma_{33}^{(s)*} = K_z^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\Delta}{a} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2. \quad (3.39)$$

Сравнивая формулы (3.35) и (3.39), можно видеть, что $\sigma_z^{***} > \sigma_z^{*-}$, так как для рассматриваемых заполнителей

$$\left(\frac{t}{h}\right)^2 < \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2, \quad \frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h} \operatorname{tg} \alpha \sin^3 \alpha \sim \frac{\Delta}{a}. \quad (3.40)$$

Если нагружение заполнителя является силовым, то после потери устойчивости наклонных стенок в силу $\sigma_{11}^{(k)} = 0$ должно быть выполнено равенство

$$\sigma_z^{*-} = \frac{\Delta}{a} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{w_0}{h}\right)^{**},$$

из которого, применяя формулу (3.35) для определения $(w_0/h)^{**}$, получим

$$\varepsilon_z^{**} = \left(\frac{w_0}{h}\right)^{**} = K_x^{(k)} \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{ta}{\Delta h} \operatorname{tg} \alpha \sin^3 \alpha\right). \quad (3.41)$$

При этом поперечная деформация заполнителя ε_z с уровня $\varepsilon_z^{*-} = (w_0/h)^{*-}$ скачкообразно увеличивается до уровня $\varepsilon_z^{**} = (w_0/h)^{**}$ (рис. 4), а дальнейший ее рост происходит согласно (3.37) с модулем упругости (3.38) до значения σ_z^{***} , определяемого по формуле (3.39). В момент окончательного разрушения заполнителя должно быть выполнено равенство

$$E_z^{(II)-} \left(\frac{w_0}{h}\right)^{***} = \frac{\Delta}{a} \sigma_{33}^{(s)*} = K_z^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\Delta}{a} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2,$$

откуда с учетом (3.38) выводим формулу

$$\varepsilon_z^{***} = \left(\frac{w_0}{h}\right)^{***} = K_z^2 \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2, \quad (3.42)$$

служащую для определения предельного значения поперечной деформации заполнителя при его окончательном разрушении.

Заметим, что во всех полученных расчетных формулах, используемых для определения σ_z^{*-} , ε_z^{*-} , ε_z^{**} , σ_z^{***} , ε_z^{***} , присутствуют параметры $K_x^{(k)}$ и K_z^2 . Исходя из результатов теоретических исследований устойчивости пластин, можно утверждать, что их значения находятся в пределах $3 \leq K_x^{(k)}$, $K_z^2 \leq 4$. Эти значения могут быть найдены (и уточнены), исходя из результатов специально проведенных экспериментов, если ориентироваться на использование теоретико-экспериментального метода А.В. Саченкова [7] и многочисленные примеры его применения для решения разнообразных задач теории устойчивости пластин и оболочек.

4. Модули упругости и прочностные характеристики заполнителя при сдвиге

Сдвиг в плоскости y_0z . Пусть $v(x, y, z = h) = v_0 = \text{const}$, $u_0 = w_0 = 0$. Тогда в соответствии с (2.4), (2.9) и (2.11) $\varepsilon_{11}^{(s)} = \varepsilon_{33}^{(s)} = 2\varepsilon_{13}^{(s)} = 0$, следовательно, $\prod_{(s)} = 0$, а

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} = \varepsilon_{22}^{(k)} = 0, \quad 2\varepsilon_{12}^{(1)} = -2\varepsilon_{12}^{(2)} = \frac{v_0}{l} = \frac{v_0}{h} \sin \alpha, \\ \sigma_{11}^{(k)} = \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = -\sigma_{12}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{v_0}{h} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{v_0}{h}, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = G_{yz} \frac{v_0}{h}. \quad (4.2)$$

При этом

$$\prod_{(1)} = \frac{ta}{2} \sigma_{12}^{(1)} v_0 = \frac{taE}{4(1+\nu)} \sin \alpha \frac{v_0^2}{h}, \quad \prod_{(2)} = -\frac{ta}{2} \sigma_{12}^{(2)} v_0 = \frac{taE}{4(1+\nu)} \sin \alpha \frac{v_0^2}{h}, \quad (4.3)$$

$$\prod = \frac{ab}{2} \tau_{yz} v_0 = \frac{ab}{2} E_z \frac{v_0^2}{h}. \quad (4.4)$$

В рассматриваемом случае подстановка выражений (4.3), (4.4) в равенство (1.19) дает зависимость

$$\tau_{yz} = \frac{t}{b} \left(\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)} \right) \quad (4.5)$$

и формулу для определения осредненного модуля сдвига заполнителя

$$G_{yz} = \frac{tE}{2b(1+\nu)} \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Причиной разрушения заполнителя в рассматриваемом случае является потеря устойчивости наклонных стенок в условиях чистого сдвига. В силу принятых предположений об их шарнирном соединении и опирании кромок критическое напряжение сдвига определяется по формуле

$$\sigma_{12}^{(1)*} = -\sigma_{12}^{(2)*} = K_\tau^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{l} \right)^2 = K_\tau^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \sin^2 \alpha \left(\frac{t}{h} \right)^2, \quad (4.7)$$

где $K_\tau^{(k)}$ – безразмерный параметр критической нагрузки, для определения которой при $\lambda_\tau = a/l = 1/\lambda \geq 1$ можно пользоваться формулой [11]

$$K_\tau^{(k)} = 5.34 + \frac{4}{\lambda_\tau^2}. \quad (4.8)$$

При $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)*}$ критическое значение деформации сдвига $(v_0/h)^*$ будет равно

$$\left(\frac{v_0}{h} \right)^* = K_\tau^{(k)} \frac{\pi^2}{6(1-\nu)} \sin \alpha \left(\frac{t}{h} \right)^2. \quad (4.9)$$

Следовательно, для определения предельного значения осредненного напряжения τ_{yz}^* будет иметь место формула

$$\tau_{yz}^* = \frac{2t}{b} \sigma_{12}^{(1)*} = K_\tau^{(k)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h} \right)^3 \text{tg} \alpha \sin^2 \alpha. \quad (4.10)$$

Сдвиг в плоскости x_0_1z . Пусть $u(x, y, z = h) = u_0$, $v_0 = w_0 = 0$. В рассматриваемом случае нагружения

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = -\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{u_0}{l} = \frac{u_0}{h} \sin \alpha, \quad \varepsilon_{22}^{(k)} = 2\varepsilon_{12}^{(k)} = 0, \quad (4.11)$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\sigma_{11}^{(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \sin \frac{u_0}{h}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = \nu\sigma_{11}^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0,$$

$$\prod_{(1)} = \frac{at}{2} \sigma_{11}^{(1)} u_0, \quad \prod_{(2)} = -\frac{at}{2} \sigma_{11}^{(2)} u_0, \quad \prod_{(k)} = \frac{at}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \sin \alpha \frac{u_0^2}{h}, \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{11}^{(s)} = \varepsilon_{33}^{(s)} = 0, \quad 2\varepsilon_{13}^{(s)} = \frac{u_0}{h}, \quad \sigma_{11}^{(s)} = \sigma_{33}^{(s)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{u_0}{h}, \quad (4.13)$$

$$\prod_{(s)} = \frac{\Delta b}{4} \sigma_{13}^{(s)} u_0 = \frac{\Delta b}{8} \frac{E}{(1+\nu)} \frac{u_0^2}{h}, \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{u_0}{h}, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \frac{u_0}{h}, \quad (4.15)$$

$$\prod = \frac{ab}{2} \tau_{xz} u_0, \quad \prod = \frac{ab}{2} G_{xz} \frac{u_0^2}{h}. \quad (4.16)$$

Подстановка выражений (4.12), (4.14) и (4.16) в равенство (1.19) приводит к зависимости

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(1)} = \frac{\Delta}{a} \sigma_{13}^{(3)} + \frac{t}{b} \sin \alpha (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(2)}) \quad (4.17)$$

и формуле

$$\begin{aligned} G_{xz} = G_{xz}^{(1)} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{4t}{b(1-\nu)} \sin^2 \alpha \right] = \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha \right], \quad (4.18) \end{aligned}$$

служащей для определения осредненного значения модуля сдвига заполнителя на рассматриваемой первой стадии его деформирования.

Как следует из (4.11) и (4.13), при сдвиге в плоскости x_0_1z вторая наклонная стенка находится в условиях сжатия, стенки 3 и 4 – в условиях чистого сдвига. В силу того, что $\Delta > t$, $K_x^{(k)} < K_\tau$, а возникающие в них напряжения связаны зависимостями

$$\left| \sigma_{11}^{(k)} \right| = \frac{2 \sin \alpha}{1-\nu} \sigma_{13}^{(s)}, \quad \left| \sigma_{11}^{(k)} \right| \sim \sigma_{13}^{(s)} \quad \text{при } \alpha > 30^\circ,$$

при выполнении равенства

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}^{(2)*} = K_x^{(2)} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \sin^2 \alpha \left(\frac{t}{h} \right)^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \sin \alpha \left(\frac{u_0}{h} \right)^* \quad (4.19)$$

происходит разрушение второй наклонной стенки из-за ее потери устойчивости от сжатия. При этом критическое значение деформации $\gamma_{xz}^* = (u_0/h)^*$ будет определяться по формуле

$$\gamma_{xz}^* = \left(\frac{u_0}{h} \right)^* = K_x^{(2)} \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \sin \alpha, \quad (4.20)$$

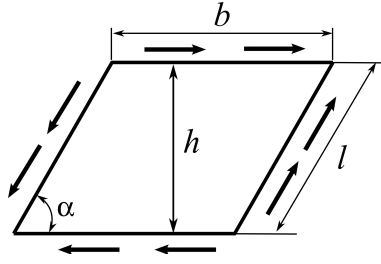


Рис. 6

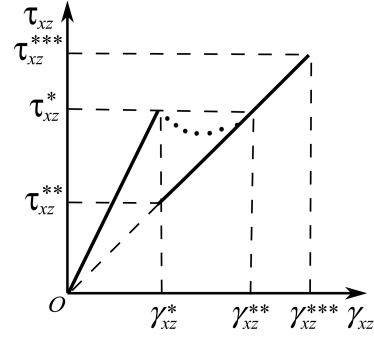


Рис. 7

следующей из равенства (4.19). Используя эту формулу и учитывая выражения (4.11), (4.13), для определения критического значения τ_{xz}^* можно получить формулу

$$\tau_{xz}^* = K_x^{(2)} \frac{\pi^2 E}{12(1+\nu)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \sin \alpha \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2}{1-\nu} \frac{t}{h} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha\right), \quad (4.21)$$

где $3 \leq K_x^{(2)} \leq 4$.

После разрушения второй наклонной стенки вместо (4.17) будет иметь место зависимость

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(II)} = \frac{\Delta}{a} \sigma_{13}^{(3)} + \frac{t}{b} \sin \alpha \sigma_{11}^{(1)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \right] \frac{u_0}{h}, \quad (4.22)$$

а вместо (4.18) – формула

$$G_{xz} = G_{xz}^{(II)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha \right], \quad (4.23)$$

где использованы формулы (1.1) и соотношения (4.11), (4.13), (4.15). При этом воспринимающая нагрузку ячейка периодичности будет состоять из первой наклонной стенки, работающей на растяжение, и двух вертикальных стенок толщиной $\Delta/2$, имеющих форму параллелограмма (рис. 6) и работающих на сдвиг.

Для определения критического значения $\sigma_{13}^{(s)*}$ при потере устойчивости вертикальных стенок, исходя из результатов работы [12], можно записать формулу следующего вида:

$$\sigma_{13}^{(s)*} = \left(5.34 + 4 \frac{l^2}{b^2}\right) D_s^* \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} \left(1 + \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha}}\right), \quad (4.24)$$

где в силу (1.1) в рассматриваемом случае

$$\frac{l^2}{b^2} = \frac{1}{4 \cos^2 \alpha}, \quad D_s^* = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \sin^4 \alpha} \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2. \quad (4.25)$$

Процесс деформирования указанной ячейки периодичности так же, как и при сжатии, будет зависеть от способа нагружения. Если нагружение является кинематическим, то осредненное напряжение τ_{xz} с уровня τ_{xz}^* падает до уровня,

определяемого по формуле

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{**} &= G_{xz}^{(II)} \gamma_{xz}^* = G_{xz}^{(II)} \left(\frac{u_0}{h} \right)^* = \\ &= K_x^{(2)} \frac{\pi^2 E}{24(1+\nu)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \sin \alpha \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha \right].\end{aligned}\quad (4.26)$$

Если же нагружение является силовым, то деформация γ_{xz} с уровня γ_{xz}^* скачкообразно возрастает до уровня γ_{xz}^{**} . Для его определения должно быть составлено равенство $\tau_{xz}^* = G_{xz}^{(II)} \gamma_{xz}^{**}$, откуда при учете формул (4.21) и (4.23) следует формула

$$\gamma_{xz}^{**} = \frac{\tau_{xz}^*}{G_{xz}^{(II)}} = K_x^{(2)} \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \sin \alpha \frac{\frac{\Delta}{a} + \frac{2}{1-\nu} \frac{t}{h} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha}{\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha},\quad (4.27)$$

причем ясно, что $\gamma_{xz}^{**} > \gamma_{xz}^*$.

Процесс деформирования в соответствии с зависимостью (4.22) будет продолжаться до тех пор, пока не будет выполнено равенство $\sigma_{13}^{(s)} = \sigma_{13}^{(s)*}$, которое в силу (4.13) запишется в виде

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{u_0}{h} \right)^{***} = \sigma_{13}^{(s)*},\quad (4.28)$$

где $\sigma_{13}^{(s)*}$ определяется по формуле (4.23). Из (4.27) находится критическое значение деформации γ_{xz} :

$$\gamma_{xz}^{***} = \left(\frac{u_0}{h} \right)^{***} = \frac{2\sigma_{13}^{(s)*}(1+\nu)}{E},\quad (4.29)$$

при достижении которого должно произойти разрушение вертикальных стенок от потери устойчивости. При этом в силу (4.22) критическое значение осредненного напряжения τ_{xz} будет равно

$$\tau_{xz}^{***} = \sigma_{13}^{(s)*} \left[\frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha \right].\quad (4.30)$$

Формулу (4.23) можно записать в следующем структурном виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{13}^{(s)*} &= \varkappa_\tau \left(5.34 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} \times \\ &\times \left[1 + \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha}} \right] \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha} \left(\frac{\Delta}{h} \right)^2,\end{aligned}\quad (4.31)$$

где введен близкий к единице поправочный коэффициент \varkappa_τ . Так как при проведении физических экспериментов в момент разрушения фиксируются величины τ_{xz}^{***} и γ_{xz}^{***} , то при их использовании с учетом (4.30) и (4.31) подлежит идентификации коэффициент \varkappa_τ .

Следует отметить, что после разрушения вертикальных стенок в наклонной стенке будет сформировано растягивающее напряжение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} \sin \alpha \left(\frac{u_0}{h} \right)^{***} = \frac{2}{1-\nu} \sigma_{13}^{(s)*} \sin \alpha,\quad (4.32)$$

Табл. 1

№ строки	№ образца	1	2	3	4	5	Средние значения
1	w_0^* , мм	0.096	0.127	0.108	0.122	0.173	0.125
2	P_* , кг	669	762	623	523	731	662
3	$\varepsilon_{z\vartheta}^*$	0.0060	0.0079	0.0067	0.0076	0.0108	0.0078
4	$\sigma_{z\vartheta}^*$, МПа	0.415	0.472	0.386	0.325	0.453	0.41
5	E_z^ϑ , МПа	69.2	59.7	57.6	42.8	41.9	54.2
6	E^ϑ , МПа	2570.2	2217.4	2139.4	1589.7	1556.3	2013.1
7	E_{np}/E^ϑ	0.92	1.06	1.10	1.49	1.52	1.17
8	$K_{z\vartheta}^B$	12.95	17.06	14.47	16.41	23.32	16.84
9	K_z	16.7	22.0	18.6	21.1	30.1	21.0

которое еще может и не достигнуть уровня $\sigma_p/\sqrt{1-\nu+\nu^2}$. Тем не менее за момент окончательного разрушения заполнителя следует принимать потерю устойчивости от сдвига вертикальных стенок 3 и 4, ибо при этом для ребер $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ оставшейся наклонной стенки 1 «исчезают» опоры на вертикальных стенках. Следовательно, диаграмма деформирования заполнителя при сдвиге в плоскости x_0z будет иметь структурный вид, показанный на рис. 7, где точками изображена кривая, наблюдаемая в экспериментах.

5. Экспериментальные исследования тест-образцов и идентификация значений свободных безразмерных параметров

5.1. Сжатие заполнителя в поперечном направлении. С целью исследования соответствия принятых предположений о характере деформирования и разрушения ячейки периодичности заполнителя рассматриваемой структуры реальному процессу ее деформирования были проведены испытания на сжатие тест-образцов в виде плоских трехслойных пластин с заполнителем, содержащим в направлении оси x пять, а в направлении оси y – шесть ячеек периодичности. Заполнитель изготовлен по «ручной» технологии из непропитанной полимерной бумаги «НОМЕХ» толщиной $t = 0.13$ мм, являющейся в соответствии с данными работы [9] ортотропным материалом с модулями упругости $E_1 = 3.10$ ГПа, $E_2 = 1.80$ ГПа в двух взаимно перпендикулярных направлениях и осредненным коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25 \div 0.3$. Геометрические параметры ячейки периодичности заполнителя имели значения $h = 16$ мм, $a = 22$ мм, $l = 20$ мм, $c = 26$ мм, так что согласно (1.1) $\sin \alpha = 0.8$, $\cos \alpha = 0.6$, $b = 24$ мм. В силу значительной толщины клеевой прослойки δ_k между двумя слоями бумаги средняя толщина вертикальных стенок оказалась равной $\Delta = 2t + \delta_k \approx 0.38$ мм. При этом рабочие размеры испытываемых тест-образцов имели значения $a_1 = 130$ мм, $a_2 = 124$ мм.

На рис. 8 представлены экспериментальные диаграммы деформирования образцов в виде зависимостей $P = P(w_0)$, где P – действующее на образец усилие, w_0 – взаимное смещение внешних несущих слоев в направлении сжатия. Предельные их значения, при достижении которых происходит исчерпание несущей способности заполнителя, приведены в строках 1 и 2 табл. 1. Значительное отличие экспериментальных кривых от принятой теоретической диаграммы (рис. 4) свидетельствует о весьма значительном влиянии на механическое поведение заполнителя тех или иных отклонений в геометрии стенок заполнителя от принятых при теоретических построениях как идеально плоских.

В строках 3 и 4 табл. 1 приведены предельные значения деформаций $\varepsilon_z^* = w_0^*/h$, осредненных значений напряжений $\sigma_z^* = P_*/(ab)$ и модуля упругости

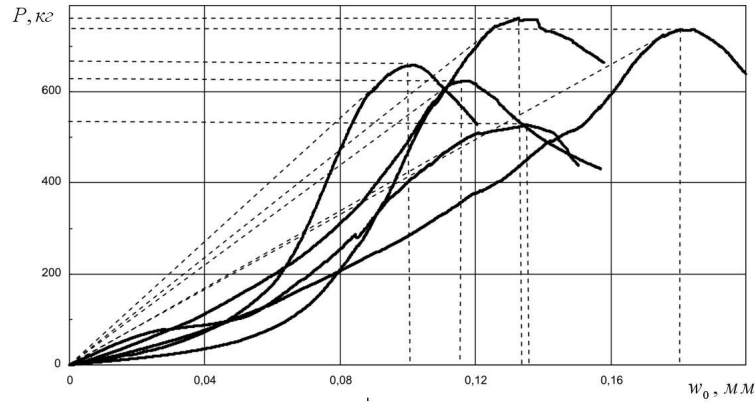


Рис. 8

$E_z^\vartheta = \sigma_z^*/\varepsilon_z^*$, соответствующего аппроксимации реальных диаграмм $\sigma_z = E_z(\varepsilon_z)$ линейным законом $\sigma_z = E_z\varepsilon_z$. Считая, что все стенки заполнителя имеют модуль упругости материала E , и введя обозначения $E_z = E_z^{(1)-} = E_z^{(1)+}$, формулу (3.12) запишем в виде

$$E^\vartheta = E_z (1 - \nu^2) \left/ \left(\frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{b} \sin^3 \alpha \right) \right. \quad (5.1)$$

Найденные по этой формуле значения E^ϑ приведены в шестой строке табл. 1, которые для заполнителя рассматриваемой структуры незначительно отличаются от приведенного в [13] значения $E_{\text{пр}} = \sqrt{E_1 E_2} = 2.36$ ГПа (строка 7 табл. 1). Следовательно, упругие характеристики материала полимерной бумаги «NOMEX», определяемые путем испытаний образцов на растяжение, в заполнителе изучаемой структуры при указанном виде нагружения, в отличие от [14, 15], «реализуются» практически на 100%.

Формула (3.34) для рассматриваемого заполнителя принимает вид

$$\varepsilon_z^{*-} \approx 0.46 \cdot 10^{-3} K_x^{(k)}, \quad (5.2)$$

в силу которой

$$\sigma_z^{*-} = E_z^\vartheta \varepsilon_z^{*-} = 0.54 \cdot 10^{-4} K_x^{(k)} E_z^\vartheta. \quad (5.3)$$

При $K_x^{(k)} \sim 3 \div 4$ определяемые по формулам (5.2) и (5.3) значения ε_z^{*-} практически на два порядка меньше значений $\varepsilon_{z\vartheta}^*$ и $\sigma_{z\vartheta}^*$, приведенных в табл. 1 (строки 3 и 4). Следовательно, можно считать, что наклонные стенки ячейки периодичности теряют устойчивость в условиях сжатия заполнителя практически на начальной стадии его нагружения, не участвуя при этом в формировании осредненного модуля упругости E_z на последующих стадиях, и приведенные на рис. 8 диаграммы практически полностью соответствуют процессу деформирования лишь вертикальных стенок ячейки периодичности, имеющих толщину Δ .

По аналогии с (5.2) формула (3.42), соответствующая окончательному разрушению вертикальных стенок, принимает вид

$$\varepsilon_z^{***-} = 0.463 \cdot 10^{-3} K_z^B. \quad (5.4)$$

Значения K_z^B , в предположении $\varepsilon_z^{***-} = \varepsilon_{z\vartheta}^*$, определенные по формуле (5.3), приведены в строке 8 табл. 1, они оказались в 3–4 раза выше коэффициента $K_z \sim 4$,

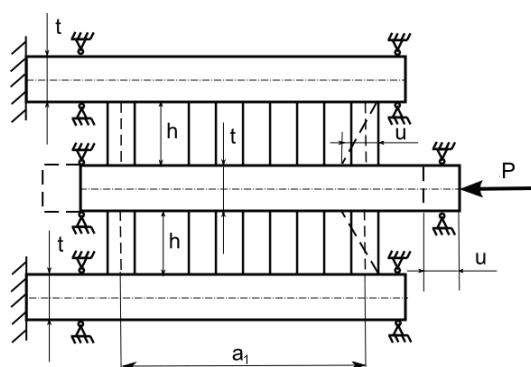


Рис. 9

определяемого из теоретического решения задачи об устойчивости пластины в условиях двухстороннего сжатия.

Исходя из (3.39), составим формулу

$$K_z^2 = \frac{12\sigma_{z\vartheta}^* (1 - \nu^2) ah^2}{\pi^2 E \vartheta \Delta^3}. \quad (5.5)$$

Найденные по этой формуле значения коэффициента K_z , соответствующие использованию данных табл. 1, приведены в строке 9. Они в среднем на 30% выше значений, приведенных в строке 8. Значительно большее их значение в сравнении со значением $K_z \sim 3 \div 4$ объясняется главным образом формированием в зоне сопряжения наклонных стенок с вертикальной стенкой двух наклонных ребер, подкрепляющих вертикальную стенку с двух сторон, имеющих толщину Δ и ширину $b - l = 2$ мм. После потери устойчивости наклонных стенок ребра продолжают участвовать в восприятии внешней нагрузки совместно с вертикальной стенкой толщиной Δ , увеличивая ее приведенную изгибную жесткость.

5.2. Сдвиг заполнителя в плоскости xOz . В соответствии с методикой, предложенной в [16], испытания на сдвиг в плоскости xOz проводились на специальных тест-образцах по схеме, изображенной на рис. 9 и позволяющей реализовать в заполнителе почти постоянные по его длине a_1 (за исключением зон краевых эффектов) касательные напряжения τ_{xz} .

Несущие слои тест-образцов, представляющих собой пятислойные прямоугольные пластины, выполнены из стального листа толщиной $t = 10$ мм; рабочие размеры заполнителя равны $a_1 = 120$ мм и $a_2 = 84$ мм, заполнитель включал в себя пять ячеек периодичности в направлении оси Ox и четыре ячейки – в направлении оси Oy . Испытаниям были подвергнуты образцы с заполнителем, имеющим те же параметры ячейки периодичности, что и образцы, изготовленные для испытания на сжатие.

Полученные экспериментальные результаты в виде зависимостей $P = P(u_0)$ для шести тест-образцов представлены на рис. 10, а предельные значения усилий P_* и перемещений u_0^* , при достижении которых происходит разрушение заполнителя, – в строках 1 и 2 табл. 2.

Все приведенные на рис. 10 графики имеют ярко выраженные участки практически линейной зависимости P от u_0 , а некоторые из них – ярко выраженные нелинейные участки на начальной и завершающей стадиях нагружения. Все они по виду значительно отличаются от предполагаемой теоретической диаграммы

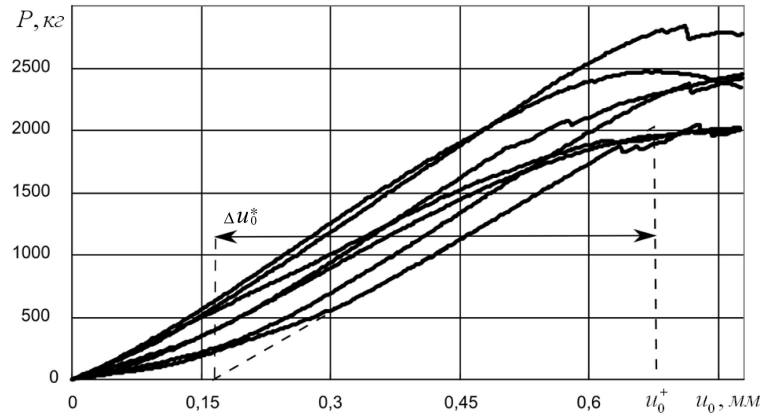


Рис. 10

Табл. 2

№ строки	№ образца	1	2	3	4	5	6	Средние значения
1	P_* , кг	2054	2410	2000	2410	2876	2465	2369
2	Δu_0^* , мм	0.51	0.57	0.53	0.53	0.61	0.61	0.56
3	γ_{xz}^*	0.032	0.036	0.033	0.033	0.038	0.038	0.035
4	τ_{xz}^* , кг/см ²	11.87	13.93	11.56	13.93	16.62	14.25	13.69
5	G_{xz}^* , г/см ²	371	370	350	422	437	375	387
6	$E^{(II)}$, кг/см ²	33264	33174	31181	37836	39181	33622	34698
7	$E^{(I)}$, кг/см ²	24730	24664	23331	28130	29130	24997	25797
8	α_τ^*	1.56	1.84	1.61	1.61	1.86	1.85	1.73

$P = P(u_0)$, изображенной на рис. 7. Для объяснения такого отличия обратимся к формуле (4.20), которую представим в виде

$$u_0^* = K_x^{(2)} \frac{\pi^2 t^2}{12h} \sin \alpha = 0.69 \cdot 10^{-3} K_x^{(2)}. \quad (5.6)$$

При потере устойчивости второй наклонной стенки в условиях двухстороннего сжатия $K_x^{(2)} \sim 3 \div 4$. При этом, принимая во внимание (5.6), получаем значение $u_0^* \sim (2 \div 2.75) \cdot 10^{-3}$ мм, что на два порядка меньше значений u_0 , реализующихся в эксперименте (рис. 10). Следовательно, все представленные на рис. 10 диаграммы практически полностью соответствуют стадии деформирования после потери устойчивости второй стенки. Поэтому целесообразно считать, что в формировании модуля сдвига G_{xz} участвуют только вертикальные стенки, находящиеся в условиях сдвига, и первая наклонная стенка, находящаяся преимущественно в условиях одноосного растяжения.

Исходя из характера экспериментальных кривых, следует предположить, что некоторые из тест-образцов в среднем имели почти плоские наклонные стенки, у которых диаграмма деформирования $P = P(u_0)$ является почти линейной и на начальной стадии нагружения, а у других тест-образцов наклонные стенки в среднем, по-видимому, имели значительные начальные прогибы. В силу этого на начальной стадии нагружения наклонные стенки с искривленной срединной плоскостью при растяжении должны сначала «выпрямиться», не участвуя в формировании осредненного модуля G_{xz} , что и соответствует нелинейным участкам приведенных диаграмм деформирования.

В силу вышеизложенного для обработки полученных результатов в рассматриваемом случае, в отличие от [14, 15], целесообразно ввести в рассмотрение лишь касательный модуль $G_{xz} = G_{xz}^{(II)}$, аппроксимируя графики рис. 10 зависимостью $\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}$ и вычисляя предельные значения перемещений Δu_0^* , при достижении которых происходит разрушение заполнителя, имеем $\Delta u_0^* = u_0^+ - u_0^-$ (рис. 10). Полученные предельные значения P_* и Δu_0^* приведены в строках 1 и 2 табл. 2. В ней приведены также найденные по формулам первого приближения ($a_1 - l \approx \approx a_1 - h$ – эффективная длина заполнителя)

$$\gamma_{xz\vartheta}^* = \frac{\Delta u_0^*}{h}, \quad \tau_{xz\vartheta}^* = \frac{P_*}{2(a_1 - h)a_2}, \quad G_{xz}^\vartheta = \frac{\tau_{xz\vartheta}^*}{\gamma_{xz\vartheta}^*} \quad (5.7)$$

предельные значения сдвиговых деформаций, касательных напряжений и модуля поперечного сдвига, соответствующие экспериментальным данным. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что они незначительно отличаются от максимальных значений γ_{xz}^* , τ_{xz}^* и G_{xz} , определяемых по предложенной в [16] вычислительно-экспериментальной методике.

Исходя из (4.23) и (4.18), составим формулы вида

$$E^{(II)} = \frac{2(1+\nu)G_{xz}^\vartheta}{\Delta^{(II)}}, \quad E^{(I)} = \frac{2(1+\nu)G_{xz}^\vartheta}{\Delta^{(I)}}, \quad (5.8)$$

где

$$\Delta^{(I)} = \frac{\Delta}{a} + \frac{2t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha, \quad \Delta^{(II)} = \frac{\Delta}{a} + \frac{t}{h(1-\nu)} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha. \quad (5.9)$$

Найденные по этим формулам значения модуля упругости материала приведены в строках 6 и 7 табл. 2. Видно, что у всех образцов $E^{(II)} > E_1$, а $E^{(I)} \sim \sim (E_1 + E_2)/2$, что, казалось бы, и соответствует процессу формированию модуля G_{xz} на стадии, предшествующей исчерпанию несущей способности второй стенки ячейки периодичности. Единственным объяснением полученного результата в виде неравенства $E^{(II)} > E_1$ является наличие на вертикальных стенках толщиной Δ наклонных ребер, подкрепляющих их с двух сторон и естественным образом формирующихся в силу того, что $c > b$, так как $c - b = 2$ мм. Эти подкрепляющие ребра участвуют в формировании модуля G_{xz} на всех этапах деформирования, но не учтены при выводе формул (4.18) и (4.23). При их учете в теоретических построениях во второй формуле (5.9) величину Δ следует заменить на некоторую приведенную (осредненную) толщину $\Delta_* > \Delta$, что и приводит к уменьшению значения $E^{(II)}$.

На основе проведенного выше анализа, к практическому применению следует рекомендовать формулу (4.23), в которой для модуля упругости материала E необходимо принимать величину $E_1 = 3.1$ ГПа, вычисляя при этом величину Δ по формуле $\Delta = 2t + \delta_k$.

И, наконец, обратимся к формуле (4.30), которая при исследуемых геометрических параметрах принимает вид

$$\sigma_{13}^{(s)*} = 0.00786 \varkappa_\tau E. \quad (5.10)$$

Отсюда в силу $\Delta^{(II)} \approx 0.029$, принимая в формуле (4.29) за τ_{xz}^{***} экспериментально найденные значения $\tau_{xz\vartheta}^*$, а в формуле (5.10) за E – значение $E^{(II)}$ из табл. 2, получим

$$\varkappa_\tau = \frac{\tau_{xz\vartheta}^* \cdot 10^3}{0.228 E^{(II)}} = 4386 \frac{\tau_{xz\vartheta}^*}{E^{(II)}}. \quad (5.11)$$

Определенные по этой формуле значения ε_τ приведены в строке 8 табл. 2. Как и следовало ожидать, они оказались больше единицы. Из вышеизложенного можно заключить, что полученный результат $\varepsilon_\tau > 1$ является вполне ожидаемым, и он обусловлен как влиянием указанных выше подкрепляющих ребер толщиной $2t$ на величину критического напряжения $\sigma_{13}^{(s)*}$ вертикальных стенок, так и формированием в стенках при их сдвиге косых волн, не препятствующих стенкам воспринимать нормальные напряжения растяжения в направлении их образующих после потери устойчивости.

Таким образом, для теоретического определения осредненного значения предельного напряжения τ_{xz}^{***} к практическому использованию следует рекомендовать формулы (4.29) и (4.30), принимая во второй из них $\varepsilon_\tau \approx 1$ и за величину E – значение модуля упругости материала E_1 .

5.3. Сдвиг заполнителя в плоскости yOz . Для заполнителя, имеющего те же параметры ячейки периодичности, что и в предыдущих разделах, испытания на сдвиг в плоскости yOz также проводились на тест-образцах по схеме, предложенной в работе [16] и кратко описанной в п. 5.2. В отличие от вышеизложенного, заполнитель имел по четыре ячейки периодичности как по ширине, так и по длине, так что в рассматриваемом случае для вычисления площади среза имели место значения $a_1 = 84$ мм, $a_2 - h \approx 80$ мм. Были проведены испытания шести тест-образцов, для которых графики зависимости $P = P(v_0)$ приведены на рис. 11. Они оказались принципиально отличными от зависимостей $P = P(u_0)$ наличием линейных участков на начальной стадии нагружения и ярко выраженной нелинейной зависимостью P от v_0 на последующих стадиях вплоть до разрушения заполнителя.

Используя формулу (4.10) и принимая $E = E_1 = 3100$ МПа, при исследуемых геометрических параметрах заполнителя составим выражение

$$P_y^* = 2a_1(a_2 - h)\tau_{yz}^* \approx 1.25 K_\tau^{(k)}.$$

Из него, полагая $K_\tau^{(k)} \approx 10$, что примерно соответствует моменту потери устойчивости наклонных стенок в условиях сдвига и формированию в них наклонных «выпучин», для P_y^* получим значение $P_y^* = 12.5$ кг. Данное значение усилия более чем на порядок ниже экспериментальных значений P_y^* , до достижения которых полученные диаграммы деформирования с приемлемой степенью точности можно считать линейными. С целью построения простейших «рабочих» формул для аппроксимации полученных диаграмм деформирования примем линейные зависимости двух видов

$$\tau_{yz} = G_{yz}^k \gamma_{yz} \quad \text{и} \quad \tau_{yz} = G_{yz}^c \gamma_{yz}, \quad (5.12)$$

соответствующие введению в рассмотрение касательного и секущего модулей поперечного сдвига осредненного заполнителя.

Введя коэффициент запаса и принимая для всех шести тест-образцов единое предельное значение $v_0^c = 1.25$ мм, а также считая, что при $v_0 = v_0^c$ происходит окончательное разрушение заполнителя, рассмотрим значения P_* , P_y^* , v_0^y и v_0^k (рис. 12), из которых усилие P_* соответствует моменту разрушения заполнителя, P_y^* – пределу линейно-упругой деформации, v_0^k – моменту разрушения заполнителя в рамках первой из принятых аппроксимаций (5.12). Для каждого образца соответствующие значения P_* , P_y^* , v_0^y и v_0^k приведены в табл. 3.

В рамках принятых предположений деформация сдвига γ_{xz}^c , единая для всех образцов и соответствующая аппроксимации полученных диаграмм секущими прямыми, в первом приближении будет равна $\gamma_{yz}^c = v_0^c/h \approx 0.078$. Этой деформации будут отвечать напряжения $\tau_{yz\varnothing}^*$, соответствующие разрушению заполнителя

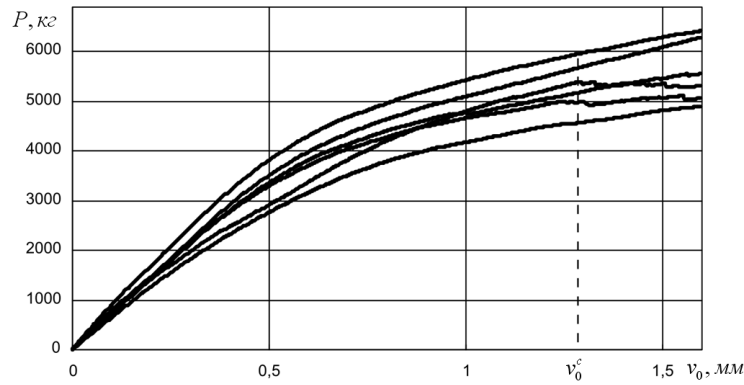


Рис. 11

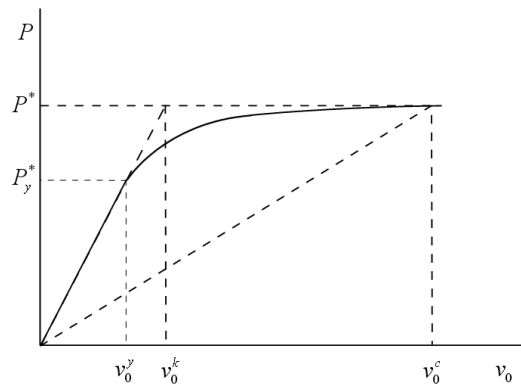


Рис. 12

Табл. 3

№ строки	№ образца	1	2	3	4	5	6	Средние значения
1	P , кг	456	500	517	537	571	592	529
2	P_y^* , кг	273	327	327	296	327	327	313
3	v_0^y , мм	0.78	0.68	0.81	0.92	0.79	0.70	0.78
4	v_0^k , мм	0.50	0.50	0.50	0.50	0.46	0.40	0.48
5	$\tau_{yz\vartheta}^*$, МПа	0.30	0.33	0.34	0.35	0.38	0.39	0.35
6	$\tau_{yz\vartheta}^y$, МПа	0.18	0.22	0.22	0.19	0.22	0.22	0.21
7	γ_{yz}^*	0.049	0.043	0.050	0.057	0.049	0.044	0.049
8	γ_{yz}^y	0.031	0.031	0.031	0.031	0.029	0.025	0.03
9	G_{yz}^c , МПа	3.846	4.231	4.359	4.487	4.872	5.0	4.487
10	G_{yz}^k	61.22	76.74	68.00	61.40	77.55	88.63	71.42
11	\tilde{G}_{yz}^k	58.06	70.96	70.96	61.29	75.86	88.0	70.00

и вычисляемые по формуле первого приближения $\tau_{yz\vartheta}^* = P^*/[2(a_2 - h)a_1]$. Их значения, а также значения напряжений $\tau_{yz\vartheta}^y = P_y^*/[2(a_2 - h)a_1]$ приведены в строках 5 и 6 табл. 3.

Таким образом, принимая во внимание формулы (5.12), найденные значения деформаций и напряжений необходимо подчинить равенствам

$$\tau_{yz\vartheta}^* = G_{yz}^c \gamma_{yz}^c, \quad \tau_{yz}^* = G_{yz}^k \gamma_{yz}^*, \quad \tau_{yz\vartheta}^y = \tilde{G}_{yz}^k \gamma_{yz}^y. \quad (5.13)$$

Полученные из них значения G_{yz}^c , G_{yz}^k и \tilde{G}_{yz}^k приведены в строках 9–11 табл. 3, причем различие приведенных в них значений G_{yz}^y и \tilde{G}_{yz}^y обусловлено только принятой степенью точности обработки полученных экспериментальных данных.

Если считать, что $E = E_1 = 3100$ МПа, то полученная теоретическая формула (4.6) приводит к значению $G_{yz} = 5.167$ МПа. Оно вполне удовлетворительно соответствует значениям строки 9 табл. 1. Значительное отличие значений, приведенных в строках 9–11, указывает на более сложный характер взаимодействия наклонных и вертикальных стенок ячейки периодичности в условиях сдвига в плоскости yOz , чем в принятой выше теоретической модели.

Тем не менее, оставаясь в рамках принятой модели деформирования, для вычисления модуля G_{yz} к практическому использованию следует рекомендовать формулу

$$G_{yz} = \frac{tE_{\text{пр}}}{2b(1+\nu)} \sin \alpha, \quad (5.14)$$

если расчеты на прочность проводятся для определения напряженно-деформированного состояния трехслойных конструкций в пределах их упругой работы и линейного деформирования, и формулу (\varkappa – поправочный коэффициент)

$$G_{yz} = \varkappa \frac{tE_{\text{пр}}}{2b(1+\nu)} \sin \alpha \quad (5.15)$$

при $\varkappa \sim 1.5 \div 1.7$, если расчеты проводятся для определения предельного напряженно-деформированного состояния конструкции.

И, наконец, обратимся к формуле (4.10). В ней, как и при получении формул (5.14), (5.15), исходя из данных экспериментов, следует идентифицировать значение коэффициента $K_\tau = K_\tau^{(k)}$ для двух предельных значений усилий P_y^* и P^* . Введя обозначение

$$r = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^3 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha = 0.232 \cdot 10^{-6}, \quad (5.16)$$

запишем ее в двух формах

$$K_\tau^y = \frac{\tau_{yz\varepsilon}^y}{rE}, \quad K_\tau^* = \frac{\tau_{yz\varepsilon}^*}{rE}. \quad (5.17)$$

Если принять $E = E_1 = 3100$ МПа и для $\tau_{yz\varepsilon}^y$, $\tau_{yz\varepsilon}^*$ принять средние значения табл. 3, то из формул (5.17) следуют значения

$$K_\tau^y \approx 292, \quad K_\tau^* \approx 487.$$

которые больше чем на порядок превышают значения, определяемые по теоретически установленной формуле (4.8). В силу значительного разброса экспериментальных данных, введя коэффициенты запаса, к практическому применению следует рекомендовать формулы

$$\tau_{yz}^y = K_\tau^y r E_1, \quad \tau_{yz}^* = K_\tau^* r E_1, \quad (5.18)$$

принимая для K_τ^y и K_τ^* значения $K_\tau^y \sim 200 \div 250$, $K_\tau^* \sim 400 \div 450$.

Заключение

Следует отметить, что все экспериментальные исследования были проведены на тест-образцах из заполнителя в виде М-гофра, изготовленного по «ручной»

технологии, чем, по-видимому, и объясняется большой разброс получаемых экспериментальных данных. В связи с этим приведенные выше числовые значения безразмерных коэффициентов, содержащихся в структурных формулах, могут быть значительно уточнены при использовании более качественно изготовленного заполнителя для экспериментов.

Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0122 между НПО ОАО «ОКБ им. М.П. Симонова» и Министерством образования и науки РФ по реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ», а также за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности.

Summary

V.N. Paimushin. Theoretical and Experimental Determination of Average Elastic and Strength Properties of M-Ribbed Type Folded Cores.

The approximate analytical solution for the direct problem of determining the average elastic and strength properties of M-ribbed type folded cores in transverse tension and compression as well as their shear properties in two mutually perpendicular planes is built. The resulting formulas except for the basic mechanical and geometrical governing parameters contain dimensionless coefficients, which are to be determined by solving the inverse problem on the basis of specially conducted experiments using A. Sachenkov's theoretical and experimental method. The developed technique is used to determine the characteristics of M-ribbed folded cores made of NOMEX polymer paper.

Keywords: multi-layered structures, core, folded structure, M-ribbing, elastic and strength characteristics, energy averaging, plate, buckling, critical load, approximate analytical solutions, structural formulae, specimen, test, transverse compression, shear, identification.

Литература

1. Берсудский В.Е., Крысин В.Н., Лесных С.И. Технология изготовления сотовых авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
2. Ендогур А.И., Вайнберг М.В., Иерусалимский К.М. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование. – М.: Машиностроение, 1986. – 200 с.
3. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с заполнителем. Справочник. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
4. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
5. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – V. 49, No 3. – P. 155–199.
6. Ажишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. Теоретико-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристиках сотового заполнителя трехслойных конструкций // *Механика композитных материалов.* – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 543–556.
7. Саченков А.В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 6–7. – С. 391–433.
8. Закиров И.М., Катаев Ю.П., Никитин А.В., Ажишев Н.И. Шевронные структуры, конструкция и технология изготовления. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 242 с.

9. *Закиров И.М., Алексеев К.А., Акишев Н.И., Каюмов Р.А., Никитин А.В., Закиров И.И.* Изготовление трехслойных панелей со складчатым наполнителем из полимерной бумаги. – Казань: ФЭН, 2009. – 232 с.
10. *Каюмов Р.А., Закиров И.М., Алексеев К.П., Алексеев К.А., Зиннуров Р.А.* Определение несущей способности панелей с шевронным наполнителем // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2007. – № 4. – С. 8–10.
11. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. – М: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 880 с.
12. *Акишев Н.И., Закиров И.И., Иванов В.А., Паймушин В.Н., Шишов М.А.* О приближенных аналитических решениях задач устойчивости косоугольных пластин при комбинированных видах нагружения // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2011. – № 2. – С. 3–7.
13. *Артюхин Ю.П., Саченков А.А.* К расчету ортотропных пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1967. – Вып. 5. – С. 300–310.
14. *Паймушин В.Н., Закиров И.М., Карпиков Ю.А.* Теоретико-экспериментальный метод определения механических характеристик наполнителя складчатой структуры в виде Z-гофра Теоретические основы и сжатие наполнителя в поперечном направлении // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2012. – № 3. – С. 10–17.
15. *Паймушин В.Н., Закиров И.М., Карпиков Ю.А.* Теоретико-экспериментальный метод определения механических характеристик наполнителя складчатой структуры в виде Z-гофра (сдвиг наполнителя в плоскостях поперечных сечений) // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2013. – № 3. – С. 19–26.
16. *Паймушин В.Н., Закиров И.М., Луканкин С.А., Закиров И.И.* Вычислительно-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристик при сдвиге наполнителей многослойных конструкций // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 355–368.

Поступила в редакцию
25.08.14

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева; главный научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: vpajmushin@mail.ru