

УДК 539.189.1

ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В МЕЗОАТОМАХ И НЕЛОКАЛЬНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЮОНА С ЯДРОМ

Р.Х. Гайнутдинов, А.С. Июдин, А.А. Мутыгуллина

Аннотация

Эффекты поляризации вакуума в мюонных атомах исследуются с помощью формализма обобщенной квантовой динамики. Показано, что влияние эффектов, связанных с нелокальностью взаимодействия мюона с ядром, на свойства мюонных атомов может быть значительным. В работе обсуждаются новые перспективы использования формализма обобщенной квантовой динамики в теории мюонных атомов.

Введение

Важность использования мюона как пробной частицы при исследовании электромагнитной структуры атомных ядер была понята достаточно давно. Из-за большой массы мюона в мюонных атомах радиус боровской орбиты в 200 раз меньше, чем у соответствующего обычного атома, и, следовательно, расположение $1s$ -уровня очень чувствительно к распределению заряда в ядре. В тяжелых ядрах, таких, как свинец, мюон в низшем энергетическом состоянии проводит примерно половину времени жизни внутри ядра. Исследование электромагнитной структуры ядра предполагает, что существующая теория мюонного атома, а именно, уравнение Шредингера (Дирака) с учетом эффектов поляризации вакуума и поправок на собственную энергию частиц обеспечивает достаточную точность квантово-электродинамических вычислений. Проверкой такой теории может служить сравнение ее предсказаний для случая, когда ядро не сильно влияет на энергетические уровни атома, с результатами точных измерений. Однако теоретически рассчитанные энергии перехода отличаются от экспериментальных значений, и эти различия не укладываются в ожидаемую точность квантово-электродинамических вычислений. Например, в работе [1] была рассчитана поправка шестого порядка поляризации вакуума, приводящая к дэмбовскому сдвигу состояний $2P_{1/2} - 2S_{1/2}$ мюонного водородного атома (связанного состояния $\mu^- p^+$). Учет этой поправки позволяет уменьшить разногласие между теоретическими предсказаниями и экспериментом, но все же не избежать их. Однако в случае тяжелых атомов теория возмущения неприменима и необходимо более последовательное описание эффектов поляризации вакуума. Причина этого состоит в том, что в случае тяжелых мюонных атомов эффекты поляризации вакуума очень значительны и не могут считаться малой поправкой. Это происходит потому, что электрон-позитронные пары распространяются на расстояния порядка комптоновской длины волны электрона, а многие мюонные орбиты лежат внутри этого интервала. Более того, при таких масштабах проявляется нелокальность во взаимодействии электрон-позитронных пар. Учет этого эффекта невозможен на основе обычной теории мюонного атома, так как уравнение Шредингера локально во времени и не может описать эволюцию квантовой системы с нелокальным во времени взаимодействием. В данной статье

эффекты поляризации вакуума исследуются с использованием формализма обобщенной квантовой динамики, развитого в работе [2]. Этот формализм основывается на обобщенном динамическом уравнении, полученном как наиболее общее динамическое уравнение, совместное с современными концепциями квантовой физики. Будучи эквивалентным уравнению Шредингера в случае мгновенных взаимодействий, это уравнение допускает обобщение на случай, когда динамика в системе задается нелокальным во времени взаимодействием. В работе показано, что динамика мюона в поле ядра описывается обобщенным динамическим уравнением с нелокальным во времени оператором взаимодействия, и это позволяет учесть нелокальность во времени взаимодействия мюона с ядром, связанную с поляризацией вакуума, при описании мюонных атомов.

1. Обобщенная квантовая динамика

Кратко рассмотрим основные идеи, лежащие в основе обобщенной квантовой динамики. В настоящее время имеются две альтернативные формулировки квантовой теории: каноническая и фейнмановская. Эти две эквивалентные формулировки принципиально отличаются по используемому в них математическому аппарату. Каноническая формулировка основана на использовании векторов и операторов, определенных на гильбертовом пространстве состояний. Связь этих векторов и операторов, соответственно, с состояниями квантовой системы и наблюдаемыми определяется специальными постулатами, которые выражают основные принципы квантовой механики. Динамическим постулатом канонической формулировки является предположение о том, что динамика квантовой системы описывается уравнением Шредингера. В основу фейнмановской формулировки квантовой теории положен анализ явления квантовой интерференции, на основе которого был сформулирован принцип суперпозиции амплитуд вероятности [5]. Этот постулат используется как основополагающий постулат теории. Его можно использовать различными способами в зависимости от того, на какие классы можно подразделить альтернативы [5]. В частности, амплитуду вероятности $\langle \psi_2 | U(t, t_0) | \psi_1 \rangle$ того, что при измерении в момент времени t система будет обнаружена в состоянии $|\psi_2\rangle$, если в момент времени t_0 она находилась в состоянии $|\psi_1\rangle$, можно представить как сумму вкладов от всех альтернативных способов реализации соответствующего эволюционного процесса. В работе [2] было показано, что в качестве альтернатив можно использовать процессы с определенными временами начала и конца взаимодействия в системе. В этом случае амплитуда $\langle \psi_2 | U(t, t_0) | \psi_1 \rangle$ может быть представлена в виде

$$\langle \psi_2 | U(t, t_0) | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \langle \psi_2 | \tilde{S}(t_2, t_1) | \psi_1 \rangle. \quad (1)$$

Здесь $\langle \psi_2 | \tilde{S}(t_2, t_1) | \psi_1 \rangle$ – амплитуда вероятности того, что если в момент времени t_1 состояние системы было $|\psi_1\rangle$, то взаимодействие в системе начнется в момент времени t_1 , закончится в момент времени t_2 , и в тот же момент система будет обнаружена в состоянии $|\psi_2\rangle$. Первый член в правой части (1) описывает вклад от процесса, в котором взаимодействие в системе не происходит ни в один момент времени.

Как было показано в работе [2], для того чтобы оператор эволюции был унитарным и удовлетворял композиционному закону, оператор $\tilde{S}(t_2, t_1)$ должен удо-

влетворять уравнению

$$(t_2 - t_1)\tilde{S}(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt_4 \int_{t_1}^{t_4} dt_3 (t_4 - t_3)\tilde{S}(t_2, t_4)\tilde{S}(t_3, t_1). \quad (2)$$

Замечательная особенность этого уравнения заключается в том, что оно работает как рекуррентное соотношение и позволяет определить $\tilde{S}(t_2, t_1)$ для любых времен t_1 и t_2 , если заданы $\tilde{S}(t'_2, t'_1)$, соответствующие бесконечно малым временам $\tau = t'_2 - t'_1$ длительности взаимодействия. Естественно предположить, что в пределе $t_2 \rightarrow t_1$ наибольший вклад в оператор эволюции дают процессы, ассоциируемые с фундаментальным взаимодействием в системе. Обозначая этот вклад $H_{int}(t_2, t_1)$, можно записать граничное условие для уравнения (2)

$$\tilde{S}(t_2, t_1) \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} H_{int}(t_2, t_1), \quad (3)$$

где $\tau = t_2 - t_1$. Если оператор $H_{int}(t_2, t_1)$ задан, то уравнение (2) позволяет определить оператор $\tilde{S}(t_2, t_1)$ и, следовательно, оператор эволюции. Таким образом, это уравнение может рассматриваться как динамическое уравнение. В случае, когда обобщенный оператор взаимодействия имеет следующий вид

$$H_{int}(t_2, t_1) = -2i\delta(t_2 - t_1)H_I(t_1), \quad (4)$$

где $H_I(t)$ – гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия, из уравнения (2) можно получить уравнение Шредингера [2]. В то же время уравнение (2) позволяет обобщить теорию на случай, когда взаимодействие в системе является нелокальным во времени и, следовательно, динамика не является гамильтоновой. Используя представление (1), для оператора эволюции можно записать выражение

$$\begin{aligned} \langle n_2 | U(t, t_0) | n_1 \rangle &= \langle n_2 | n_1 \rangle + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-i(z - E_{n_2})t] \times \\ &\times \frac{\langle n_2 | T(z) | n_1 \rangle \exp[i(z - E_{n_1})t_0]}{(z - E_{n_2})(z - E_{n_1})}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z = x + iy$, $y > 0$, n обозначает полный набор дискретных и непрерывных переменных, описывающих систему, $|n\rangle$ – собственные вектора свободного гамильтониана H_0 и $\langle n_2 | T(z) | n_1 \rangle$ определяется соотношением

$$\langle n_2 | T(z) | n_1 \rangle = i \int_0^{\infty} d\tau \exp(iz\tau) \langle n_2 | \tilde{T}(\tau) | n_1 \rangle. \quad (6)$$

В терминах оператора $T(z)$ обобщенное динамическое уравнение (2) может быть представлено в форме [2]

$$\frac{d\langle \psi_2 | T(z) | \psi_1 \rangle}{dz} = - \sum_n \frac{\langle \psi_2 | T(z) | n \rangle \langle n | T(z) | \psi_1 \rangle}{(z - E_n)^2}. \quad (7)$$

Как следует из (3), граничное условие для этого уравнения имеет вид

$$T(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} B(z) \quad (8)$$

и

$$B(z) = i \int_0^{\infty} d\tau \exp[iz\tau] H_{int}^{(s)}(\tau),$$

где $H_{int}^{(s)}(\tau) = \exp[-iH_0t_2]H_{int}(t_2, t_1)\exp[iH_0t_1]$ является обобщенным оператором взаимодействия в представлении Шредингера. Как следует из уравнения (5), для описания низкоэнергетической динамики мы должны получить T -матрицу для значений z , относящихся к низкоэнергетической теории. Уравнение (7) позволяет получить решения для любых z , если определено соответствующее граничное условие для этого уравнения. Граничное условие (8) означает, что наибольший вклад в $T(z)$ в пределе $|z| \rightarrow \infty$ дают процессы, ассоциируемые с фундаментальными взаимодействиями в рассматриваемой системе. Эти процессы описываются оператором $B(z)$. Однако, чтобы низкоэнергетическое приближение имело смысл, оператор $B(z)$ должен определяться, исходя из степеней свободы, значимых для данного низкоэнергетического приближения. Это означает, что несмотря на то, что в граничном условии (8) z устремляется к бесконечности, можно ограничиться рассмотрением области энергии, лежащей гораздо выше нашего низкоэнергетического приближения, но гораздо меньшей области энергии соответствующей фундаментальной высокоэнергетической теории. Такую область энергий обозначим как \mathcal{D} . Тот факт, что область \mathcal{D} лежит гораздо выше масштаба низкоэнергетической динамики, позволяет утверждать, что при таких «бесконечно больших» энергиях основной вклад в оператор $T(z)$ дают процессы, которые можно определить как «фундаментальные» для данной низкоэнергетической теории. И, как следствие этого, оператор взаимодействия $B(z)$ достаточно близок к истинной T -матрице. Так, чтобы учесть тот факт, что любая теория имеет границы применимости, вместо граничного условия (8) для уравнения (7) должны воспользоваться выражением

$$\langle \psi_2 | T(z) | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | B(z) | \psi_1 \rangle + O\{h(z)\}, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

Для того чтобы уравнение (7) с граничным условием (9) имело единственное решение, оператор взаимодействия $B(z)$ должен быть достаточно близок к истинной T -матрице в области \mathcal{D} , другими словами, функция $h(z)$ должна быть малой для $z \in \mathcal{D}$. Развитая таким образом обобщенная квантовая динамика открывает новые возможности для решения многих проблем квантовой физики [3, 4].

2. Поляризация электронного вакуума

Важным процессом, дающим вклад в лэмбовский сдвиг в атомах, является процесс поляризации электронного вакуума. Этот процесс играет очень значительную роль и в случае мюонных атомов. Рассмотрим водородоподобный мюонный атом. Для описания физических свойств такого атома должны рассмотреть динамику мюона в поле ядра. Во-первых, должны определить оператор, описывающий взаимодействие между мюоном и полем ядра. Как было отмечено выше, оператор взаимодействия, определяющий динамику системы при энергиях, близких к энергии ионизации водородоподобного мюонного атома, определяется поведением соответствующей T -матрицы в области \mathcal{D} , которая расположена гораздо выше такой энергии. Основной вклад в T -матрицу, описывающую динамику мюона в поле ядра, в области \mathcal{D} дают упорядоченные во времени диаграммы квантовой электродинамики, изображенные на рис. 1. Эта T -матрица может быть использована в качестве оператора взаимодействия $B(z)$. Решая уравнение (7) с оператором взаимодействия $B(z)$, получим значения T -матрицы при низких энергиях, где невозможно использовать теорию возмущения. Если зависимость оператора $B(z)$ от z в области \mathcal{D} мала, то динамика системы является гамильтоновой и описывается уравнением Шредингера с потенциалом $V = B(z)$, $z \in \mathcal{D}$. В общем случае оператор $B(z)$ зависит от z в области \mathcal{D} . При этом динамика системы негамильтонова

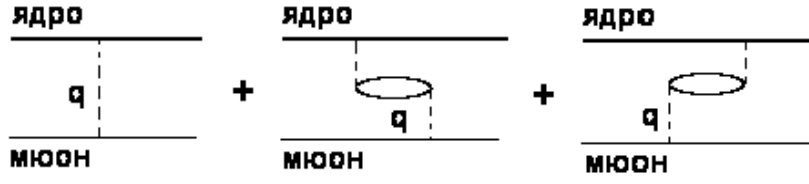


Рис. 1. Упорядоченные во времени диаграммы, описывающие взаимодействие между мюоном и ядром

и описывается обобщенным динамическим уравнением с нелокальным во времени оператором взаимодействия. Исследуем, как зависит характер динамики в системе от атомного номера Z для мюонных атомов. В квантовой электродинамике однопетлевая диаграмма описывается поляризационным оператором $\Pi_{\mu\nu}(k)$, который после перенормировки принимает вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{\alpha}{\pi} (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) J\left(\frac{k^2}{4m_e^2}\right), \quad (10)$$

где k – четырехимпульс фотона, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор и

$$J(s) = -\frac{s}{3} \int_1^\infty \frac{dx(1+2/x)}{x(x-s+i0)} \sqrt{1-1/x}. \quad (11)$$

Упорядоченные во времени компоненты поляризационного оператора $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p_0, \mathbf{p})$, показанные на рис. 1, даются выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p_0, \mathbf{p}) &= \int d^4x \theta(x_0) \exp[ipx] \Pi_{\mu\nu}(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx_0 \int dk_0 \exp[-ip_0x_0] \exp[ik_0x_0] \Pi_{\mu\nu}(k_0, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Pi_{\mu\nu}(x)$ – поляризационный оператор в координатном представлении

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp[-ipx] \Pi_{\mu\nu}(p) \quad (13)$$

и

$$\theta(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 \geq 0, \\ 0, & x_0 < 0. \end{cases}$$

Теперь, суммируя диаграммы, показанные на рис. 1, можно получить оператор $B(z)$

$$\langle \mathbf{p}_2 | B(z) | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{Ze^2}{q^2} + \langle \mathbf{p}_2 | B_{pol}(z) | \mathbf{p}_1 \rangle, \quad (14)$$

где

$$\langle \mathbf{p}_2 | B_{pol}(z) | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{Ze^2}{q^4} \left(\tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_1}, \mathbf{q}) + \tilde{\Pi}_{00}(z - E_{p_2}, \mathbf{q}) \right), \quad (15)$$

и $q = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|$. Здесь масса ядра полагается равной бесконечности и, следовательно, \mathbf{p} – импульс мюона. Также полагаем, что если заряд ядра не слишком велик,

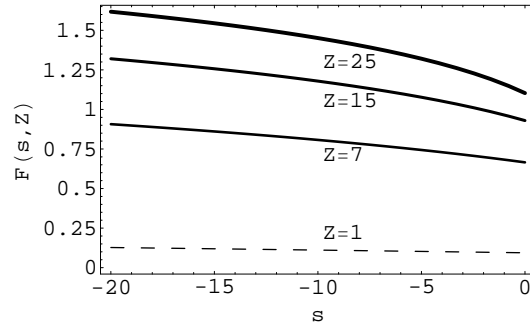


Рис. 2. Зависимость функции $F(s, Z) = |\tilde{J}(zE_{ion}, q = mZ\alpha)|$ от s

то основной вклад в диаграммах, изображенных на рис. 1, исходит от кулоновских фотонов. Используя уравнение (10), для $\Pi_{00}(z, \mathbf{q})$ получаем

$$\Pi_{00}(z, \mathbf{q}) = -\frac{\alpha}{\pi} q^2 \tilde{J}(z, q), \quad (16)$$

где

$$\tilde{J}(z, q) = -\frac{2m_e^2}{3} \int_1^\infty \frac{dx(x+2)\sqrt{x-1}}{x^{3/2}(4m_e^2x - z^2 + q^2 + i0)} \left(\frac{z}{\sqrt{q^2 + 4m_e^2x}} + \frac{z^2 - q^2}{4m_e^2x} \right), \quad (17)$$

и $q = |\mathbf{q}|$. Однако, как видно из рис. 2, для $Z > 10$ зависимость функции $\tilde{J}(z, q)$ от z становится очень значительной. На рис. 2 представлены результаты расчета для функции, которая характеризует зависимость поляризационного оператора $\Pi_{00}(z, \mathbf{q})$ от z

$$F(s, Z) = |\tilde{J}(zE_{ion}, q = mZ\alpha)|.$$

При этом учитываем, что в атоме с атомным номером Z характерный импульс мюона имеет порядок $mZ\alpha$. Как видно из рис. 2, в случае мюонного водорода ($Z = 1$) зависимость оператора $B(z)$ от z мала для широкого диапазона энергий, меньших энергии ионизации E_{ion} . Это означает, что в такой системе динамика является гамильтоновой и и может быть описана уравнением Шредингера с потенциалом

$$\langle \mathbf{p}_2 | V | \mathbf{p}_1 \rangle = -\frac{e^2 Z}{q^2} + \langle \mathbf{p}_2 | V_{pol} | \mathbf{p}_1 \rangle,$$

где $\langle \mathbf{p}_2 | V_{pol} | \mathbf{p}_1 \rangle$ – потенциал Юлинга. В то же время для $Z > 10$ зависимость оператора $B(z)$ от z в области $|z| > E_{ion}$ становится значительной. Это означает, что в случае таких атомных номеров динамика мюона в поле ядра не является гамильтоновой и, следовательно, не описывается уравнением Шредингера. В этом случае должны использовать обобщенное динамическое уравнение с нелокальным во времени оператором взаимодействия (14).

3. Лэмбовский сдвиг в мюонных атомах

Преимущество обобщенного динамического уравнения заключается в том, что оно позволяет учесть нелокальность во взаимодействии мюона с ядром при описании динамики мюона в поле ядра. Используя уравнение (14), можно описать динамику мюона в поле ядра. В частности, таким образом можно найти связанные состояния для данной системы, которые определяют состояния мюонного атома

и его энергетические уровни. Однако эффекты поляризации вакуума, которые в операторе взаимодействия (14) описываются нелокальным оператором $B_{pol}(z)$, могут рассматриваться как поправка к кулоновскому взаимодействию, несмотря на то, что в мюонных атомах вклад в Лэмбовский сдвиг от эффектов, связанных с поляризацией вакуума, имеет первостепенное значение (поэтому в данной работе другие эффекты, дающие вклад в сдвиг энергетических уровней, не рассматриваются). По этой причине можно начать с решения уравнения (7) с оператором взаимодействия

$$\langle p_2 | B(z) | p_1 \rangle = -\frac{e^2 Z}{q^2}, \quad (18)$$

который совпадает с решением уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом

$$\langle p_2 | V_c | p_1 \rangle = -\frac{e^2 Z}{q^2}.$$

Связанные состояния мюона в кулоновском поле ядра и их энергии могут считаться «голыми» состояниями и энергетическими уровнями мюонного атома, когда частицы системы не взаимодействуют с электронным вакуумом. Для того чтобы определить свойства реальных мюонных атомов, должны рассмотреть взаимодействие «голых» атомов с вакуумом.

T -матрица, определенная в (7), описывает не только взаимодействие между частицами системы, но и их собственную энергию. Это отражается в том, что T -матрица содержит член, который имеет такую же структуру, как первый член в операторе эволюции (5), описывающий вклад в этот оператор от процессов, когда в системе нет взаимодействия. Другими словами, T -матрица может быть представлена в форме

$$\langle n_2 | T(z) | n_1 \rangle = \langle n_2 | n_1 \rangle \mu(z, n_1) + \langle n_2 | T'(z) | n_1 \rangle,$$

где $\mu(z, n_1)$ – некоторая функция, описывающая собственную энергию частиц, и $\langle n_2 | T'(z) | n_1 \rangle$ описывает вклад в T -матрицу от процессов, когда существует взаимодействие, по крайней мере, между двумя частицами в системе. Так как в моментном базисе $\langle n_2 | n_1 \rangle$ есть произведение дельта-функции $\delta^3(p_2 - p_1)$ для каждой из частиц в состоянии $|n_1\rangle$, присутствие собственной энергии частиц в уравнении (7) ведет к тому, что оно оказывается расходящимся в физической области. Эта трудность, однако, может быть преодолена, используя преобразование [6], которое приводит к замене пропагатора

$$G_0(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n},$$

описывающего эволюцию свободных частиц, пропагатором $G(z)$, описывающим эволюцию частиц, взаимодействующих с вакуумом, и, соответственно, оператор $T(z)$ заменяется оператором $M(z)$, который описывает процессы, когда существует взаимодействие, по крайней мере, между двумя частицами в системе. Операторы $T(z)$ и $M(z)$ связаны следующим образом:

$$G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z) = G(z) + G(z)M(z)G(z). \quad (19)$$

Пропагатор $G(z)$ может быть представлен в форме [6]

$$G(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n - C(z, n)}.$$

Функция $C(z, n)$ определяет физические массы частиц.

В терминах $M(z)$ и $G(z)$ уравнение (7) может быть переписано в форме [6]:

$$\frac{d\langle n_2|M(z)|n_1\rangle}{dz} = -\langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle - \langle n_2|T(z)|n_1\rangle(\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|D_\delta(z)|n_2\rangle), \quad (20)$$

$$\frac{dC(z, n)}{dz} = -\langle n|D_\delta(z)|n\rangle, \quad (21)$$

где $\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle$ и $\langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle$ связаны с операторами $M(z)$ и $G(z)$ следующим образом:

$$\langle n_2|D(z)|n_1\rangle = \langle n_2|n_1\rangle\langle n_1|D_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|D_\tau(z)|n_1\rangle, \quad (22)$$

$$D(z) = M(z)G(z)M(z).$$

Здесь первый член с правой стороны в уравнении (22) описывает «сингулярную» часть $\langle n_2|D(z)|n_1\rangle$, содержащую $\langle n_2|n_1\rangle$. Соответственно, из уравнений (8) и (19) следует, что граничные условия для уравнений (20) и (21) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \langle n_2|M(z)|n_1\rangle &\xrightarrow{|z|\rightarrow\infty} \langle n_2|B_\tau(z)|n_1\rangle, \\ C(z, n) &\xrightarrow{|z|\rightarrow\infty} \langle n|B_\delta(z)|n\rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

где $B_\delta(z)$ и $B_\tau(z)$ описывают, соответственно, «сингулярную» и «регулярную» части оператора взаимодействия

$$\langle n_2|B(z)|n_1\rangle = \langle n_2|n_1\rangle\langle n_1|B_\delta(z)|n_1\rangle + \langle n_2|B_\tau(z)|n_1\rangle.$$

Используем эти уравнения для описания взаимодействия мюонного атома с вакуумом. Прежде всего, должны выбрать соответствующее пространство свободных состояний. В качестве такого пространства можуж использовать H_{as} , построенный в базе связанных состояний мюона в поле ядра и свободных состояний мюона и ядра. Другими словами, будем рассматривать состояния мюонного атома $|m\rangle$ как «свободные» состояния. Здесь m обозначает полный набор дискретных переменных, характеризующих состояние атома в целом. Эволюция атомного состояния $|m\rangle$ описывается выражением

$$\langle m|G(z)|m\rangle = \frac{1}{z - E_m^0 - C_m(z)},$$

где $C_m(z) \equiv C(z, n)$, когда состояние квантовой системы, определяемое n , тождественно состоянию $|m\rangle$. При описании взаимодействий атома с электронным вакуумом также должны учитывать состояния, содержащие атомы и электронные пары. При проведении расчетов с точностью порядка α^2 достаточно учитывать состояния только с одной электрон-позитронной парой. Такие состояния обозначим $|m; \mathbf{p}, s\rangle$, где \mathbf{p} — импульс электрона в с.д.м. (соответственно, $-\mathbf{p}$ — импульс позитрона) и s описывает спин электрона и позитрона. Будем считать электрон и позитрон реальными с физическими массами, включающими поправки, связанные с собственной энергией частиц. По этой причине не будем рассматривать поправки на собственную энергию, и тогда для $\langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1|G(z)|m_1; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1\rangle$ можно записать

$$\begin{aligned} \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1|G(z)|m_1; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1\rangle &= \\ &= \delta_{s_2 s_1} \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \langle m|G(z - E_{p_1} - E_{p_2})|m\rangle = \\ &= \frac{\delta_{s_2 s_1} \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \langle m_2|m_1\rangle}{z - E_{m_1}^0 - E_{p_1} - E_{p_2} - C_m(z - E_{p_1} - E_{p_2})}, \end{aligned}$$

где $E_p = \sqrt{m_e^2 + |\mathbf{p}|^2}$. Здесь предполагаем, что вектора $|\mathbf{p}, s\rangle$ нормированы как $\langle \mathbf{p}_1, s_1 | \mathbf{p}_2, s_2 \rangle$.

Для рассматриваемой проблемы уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dC_{m_1}(z)}{dz} = & - \sum_{m \neq m_1} \frac{\langle m_1 | M(z) | m \rangle \langle m | M(z) | m_1 \rangle}{(z - E_m^0 - C_m(z))^2} - \\ & - \sum_m \sum_{s_1 s_2} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \frac{\langle m_1 | M(z) | m; \mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2 \rangle \langle m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | M(z) | m_1 \rangle}{(z - E_{m_1}^0 - E_{p_1} - E_{p_2} - C_m(z - E_{p_1} - E_{p_2}))^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь учтено, что для расчетов с точностью порядка α^2 нет необходимости рассматривать состояния мюона, принадлежащие непрерывному спектру. Очевидно, $\langle m_2 | M(z) | m_1 \rangle$ может быть ненулевым только для переходов между состояниями с одинаковым полным угловым моментом J , его проекцией и четностью. В водородоподобных атомах энергетические уровни лежат очень далеко друг от друга и, следовательно, их влияние друг на друга мало. Таким образом, для водородоподобных атомов уравнение (24) может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} \frac{dC_m(z)}{dz} = & - \sum_m \sum_{s_1 s_2} \int d^3 p_1 \times \\ & \times \int d^3 p_2 \frac{\langle m_1 | M(z) | m; \mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2 \rangle \langle m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | M(z) | m_1 \rangle}{(z - E_{m_1}^0 - E_{p_1} - E_{p_2} - C_m(z - E_{p_1} - E_{p_2}))^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда решением уравнения (20) с точностью порядка α^2 будет выражение

$$\begin{aligned} \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | M(z) | m_1 \rangle = & \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | B(z) | m_1 \rangle = \\ = & \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^N | m_1 \rangle + \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^\mu | m_1 \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

с

$$\langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^N | m_1 \rangle = - \frac{Ze^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \bar{u}_e(\mathbf{p}_1, s_1) \gamma^0 v_e(\mathbf{p}_2, s_2) \delta_{m_1 m_2},$$

$$\begin{aligned} \langle m_2; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^\mu | m_1 \rangle = & \frac{e^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \psi_{m_2}^*(\mathbf{k}_2) \psi_{m_1}(\mathbf{k}_1) \times \\ & \times \bar{u}_e(\mathbf{p}_1, s_1) \gamma^0 v_e(\mathbf{p}_2, s_2) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1). \end{aligned}$$

Соответственно, для $\langle m_1 | M(z) | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \langle m_1 | M(z) | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle = & \langle m_1 | B(z) | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle = \\ = & \langle m_1 | H_I^N | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle + \langle m_1 | H_I^\mu | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\langle m_1 | H_I^N | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle = - \frac{Ze^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \bar{v}_e(\mathbf{p}_2, s_2) \gamma^0 u_e(\mathbf{p}_1, s_1) \delta_{m_1 m_2},$$

$$\begin{aligned} \langle m_1 | H_I^\mu | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle = & \frac{e^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \psi_{m_2}^*(\mathbf{k}_2) \psi_{m_1}(\mathbf{k}_1) \times \\ & \times \bar{v}_e(\mathbf{p}_2, s_2) \gamma^0 u_e(\mathbf{p}_1, s_1) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1). \end{aligned}$$

Подстановка (26) и (27) в (25) приводит к

$$\begin{aligned} \frac{dC_m(z)}{dz} = & - \sum_{s_1 s_2} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \frac{1}{(z - E_m^0 - E_{p_1} - E_{p_2} - C_m(z - E_{p_1} - E_{p_2}))^2} \times \\ & \times (\langle m | H_I^N | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle \langle m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^\mu | m \rangle + \\ & + \langle m | H_I^\mu | m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 \rangle \langle m; \mathbf{p}_2, s_2; \mathbf{p}_1, s_1 | H_I^N | m \rangle). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь учтено, что из-за большой массы мюона вклад от членов, содержащих два оператора H_I^μ , мал и им можно пренебречь. Решая это уравнение с граничным условием (23), получим функции $C_m(z)$, которые могут быть использованы для вычисления энергетических уровней $E_m(z)$ мюонных атомов. Эти энергии определяются из уравнения

$$E_m - E_m^0 - C_m(E_m) = 0,$$

где $\Delta E_m = E_m - E_m^0$ – лэмбовский сдвиг энергетических уровней.

Заключение

Было показано, что в мюонных атомах эффекты нелокальности во взаимодействии мюона с ядром, вызванные поляризацией электронного вакуума, могут быть значительными. Формализм обобщенной квантовой динамики позволяет учесть эту нелокальность при описании мюонных атомов. Была намечена стратегия вычисления вклада в лэмбовский сдвиг энергетических уровней обусловленного эффектами поляризации электронного вакуума. Для этого нужно решать уравнение (7) с оператором взаимодействия (18), который определяет «голые» состояния и энергетические уровни мюонных атомов. Это решение совпадает с решением уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом. Для больших атомных номеров Z для определения «голых» состояний должны использовать уравнение Дирака. Энергетические состояния и энергетические уровни могут быть получены из решения уравнений (20) и (21), которые описывают взаимодействие атома с электронным вакуумом. Уравнение (28) не учитывает эффектов, связанных с конечным размером ядра и, следовательно, может быть напрямую применимо только к описанию переходов, где эти эффекты малы, например, $3d - 2p$. Для таких переходов основной поправкой к дираковской энергии является поляризация вакуума. С другой стороны, расположение уровня $1s$ чувствительно к распределению заряда в ядре. В этом случае нужно учесть эффекты, связанные с конечными размерами ядер, и, как было указано, мюонные атомы используются для изучения электромагнитной структуры ядер. Например, радиус ядра R для единичного распределения может быть получен из сравнения экспериментальных данных с теоретическими расчетами для точечного ядра. Однако для такого определения радиуса ядра теория мюонного атома должна обеспечивать достаточную точность вычислений. Но в настоящее время существует расхождение между значениями радиуса ядра, полученными при помощи электронного рассеяния и мюонных атомов. Можно надеяться, что учет нелокальности во взаимодействии мюона с ядром сможет устранить это расхождение.

Summary

R.Kh. Gainutdinov, A.S. Iyudin, A.A. Mutygullina. Effects of the vacuum polarization in muonic atoms and nonlocality of the interaction of a muon with nucleus.

The vacuum polarization effects in the muonic atoms are investigated within the framework of the generalized quantum dynamics. We show that the effect of nonlocality in time of the

interaction of a muon with a nuclei caused by the polarization on the properties of the muonic atoms can be very significant. New possibilities that the generalized quantum dynamics opens in the theory of the muonic atoms are discussed.

Литература

1. *Kinoshita T., Nio M.* Sixth-order vacuum-polarization contribution to the lamb shift of muonic hydrogen // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – V. 82. – P. 3240–3243.
2. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
3. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A.* Nonlocality of the NN interaction in an effective field theory // *Phys. Rev. C.* – 2002. – V. 66, Art. 014006.
4. *Gainutdinov R.Kh., Mutygullina A.A., Scheid W.* Effects of nonlocality in time of interactions of an atom with its surroundings on the broadening of spectral lines of atoms // *Phys. Lett. A.* – 2002. – V. 306. – P. 1–9.
5. *Feynman R.P.* Space - time approach to non-relativistic quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.* – 1948. – V. 20. – P. 367; *Feynman R.P., Hibbs A.R.* Quantum Mechanics and Path Integrals. – N. Y.: McGraw-Hill, 1965.
6. *Гайнутдинов Р.Х.* Естественное уширение спектральных линий многозарядных ионов и проблема поверхностных расходимостей // *ЖЭТФ.* – 1995. – Т. 108. – С. 1600–1613.

Поступила в редакцию
12.09.05

Гайнутдинов Ренат Хамитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и спектроскопии Казанского государственного университета.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

Июдин Алексей Сергеевич – магистрант кафедры оптики и спектроскопии Казанского государственного университета.

Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*