УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 355–364 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 532.546 doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.355-364

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

А.В. Костерин, Э.В. Скворцов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Исследована фильтрационная консолидация упругого насыщенного полупространства в условиях пространственной деформации под действием произвольной нормальной нагрузки, мгновенно приложенной к поверхности полупространства. Жидкость и зерна скелета предполагались несжимаемыми. Целью исследования явилось получение аналитических представлений для основных характеристик консолидации. Для этого использована математическая модель консолидации с привлечением уравнений совместности деформаций. Сумма эффективных нормальных напряжений найдена как решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в полупространстве. Далее решена первая краевая задача для вспомогательной функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Это позволило получить в явном виде выражения для давления жидкости и суммы полных нормальных напряжений. Кроме того, определена осадка поверхности полупространства. В качестве иллюстрации предложенного подхода даны примеры определения характеристик консолидации при сосредоточенной нагрузке на поверхность полупространства, равномерно распределенной нагрузке по площадям круга и квадрата. Найдена максимальная осадка центра квадрата вследствие процесса консолидации. Полученные результаты могут найти применение в качестве тестов при использовании численных методов решения задач фильтрационной консолидации.

Ключевые слова: консолидация, упругое полупространство, нагрузка, давление

Становление и развитие теории фильтрационной консолидации связано с работами [1–4] и др. Общая математическая модель консолидации и аналитические методы ее исследования были предложены в [5–7]. Анализ уравнений механики насыщенных пористых сред с позиций механики сплошных сред проведен в [8, 9]. По исследуемой тематике выполнены многочисленные работы, в частности представленные в [10, 11]. Библиография дана в [12, 13]. В [14] в предположении, что выполняется гипотеза Терцаги [1], согласно которой полное напряженное состояние в системе жидкость – порода не зависит от времени, исследована консолидация упругого полупространства под осесимметричной нагрузкой. В работе [15] предложена математическая модель консолидации в условиях плоской деформации упругого полупространства под действием произвольной вертикальной нагрузки на его поверхность – без использования вышеупомянутой гипотезы, но с привлечением уравнения совместности. Модель позволила получить аналитические представления для давления жидкости и полных нормальных напряжений упругого пористого скелета.

В настоящей работе подход, примененный в [15], реализуется для развития соответствующей математической модели в условиях пространственной консолидации упругого полупространства под действием произвольной нормальной нагрузки на его поверхность.

1. Математическая модель пространственной консолидации

Рассматривается процесс фильтрационной консолидации насыщенного жидкостью упругого полупространства под действием мгновенно приложенной вертикальной нагрузки на его поверхность. Пусть декартовы координаты x, y, z полупространства удовлетворяют условиям $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq z < \infty$, t – время.

Полные напряжения в скелете полупространства определяются соотношениями [1, 8]

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x(x,y,z,t) = \sigma_x^f(x,y,z,t) - p(x,y,z,t),\\
&\sigma_y(x,y,z,t) = \sigma_y^f(x,y,z,t) - p(x,y,z,t),\\
&\sigma_z(x,y,z,t) = \sigma_z^f(x,y,z,t) - p(x,y,z,t),\\
&\sigma_{xy}(x,y,z,t) = \tau_{xy}(x,y,z,t),\\
&\sigma_{yz}(x,y,z,t) = \tau_{yz}(x,y,z,t),\\
&\sigma_{xz}(x,y,z,t) = \tau_{xz}(x,y,z,t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где σ_x^f, σ_y^f, σ_z^f – эффективные напряжения в скелете, p – давление жидкости, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} – касательные напряжения в скелете.

Считается, что сжимаемостью жидкости можно пренебречь, объемные деформации скелета обусловлены деформациями его зерен (их объемных деформаций нет, но сдвиговые допускаются) [14]. В таких условиях скелет деформируется упруго.

Математическая модель консолидации включает в себя полное уравнение движения (квазиравновесия) фаз, уравнения неразрывности (баланса масс), закон фильтрации, реологические соотношения для пористого скелета, граничные и начальные условия [14].

В результате выделения из полного уравнения движения фаз его статической компоненты это уравнение представляется в виде [16]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\sigma_x^f - p)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial(\sigma_y^f - p)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial(\sigma_z^f - p)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Условие неразрывности процесса консолидации выглядит следующим образом [17]:

$$
\operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,
\tag{3}
$$

где $\mathbf{q} = m(\mathbf{v} - \partial\mathbf{u}/\partial t)$ – скорость фильтрации, $\theta = \operatorname{div}\mathbf{u}$ – объемная деформация скелета, m – пористость скелета, $\mathbf{v}$ и $\partial\mathbf{u}/\partial t$ – среднефазовые макроскорости жидкой и твердой фазы соответственно, $\mathbf{u}$ – смещения скелета.

Закон фильтрации принимается линейным (закон Дарси),

$$
\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu_0}\nabla p,
\tag{4}
$$

где $k = \mathrm{const}$ – проницаемость скелета, μ_0 – вязкость жидкости.

Реологическое соотношение для пористого скелета (закон упругости) представляется в виде [9, 16]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x^f - \nu(\sigma_y^f + \sigma_z^f)\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y^f - \nu(\sigma_x^f + \sigma_z^f)\right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z^f - \nu(\sigma_x^f + \sigma_y^f)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz},$$

где ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} – компоненты деформации, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

На границе $z = 0$ для давления принимается условие «высокопроницаемого поршня» [9]

$$p(x, y, 0, t) = 0. \tag{6}$$

Пусть в момент времени $t = 0$ по площадке $S = S(x, y)$ границы $z = 0$ мгновенно прикладывается нормальная нагрузка $\Pi = \Pi(x, y)$. Тогда согласно (1), (6) и [18] будут выполняться граничные условия

$$\begin{gathered} \sigma_z(x, y, 0, t) = \begin{cases} -\Pi(x, y), & x,\, y \subset S, \\ 0, & x,\, y \not\subset S, \end{cases} \\ \sigma_x(x, y, 0, t) + \sigma_y(x, y, 0, t) = \begin{cases} -(1+2\nu)\Pi(x, y), & x,\, y \subset S, \\ 0, & x,\, y \not\subset S, \end{cases} \\ \tau_{xy}(x, y, 0, t) = \tau_{yz}(x, y, 0, t) = \tau_{xz}(x, y, 0, t) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

2. Определение характеристик фильтрационной консолидации

Математическая модель (1)–(7) будет использована сначала для нахождения суммы эффективных нормальных напряжений скелета

$$J^f = \sigma_x^f + \sigma_y^f + \sigma_z^f.$$

Из формул (1) вытекает связь

$$p = \frac{1}{3}\,(J^f - J), \tag{8}$$

где J – сумма полных нормальных напряжений.

В работе [14] установлено, что при $t > 0$

$$\frac{\partial J^f}{\partial t} = \frac{Ek}{(1-2\nu)\mu_0}\,\Delta p. \tag{9}$$

Далее к уравнениям (1)–(7) добавляется соотношение, следующее из условий совместности деформаций [19]:

$$\Delta p = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\Delta J^f. \tag{10}$$

Из (9), (10) вытекает уравнение

$$\frac{\partial J^f}{\partial t} = \varkappa \Delta J^f, \tag{11}$$

где

$$\varkappa = \frac{k}{\mu_0} \, \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \, E. \tag{12}$$

Начальное условие для функции J^f имеет вид [14]

$$J^f(x,y,z,0) = 0. \tag{13}$$

При $z = 0$ в соответствии с условием (6) $J^f = J$, и граничное условие для функции J^f совпадает с известным граничным условием для функции J [18]

$$J^f(x,y,0,t) = \begin{cases} -2(1+\nu)\Pi(x,y), & x,\, y \subset S, \\ 0, & x,\, y \not\subset S. \end{cases} \tag{14}$$

Краевая задача (11)–(14) имеет следующее решение [20]

$$J^f(x,y,z,t) = \varkappa \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} J^f(\xi,\eta,0) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau) \right]_{\zeta=0} d\xi \, d\eta \, d\tau. \tag{15}$$

Здесь

$$G(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi\varkappa t)^{3/2}} \left(\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4\varkappa t} \right] - \exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4\varkappa t} \right] \right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\varkappa t} \right]. \tag{16}$$

Далее для определения давления p введем вспомогательную функцию

$$F = p - \frac{1-\nu}{1+\nu} \, J^f, \tag{17}$$

удовлетворяющую в соответствии с (10) уравнению

$$\Delta F = 0. \tag{18}$$

Граничное условие для функции F вытекает из формулы (17) и условий (6), (14),

$$F(x,y,0) = \begin{cases} 2(1-\nu)\Pi(x,y), & x,\, y \subset S, \\ 0, & x,\, y \not\subset S. \end{cases} \tag{19}$$

Решение краевой задачи (18), (19) имеет вид [20]

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{zF(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \tag{20}$$

Формулы (15)–(17), (20) позволяют получить аналитические выражения для давления жидкости, а из зависимости (8) определяется и сумма полных нормальных напряжений $J = J(x,y,z,t)$. Кроме того, в момент времени $t = 0$ имеем, что $J^f = 0$, согласно (17) $p = F$, $\nu = 1/2$ (скелет абсолютно несжимаем), и

$$p(x,y,z,0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{zp(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \right]^{3/2}},$$

где

$$p(x,y) = \begin{cases} \Pi(x,y), & x,\, y \subset S, \\ 0, & x,\, y \not\subset S. \end{cases}$$

По завершении процесса консолидации $p = 0$, и напряженное состояние пористого скелета описывается результатами теории упругости [18].

Зная давление жидкости, можно определить и осадку полупространства. Пусть $u_z = u_z(x,y,z,t)$ – нормальное смещение полупространства, $u_s(t) = u_z(x,y,z,t) - u_z(x,y,z,0)$ – осадка полупространства при его консолидации. В работе [14] показано, что

$$u_s(x,y,0,t) = \frac{1-2\nu}{E} \int\limits_0^\infty [p(x,y,\xi,0) - p(x,y,\xi,t)]\; d\xi. \tag{21}$$

Полученные общие формулы (15)–(17), (20), (21) с учетом (8) позволяют найти характеристики процесса консолидации при конкретных нагрузках на поверхность полупространства.

3. Примеры

а) Пусть на полупространство в точке $x = y = z = 0$ действует нормальная сосредоточенная нагрузка

$$\Pi(x,y) = \Pi_0 \delta(x)\delta(y),$$

где δ – дельта-функция Дирака. С использованием результатов работы [14] будем иметь

$$J^f(x,y,z,t) = -\frac{\Pi_0(1+\nu)z}{\pi\rho^3}\left[\operatorname{erfc}\frac{\rho}{2(\varkappa t)^{1/2}} + \frac{\rho}{(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varkappa t}\right)\right],$$

$$F(x,y,z) = \frac{\Pi_0(1-\nu)z}{\pi\rho^3},$$

$$p(x,y,z,t) = \frac{\Pi_0(1-\nu)z}{\pi\rho^3}\left[\operatorname{erf}\frac{\rho}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \frac{\rho}{(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varkappa t}\right)\right],$$

$$J(x,y,z,t) = -\frac{\Pi_0 z}{\pi\rho^3}\left(1+\nu+2(1-2\nu)\left[\operatorname{erf}\frac{\rho}{2(\varkappa t)^{1/2}} - \frac{\rho}{(\pi\varkappa t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varkappa t}\right)\right]\right),$$

$$u_s(r,t) = \frac{\Pi_0(1-\nu)(1-2\nu)}{\pi E r}\operatorname{erfc}\frac{r}{2(\varkappa t)^{1/2}}.$$

Здесь $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $\rho = (r^2+z^2)^{1/2}$.

б) Пусть нормальная нагрузка Π_0 распределена равномерно по кругу радиуса $r = a$ с центром в точке $x = y = 0$. Вводятся безразмерные величины

$$T = \frac{2(\varkappa t)^{1/2}}{a}, \quad u_s = \frac{u_s E}{\Pi_0 a}.$$

Тогда осадка описывается выражением

$$u_s(0,T) = 2(1-\nu)(1-2\nu)f(T),$$

$$f(T) = \operatorname{erfc}\frac{1}{T} + \frac{T}{\pi^{1/2}}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{T^2}\right)\right].$$

в) Пусть теперь нормальная нагрузка Π_0 распределена равномерно по квадрату со стороной $2a$ и центром в точке $x = y = 0$. Вводятся безразмерные величины

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad Z = \frac{z}{a}, \quad P = \frac{p}{\Pi_0}, \quad I^f = \frac{J^f}{\Pi_0}, \quad U_s = \frac{u_s E}{\Pi_0 a}.$$

Тогда после упрощений, используя результаты работ [21, 22], найдем

$$I^f(X,Y,Z,T) = -\frac{(1+\nu)Z}{\pi^{1/2}} \int\limits_{T^{-1}}^{\infty} \exp\left[-(Zu)^2\right] f(X,Y,u)\,du,$$

$$F(X,Y,Z) = \frac{\Pi_0(1-\nu)Z}{\pi^{1/2}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[-(Zu)^2\right] f(X,Y,u)\,du,$$

$$P(X,Y,Z,T) = \frac{(1-\nu)Z}{\pi^{1/2}} \int\limits_{0}^{T^{-1}} \exp\left[-(Zu)^2\right] f(X,Y,u)\,du.$$

Здесь

$$f(X,Y,u) = \left(\operatorname{erf}\left[u(1-X)\right] + \operatorname{erf}\left[u(1+X)\right]\right)\left(\operatorname{erf}\left[u(1-Y)\right] + \operatorname{erf}\left[u(1+Y)\right]\right).$$

В частности, при $X = Y = 0$, $Z = 1$ получим [23]

$$P(0,0,1,T) = \frac{2}{3}\,(1-\nu)\operatorname{erf}^3\frac{1}{T}.$$

Осадка поверхности полупространства дается интегралом

$$U_s(X,Y,0,T) = \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2\pi^{1/2}} \int\limits_{T^{-1}}^{\infty} \frac{f(X,Y,u)\,du}{u^2},$$

а осадка центра квадрата интегралом

$$U_s(0,0,0,T) = \frac{2(1-\nu)(1-2\nu)}{\pi^{1/2}} \int\limits_{T^{-1}}^{\infty} \frac{\operatorname{erf}^2 u}{u^2}\,du.$$

Известно [23], что

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{erf}^2 u}{u^2}\,du = \frac{4}{\pi^{1/2}} \ln\left(1 + 2^{1/2}\right).$$

Поэтому максимальная осадка центра квадрата вследствие консолидации представляется формулой

$$\lim_{T\to\infty} U_s(0,0,0,T) = \frac{8}{\pi}(1-\nu)(1-2\nu)\ln\left(1+2^{1/2}\right).$$

Заключение

Показано, что математическая модель фильтрационной консолидации упругого полупространства в условиях пространственной деформации под действием произвольной нормальной нагрузки, построенная с использованием уравнения совместности, позволяет получить аналитические представления суммы эффективных напряжений, давления жидкости и суммы полных нормальных напряжений в процессе консолидации. Их нахождение сводится к последовательному решению двух стандартных краевых задач для уравнений теплопроводности и Лапласа.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ф.М. Кадырову за помощь при подготовке работы к печати.

Литература

1. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
2. *Герсеванов Н.М.* Основы динамики грунтовой массы. – М.; Л.: Госстройиздат, 1937. – 241 с.
3. *Флорин В.А.* Теория уплотнения земляных масс. – М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
4. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 1. – М.; Л.: Госстройиздат, 1959. – 357 с.
5. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – V. 12, No 2. – P. 155–164. – doi: 10.1063/1.1712886.
6. *Biot M.A.* Consolidation settlement under rectangular load distribution // J. Appl. Phys. – 1941. – V. 12, No 5. – P. 426–430. – doi: 10.1063/1.1712921.
7. *Biot M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // J. Appl. Mech. – 1956. – V. 23, No 1. – P. 91–96.
8. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 335 с.
9. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
10. *Bear J., Corapcioglu M.Y.* Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – 1003 p.
11. *Coussy O.* Mechanics and Physics of Porous Solids. – London: John Wiley and Sons, 2010. – 300 p.
12. *Shiffman R.L.* A bibliography of consolidation // Bear J., Corapcioglu M.Y. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – P. 617–669.
13. *Selvadurai A.P.S.* The analytical method in geomechanics // Appl. Mech. Rev. – 2007. – V. 60, No 3. – P. 87–106. – doi: 10.1115/1.2730845.
14. *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация упругого полупространства под осесимметричной нагрузкой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 5. – С. 74–80.
15. *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация при плоской деформации упругого полупространства // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – № 2. – С. 99–104. – doi: 10.7868/S0568528118020093.
16. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
17. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 102 с.
18. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
19. *Detornay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity // Hudson J.A. Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. V. 2 – Oxford, UK: Pergamon Press, 1993. – P. 113–171.

20. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

21. *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация упругого полупространства под нормальной нагрузкой по площади квадрата // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 10. – С. 76–79.

22. *Kosterin A.V., Skvortsov E.V.* Analytical formula for integral whose kernel containing error function // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37, No 3. – P. 266–267. – doi: 10.1134/S199508021603015X.

23. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, Физматлит, 1983. – 750 с.

Поступила в редакцию
19.12.18

Костерин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Alexander.Kosterin@kpfu.ru*

Скворцов Эдуард Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Eduard.Scvortsov@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2019, vol. 161, no. 3, pp. 355–364

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.355-364

Seepage Consolidation under Space Deformation of Elastic Half-Space

*A.V. Kosterin**, *E.V. Skvortsov***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **Alexander.Kosterin@kpfu.ru*, ***Eduard.Scvortsov@mail.ru*

Received December 19, 2018

Abstract

The process of seepage consolidation of elastic saturated half-space under the action of an arbitrary normal load on its surface was investigated in the case of space deformation. The fluid and skeleton grains were assumed to be incompressible. The purpose of the study was to obtain analytical formulas for the main characteristics of consolidation. To fulfill this purpose, a mathematical model of consolidation with the use of the compatibility equation was proposed. The sum of the effective normal stresses was found as a solution to the first boundary value problem for the heat equation in a half-space. Then the first boundary value problem for an auxiliary function satisfying the Laplace equation was solved. This made it possible to obtain explicit expressions for the fluid pressure and the sum of the total normal stresses. Finally, the surface settlement of the half-space was determined. To illustrate the proposed approach, examples of determining the characteristics of consolidation with load on the surface of a half-space, load over the areas of a circle and a square were given. The maximum settlement of the square centre was determined. The obtained results can be used as tests when applying numerical methods for solving the problems of seepage consolidation.

Keywords: consolidation, elastic semi-space, load, pressure

Acknowledgments. We are grateful to F.M. Kadyrov for his invaluable help in drafting this manuscript.

References

1. Tertsagi K. *Teoriya mekhaniki gruntov* [Soil Mechanics Theory]. Moscow, Gosstroiizdat, 1961. 507 p. (In Russian)
2. Gersevanov N.M. *Osnovy dinamiki gruntovoi massy* [Principles of Soil Dynamics]. Moscow, Leningrad, Gosstroiizdat, 1937. 241 p. (In Russian)
3. Florin V.A. *Teoriya uplotneniya zemlyanykh mass* [Theory of Soil Consolidation]. Moscow, Gosstroiizdat, 1948. 248 p. (In Russian)
4. Florin V.A. *Osnovy mekhaniki gruntov* [Principles of Soil Mechanics]. Vol. 1. Moscow, Leningrad, Gosstroiizdat, 1959. 357 p. (In Russian)
5. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, no. 2, pp. 155–164. doi: 10.1063/1.1712886.
6. Biot M.A. Consolidation settlement under rectangular load distribution. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, no. 5, pp. 426–430. doi: 10.1063/1.1712921.
7. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials. *J. Appl. Mech.*, 1956, vol. 23, no. 1, pp. 91–96.
8. Nikolaevskii V.N., Basniev K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. *Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred* [The Mechanics of Saturated Porous Media]. Moscow, Nedra, 1970. 335 p. (In Russian)
9. Nikolaevskii V.N. *Mekhanika poristykh i treshchinovatykh sred* [Mechanics of Porous and Fissured Media]. Moscow, Nedra, 1984. 232 p. (In Russian)
10. Bear J., Corapcioglu M.Y. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1984. 1003 p.
11. Coussy O. *Mechanics and Physics of Porous Solids*. London, John Wiley and Sons, 2010. 300 p.
12. Shiffman R.L. A bibliography of consolidation. In: Bear J., Corapcioglu M.Y. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1984, pp. 617–669.
13. Selvadurai A.P.S. The analytical method in geomechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, no. 3, pp. 87–106. doi: 10.1115/1.2730845.
14. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation of elastic half-space under an axisymmetric load. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 627–633. doi: 10.1134/S0015462814050093.
15. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation under plane deformation of elastic half-space. *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 270–276. doi: 10.1134/S0015462818020106.
16. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1951. 506 p.

17. Egorov A.G., Kosterin A.V., Skvortsov E.V. *Konsolidatsiya i akusticheskie volny v nasyshchennykh poristykh sredakh* [Consolidation and Acoustic Waves in Saturated Porous Media]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1990. 102 p. (In Russian)

18. Johnson K.L. *Contact Mechanics.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 452 p.

19. Detornay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In: Hudson J.A. *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects.* Vol. 2. Oxford, UK, Pergamon Press, 1993, pp. 113–171.

20. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p. (In Russian)

21. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. The elastic semi-space consolidation under the normal load on a square area. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 10, pp. 64–66. doi: 10.3103/S1066369X16100108.

22. Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Analytical formula for integral whose kernel containing error function. *Lobachevskii J. Math.*, 2016, vol. 37, no. 3, pp. 266–267. doi: 10.1134/S199508021603015X.

23. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. Special Functions]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1983. 750 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования***: *Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Фильтрационная консолидация упругого полупространства под нормальной нагрузкой // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 355–364. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.355-364. ⟩

⟨ ***For citation***: Kosterin A.V., Skvortsov E.V. Seepage consolidation under space deformation of elastic half-space. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 355–364. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.355-364. (In Russian) ⟩