

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**  
**«Казанский (Приволжский) федеральный университет»**



**УТВЕРЖДАЮ**

Первый проректор  
Проректор по научной деятельности

\_\_\_\_\_ Д.А. Тагорский

« 26 » \_\_\_\_\_ 2025 г.



**Программа кандидатского экзамена по научной специальности**  
**1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика**

## **Цель и задачи кандидатского экзамена по специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика.**

### **Цель:**

Кандидатские экзамены являются составной частью аттестации научных и научно-педагогических кадров. Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателей ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе. Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени.

Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки соискателя, знание общих концепций и методологических вопросов соответствующей науки, истории её формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

### **Задачами является выявление:**

- теоретических и практических знаний и их применение в профессиональной деятельности;
- уровня владения понятийным аппаратом и умения им пользоваться при ответе;
- навыков систематизации полученных знаний, способности четко, логично и аргументированно излагать материал по избранной тематике.

### **Основные требования:**

Основным требованием допуска к сдаче кандидатского экзамена является наличие подписанного заявления и утвержденной дополнительной программы кандидатского экзамена.

Сдача кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с календарным учебным графиком и индивидуальным учебным планом аспиранта. Кандидатские экзамены у прикрепленных лиц принимаются в период, установленный приказом ректора КФУ. В случае представления диссертации в совет по защите на соискание ученой степени кандидата наук, возможен прием кандидатских экзаменов вне сроков сессии.

### **Порядок проведения кандидатского экзамена:**

Кандидатский экзамен по специальности проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете 2 вопроса по основной программе и 1 вопрос по дополнительной программе. Дополнительная программа утверждается на Ученом совете Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского для каждого аспиранта персонально со списком вопросов по теме диссертационного исследования аспиранта. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 5 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

### **Критерии оценивания:**

Оценка «отлично» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении

мыслей и обоснованностью выводов; демонстрирует знание источников литературы, понятийного аппарата и умение ими пользоваться при ответе.

Оценка «хорошо» выставляется, если аспирант дает полные, исчерпывающие и аргументированные ответы на все основные и дополнительные экзаменационные вопросы; ответы на вопросы отличаются логичностью, четкостью, знанием понятийного аппарата и литературы по теме вопроса при незначительных упущениях при ответах.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если аспирант дает неполные и слабо аргументированные ответы на вопросы, демонстрирующие общее представление и элементарное понимание существа поставленных вопросов, понятийного аппарата и обязательной литературы.

Ответ оценивается «неудовлетворительно», если аспирант не понимает существа экзаменационных вопросов и не дает ответа на вопросы.

## **Вопросы программы кандидатского экзамена по научной специальности (1.1.4 – Теория вероятностей и математическая статистика)**

### **1. Вероятностные меры**

1. Алгебры и сигма-алгебры. Конечные и бесконечные измеримые пространства. Теорема Каратеодори о продолжении мер.

2. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств.

3. Построение вероятностной меры в  $\mathbb{R}$ . Теорема Колмогорова. Схема Бернулли с бесконечным числом испытаний. Гауссовские последовательности.

4. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.

5. Измеримые функции. Равномерная сходимость, сходимость почти всюду и сходимость по мере.

6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега—Стилтьеса в  $\mathbb{R}^1$ .

7. Мера, определяемая с помощью интеграла Лебега. Производная Радона—Никодима.

8. Произведения мер. Теорема Фубини.

9. Пространства  $L_1$  и  $L_2$  и их характеристики.

10. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.

11. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.

### **2. Случайные величины и распределения в $\mathbb{R}^n$**

1. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности.

2. Центральная предельная теорема. Теорема Берри—Эссеена.

3. Безгранично делимые распределения. Представление Леви—Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

4. Вероятности больших уклонений.

### **3. Последовательности случайных величин**

1. Закон нуля или единицы.

2. Усиленный закон больших чисел.

3. Закон повторного логарифма.

4. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа—Хинчина.

### **4. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах**

1. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер.

2. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции.
3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его корреляционной функции. Теорема Бохнера—Хинчина.
5. Линейные преобразования стационарных процессов, интегрирование и дифференцирование. Линейное прогнозирование. Гауссовские процессы.

## **5. Некоторые виды зависимости**

1. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда.
2. Теоремы о сходимости мартингалов.
3. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
4. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы.
5. Марковские процессы и полугруппы. Уравнения Колмогорова.

## **6. Стохастическое исчисление и диффузионные процессы**

1. Стохастический интеграл. Формула Ито.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
3. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

## **7. Элементы математической статистики**

1. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации.
2. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
3. Теорема Рао—Блекуэлла—Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки.
4. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао—Крамера.
5. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
6. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана—Пирсона.

## **Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена в аспирантуру по научной специальности (1.1.4 – Теория вероятностей и математическая статистика)**

### **Основная литература (не ранее 2020 года)**

1. Ширяев, А. Н. Вероятность : учебное пособие : в 2 книгах / А. Н. Ширяев. — 7-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, 2021 — Книга 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы — 2021. — 552 с. — ISBN 978-5-4439-3557-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/267719> (дата обращения: 26.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Ширяев, А. Н. Вероятность : учебное пособие : в 2 книгах / А. Н. Ширяев. — 7-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, 2021 — Книга 2 : Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи — 2021. — 416 с. — ISBN 978-5-4439-3558-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:

<https://e.lanbook.com/book/267722> (дата обращения: 26.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Симушкин, С. В. Методы теории вероятностей : учебное пособие / С. В. Симушкин. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 548 с. — ISBN 978-5-8114-3442-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/110911> (дата обращения: 26.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2024. -560 с.

5. Соколов, Г. А. Основы математической статистики : учебник / Г.А. Соколов. — 2-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 368 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс].— (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/3072. - ISBN 978-5-16-006729-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1844288> (дата обращения: 26.12.2025). — Режим доступа: по подписке.

### Дополнительная литература

1. Володин, Игорь Николаевич. Оптимальные статистические решения [Текст: электронный ресурс] : [учебное пособие] / И. Н. Володин. -- Казань: Казанский университет, 2012. - 182 с. — Режим доступа:  
<https://kpfu.ru/docs/F1363420268/OSP.pdf>

2. Володин, Игорь Николаевич. Лекции по теории статистических выводов [Текст: электронный ресурс] : [учебное пособие] / И. Н. Володин ; Казан. (Приволж.) федер. ун-т, Каф. мат. статистики, 2010. - 174 с. — Режим доступа: <http://old.kpfu.ru/f9/bibl/Vse.pdf>

3. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Бородин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 256 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2026>.

4. Боровков, А.А. Математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник / А.А. Боровков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 704 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3810>.

5. Свешников, А.А. Прикладные методы теории вероятностей [Электронный ресурс] : учебник / А.А. Свешников. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3184>.

6. Бородин, А.Н. Случайные процессы [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Бородин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 640 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/12935>. — Загл. с экрана.

7. Ширяев, А.Н. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1 [Электронный ресурс] : учебник / А.Н. Ширяев, И.Г. Эрлих, П.А. Яськов. — Электрон. дан. — Москва : МЦНМО, 2013. — 648 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56417>.

8. Стоянов, Й. Контрпримеры в теории вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие / Й. Стоянов. — Электрон. дан. — Москва : МЦНМО, 2012. — 294 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56414>.

9. Булинский, А.В. Теория случайных процессов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 400 с. —

Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59319>.

10. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 572 с. — ISBN 978-5-9221-0266-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2206> (дата обращения: 26.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### **Информационное обеспечение**

1. Сайт Научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского <http://kpfu.ru/library>
2. Сайт кафедры математического анализа КФУ <https://kpfu.ru/math/stretre/mathdep/ma>
3. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ <http://lib.mexmat.ru/>
4. Поисковик электронных книг <http://www.poiskknig.ru>
5. eLIBRARY.RU - Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU Подробности: [http://kpfu.ru/main\\_page?p\\_sub=8226](http://kpfu.ru/main_page?p_sub=8226) Любое использование материалов допускается только при наличии гиперссылки на портал КФУ (kpfu.ru)
6. Фонд знаний Ломоносов <http://www.lomonosov-fund.ru>