

УДК 530.182+535.2

ОБ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНАХ РАЗЛИЧНЫХ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ

С.В. Сазонов

Аннотация

Представлен краткий обзор теории резонансных и нерезонансных оптических солитонов от нано- до фемтосекундных длительностей.

Ключевые слова: резонанс Захарова–Бенни, терагерцовое излучение, фемтосекундный импульс, одноосный кристалл, оптическая пуля, оптический вихрь.

Введение

Оптический солитон (от английского “solitary”) представляет собой уединенный лазерный импульс определенной длительности (от нано- до фемтосекунд), обладающий несущей частотой видимого диапазона и способный распространяться в нелинейной диспергирующей среде без изменения своей формы на большие расстояния. Важным представляется также и то обстоятельство, что солитоны обладают свойством упругого взаимодействия друг с другом, то есть после столкновения солитоны восстанавливают свою первоначальную форму. Здесь следует подчеркнуть, что все это происходит в нелинейной среде, поэтому принцип суперпозиции, как он понимается в линейных средах, несправедлив. Солитоны именно взаимодействуют между собой, вначале деформируясь, а затем восстанавливая свои исходные параметры. Данное свойство является важным признаком того, что нелинейные волновые уравнения или системы, порождающие солитоны, обладают свойством полной интегрируемости, то есть для них в общем случае может быть решена соответствующая граничная задача или задача Коши. С прикладной же точки зрения на солитоны возлагаются большие надежды в целях их широкого использования в системах оптической связи. С укорочением длительности солитона может увеличиваться пропускная способность соответствующих информационных систем. Поэтому вопрос, отраженный в названии настоящей работы, представляется важным как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

1. Нано- и пикосекундные солитоны самоиндуцированной прозрачности

Первый оптический солитон наблюдался в экспериментах Мак-Колла и Хана, открывших эффект самоиндуцированной прозрачности (СИП) [1]. Данное явление состоит в следующем: если на резонансную поглощающую среду подать импульс, интенсивность которого превышает некоторое пороговое значение, то импульс сам для себя просветляет среду таким образом, что распространяется в ней без затухания и без изменения своей формы. Передним фронтом мощный импульс переводит атомы среды из основного состояния в возбужденное, а задним – индуцированным образом возвращает их в основное состояние. Таким образом, по мере распространения импульс отдает энергию резонансной среде, а затем возвращает ее обратно.

Такой обмен энергией требует времени, а потому приводит к резкому замедлению распространения импульса: скорость распространения может быть на два-четыре порядка меньше скорости света c в вакууме. Среда здесь является резонансной, то есть частота ω_0 квантового перехода между какими-либо двумя выделенными энергетическими уровнями равна несущей частоте ω импульса. В этом случае атомы можно рассматривать как двухуровневые, отбросив все квантовые уровни, кроме обозначенных двух. Динамику двухуровневого атома в поле резонансного оптического импульса можно уподобить маятнику. Основное состояние атома при этом соответствует положению маятника «вертикально вниз», а возбужденное – положению «вертикально вверх». Процессу полного обмена энергией между импульсом и атомом соответствует полный оборот маятника вокруг точки подвеса на угол 2π . Поэтому солитон СИП называют еще 2π -импульсом. Длительность импульса τ_p должна быть короче времен необратимой релаксации, характерных для рассматриваемого квантового перехода. В противном случае явление СИП наблюдать невозможно. В экспериментах Мак-Колла и Хана длительности импульсов лежали в наносекундном диапазоне. Явление СИП наблюдалось также и для пикосекундных лазерных импульсов, но замедление в скорости распространения здесь уже было не столь явным, как в случае наносекундных длительностей.

Математически явление СИП описывается системой волновых и материальных уравнений Максвелла – Блоха:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -i\beta R, \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= i\Delta R + i\Omega W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{i}{2}(\Omega^* R - \Omega R^*).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\Omega = 2d\varepsilon/\hbar$ – комплексная частота Раби импульса, d – дипольный момент рассматриваемого квантового перехода, \hbar – постоянная Планка, ε – комплексная огибающая электрического поля E импульса, связанная с последним соотношением

$$E = \varepsilon \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к.с.},\tag{2}$$

аббревиатура «к.с.» обозначает комплексное сопряжение, k – волновое число, R – комплексная огибающая нестационарного атомного дипольного момента, индуцируемого полем импульса, W – разность населенностей между возбужденным и основным уровнями атома (инверсия), $\Delta = \omega_0 - \omega$ – отстройка поля импульса от резонанса с квантовым переходом, β – коэффициент, пропорциональный концентрации резонансных атомов.

При выводе системы (1) из исходных уравнений Максвелла и квантовомеханических уравнений для матрицы плотности использовалось приближение медленно меняющихся огибающих (ММО):

$$\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right| \ll \omega |\varepsilon|, \quad \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right| \ll k |\varepsilon|.\tag{3}$$

Согласно условиям (3) огибающая поля слабо меняется на периоде несущих оптических колебаний, то есть является достаточно четко выраженной. Действительно, частота оптических колебаний $\omega \sim 10^{15} \text{с}^{-1}$. Для наносекундных длительностей число колебаний, содержащихся в импульсе, $m\omega\tau_p \sim 10^6$, а для пикосекундных – $\sim 10^3$. Эти оценки подтверждают выполнение условий (3).

Использование (3) позволило в волновом уравнении Максвелла

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где P – поляризация среды, индуцированная полем импульса, пренебечь вторыми производными от огибающей импульса и редуцировать таким образом данное уравнение к первому порядку относительно пространственной и временной производных.

Система Максвелла–Блоха (1) является полностью интегрируемой и поэтому обладает решениями в виде солитонов, упруго взаимодействующих между собой.

В случае точного резонанса ($\Delta = 0$), как легко видеть из (1), частота Раби становится вещественной, а нестационарный дипольный момент – мнимым. Тогда из системы (1) в предположении, что до импульсного воздействия (при $t = -\infty$) все атомы находились в основном состоянии ($W(t = -\infty) = -1$), следует уравнение синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} = -\beta \sin \theta, \quad (5)$$

где $\theta = \int_{-\infty}^{\tau} \Omega dt'$, $\tau = t - x/c$.

Солитонное решение данного уравнения в лабораторной системе координат имеет вид

$$\Omega = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t - x/v}{\tau_p} \right), \quad (6)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \beta \tau_p^2. \quad (7)$$

Легко видеть, что полная «площадь» солитона $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega dt' = 2\pi$. Это еще одна причина, по которой солитон СИП называется 2π -импульсом.

Из (6), (7) видно, что амплитуда и скорость солитона СИП возрастают с укорочением его длительности.

2. Нано- и пикосекундные нерезонансные солитоны огибающей

Пусть в изотропной среде распространяется мощный оптический импульс, несущая частота ω которого далека от спектральных линий резонансного поглощения данной среды. В таких условиях нелинейность обусловлена тем, что мощный импульс в месте своего нахождения изменяет показатель преломления среды. Таким образом, общий показатель преломления n_{gen} среды начинает зависеть от интенсивности $I \sim |\varepsilon|^2$ [2]:

$$n_{\text{gen}} = n_{\omega} + n_2 |\varepsilon|^2, \quad (8)$$

где n_{ω} – линейный показатель преломления на частоте ω , n_2 – нелинейный показатель преломления.

В таком случае импульсы, абсолютная длительность τ_p которых лежит в достаточно широком интервале от единиц наносекунд до сотен фемтосекунд, хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [2]

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \beta |\varepsilon|^2 \varepsilon. \quad (9)$$

Здесь $\tau = t - x/v_g$, v_g – линейная групповая скорость световой волны на частоте ω , k_2 – параметр дисперсии групповой скорости (ДГС), $\beta = \omega n_2/c$ – коэффициент кубической (керровской) нелинейности.

Положительные значения n_2 соответствуют фокусирующей нелинейности среды. Действительно, при $n_2 > 0$ значение n_{gen} возрастает с увеличением интенсивности импульса. В центре поперечного сечения данного импульса интенсивность $I \sim |\varepsilon|^2$ максимальна. Из (8) следует, что здесь также максимально значение n_{gen} . Согласно принципу Ферма волновые нормали должны загибаться в сторону увеличения n_{gen} , то есть к центру оптического импульса, что соответствует явлению самофокусировки.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу о дефокусирующем характере нелинейности при $n_2 < 0$.

Уравнение НУШ принадлежит к классу полностью интегрируемых и обладает солитонным решением в виде уединенного бегущего вдоль оси x со скоростью v_g импульса:

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{-\frac{k_2}{\beta}} \exp\left(i \frac{k_2}{2\tau_p^2} x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p}\right). \quad (10)$$

Отсюда видно, что при фокусирующей нелинейности ($\beta > 0$) солитонное решение существует в спектральной области аномальной ДГС ($k_2 < 0$). В случае же фокусирующей нелинейности спектр солитона принадлежит области нормальной ДГС, где $k_2 > 0$. Данный вывод является общим и соответствует общим положениям теории солитонов.

Здесь следует отметить еще одно важное обстоятельство. Из (10) видно, что амплитуда солитона НУШ растет с укорочением его длительности, а вот скорость распространения никак не связана ни с амплитудой, ни со скоростью. Это одна из причин, по которой нерезонансные оптические солитоны могут найти применения в длинных оптоволоконных линиях передачи информации [2]. Действительно, поскольку скорость всех солитонов на одной и той же несущей частоте одинакова, то в какой последовательности они будут запущены в оптоволоконную линию, в такой же и подойдут к ее концу, то есть в линии не произойдет искажения передаваемой по ней информации.

3. Фемтосекундные солитоны длительностью в несколько периодов оптических колебаний

Одной из тенденций развития лазерной физики является создание световых импульсов все более коротких длительностей. Выше речь шла о нано- и пикосекундных солитонах, для которых можно было ввести понятие огибающей и использовать свойство ее медленного изменения на оптическом периоде. В настоящее время можно говорить уже об импульсах длительностью в единицы фемтосекунд, содержащих внутри себя порядка одного или всего нескольких оптических периодов. В отечественной литературе оптические сигналы, содержащие порядка одного периода колебаний, получили название предельно коротких импульсов (ПКИ) [3], а в англоязычной литературе – few-cycle pulses (FSP) [4]. В этих условиях $\omega\tau_p \sim 1$, поэтому уже невозможно ввести понятие огибающей, а следовательно, не имеет никакого смысла говорить об условиях (3). Можно еще сказать так, что в силу малой длительности импульса ширина его спектра сопоставима с его же центральной частотой, которая перестает иметь смысл несущей. Таким образом, для фемтосекундных импульсов перестает выполняться приближение ММО. Количество перешло в качество. Здесь для аналитического описания импульсной динамики требуется использование каких-либо других приближений или предположений.

Отдавая дань истории, отметим работу [5], где был предложен альтернативный подход описания явления СИП, не использующий приближение ММО. Вместо условий (3) было использовано приближение среды малой концентрации N

резонансных атомов, которая входит в правую часть уравнения (4), так как $P = 2dN \operatorname{Re} R$. Количественно условие малой концентрации записывается в виде $4\pi d^2 N / (\hbar\omega_0)^2 \ll 1$. Если правая часть в (4) мала, то свойства среды незначительно изменяются полем оптического импульса. Другими словами, нелинейные неоднородности среды, которые создает импульс, относительно малы. А раз так, то можно пренебречь эффектом отражения поля от им же создаваемых неоднородностей. Это позволяет приближенно, в соответствии с (3), исключить из (4) отраженную волну, что соответствует редукции данного уравнения от второго порядка относительно производных к первому. Это и было проделано в [5]. Данная процедура соответствует приближению однонаправленного распространения (ОНР). Важно заметить, что при ОНР импульс может содержать практически любое количество оптических колебаний: от одного до миллиона. Система, найденная в [5] и получившая название редуцированной системы Максвелла–Блоха (РМБ), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -b \operatorname{Im} S, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= i\omega_0 S + i\Omega W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\Omega \operatorname{Im} S. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\Omega = 2dE/\hbar$, динамический параметр S имеет смысл комплексного нестационарного дипольного момента, коэффициент B пропорционален концентрации рассматриваемых двухуровневых атомов.

Формально система (11) схожа с (1). Принципиальное же различие здесь заключается в том, что в (11) фигурируют не огибающие поля импульса ε и атомного дипольного момента R , а сами поле E и дипольный момент S .

Система (11), как и (1), принадлежит к классу полностью интегрируемых. В числе прочих она обладает решением типа бризера, схематически показанного на рис. 1, слева. Это двухпараметрическое решение, где в качестве свободных параметров можно взять центральную частоту ω его спектра и длительность τ_p . «Центр масс» бризера распространяется с постоянной групповой скоростью, но при этом его профиль в сопутствующей системе отсчета испытывает периодические пульсации. Данные пульсации обусловлены тем, что, помимо групповой скорости v , бризер обладает фазовой v_{ph} скоростью. При этом $v_{ph} \neq v$, как и должно быть в диспергирующей среде. Бризер, в отличие от солитона огибающей, может содержать произвольное число колебаний. Если $\omega\tau_p \gg 1$, бризерное решение системы (11) переходит в рассмотренный выше солитон огибающей СИП.

Таким образом, солитон огибающей СИП в условиях малой концентрации резонансных атомов есть частный случай бризерного решения системы РМБ.

В работах [6, 7] вместо приближения малой концентрации резонансных атомов было предложено использовать приближение спектрального перекрытия (СП): $(\omega_0\tau_p)^2 \ll 1$. Смысл данного приближения состоит в том, что спектральная ширина импульса $\delta\omega \sim 1/\tau_p > \omega_0$, то есть спектр импульса перекрывает частоту рассматриваемого квантового перехода, а потому возбуждение атомов может быть достаточно сильным.

В [6, 7] показано, что при условии СП динамика импульса подчиняется уравнению синус-Гордона вида (5). Но теперь усеченная площадь импульса определяется

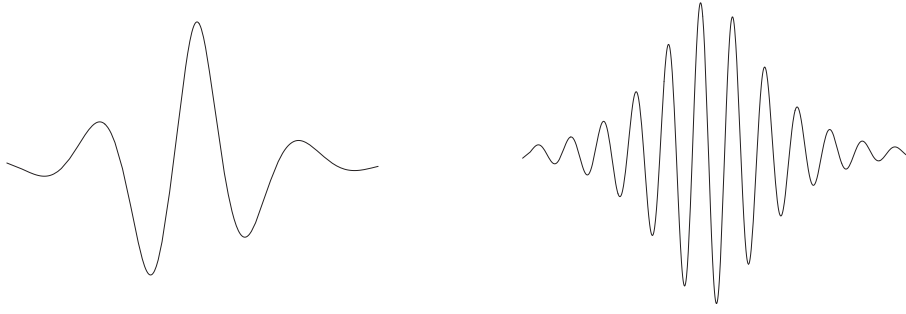


Рис. 1. Характерный профиль электрического поля E , соответствующий бризерному решению системы (11) в сопутствующей системе координат (слева), который при $\omega\tau_p \gg 1$ переходит в солитон огибающей системы (1), (2) (справа)

не огибающей его поля, а самим электрическим полем:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\tau} \Omega d\tau' = (2d/\hbar) \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau'.$$

Уравнение синус-Гордона также обладает бризерным решением типа, изображенного на рис. 1, которое в пределе большого числа осцилляций переходит в солитон огибающей самоиндуцированной прозрачности.

Выше в настоящем разделе мы рассмотрели случаи резонансных фемтосекундных солитонов. Под резонансом здесь следует понимать то, что в спектре импульса содержатся Фурье-компоненты, резонансные по отношению к возбуждаемым квантовым переходам. Возникает естественный вопрос «как описывать фемтосекундные солитоны, которые нерезонансно взаимодействуют со средой?» Какое уравнение здесь может стать аналогом НУШ вида (9)? Впервые попытка ответа на данный вопрос была предпринята в [6, 7]. В качестве модели была вновь рассмотрена система двухуровневых атомов. Однако теперь использовалось приближение оптической прозрачности (ОП), противоположное СП: $(\omega_0\tau_p)^2 \gg 1$. В этих условиях, как показано в [6, 7], динамика поля импульса описывается модифицированным уравнением Кортевега–де Вриза (МКдВ):

$$\frac{\partial E}{\partial x} - \alpha E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = 0, \quad (12)$$

где, как и прежде, $\tau = t - x/c$, α и β – постоянные, определяемые параметрами среды.

Используя представление (2), можно показать, что в пределе большого числа импульсных осцилляций, то есть при $\omega\tau_p \gg 1$, уравнение (12) переходит в НУШ вида (9). Таким образом, уравнение (12) обобщает (9) на случай, когда импульс содержит произвольное число осцилляций.

Оказывается, что и уравнение (12) обладает бризерным решением типа, изображенного на рис. 1. Данное решение хорошо описывает few-cycle pulse, а в пределе большого числа осцилляций оно переходит в солитон огибающей НУШ вида (10).

Двухуровневая модель, однако, здесь неудовлетворительна по двум основным причинам. Во-первых, спектр фемтосекундного импульса может быть достаточно широк для того, чтобы во взаимодействие с полем вовлекались другие квантовые переходы, отличные от рассматриваемого. Во-вторых, из данной модели однозначно следует, что $n_2 < 0$ [7]. В то же время для твердых диэлектриков в областях их

оптической прозрачности $n_2 > 0$ [8], что соответствует фокусирующему характеру нелинейности.

В работе [3] были предложены полуфеноменологические материальные уравнения, соответствующие фокусирующей нелинейности. При этом учитывался как электронный отклик среды, так и ионный. Для электронных переходов $\omega_0 \sim 10^{15} \text{с}^{-1}$, а для ионных колебательных мод $\omega_0 \sim 10^{13} \text{с}^{-1}$. Тогда при длительности импульса $\tau_p \sim 10$ фс для электронно-оптических переходов имеем приближение ОП, а для ионных мод – приближение СП. В этих условиях динамика фемтосекундного импульса в изотропном диэлектрике подчиняется уравнению вида:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \alpha E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + g \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' = 0. \quad (13)$$

Отметим, что все коэффициенты в (13) положительны. При этом условие $\alpha > 0$ соответствует фокусирующей нелинейности (сравните знаки нелинейных членов в (13) и в (12)). Третье слагаемое в левой части (13) соответствует дисперсии электронного отклика, а последнее – дисперсии ионного. При этом электронный отклик дает положительный вклад в дисперсию групповой скорости, а ионный – отрицательный. Если в (13) пренебречь ионной дисперсией, то приходим к уравнению МКдВ, но с разными знаками при нелинейности и дисперсии. В таких условиях данное уравнение не обладает локализованными солитонными и бризерными решениями. С физической точки зрения это означает, что при фокусирующей нелинейности солитоны могут образовываться только в области аномальной ДГС (см. выше). Если в качестве диэлектрика взять кварцевое стекло, то аномальная ДГС соответствует ближнему инфракрасному диапазону [3]. В пределе сильной аномальной ДГС в (13) можно отбросить электронную дисперсию (то есть положить формально $\beta = 0$). Тогда (13) переходит в уравнение Шефера–Уэйна [9], вновь принадлежащее к классу полностью интегрируемых [10]. Понятно, что солитоны и бризеры данного уравнения упруго взаимодействуют между собой.

В [3] было численно получено бризероподобное решение полного уравнения (13) в виде импульса, содержащего порядка полутора оптических колебаний (типа, изображенного слева на рис. 1). В работе [11] приближенно найдено соответствующее аналитическое решение. В обеих работах подчеркивается, что для существования такого решения принципиальна роль ионного отклика (интегрального слагаемого в (13)). В квазимонохроматическом же пределе ($\omega\tau_p \gg 1$) групповая скорость такого импульса, как и в случае солитонов НУШ, перестает зависеть от длительности импульса. Нетрудно показать, что в квазимонохроматическом пределе уравнение (13) переходит в НУШ вида (9).

Далее совершенно естественной представляется попытка обобщения уравнения (13) на оптические кристаллы (анизотропные среды). В [12] предложена теория распространения фемтосекундных оптических импульсов в одноосных кристаллах. Так как в таких кристаллах оптический импульс имеет обыкновенную E_o и необыкновенную E_e компоненты, то его поле следует рассматривать как векторное. Поэтому вместо одного уравнения получается система двух уравнений, которая здесь не приводится. В отличие от (13), данная система содержит, кроме кубической, квадратичную нелинейность, как и должно быть в анизотропных средах. Отметим одно явление, теоретически предсказанное в [13] и наблюдавшееся экспериментально в работе [14]. Пусть на вход одноосного кристалла подается квазимонохроматический импульс с определенной несущей частотой, поляризованный в плоскости обыкновенной волны. При условии, что групповая скорость обыкновенной волны на несущей частоте импульса равна фазовой скорости необыкновенной

на нулевой частоте, за счет квадратичной нелинейности первая способна породить необыкновенный импульс без несущей частоты, испытывая на нем последующее рассеяние. Можно говорить как бы о саморассеянии. В результате данного саморассеяния несущая частота импульса обыкновенной волны испытывает сдвиг в красную область, пропорциональный ее же входной интенсивности [13]. В экспериментальной работе [14] порождаемый импульс без несущей частоты трактовался как широкополосный сигнал терагерцового диапазона.

Заключение

Проведенный выше беглый экскурс в оптическую солитонную тематику удивительным образом обнаружил, что очень многие процессы распространения импульсов различных длительностей в различных средах описываются полностью интегрируемыми уравнениями или их системами. На самом деле «в жизни», как это обычно бывает, все значительно сложнее и запутаннее, чем «на бумаге». Мы здесь намеренно рассмотрели лишь одномерные случаи, когда параметры импульса зависят только от одной пространственной переменной x . В реальных же ситуациях поперечные размеры импульсов конечны и составляют обычно порядка миллиметра. Теоретические модели, в которых учитывается поперечная динамика оптических импульсов, значительно сложнее и не так красивы, как одномерные полностью интегрируемые модели [15]. Однако все не так плохо, если заметить, что продольные размеры рассмотренных выше солитонов значительно меньше соответствующих поперечных размеров. В этих случаях поперечную динамику можно учесть приближенно (например, с помощью вариационного подхода [16]), отталкиваясь от красивых и имеющих глубокий физический смысл одномерных солитонных решений. Здесь, пожалуй, нелишне удивиться тому, сколь различные физические ситуации для распространения оптических импульсов от нано- до фемтосекундных длительностей описываются столь же различными, но все же полностью интегрируемыми уравнениями.

Summary

S.V. Sazonov. On the Optical Solitons of Different Durations.

A short review of theory of the resonant and non-resonant optical solitons with nano- to femtosecond durations is presented.

Key words: Zakharov – Benney resonance, terahertz radiation, femtosecond pulse, uniaxial crystal, optical built, optical vortex.

Литература

1. *McCall S.L., Hahn E.L.* Self-induced transparency by pulsed coherent light // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – V. 18, No 2. – P. 908–911.
2. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 323 с.
3. *Козлов С.А., Сазонов С.В.* Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний светового поля в диэлектрических средах // *ЖЭТФ.* – 1997. – Т. 111, № 2. – С. 404–418.
4. *Brabec T., Krausz F.* Intense few-cycle laser fields: Frontiers of non-linear optics // *Rev. Mod. Phys.* – 2000. – V. 72, No 2. – P. 545–591.
5. *Caudrey P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Bullough R.K.* Exact multi-soliton solution of inhomogeneously broadened self-induced transparency equations // *J. Phys. A.* – 1973. – V. 6. – P. L53–L56.

6. *Беленов Э.М., Назаркин А.В.* О некоторых решениях уравнений нелинейной оптики без приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 51, № 5. – С. 252–255.
7. *Беленов Э.М., Назаркин А.В., Ущановский В.А.* Динамика распространения и взаимодействия сгустков электромагнитного поля в двухуровневых средах // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 100, № 3(9). – С. 762–775.
8. *Азаренков А.Н., Альтшулер Г.Б., Белашенков Н.Р., Козлов С.А.* Нелинейность показателя преломления лазерных твердотельных диэлектрических сред // Квант. электрон. – 1993. – Т. 20, № 8. – С. 733–757.
9. *Schaefer T., Wyane C.E.* Propagation of ultra-short optical pulses in cubic non-linear media // Physica D. – 2004. – V. 196. – P. 90–105.
10. *Sakovich S.Yu.* On integrability of one third-order non-linear evolution equation // Phys. Lett. A. – 2003. – V. 314, No 3. – P. 232–238.
11. *Сазонов С.В., Халяпин В.А.* О квазисолитонном распространении импульсов длительностью в несколько периодов оптических колебаний в изотропных диэлектриках // Опт. и спектр. – 2003. – Т. 95, № 3. – С. 452–457.
12. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* О нелинейном распространении предельно коротких импульсов в оптически одноосных средах // ЖЭТФ. – 2003. – Т. 123, № 6. – С. 1160–1178.
13. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* Непрерывное стоково саморассеяние оптического импульса в одноосном кристалле при условиях резонанса Захарова – Бенни // Квант. электрон. – 2005. – Т. 35, № 11. – С. 1019–1026.
14. *Степанов А.Г., Мельников А.А., Компанец В.О., Чекалин С.В.* Модификация спектра фемтосекундного лазерного импульса при высокоэффективной генерации терагерцового излучения методом оптического выпрямления // Письма в ЖЭТФ. – 2007. – Т. 85, № 5. – С. 279–282.
15. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
16. *Viduy A.N., Sazonov S.V.* Hole-vortex solitons // Phys. Rev. E. – 2006. – V. 74, No 6. – P. 066608-1–066608-8.

Поступила в редакцию
18.02.08

Сазонов Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Российского научного центра «Курчатовский институт», г. Москва.
E-mail: sazonov.sergey@gmail.com