

УДК 514.174.5+514.172.45+519.667+519.853

doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.127-144

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК С 2^d ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ МЕТКАМИ

М.Н. Матвеев

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, 141701, Россия

Аннотация

Симплициальные алгоритмы, применяемые для поиска неподвижных точек непрерывных функций, могут использовать или векторные, или целочисленные метки. Алгоритмы с целочисленными метками являются более простыми и в силу дискретности целочисленных меток устойчивыми к ошибкам округления. Однако вычислительная эффективность существующих алгоритмов с целочисленными метками ограничивается недостаточной гибкостью их конструкции, в частности, в пространстве \mathbb{R}^d эти алгоритмы могут использовать только от $d+1$ до $2d$ меток. Не более чем сопоставимое с размерностью пространства количество меток делает алгоритмы с целочисленными метками недостаточно быстрыми, особенно в задачах большой размерности. Настоящая работа преодолевает эту трудность и представляет новый симплициальный алгоритм поиска неподвижных точек с 2^d целочисленными метками.

Ключевые слова: триангуляции, многогранники, вееры, симплициальные алгоритмы, алгоритмы поиска неподвижных точек

Введение

Симплициальные алгоритмы названы так, потому что в процессе работы, в частности в процессе поиска неподвижных точек $x^* = f(x^*)$ непрерывных функций $f(x)$ в пространстве \mathbb{R}^d , они перебирают симплексы некоторой триангуляции. Для того чтобы перебор симплексов был организован должным образом, каждой вершине триангуляции присваивается некоторая метка. Метки могут быть или векторами (как правило, с действительными координатами), или (скалярными) целыми числами и называются соответственно векторными или целочисленными. Векторные метки чаще всего являются векторами вида $f(x) - x$, где x – вершина триангуляции. В общем же случае и те и другие метки присваиваются в соответствии с некоторым правилом, называемым правилом помечивания.

С самого своего возникновения симплициальные алгоритмы используют как векторные, так и целочисленные метки. Первый алгоритм поиска неподвижных точек, разработанный в 1967 г. Скарфом в серии работ [1–3], может применяться также и в значительно более широком контексте [4] (имеется русский перевод [5]), вместо симплексов перебирает так называемые примитивные множества и использует векторные метки. Однако в том же году Коэн [6] заметил, что уже доказательство леммы Шпернера [7] может быть интерпретировано как симплициальный алгоритм с целочисленными метками, а годом позднее Кун [8] описал и модификацию алгоритма Скарфа, в котором перебираются симплексы триангуляции и используются целочисленные метки.

В целом векторные метки применяются для решения более широкого класса задач, а целочисленные значительно упрощают вычисления. Использование и тех

и других меток прошло достаточно длительный путь развития и сформировало свою собственную философию. Хороший обзор этих вопросов, а также достаточно полное описание симплицальных алгоритмов можно найти в [9] (имеется русский перевод [10]) и [11]. Симплицальные алгоритмы как с векторными, так и с целочисленными метками различают главным образом по количеству лучей, вдоль которых эти алгоритмы могут покидать точку начала поиска. Для алгоритмов с целочисленными метками, за исключением 2-лучевого алгоритма Ямамото [12], количество таких лучей совпадает с количеством меток.

Большее количество реализаций симплицальных алгоритмов поиска неподвижных точек использует векторные метки. Более того, описаны общие способы построения алгоритмов с векторными метками для произвольного количества лучей: сначала в контексте поиска решений нелинейных уравнений такой способ предложили Коджима и Ямамото [13], а затем в несколько более широком контексте поиска стационарных точек – Тальман и Ямамото [14]. Замечательными отдельными реализациями симплицальных алгоритмов с векторными метками являются 2^d -лучевой, или октаэдральный, алгоритм Райта [15] и $(3^d - 1)$ -лучевой алгоритм Коджимы и Ямамото [13].

Симплицальные алгоритмы поиска неподвижных точек с целочисленными метками менее разнообразны. Реализации этих алгоритмов в пространстве \mathbb{R}^d по существу представлены единственной конструкцией ван дер Лаана и Тальмана [16], основанной на декартовом произведении симплексов и использующей от $d + 1$ до $2d$ меток. Аналогичная конструкция с $2d$ метками для декартова произведения d одномерных симплексов или куба описана Рэйзером [17]. Помимо этого существует только единственный в своем роде алгоритм с целочисленными метками, число лучей которого не совпадает с числом меток, – это 2-лучевой алгоритм Ямамото [12], который использует $d + 1$ целочисленную метку.

Дискретность целочисленных меток значительно упрощает симплицальные алгоритмы и, что еще более важно, делает эти алгоритмы устойчивыми к ошибкам округления. Поэтому с вычислительной точки зрения меньшая распространенность целочисленных меток выглядит достаточно ограничительной. Это послужило причиной для разработки общего способа [18] построения симплицальных алгоритмов с произвольным количеством целочисленных меток. Используя общий способ [18], настоящая работа представляет новый симплицальный алгоритм поиска неподвижных точек с 2^d целочисленными метками, являющийся аналогом 2^d -лучевого или октаэдрального алгоритма Райта [15] с векторными метками.

При построении нового алгоритма работа опирается на два основных принципа. Первый из них состоит в том, что чем больше меток или лучей, вдоль которых алгоритм может покидать точку начала поиска, тем выше его вычислительная эффективность. Теоретически этот принцип достаточно хорошо обоснован в [18], где приведены также подтверждающие его результаты численных экспериментов в пространстве \mathbb{R}^4 . Косвенно подтверждающими этот принцип являются также результаты численных экспериментов в пространствах \mathbb{R}^d , $d \leq 50$, более высокой размерности, приведенные в [13].

Большое количество меток имеет, однако, и обратную сторону: чем больше меток, тем, вообще говоря, больше времени нужно для их вычисления. Для того чтобы симплицальный алгоритм был достаточно быстрым, вычисления используемых им меток должны быть эффективными. Второй принцип настоящей работы состоит в том, что эффективность вычисления меток может быть обеспечена регулярностью расположения лучей, вдоль которых алгоритм может покидать точку начала поиска. На основании этого принципа в качестве исходной геометрической конструкции для построения нового алгоритма берется d -мерный куб, имеющий

2^d регулярно расположенных вершин. Количество вершин куба и определяет количество меток алгоритма.

Содержание работы самодостаточно для ее понимания. В то же время она не имеет целью и не может заменить ни статью [18], где приведена, обоснована и проиллюстрирована общая схема построения алгоритмов с целочисленными метками, ни статью [16] и тем более книгу [11], которые содержат разные, но одинаково хорошие доказательства сходимости алгоритмов с целочисленными метками. Оба доказательства являются верными и для алгоритма, который описывается в настоящей работе, и здесь не дублируются.

Вместо этого работа акцентирует внимание на чертах, присущих исключительно новому симплициальному алгоритму. Сначала доказываются свойства триангуляции K_1 пространства \mathbb{R}^d , необходимые для применения общей схемы [18]. Затем рассматривается, каким образом триангуляция K_1 может быть использована для построения симплициального многогранника из куба. После этого описывается разделение приближений неподвижных точек, найденных новым алгоритмом, на слабые и сильные. В заключении приводится ряд замечаний, касающихся триангуляции K_1 , которая существенно используется в работе.

1. Настройка триангуляции K_1

В основе любого симплициального алгоритма лежит триангуляция. Множество, будь то целое пространство или только его часть, будучи разделенным на симплексы, предоставляет дополнительные возможности для отыскания неподвижных точек. Алгоритму удается организовать перебор симплексов триангуляции некоторым рациональным образом, таким что после достаточно малого по сравнению с возможным числа шагов оказывается найден симплекс, являющийся приближением неподвижной точки.

Понятие триангуляции определяется следующим образом. Пусть S – произвольное множество в \mathbb{R}^d . Набор \mathcal{T} выпуклых многогранных множеств называется *разбиением* S , если

- (1) S является объединением всех множеств из \mathcal{T} ;
- (2) пересечение любых двух множеств из \mathcal{T} или пусто, или является их общей собственной гранью;
- (3)¹ любая точка S имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом множеств из \mathcal{T} .

Если разбиение \mathcal{T} состоит исключительно из симплексов, то есть выпуклых оболочек аффинно-независимых точек, то такое разбиение называется *симплициальным разбиением* или *триангуляцией*.

Существует много различных триангуляций, описание и сравнение некоторых из них можно найти, например, в [9] (или [10]). Для алгоритма настоящей работы является подходящей и будет использоваться триангуляция K_1 (пространства \mathbb{R}^d), открытая Фройденталем [19]. Для построения K_1 все пространство \mathbb{R}^d сначала разбивается на кубы, а затем каждый куб – на симплексы. Заметим, что для описания K_1 удобно использовать единичные кубы, на практике же, как правило, применяется триангуляция K_1 мелкости G – с уменьшенным в G раз относительно единичного размером кубов и, соответственно, симплексов.

В пространстве \mathbb{R}^3 триангуляция K_1 иллюстрируется рис. 1, в общем случае ее описание выглядит следующим образом. Пусть u_i , $i = 1, \dots, d$, – единичные векторы некоторого ортогонального базиса пространства \mathbb{R}^d и пусть \mathbb{Z}^d – множество

¹Свойство (3) не всегда используется при определении разбиений. Разбиения, удовлетворяющие (3), называются локально-конечными.

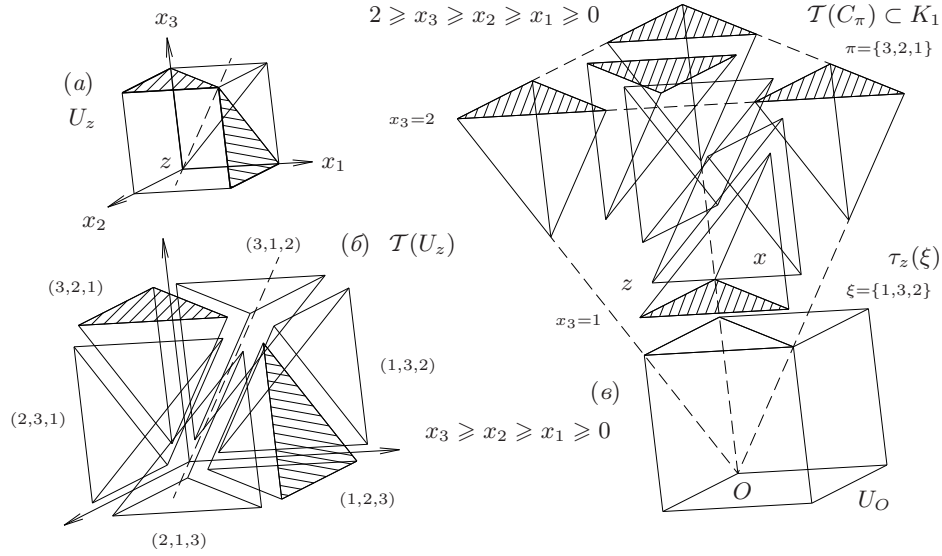


Рис. 1. Триангуляция K_1 пространства \mathbb{R}^3 : (а) единичный куб U_z с разбиением двух его граней на симплексы; (б) разбиение куба U_z на $3! = 6$ симплексов из множества $\mathcal{T}(U_z)$ с указанием перестановок; (в) разбиение конуса $x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq 0$ на симплексы триангуляцией K_1

d -мерных точек из \mathbb{R}^d с целыми координатами. Для произвольной точки $z \in \mathbb{Z}^d$ рассмотрим d -мерный единичный куб

$$U_z = \{x \in \mathbb{R}^d \mid z_i \leq x_i \leq z_i + 1, i = 1, \dots, d\}$$

в пространстве \mathbb{R}^d (см. рис. 1, а). Очевидно, что пространство \mathbb{R}^d совпадает с объединением кубов U_z по всем $z \in \mathbb{Z}^d$.

Далее для любой перестановки $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ чисел $1, \dots, d$ определим симплекс $\tau_z(\pi)$ как выпуклую оболочку $(d+1)$ -й точки $z, y_1(\pi), \dots, y_d(\pi)$ с целыми координатами в \mathbb{R}^d , где $y_1(\pi) = z + u_{\pi_1}$ и $y_i(\pi) = y_{i-1}(\pi) + u_{\pi_i}$ для всех $i = 2, \dots, d$. Обозначим через $\mathcal{T}(U_z)$ множество симплексов $\tau_z(\pi)$ для всех перестановок π чисел $1, \dots, d$ (см. рис. 1, б) и через K_1 объединение множеств $\mathcal{T}(U_z)$ по всем $z \in \mathbb{Z}^d$. Полное доказательство того, что K_1 является триангуляцией пространства \mathbb{R}^d , можно найти в [9–11], далее потребуется только часть этого доказательства, представленная следующей леммой о симплексе $\tau_z(\pi)$ триангуляции K_1 , содержащем некоторую точку x пространства \mathbb{R}^d .

Лемма 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^d$, тогда $x \in \tau_z(\pi) \in K_1$, где координаты z являются целыми частями координат x , то есть $z_i = \lfloor x_i \rfloor$ для всех $i = 1, \dots, d$, а перестановка π определяется порядком убывания координат $x_{\pi_i} - z_{\pi_i}$ вектора $x - z$, то есть $x_{\pi_i} - z_{\pi_i} \geq x_{\pi_{i+1}} - z_{\pi_{i+1}}$ для всех $i = 1, \dots, d-1$.

Доказательство. Введем обозначения $\alpha_i = x_{\pi_i} - z_{\pi_i}$ для всех $i = 1, \dots, d$, а также $\beta_d = \alpha_d$ и $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ для всех $i = 1, \dots, d-1$. По построению $\beta_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, d$ и

$$\sum_{i=j}^d \beta_i = (\alpha_j - \alpha_{j-1}) + (\alpha_{j-1} - \alpha_{j-2}) + \dots + (\alpha_{d-1} - \alpha_d) + \alpha_d = \alpha_j < 1.$$

Легко убедиться, что выпуклая комбинация вершин $z, y_1(\pi), \dots, y_d(\pi)$ симплекса $\tau_z(\pi)$ с коэффициентами $1 - \sum_{i=1}^d \beta_i, \beta_1, \dots, \beta_d$ совпадает с x , действительно,

$$(1 - \sum_{i=1}^d \beta_i)z + \sum_{i=1}^d \beta_i y_i(\pi) = z + \sum_{i=1}^d \alpha_i u_{\pi_i} = x.$$

Таким образом, $x \in \tau_z(\pi)$. \square

Триангуляция K_1 пространства \mathbb{R}^d сама по себе хорошо подходит для целого ряда существующих симплициальных алгоритмов [9, 10]. Однако для ее использования в алгоритме, который описывается в данной работе, требуется доказать, что одновременно со всем пространством \mathbb{R}^d она триангулирует также конусы $C_\pi = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_{\pi_1} \geq x_{\pi_2} \geq \dots \geq x_{\pi_d} \geq 0\}$ для перестановок π чисел $1, \dots, d$. Конусы C_π естественным образом возникают при разбиении кубов U_z на симплексы множества $\mathcal{T}(U_z)$ (см. рис. 1, б, в), а триангуляции \mathcal{T}_π конусов C_π , образованные из симплексов K_1 , описываются следующей леммой.

Лемма 2. *Множество симплексов $\mathcal{T}_\pi = \{\tau \in K_1 \mid \tau \subset C_\pi\}$ является триангуляцией конуса C_π .*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in C_\pi$. Точка x однозначно определяет точку $z \in \mathbb{Z}^d$ такую, что $z_i = \lfloor x_i \rfloor$ для всех $i = 1, \dots, d$. Так как из $x_{\pi_1} \geq x_{\pi_2} \geq \dots \geq x_{\pi_d} \geq 0$ следует, что и $z_{\pi_1} \geq z_{\pi_2} \geq \dots \geq z_{\pi_d} \geq 0$, то $z \in C_\pi$. Точки x и z , в свою очередь, однозначно определяют непересекающиеся множества индексов $I_1, \dots, I_n, \bigcup_{j=1}^n I_j = \{1, \dots, d\}$, таких что $x_i - z_i = x_j - z_j$ для всех $i, j \in I_k, k = 1, \dots, n$, и $x_i - z_i > x_j - z_j$ для всех $i \in I_{k_i}, j \in I_{k_j}, k_i > k_j$. Выберем перестановку ξ индексов $1, \dots, d$ таким образом, чтобы индексы каждого из множеств $I_k, k = 1, \dots, n$, следовали в ней в том же порядке, в котором они следуют в перестановке π , и индексы множеств I_j предшествовали индексам множеств I_k для всех $j, k = 1, \dots, n, j > k$.

По лемме 1 точка x принадлежит симплексу $\tau_z(\xi)$ триангуляции K_1 . Докажем, что $\tau_z(\xi) \subset C_\pi$. Идея доказательства состоит в том, что при последовательном переходе сначала от вершины z к вершине y_1 , а затем от вершины y_i к вершине y_{i+1} симплекса $\tau_z(\xi)$ происходит последовательное увеличение координат точки z в порядке, определяемом перестановкой ξ , но это не приводит к выходу вершин симплекса из конуса C_π . Например, если $\xi = \pi$, то справедлива следующая цепочка вытекающих друг из друга неравенств:

$$\begin{aligned} z_{\pi_1} &\geq z_{\pi_2} \geq \dots \geq z_{\pi_d} \geq 0, \\ z_{\pi_1} + 1 &\geq z_{\pi_2} \geq \dots \geq z_{\pi_d} \geq 0, \\ z_{\pi_1} + 1 &\geq z_{\pi_2} + 1 \geq \dots \geq z_{\pi_d} \geq 0, \\ &\dots \\ z_{\pi_1} + 1 &\geq z_{\pi_2} + 1 \geq \dots \geq z_{\pi_d} + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Само доказательство проведем методом от противного. Предположим, что вершина y_m симплекса $\tau_z(\xi)$ в первый раз выходит из конуса C_π при m -м увеличении ξ_m -й координаты точки z , то есть предположим, что найдется индекс $1 \leq m \leq d$, такой что $y_m \notin C_\pi$, но $y_i \in C_\pi$ для всех $1 \leq i < m$. Рассмотрим индексы $\pi_i = \xi_m$ и $\pi_{i-1} = \xi_k$. Случай $k < m$ здесь невозможен, потому что при этом увеличение π_{i-1} -й координаты вектора z предшествовало бы увеличению его π_i -й координаты.

В случае $m > k$, в свою очередь, невозможно, чтобы индексы ξ_m и ξ_k принадлежали одному и тому же множеству I_j , поскольку по построению это означало бы выполнение обратного неравенства $m < k$.

Предположим, наконец, что ξ_m и ξ_k принадлежат разным множествам I_j . Тогда $x_{\pi_{i-1}} \geq x_{\pi_i}$, но $x_{\pi_{i-1}} - \lfloor x_{\pi_{i-1}} \rfloor < x_{\pi_i} - \lfloor x_{\pi_i} \rfloor$. Такая комбинация условий возможна только при одновременном выполнении неравенств $x_{\pi_{i-1}} > x_{\pi_i}$ и $\lfloor x_{\pi_{i-1}} \rfloor > \lfloor x_{\pi_i} \rfloor$. Второе из этих неравенств означает, что $z_{\pi_{i-1}} > z_{\pi_i}$. Но так как $z \in \mathbb{Z}^d$, то верно также и неравенство $z_{\pi_{i-1}} \geq z_{\pi_i} + 1$. В свою очередь, так как $y_{m-1} \in C_\pi$ (или $z \in C_\pi$, если $m = 1$), то из этого неравенства следует, что и $y_m \in C_\pi$. Таким образом, m -е увеличение ξ_m -й координаты точки z не может приводить к выходу вершины y_m симплекса $\tau_z(\xi)$ из конуса C_π и доказывает, что $\tau_z(\xi) \subset C_\pi$. Отсюда следует, что конус C_π содержится в объединении симплексов из \mathcal{T}_π . Обратное включение очевидно. \square

Иллюстрация доказательства леммы 2 с указанием перестановок π и ξ , расположения конуса C_π , точек x и z , а также симплекса $\tau_z(\xi)$ приведена на рис. 1, в. На этом же рисунке штриховкой выделены аффинные плоскости $x_3 = 1$ и $x_3 = 2$, участвующие в образовании из конуса C_π симплексов, соответственно, $1 \geq x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq 0$ и $2 \geq x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq 0$. Выделенные гиперплоскости иллюстрируют, что триангуляция K_1 выполняет симплициальное разбиение не только всего пространства и конусов C_π , но еще и симплексов $S_\pi^G = \{x \in C_\pi \mid x_{\pi_d} \leq G\}$, где $G \in \mathbb{Z}_+$. Верно следующее утверждение.

Следствие 1. Для любого $G \in \mathbb{Z}_+$ множество симплексов $\mathcal{T}_\pi^G = \{\tau \in K_1 \mid \tau \subset S_\pi^G\}$ является триангуляцией симплекса S_π^G .

Доказательство. Предположим, что в S_π^G найдется точка y , не принадлежащая ни одному симплексу из \mathcal{T}_π^G . Поскольку симплексы замкнуты, а их количество в \mathcal{T}_π^G конечно, без ограничения общности можно считать, что y не принадлежит гиперплоскости $x_{\pi_d} = G$, то есть, $y_{\pi_d} < G$. В то же время, так как $y \in C_\pi$, по лемме 2 найдется симплекс $\tau \in \mathcal{T}_\pi$ такой, что $y \in \tau$. По построению пересечение любого симплекса триангуляции K_1 с гиперплоскостью $x_{\pi_d} = G$ или пусто или является его собственной гранью. Так как $y \in \tau$ и $y_{\pi_d} < G$, это означает, что $\tau \subset S_\pi^G$ и, следовательно, $\tau \in \mathcal{T}_\pi^G$. Полученное противоречие доказывает, что S_π^G содержится в объединении симплексов из \mathcal{T}_π^G . Обратное включение очевидно. \square

2. Симплициальный многогранник, основанный на триангуляции K_1

Согласно общей схеме [18], любой алгоритм с целочисленными метками строится на основе симплициального многогранника, содержащего во внутренней части начало координат. Настоящая работа предполагает, что для того чтобы построенный алгоритм получился вычислительно эффективным, такой многогранник должен иметь также большое количество регулярно расположенных вершин. Большое количество регулярно расположенных вершин имеет куб, а триангуляция K_1 , разбивая поверхность единичных кубов на симплексы таким образом, что множество вершин симплексов этого разбиения совпадает с множеством вершин куба, превращает кубы в потенциальные симплициальные многогранники.

Поэтому в качестве основы для построения симплициального многогранника с большим количеством регулярно расположенных вершин естественно взять именно куб. Пусть $U_{\pm 1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$. Вершинами куба $U_{\pm 1}$ являются точки s , координатами которых могут являться только ± 1 , поэтому далее будем называть такие точки s векторами (ненулевых) знаков. Подходящий

симплициальный многогранник будем искать в виде выпуклой оболочки векторов

$$s' = \left(1 + \frac{b}{z^k}\right) s,$$

где s – вектор знаков, k – количество отрицательных координат вектора s , а b и z – некоторые параметры. Справедлива следующая лемма о коэффициентах $1 + b/z^k$, участвующих в образовании векторов s' .

Лемма 3. Пусть $z > b > 0$, $z > 1$, $x, y \geq 0$, $k \geq 1$ и $x + y + k \geq 2$, тогда

$$\frac{1}{1 + b/z^y} - \frac{1}{1 + b/z^{y+k}} < \frac{1}{1 + b/z^x} - \frac{1}{1 + b/z^{x+k}}$$

при условии, что $y < x$.

Доказательство. Рассмотрим

$$A = \frac{1}{1 + b/z^y} - \frac{1}{1 + b/z^{y+k}} = \frac{b/z^{y+k} - b/z^y}{(1 + b/z^y)(1 + b/z^{y+k})} = \frac{b(1/z^{y+k} - 1/z^y)}{1 + b/z^y + b/z^{y+k} + b^2/z^{2y+k}},$$

$$B = \frac{1}{1 + b/z^x} - \frac{1}{1 + b/z^{x+k}} = \frac{b/z^{x+k} - b/z^x}{(1 + b/z^x)(1 + b/z^{x+k})} = \frac{b(1/z^{x+k} - 1/z^x)}{1 + b/z^x + b/z^{x+k} + b^2/z^{2x+k}}$$

и

$$A - B = \frac{bC}{(1 + b/z^y)(1 + b/z^{y+k})(1 + b/z^x)(1 + b/z^{x+k})},$$

где $C = A_C - B_C$ и

$$\begin{aligned} A_C &= \left(\frac{1}{z^{y+k}} - \frac{1}{z^y}\right) \left(1 + \frac{b}{z^x} + \frac{b}{z^{x+k}} + \frac{b^2}{z^{2x+k}}\right) = \\ &= \frac{1}{z^{y+k}} + \frac{b}{z^{x+y+k}} + \frac{b}{z^{x+y+2k}} + \frac{b^2}{z^{2x+y+2k}} - \frac{1}{z^y} - \frac{b}{z^{x+y}} - \frac{b}{z^{x+y+k}} - \frac{b^2}{z^{2x+y+k}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_C &= \left(\frac{1}{z^{x+k}} - \frac{1}{z^x}\right) \left(1 + \frac{b}{z^y} + \frac{b}{z^{y+k}} + \frac{b^2}{z^{2y+k}}\right) = \\ &= \frac{1}{z^{x+k}} + \frac{b}{z^{x+y+k}} + \frac{b}{z^{x+y+2k}} + \frac{b^2}{z^{2y+x+2k}} - \frac{1}{z^x} - \frac{b}{z^{x+y}} - \frac{b}{z^{x+y+k}} - \frac{b^2}{z^{2y+x+k}}. \end{aligned}$$

$$C = A_C - B_C =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z^{y+k}} - \frac{1}{z^y} + \frac{b^2}{z^{2x+y+2k}} - \frac{b^2}{z^{2x+y+k}} - \frac{1}{z^{x+k}} + \frac{1}{z^x} - \frac{b^2}{z^{2y+x+2k}} + \frac{b^2}{z^{2y+x+k}} = \\ &= \frac{1}{z^y} \left(\frac{1}{z^k} - 1\right) + \frac{b^2}{z^{2x+y+k}} \left(\frac{1}{z^k} - 1\right) - \frac{b^2}{z^x} \left(\frac{1}{z^k} - 1\right) - \frac{1}{z^{2y+x+k}} \left(\frac{1}{z^k} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{z^y} - \frac{1}{z^x} + \frac{b^2}{z^{2x+y+k}} - \frac{b^2}{z^{2y+x+k}}\right) \left(\frac{1}{z^k} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{z^y} - \frac{1}{z^x}\right) \left(1 - \frac{b^2}{z^{x+y+k}}\right) \left(\frac{1}{z^k} - 1\right). \end{aligned}$$

Так как $z > 1$, $x, y \geq 0$, $y < x$, то $1/z^y - 1/z^x > 0$. Условия $z > b$, $x + y + k \geq 2$ означают, что $1 - b^2/z^{x+y+k} > 0$. Наконец, из неравенств $z > 1$, $k \geq 1$ вытекает, что $1/z^k - 1 < 0$. Таким образом, $C < 0$. Так как $z > b > 0$, то из $C < 0$ следует, что и $A - B < 0$. Доказательство леммы завершено. \square

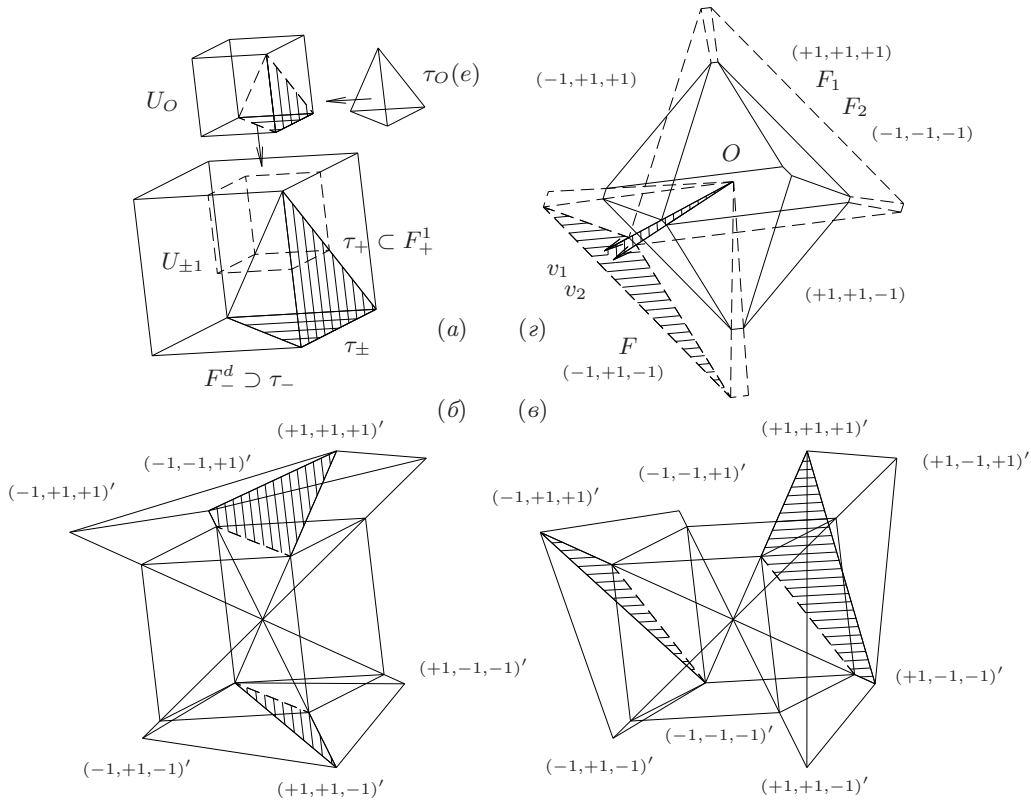


Рис. 2. Построение многогранника $U'_{\pm 1}$ в пространстве \mathbb{R}^3 : (а) кубы U_O и $U_{\pm 1}$, симплексы $\tau_O(e)$ и τ_{\pm} , гипергрani τ_+ , F_+^1 , τ_- , F_-^d ; (б) и (в) расположение вершин многогранника $U'_{\pm 1}$ относительно вершин куба $U_{\pm 1}$; (г) поляра $O'_{\pm 1}$ к многограннику $U'_{\pm 1}$

Построение симплицального многогранника из куба $U_{\pm 1}$ в пространстве \mathbb{R}^3 иллюстрируется на рис. 2, а, б, в, а его существование и свойства в общем случае устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть s_1, \dots, s_{2^d} – векторы знаков, являющиеся вершинами куба $U_{\pm 1}$, пусть, далее, вершины $s_1^0, \dots, s_{2^d}^0$ куба U_O , соответствующие векторам s_1, \dots, s_{2^d} , получаютя путем замены отрицательных компонент s_1, \dots, s_{2^d} на нулевые и пусть векторы s'_1, \dots, s'_{2^d} , соответствующие векторам s_1, \dots, s_{2^d} и $s_1^0, \dots, s_{2^d}^0$, определяются как

$$s'_j = \left(1 + \frac{b}{z^{k_j}}\right) s_j, \quad j = 1, \dots, 2^d,$$

где b и z – скалярные величины такие, что $z > b > 0$, а k_j – число отрицательных компонент вектора знаков s_j , $0 \leq k_j \leq d$. Тогда

1) выпуклая оболочка $U'_{\pm 1}$ векторов s'_1, \dots, s'_{2^d} является симплицальным многогранником, то есть многогранником, все собственные грани которого являются симплексами;

2) выпуклая оболочка d -элементного множества векторов s'_j , $j \in J$, является гипергранью или $(d-1)$ -мерной гранью многогранника $U'_{\pm 1}$ тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка векторов s_j^0 , $j \in J$, соответствующих векторам s'_j , $j \in J$, образует на поверхности куба U_O гипергрань симплекса триангуляции K_1 .

Доказательство. Без ограничения общности достаточно рассмотреть симплекс $\tau_O(e) \in \mathcal{T}(U_O) \subset K_1$ для тождественной перестановки e чисел $1, \dots, d$. В кубе $U_{\pm 1}$ симплексу $\tau_O(e)$ соответствует симплекс τ_{\pm} , являющийся выпуклой оболочкой векторов знаков

$$\begin{aligned} s_0 &= (-1, -1, \dots, -1, -1), \\ s_1 &= (+1, -1, \dots, -1, -1), \\ s_2 &= (+1, +1, \dots, -1, -1), \\ &\dots \\ s_{d-1} &= (+1, +1, \dots, +1, -1), \\ s_d &= (+1, +1, \dots, +1, +1). \end{aligned}$$

Симплекс τ_{\pm} имеет в точности две гиперграни, лежащие на поверхности куба $U_{\pm 1}$: это выпуклая оболочка τ_+ векторов знаков s_1, \dots, s_d и выпуклая оболочка τ_- векторов знаков s_0, \dots, s_{d-1} , содержащиеся соответственно в гипергранях $F_+^1 = \{x \in U_{\pm 1} \mid x_1 = 1\}$ и $F_-^d = \{x \in U_{\pm 1} \mid x_d = -1\}$ куба $U_{\pm 1}$.

Согласно необходимым и достаточным условиям, полученным в [20, 21], для доказательства того, что выпуклая оболочка τ'_+ векторов s'_1, \dots, s'_d , соответствующих векторам знаков s_1, \dots, s_d , и выпуклая оболочка τ'_- векторов s'_0, \dots, s'_{d-1} , соответствующих векторам знаков s_0, \dots, s_{d-1} , являются гранями многогранника $U'_{\pm 1}$, достаточно доказать, что сумма коэффициентов разложения любой вершины v' многогранника $U'_{\pm 1}$ по векторам s'_1, \dots, s'_d и s'_0, \dots, s'_{d-1} меньше 1, если $v' \notin \tau'_+$, то есть $v' \neq s'_1, \dots, s'_d$, или $v' \notin \tau'_-$, то есть $v' \neq s'_0, \dots, s'_{d-1}$.

Линейные комбинации, образующие разложения возможных вершин многогранника $U'_{\pm 1}$, будем искать как линейные комбинации векторов знаков s_1, \dots, s_d и s_0, \dots, s_{d-1} , образующие разложение некоторой вершины v куба $U_{\pm 1}$. Причем при рассмотрении симплекса $\tau_+ \subset F_+^1$, то есть при анализе линейных комбинаций векторов s_1, \dots, s_d будем считать, что $v \in F_+^1$, а при рассмотрении симплекса $\tau_- \subset F_-^d$, то есть при анализе линейных комбинаций векторов s_0, \dots, s_{d-1} , будем считать, что $v \in F_-^d$. В общем виде описанная вершина куба $U_{\pm 1}$ может быть представлена d -мерным вектором

$$v = (+1, \dots, +1, \overbrace{-1, \dots, -1}^{x_1}, +1, \dots, +1, \dots, \overbrace{-1, \dots, -1}^{x_l}, \underbrace{+1, \dots, +1}_k, \overbrace{-1, \dots, -1}^y).$$

Вектор v начинается, возможно, с цепочки (идуших подряд) $+1$, в частности, он обязательно начинается по крайней мере одной $+1$, если $v \in F_+^1$. Затем в векторе v располагается цепочка -1 , затем цепочка $+1$ и т. д. Завершается вектор v , возможно, цепочкой -1 , в частности, он обязательно завершается по крайней мере одной -1 , если $v \in F_-^d$. Предположим, что всего вектор v имеет l цепочек $+1$, которым предшествуют цепочки -1 . Число цепочек -1 , за которыми следуют цепочки $+1$, тоже получается равным l , будем считать, что эти цепочки -1 имеют длины x_1, \dots, x_l . Будем считать также, что длина заключительной l -й цепочки $+1$ равна k , а длина заключительной цепочки -1 , которая может присутствовать в векторе v , равна y .

Доказательство проведем индукцией по количеству цепочек l вектора v . Условие $l = 0$ в случае $v \in F_+^1$ равносильно тому, что $v \in \tau_+$, то есть вектор v совпадает с одним из векторов s_1, \dots, s_d , а в случае $v \in F_-^d$ — тому, что $v \in \tau_-$, то есть v совпадает с одним из векторов s_0, \dots, s_{d-1} . В любом случае в разложении v участвует единственный вектор, а сумма коэффициентов разложения равна 1, причем то же самое, очевидно, верно и для разложения вектора v' , соответствующего вектору v , по векторам s'_1, \dots, s'_d или s'_0, \dots, s'_{d-1} .

Предположим, что для любого вектора знаков $w \in F_+^1 \cup F_-^d$, количество цепочек l которого меньше или равно n , $n \geq 0$, сумма коэффициентов разложения вектора w' , соответствующего w , по векторам s'_1, \dots, s'_d , если $w \in F_+^1$, и по векторам s'_0, \dots, s'_{d-1} , если $w \in F_-^d$, меньше или равна 1. Покажем, что в таком случае сумма коэффициентов разложения вектора v' , соответствующего вектору знаков $v \in F_+^1 \cup F_-^d$ с количеством цепочек $l = n + 1$, по тем же самым векторам s'_1, \dots, s'_d или s'_0, \dots, s'_{d-1} строго меньше 1.

Воспользуемся очевидным представлением вектора v в виде $v = w + s_{d-y} - s_{d-y-k}$, где вектор

$$w = (+1, \dots, +1, \overbrace{-1, \dots, -1}^{x_1}, +1, \dots, +1, \dots, \overbrace{-1, \dots, -1}^{x_l}, \underbrace{-1, \dots, -1}_k, \overbrace{-1, \dots, -1}^y)$$

имеет ту же структуру, что и вектор v , только с меньшим количеством цепочек $+1$, которым предшествуют цепочки -1 .

Коэффициенты разложения вектора v' по векторам w' , s'_{d-y} и s'_{d-y-k} найдем следующим образом.

$$\begin{aligned} v - w &= s_{d-y} - s_{d-y-k}, \\ \frac{(1+b/z^x)}{(1+b/z^x)}v - \frac{(1+b/z^{x+k})}{(1+b/z^{x+k})}w &= \frac{(1+b/z^y)}{(1+b/z^y)}s_{d-y} - \frac{(1+b/z^{y+k})}{(1+b/z^{y+k})}s_{d-y-k}, \\ \frac{v'}{(1+b/z^x)} - \frac{w'}{(1+b/z^{x+k})} &= \frac{s'_{d-y}}{(1+b/z^y)} - \frac{s'_{d-y-k}}{(1+b/z^{y+k})}, \\ v' &= \left(\frac{1+b/z^x}{1+b/z^{x+k}} \right) w' + \left(\frac{1+b/z^x}{1+b/z^y} \right) s'_{d-y} - \left(\frac{1+b/z^x}{1+b/z^{y+k}} \right) s'_{d-y-k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = x_1 + \dots + x_l + y$. Поскольку $l = n + 1 > 0$, то вектор v имеет по крайней мере одну цепочку $+1$, которой предшествует цепочка -1 . Это означает, что $x, k \geq 1$, $x > y$, учитывая, что $y \geq 0$, находим также, что $x + y + k \geq 2$. Таким образом, для чисел z, b, x, y и k выполнены все условия леммы 3, из которой следует, что сумма коэффициентов разложения вектора v' по векторам w' , s'_{d-y} и s'_{d-y-k} меньше 1, то есть

$$\frac{1+b/z^x}{1+b/z^{x+k}} + \frac{1+b/z^x}{1+b/z^y} - \frac{1+b/z^x}{1+b/z^{y+k}} < 1. \quad (2)$$

Пусть $\sigma_{v'}$ и $\sigma_{w'}$ обозначают суммы коэффициентов разложения векторов v' и w' по векторам s'_1, \dots, s'_d , если $v, w \in F_+^1$, и по векторам s'_0, \dots, s'_{d-1} , если $v, w \in F_-^d$. Тогда из (1) имеем

$$\sigma_{v'} = \left(\frac{1+b/z^x}{1+b/z^{x+k}} \right) \sigma_{w'} + \frac{1+b/z^x}{1+b/z^y} - \frac{1+b/z^x}{1+b/z^{y+k}}. \quad (3)$$

В свою очередь, поскольку по предположению индукции $\sigma_{w'} \leq 1$, то из (2) и (3) немедленно вытекает, что $\sigma_{v'} < 1$. Для случаев $\tau_+(\subset F_+^1)$, $v \in F_+^1$ и $\tau_-(\subset F_-^d)$, $v \in F_-^d$ теорема доказана.

Оставшиеся случаи $\tau_+(\subset F_+^1)$, $v \notin F_+^1$ и $\tau_-(\subset F_-^d)$, $v \notin F_-^d$ легко сводятся к уже рассмотренным. Действительно, если $v \notin F_+^1$, то $v = w - 2u_1$, где $w \in F_+^1$ и $2u_1 = s_1 + s_d$, а если $v \notin F_-^d$, то $v = w + 2u_d$, где $w \in F_-^d$ и $2u_d = -s_0 - s_{d-1}$. В любом случае сумма коэффициентов разложения $\sigma_{v'}$ будет меньше суммы коэффициентов разложения $\sigma_{w'}$. Но, если $w \in \tau_+$ в случае $w \in F_+^1$ или $w \in \tau_-$ в случае $w \in F_-^d$, то $\sigma_{w'} = 1$, иначе, как только что было доказано, $\sigma_{w'} < 1$. Таким образом, $\sigma_{v'} < \sigma_{w'} \leq 1$. \square

3. Сильное и слабое приближение

Согласно общей схеме [18], симплицальный 2^d -алгоритм перемещается в пространстве, используя многогранник $U'_{\pm 1}$, а управляет движением и проверяет, достигнуто ли приближение неподвижной точки, используя многогранник $O'_{\pm 1}$, являющийся полярой к $U'_{\pm 1}$. По свойствам поляры [22] гипергрань $O'_{\pm 1}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с вершинами $U'_{\pm 1}$, а значит, и с векторами знаков, определяющими вершины $U'_{\pm 1}$. Так как многогранник $U'_{\pm 1}$ является симплицальным, из этого соответствия следует также, что многогранник $O'_{\pm 1}$ является простым: в каждой его вершине пересекаются в точности d гиперграней. В пространстве \mathbb{R}^3 многогранник $O'_{\pm 1}$ изображен на рис. 2, *г*.

В процессе работы симплицальный 2^d -алгоритм использует 2^d целочисленных меток, которые присваиваются вершинам симплексов триангуляции в соответствии с правилом помечивания. Эти метки задаются фактически векторами знаков, поэтому далее различия между векторами знаков и метками не делается. Используя многогранник $O'_{\pm 1}$, правило помечивания симплицального 2^d -алгоритма можно сформулировать следующим образом: вершине триангуляции x присваивается метка s , если вектор $f(x) - x$, где $f(x)$ – значение целевой функции в точке x , принадлежит конусу метки s , определяемому как коническая оболочка гиперграней многогранника $O'_{\pm 1}$, соответствующей метке s .

На рис. 2, *г* пунктирными линиями построены конус метки $(+1, +1, +1)$, соответствующей гиперграней F_1 , и конус метки $(-1, +1, -1)$, соответствующей гиперграней F , этот конус дополнительно выделен штриховкой, а также частично построены конусы меток $(-1, +1, +1)$ и $(+1, +1, -1)$. Эти четыре построенных конуса демонстрируют важное отличие в степени точности найденного приближения, которое появляется при переходе от (относительно) малого количества меток к (относительно) большому. В частности, нахождение симплицальным 2^d -алгоритмом всех четырех меток $(+1, +1, +1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, +1, +1)$ и $(+1, +1, -1)$ означает, что достигнуто приближение неподвижной точки.

Приближение достигается всякий раз, когда пересечение гиперграней многогранника $O'_{\pm 1}$, соответствующих найденным меткам пусто, или, что то же самое, пересечение конических оболочек этих гиперграней совпадает с началом координат O , в том числе это так и для меток $(+1, +1, +1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, +1, +1)$ и $(+1, +1, -1)$. Однако точность достигаемого при нахождении этих меток приближения определяется минимальным углом между векторами, лежащими в частично построенных конусах меток $(-1, +1, +1)$ и $(+1, +1, -1)$, – пересечение этих конусов само по себе совпадает с началом координат O . На рис. 2, *г* это угол между векторами v_1 и v_2 , выделенный штриховкой и являющийся достаточно малым. Точность приближения также будет здесь невысокой.

Для сравнения заменим одну из меток $(-1, +1, +1)$ или $(+1, +1, -1)$ на метку $(-1, -1, -1)$. Конусом метки $(-1, -1, -1)$ является коническая оболочка гиперграней F_2 многогранника $O'_{\pm 1}$, расположенная «под» гипергранью F_1 и, так же как и гипергрань F_1 , имеющая форму неправильного шестиугольника с параллельными противоположащими ребрами. Полученный набор меток по-прежнему дает приближение неподвижной точки, но теперь уже сами по себе пересекаются в начале координат O конусы меток $(+1, +1, +1)$ и $(-1, -1, -1)$. Понятие о минимальном угле между векторами, лежащими в этих конусах, дает «толщина» выделенного на рис. 2, *г* штриховкой конуса метки $(-1, +1, -1)$, очевидно, что этот угол значительно превосходит угол между векторами v_1 и v_2 .

Таким образом, в связи с появлением в симплицальном 2^d -алгоритме большого (по сравнению с размерностью пространства) количества меток точность приближения неподвижной точки начинает значительно меняться в зависимости

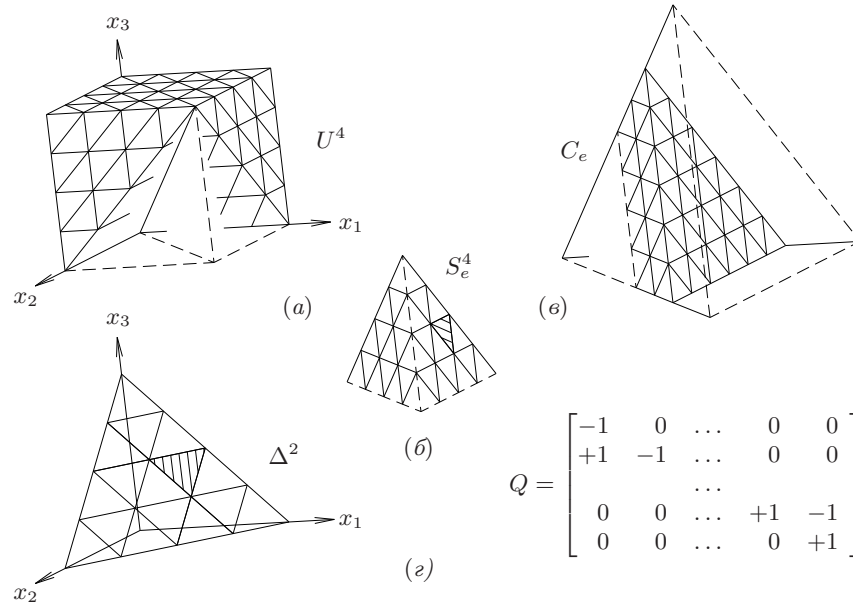


Рис. 3. Различные объекты триангуляции в пространстве \mathbb{R}^3 : (а) куб U^G при $G = 4$; (б) симплекс S_e^G при $G = 4$; (в) при $G \rightarrow +\infty$ триангуляция S_e^G переходит в триангуляцию конуса C_e ; (г) триангуляция стандартного симплекса Δ^2 мелкости $G = 4$ получается аффинным преобразованием с матрицей Q из симплекса S_e^1 в пространстве \mathbb{R}^2

от набора меток, на котором достигается это приближение. Будем называть приближение сильным, если среди найденного набора меток присутствуют метки s_i и s_j такие, что $s_i = -s_j$, и будем называть приближение слабым в противном случае. Понятие сильного и слабого приближения неподвижной точки влияет на организацию перезапусков или рестартов алгоритма из найденного приближения с целью нахождения приближения более высокой степени точности.

Если найдено сильное приближение (как в примере с векторами знаков $(+1, +1, +1)$ и $(-1, -1, -1)$), то неподвижная точка, скорее всего, находится где-то недалеко, поэтому имеет смысл увеличить мелкость триангуляции при перезапуске алгоритма. Если найдено слабое приближение (как в примере с векторами знаков $(-1, +1, +1)$ и $(+1, +1, -1)$), то, скорее всего, вблизи этого приближения целевая функция всего лишь достаточно резко меняет свое поведение, поэтому имеет смысл перезапустить алгоритм из найденного приближения с прежней мелкостью разбиения и искать неподвижную точку в новом направлении.

В связи с появлением понятия сильного и слабого приближений следует обратить внимание также на пространственную асимметрию симплицеального 2^d -алгоритма. По построению многогранник $U'_{\pm 1}$ имеет выделенное направление от вектора знаков со всеми -1 до вектора знаков со всеми $+1$. В пространстве \mathbb{R}^3 это направление задается диагональю $(-1, -1, -1) - (+1, +1, +1)$ куба $U_{\pm 1}$. То же выделенное направление присутствует и в многограннике $O'_{\pm 1}$ — на рис. 2, z гипергрань F_1 и F_2 многогранника $O'_{\pm 1}$, соответствующие векторам знаков $(+1, +1, +1)$ и $(-1, -1, -1)$, имеют форму шестиугольников, не пересекаются между собой и пересекаются со всеми оставшимися гипергранями, имеющими форму четырехугольников (такими как, например, гипергрань F).

В результате такого расположения гиперграней многогранника $O'_{\pm 1}$ симплицеальный 2^d -алгоритм предположительно оказывается несколько более «предрасположенным» к нахождению слабого приближения, если в наборе его меток

присутствует вектор знаков, состоящий только из -1 или только из $+1$. Однако геометрически все диагонали куба одинаковы. Это дает дополнительную возможность управлять поведением алгоритма в процессе работы: связывая перед стартом или рестартом алгоритма выделенное направление в пространстве с одной из диагоналей куба, можно в определенной степени повлиять на скорость нахождения и характер найденного приближения неподвижной точки.

В частности, изменение выделенного направления может быть использовано для уменьшения влияния пространственной асимметрии симплицального 2^d -алгоритма на результаты вычислений. В общем случае все расположения вектора $f(x) - x$ в пространстве являются равновероятными, поэтому, скорее всего, он будет принадлежать конической оболочке некоторой гиперграни F многогранника $O'_{\pm 1}$, отличной от F_1 и F_2 , например такой, как на рис. 2, *г*. Но в момент старта или рестарта алгоритма указанное равновероятное расположение вектора $f(x) - x$ может быть практически в равной степени обеспечено просто выбором выделенного направления, что и было сделано в [18] при оценке скорости предварительной версии 2^d -алгоритма в пространстве \mathbb{R}^4 .

4. Заключительные замечания

Триангуляция K_1 была впервые описана Фройденталем [19] в 1942 г. Однако по замечанию самого Фройдентеля это описание уже использовалось им [23] в 1939 г. и основано на его же статье [24] о триангуляции декартова произведения симплексов, вышедшей еще двумя годами ранее. Таким образом, триангуляция K_1 пространства \mathbb{R}^d известна уже около 80 лет – почти столетие. Далее K_1 встречается в [25, с.140], [8, 9, 11, 26] и других работах, поэтому к настоящему времени она хорошо изучена. Обозначение K_1 дал ей Тодд в книге [9], посвященной симплицальным алгоритмам. Согласно системе обозначений, принятой в [9], индекс 1 говорит о том, что K_1 триангулирует все пространство \mathbb{R}^d .

Триангуляция K_1 замечательна тем, что она триангулирует одновременно (1) единичные кубы U_z ; (2) кубы $U^G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_i \leq G\}$, что может быть также интерпретировано как триангуляция единичных кубов U_z мелкости G ; (3) все пространство \mathbb{R}^d , что также следует из (2) при $G \rightarrow +\infty$, таким образом, (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3); (4) симплексы S_π^G , что может быть также интерпретировано как триангуляция симплекса S_π^1 мелкости G ; (5) стандартный симплекс

$$\Delta^d = \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, d+1 \right\},$$

получаемый из симплекса S_π^1 аффинным преобразованием и характерный для теоретико-игровых, например [27], и экономических, например [28], задач; (6) симплицальные конусы C_π , что также следует из (4) при $G \rightarrow +\infty$, таким образом, (4) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (6).

Все эти свойства являются, с одной стороны, «геометрически очевидным» (рис. 3), с другой стороны, достаточно трудоемкими для доказательства. Например, доказательство только (5) в [28] занимает 8 страниц текста, что сопоставимо по объему с отдельной статьей средних размеров. Поэтому каждая из работ (в том числе и оригинальная работа Фройдентеля [19]), имеющая дело с триангуляцией K_1 , описывает ее лишь в той степени, в какой это необходимо для целей этой работы. Хорошая схема (3) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) доказательства всех описанных свойств триангуляции K_1 была предложена в [9], однако реализации ее представлено не было. В результате до настоящего времени доказательства свойств триангуляции K_1 являются разбросанными по различным источникам.

Так, в [9] и [11] доказано (3). В [26] доказано (1) и (2). В [28] доказано (5). Лемма 2 данной работы доказывает переход (3) \Rightarrow (6) от группы свойств (1), (2),

(3), имеющих дело преимущественно с кубами, к группе свойств (4), (5), (6), имеющих дело преимущественно с симплексами. Что касается оригинальной работы Фройденталя [19], то она дает очень компактное описание перехода (1) \Rightarrow (4) для S_{π}^2 . По своей сути переход (1) \Rightarrow (4) в [19] является аналогом перехода (3) \Rightarrow (6) леммы 2, более того, он также использует перестановки, аналогичные ее перестановкам π и ξ . Однако имеются и существенные отличия, в частности, в лемме 2 перестановка ξ определяется перестановкой π , а в работе [19], наоборот, в результате доказанными оказываются аналогичные по смыслу, но разные по способу его выражения утверждения.

Итак, лемма 2 является реализацией звена (3) \Rightarrow (6) (а вместе со следствием 1 и всей) схемы (3) \Rightarrow (6) \Rightarrow (4) доказательства, предложенной в [9], и интерпретацией части написанной в достаточно свободной манере работы Фройденталя [19] в более привычном для современной математики виде. Центральный результат работы – теорема 1 и лемма 2 дают полное обоснование нового симплицеального алгоритма с 2^d целочисленными метками, а описание понятий сильного и слабого приближения делает возможным создание программной реализации этого алгоритма в версии, хорошо зарекомендовавшей себя в [18] при вычислениях в пространстве \mathbb{R}^4 .

Литература

1. Scarf H. The approximation of fixed points of a continuous mapping // SIAM J. Appl. Math. – 1967. – V. 15, No 5. – P. 1328–1343. – doi: 10.1137/0115116.
2. Scarf H. The core of an N person game // Econometrica. – 1967. – V. 35, No 1. – P. 50–69. – doi: 10.2307/1909383.
3. Scarf H. On the computation of equilibrium prices // Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher. – N. Y., Sydney: John Wiley and Sons, 1967. – P. 207–230.
4. Hansen T., Scarf H. On the applications of a recent combinatorial algorithm: Cowles Foundation Discussion Papers No. 272. – New Haven: Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, 1969. – 43 p.
5. Хансен Т., Скарф Г. О приложениях нового комбинаторного алгоритма // Математическая экономика: Равновесные модели, оптимизационное планирование и управление / Ред. Б.С. Митягин. – М.: Мир, 1974. – С. 143–169.
6. Cohen D.I.A. On the Sperner lemma // J. Comb. Theory. – 1967. – V. 2. – P. 585–587.
7. Sperner E. Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes // Abh. math. Seminar Univ. Hamburg. – 1928. – Bd. 6. – S. 265–272.
8. Kuhn H.W. Simplicial approximation of fixed points // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. – 1968. – V. 61, No 4. – P. 1238–1242. – doi: 10.1073/pnas.61.4.1238.
9. Todd M.J. The computation of fixed points and applications // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – 1976. – V. 124. – vii, 129 p.
10. Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. – М.: Наука, 1983. – 112 с.
11. Yang Z. Computing equilibria and fixed points. – Boston: Kluwer Acad. Publ., 1999. – x, 344 p.
12. Yamamoto Y. A variable dimension fixed point algorithm and the orientation of simplices // Math. Program. – 1984. – V. 30, No 3. – P. 301–312. – doi: 10.1007/BF02591935.
13. Kojima M., Yamamoto Y. A unified approach to the implementation of several restart fixed point algorithms and a new variable dimension algorithm // Math. Program. – 1984. – V. 28. – P. 288–328. – doi: 10.1007/BF02612336.

14. *Talman A.J.J., Yamamoto Y.* A simplicial algorithm for stationary point problems on polytopes // *Math. Oper. Res.* – 1989. – V. 14, No 3. – P. 383–399. – doi: 10.1287/moor.14.3.383.
15. *Wright A.H.* The octahedral algorithm, a new simplicial fixed point algorithm // *Mathematical Programming.* – 1981. – V. 21, No 1. – P. 47–69. – doi: 10.1007/BF01584229.
16. *van der Laan G., Talman A.J.J.* A class of simplicial restart fixed point algorithms without an extra dimension // *Math. Program.* – 1981. – V. 20, No 1. – P. 33–48. – doi: 10.1007/BF01589331.
17. *Reiser P.M.* A modified integer labeling for complementarity algorithms // *Math. Oper. Res.* – 1981. – V. 6, No 1. – P. 129–139. – doi: 10.1287/moor.6.1.129.
18. *Matveev M.N.* An approximation of fixed points with integer labels // *Proc. 18th IFAC World Congress (Milano).* – 2011. – P. 10174–10179.
19. *Freudenthal H.* Simplicialzerlegungen von Beschränkter Flachheit // *Ann. Math.* – 1942. – V. 43. – P. 580–582.
20. *Матвеев М.Н.* Невидимые гиперграни и порождающие многогранники // *Труды МФТИ.* – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 102–106.
21. *Матвеев М.Н.* Минимальный непорождаемый веер // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2012. – Т. 154, кн 1. – С. 202–207.
22. *Бренстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
23. *Freudenthal H.* Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten // *Proc. Konink. Acad. Wetensch. Amsterdam.* – 1939. – V. 42. – P. 880–901.
24. *Freudenthal H.* Eine Simplicialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe // *Fund. Math.* – 1937. – V. 29. – P. 138–144.
25. *Lefschetz S.* Introduction to topology. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1949. – 228 p.
26. *Kuhn H.W.* Some combinatorial lemmas in topology // *IBM J. Research and Development.* – 1960. – V. 4, No 5. – P. 518–524. – doi: 10.1147/rd.45.0518.
27. *Shapley L.S.* On balanced games without side payments // *Hu T.C., Robinson S.M. (Eds.) Mathematical Programming.* – N. Y.: Acad. Press, 1972. – P. 261–290.
28. *Scarf H., Hansen T.* The computation of economic equilibria. Monograph 24, Cowles Foundation for Research in Economics. – New Haven and London: Yale Univ. Press, 1973. – x, 249 p.

Поступила в редакцию
17.09.18

Матвеев Михаил Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Московский физико-технический институт

Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141701, Россия

E-mail: miklem@mail.mipt.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
 (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2019, vol. 161, no. 1, pp. 127–144

doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.127-144

Simplicial Fixed Point Algorithm with 2^d Integer Labels

M.N. Matveev

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, 141701 Russia

E-mail: *miklem@mail.mipt.ru*

Received September 17, 2018

Abstract

Simplicial fixed point algorithms can be based on either integer or vector labels. An apparent advantage of the algorithms with integer labels is their simplicity and stability under round-off errors due to the discrete nature of integer labels. At the same time, the application of all existing algorithms with integer labels is limited by some rigidity of their construction, in particular, in the d -dimensional space they can bear only from $d+1$ to $2d$ labels. The numbers of labels comparable with the dimension of space make these algorithms not very fast, especially in high-dimensional tasks. This paper overcomes this rigidity and builds a new simplicial fixed point algorithm with 2^d integer labels. To achieve this goal, the paper proves new properties of triangulation K_1 and separates all approximations of fixed points into weak and strong ones. This separation, which has never been used until this moment, is caused by the high number of labels of the new algorithm.

Key words: triangulations, polytopes, fans, simplicial algorithms, fixed point algorithms

Figure Captions

Fig. 1. Some shapes of the triangulation K_1 in \mathbb{R}^3 : (a) a unit cube U_z with two facets triangulated; (b) all $3! = 6$ simplices and their permutations in the triangulation $\mathcal{T}(U_z)$ of the cube U_z ; (c) the subdivision of the cone $x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq 0$ induced by the triangulation K_1 .

Fig. 2. The polytope $U'_{\pm 1}$ in \mathbb{R}^3 : (a) the cubes U_O and $U_{\pm 1}$, simplices $\tau_O(e)$ and τ_{\pm} , facets τ_+ , F_+^1 , τ_- , F_-^d ; (b) and (c) vertices of the polytope $U'_{\pm 1}$ with respect to vertices of the cube $U_{\pm 1}$; (d) the polar $O'_{\pm 1}$ to the polytope $U'_{\pm 1}$.

Fig. 3. Objects to be triangulated in \mathbb{R}^3 : (a) the cube U^G with $G = 4$; (b) the simplex S_e^G with $G = 4$; (c) the triangulation of the cone C_e obtained from the triangulations of S_e^G when $G \rightarrow +\infty$; (d) the triangulation of the standard simplex Δ^2 with the grid fineness $G = 4$ obtained by an affine map with the matrix Q from the simplex S_e^1 in \mathbb{R}^2 .

References

1. Scarf H. The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM J. Appl. Math.*, 1967, vol. 15, no. 5, pp. 1328–1343. doi: 10.1137/0115116.
2. Scarf H. The core of an N person game. *Econometrica*, 1967, vol. 35, no. 1, pp. 50–69. doi: 10.2307/1909383.

3. Scarf H. On the computation of equilibrium prices. In: *Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*. New York, Sydney, John Wiley and Sons, 1967, pp. 207–230.
4. Hansen T., Scarf H. *On the applications of a recent combinatorial algorithm: Cowles Foundation Discussion Papers No. 272*. New Haven, Cowles Found. Res. Econ., Yale Univ., 1969. 43 p.
5. Hansen T., Scarf H. On the applications of a recent combinatorial algorithm. In: Mityagin B.S. (Ed.) *Matematicheskaya ekonomika: Ravnovesnye modeli, optimizatsionnoe planirovanie i upravlenie* [Mathematical Economics: Equilibrium Models, Optimization Planning, and Control]. Moscow, Mir, 1974, pp. 143–169. (In Russian)
6. Cohen D.I.A. On the Sperner lemma. *J. Comb. Theory*, 1967, vol. 2, pp. 585–587.
7. Sperner E. Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. *Abh. math. Seminar Univ. Hamburg*, 1928, Bd. 6, S. 265–272. (In German)
8. Kuhn H.W. Simplicial approximation of fixed points. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 1968, vol. 61, no. 4, pp. 1238–1242. doi: 10.1073/pnas.61.4.1238.
9. Todd M.J. The computation of fixed points and applications. *Lect. Notes Econ. Math. Syst.*, 1976, vol. 124, vii, 129 p.
10. Todd M.J. *Vychislenie nepodvizhnykh toчек i prilozheniya k ekonomike* [The Computation of Fixed Points and Applications]. Moscow, Nauka, 1983. 112 p. (In Russian)
11. Yang Z. *Computing Equilibria and Fixed Points*. Boston, Kluwer Acad. Publ., 1999. x, 344 p.
12. Yamamoto Y. A variable dimension fixed point algorithm and the orientation of simplices. *Math. Program.*, 1984, vol. 30, no. 3, pp. 301–312. doi: 10.1007/BF02591935.
13. Kojima M., Yamamoto Y. A unified approach to the implementation of several restart fixed point algorithms and a new variable dimension algorithm. *Math. Program.*, 1984, vol. 28, pp. 288–328. doi: 10.1007/BF02612336.
14. Talman A.J.J., Yamamoto Y. A simplicial algorithm for stationary point problems on polytopes. *Math. Oper. Res.*, 1989, vol. 14, no. 3, pp. 383–399. doi: 10.1287/moor.14.3.383.
15. Wright A.H. The octahedral algorithm, a new simplicial fixed point algorithm. *Math. Program.*, 1981, vol. 21, no. 1, pp. 47–69. doi: 10.1007/BF01584229.
16. van der Laan G., Talman A.J.J. A class of simplicial restart fixed point algorithms without an extra dimension. *Math. Program.*, 1981, vol. 20, no. 1, pp. 33–48. doi: 10.1007/BF01589331.
17. Reiser P.M. A modified integer labeling for complementarity algorithms. *Math. Oper. Res.*, 1981, vol. 6, no. 1, pp. 129–139. doi: 10.1287/moor.6.1.129.
18. Matveev M.N. An approximation of fixed points with integer labels. *Proc. 18th IFAC World Congress (Milano)*, 2011, pp. 10174–10179.
19. Freudenthal H. Simplicialzerlegungen von Beschränkter flachheit. *Ann. Math.*, 1942, vol. 43, pp. 580–582. (In German)
20. Matveev M.N. Invisible faces and face polytopes. *Tr. MFTI*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 102–106. (In Russian)
21. Matveev M.N. A minimal nonpolytopal fan. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1. pp. 202–207. (In Russian)
22. Brøndsted A. An introduction to convex polytopes. In: *Graduate Texts in Mathematics*, 1983, vol. 90. viii, 162 p.

23. Freudenthal H. Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. *Proc. Konink. Acad. Wetensch. Amsterdam*, 1939, vol. 42, pp. 880–901. (In German)
24. Freudenthal H. Eine Simplicialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe. *Fundam. Math.*, 1937, vol. 29, pp. 138–144. (In German)
25. Lefschetz S. *Introduction to Topology*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1949. 228 p.
26. Kuhn H.W. Some combinatorial lemmas in topology. *IBM J. Res. Dev.*, 1960, vol. 4, no. 5, pp. 518–524. doi: 10.1147/rd.45.0518.
27. Shapley L.S. On balanced games without side payments. In: Hu T.C., Robinson S.M. (Eds.) *Mathematical Programming*, New York, Acad. Press, 1972. pp. 261–290.
28. Scarf H., Hansen T. *The Computation of Economic Equilibria. Monograph 24, Cowles Foundation for Research in Economics*. New Haven and London, Yale Univ. Press, 1973. x, 249 p.

⟨ **Для цитирования:** Матвеев М.Н. Симплициальный алгоритм поиска неподвижных точек с 2^d целочисленными метками // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 1. – С. 127–144. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.127-144. ⟩

⟨ **For citation:** Matveev M.N. Simplicial fixed point algorithm with 2^d integer labels. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 1, pp. 127–144. doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.127-144. (In Russian) ⟩