УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 3 Физико-математические науки *2006*

УДК 519.6

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ В СМЕШАННОЙ ГИБРИДНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

М.А. Игнатьева, А.В. Лапин, Н.В. Лапин

Аннотация

Конструируется смешанная гибридная схема метода конечных элементов для задачи Синьорини на основе декомпозиции области с неналегающими подобластями. Используются несогласованные по подобластям сетки. Для решения построенного сеточного вариационного неравенства исследуются методы верхней релаксации и расщепления.

Введение

Метод декомпозиции области с неналегающими подобластями широко используется при решении краевых задач в областях сложной геометрии, а также при построении параллельных алгоритмов. Он в большей степени изучен для линейных краевых задач и активно развивается для нелинейных уравнений. В ряде работ метод декомпозиции области исследован для задач со свободными границами (см., например, [1–4]). Современное состояние дел в этой области отражено во многих работах (см., например, труды недавно прошедших конференций [5, 6]).

Смешанные и смешанные гибридные формулировки краевых задач с дифференциальными операторами второго порядка позволяют применять методы конечных элементов с одновременной аппроксимацией искомой функции и ее градиента. Теория смешанных и гибридных методов конечных элементов достаточно полно развита для линейных уравнений (см. монографии [7, 8] и библиографии в них), некоторые результаты по сходимости и точности таких конечных элементов получены для нелинейных эллиптических уравнений (см., например, [9–15]). В работах [16–18] исследована сходимость смешанного метода конечных элементов для контактных задач – вариационных неравенств с ограничениями на границе области. Смешанные гибридные схемы конечных элементов первого порядка для вариационных неравенств с ограничениями на искомое решение построены в [19, 20], в этих работах также сконструированы эффективные итерационные методы их решения.

Совместное применение метода декомпозиции области и смешанных гибридных схем конечных элементов позволяет строить сеточные схемы высокой точности для определения как самого решения, так и его градиента, за счет применения мелких сеток в подобластях малой гладкости решения (в частности, содержащих свободную границу).

В данной статье построена смешанная гибридная схема метода конечных элементов для задачи Синьорини на основе декомпозиции области с неналегающими подобластями. Триангуляция подобластей в общем случае предполагается несогласованной. Условия непрерывности приближенного решения на границах подобластей сформулированы в слабой форме и сняты с помощью множителей Лагранжа. В результате аппроксимации получена сеточная задача с седловым оператором.

После так называемой процедуры конденсации задача преобразована к сеточному вариационному неравенству с симметричной и положительно определенной матрицей. Для решения этого неравенства использованы итерационные методы верхней релаксации и расщепления.

1. Постановка задачи. Смешанная гибридная формулировка

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из неперекрывающихся частей Γ_D, Γ_N и Γ_C, при этом $\operatorname{mes} \Gamma_D > 0$. Пусть далее $V = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0 \text{ п. вс. на } \Gamma_D\}$ – подпространство гильбертова пространства $H^1(\Omega)$, оснащенное скалярным произведением $(u, v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, и $K = \{u \in V : u(x) \geqslant 0 \text{ п. вс. на } \Gamma_C\}$ – его выпуклое замкнутое подмножество. Рассмотрим задачу Синьорини:

найти функцию $u \in K$ такую, что

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla (q - u) \, dx \geqslant \int\limits_\Omega f(q - u) \, dx \quad \forall q \in K, \tag{1}$$

где $f \in L_2(\Omega)$. Известно [21], что задача (1) имеет единственное решение $u \in K$. Далее будем предполагать, что решение обладает дополнительной гладкостью: $u \in H^{3/2}(\Omega)$. Это обеспечивает существование нормальной производной из пространства L_2 от функции u на любой гладкой кривой из замыкания области $\bar{\Omega}$ (в частности, на границе).

Введем новую переменную $\mathbf{v} = \nabla u$, тогда пара $(\mathbf{v},\ u)$ удовлетворяет следующим соотношениям, которые понимаются в смысле «почти всюду»:

$$\begin{cases} \mathbf{v} - \nabla u = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = -f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_D, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{на } \Gamma_N, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geqslant 0, \ u \geqslant 0, \ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u = 0 & \text{на } \Gamma_C, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.

Перейдем к построению смешанной гибридной формулировки задачи (2) на основе декомпозиции области. Предположим, что область Ω разбита на две непересекающиеся подобласти Ω_1 и Ω_2 с общей границей Γ, и пусть для определенности $\Gamma_C \subset \partial\Omega_2$.

Пусть $\bar{\Omega}_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} \bar{e}_k^i$, $k = 1, 2$, – разбиение $\bar{\Omega}_k$ на m_k конечных элементов e_k^i – подобластей простой геометрии (треугольников или четырехугольников). Совокупность $\{e_k^i\}$ обозначим через $\mathcal{T}_{hk}$. Триангуляции $\mathcal{T}_{hk}$ предполагаем регулярными [22] и такими, что части границы Γ_D, Γ_N, Γ_C и Γ состоят из целого числа сторон элементов e_k^i.

Общую сторону элементов e_k^i и e_k^j, $i \neq j$, лежащую в Ω_k, обозначим через Γ_k^{ij}, $i, j = 1, \ldots, m_k$. Также через Γ_k^{ij} будем обозначать стороны конечных элементов e_k^i, лежащие на границе $\partial\Omega_k$. В частности, пусть $I_k \subset \{i = 1, \ldots, m_k,$ $j = m_k + 1, \ldots, m_k + s_k\}$ — подмножество индексов, для которых не пусты пересечения Γ_k^{ij} границ элементов ∂e_k^i с $\Gamma_N \cup \Gamma_C \cup \Gamma$. Кроме того, предположим для простоты, что если сторона Γ_1^{ij} элемента $e_1^i \subset \Omega_1$ принадлежит Γ, то ее составляют точно ℓ сторон $\Gamma_2^{r_1, t_1}, \ldots, \Gamma_2^{r_\ell, t_\ell}$ конечных элементов из Ω_2.

Определим вектор-функции $\mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k^1, \ldots, \mathbf{v}_k^{m_k})$, $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^{m_k})$, где $\mathbf{v}_k^i$, u_k^i – сужения $\mathbf{v}$ и u на e_k^i. Через $\mathbf{n}_k^i$ обозначим единичный вектор внешней нормали к границе конечного элемента e_k^i. В силу (2) функции $\mathbf{v}_k$ и u_k удовлетворяют следующей системе соотношений:

$$\mathbf{v}_k^i - \nabla u_k^i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_k^i + f_k^i = 0 \quad \text{на} \;\; e_k^i, \quad k = 1, 2, \tag{3}$$

$$u_k^i - u_k^j = 0, \quad \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^i - \mathbf{v}_k^j \cdot \mathbf{n}_k^j = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_k^{ij} \subset \Omega_k, \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

$$u_k^i = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_k^{ij} \subset \Gamma_D, \quad \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_k^{ij} \subset \Gamma_N, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

$$\mathbf{v}_2^i \cdot \mathbf{n}_2^i \geqslant 0, \quad u_2^i \geqslant 0, \quad (\mathbf{v}_2^i \cdot \mathbf{n}_2^i) u_2^i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2^{ij} \subset \Gamma_C, \tag{6}$$

$$u_1^i - u_2^j = 0, \quad \mathbf{v}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i - \mathbf{v}_2^j \cdot \mathbf{n}_2^j = 0 \quad \text{на} \;\; \bar{e}_1^i \cap \bar{e}_2^j \subset \Gamma. \tag{7}$$

Перейдем к выводу слабой постановки задачи. Прежде всего, заменим поточечные соотношения (3)–(7) эквивалентными интегральными соотношениями.

Обозначим через λ_k^{ij} общее значение следов функций u_k^i, u_k^j на $\Gamma_k^{ij} \subset \Omega_k$ при $i, j = 1, \ldots, m_k$ и, соответственно, значения u_k^i на $\Gamma_k^{ij} \subset \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$ для $(i, j) \in I_k$.

Умножая первое уравнение (3) для $k = 1, 2$ на гладкую пробную функцию $\mathbf{w}_k^i$, после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{e_k^i} \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{w}_k^i \, dx + \int\limits_{e_k^i} u_k^i \operatorname{div} \mathbf{w}_k^i \, dx - \int\limits_{\partial e_k^i} u_k^i (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^i) \, d\Gamma = \int\limits_{e_k^i} \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{w}_k^i \, dx +$$
$$+ \int\limits_{e_k^i} u_k^i \operatorname{div} \mathbf{w}_k^i \, dx - \sum_{j>i} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij}) \, d\Gamma + \sum_{j<i} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ji}) \, d\Gamma = 0.$$

Здесь $\mathbf{n}_k^{ij}$ – единичный вектор нормали к общей границе Γ_k^{ij} двух соседних элементов e_k^i и e_k^j, направленный со стороны элемента с меньшим номером в сторону элемента с большим номером или, соответственно, единичный вектор внешней нормали к границе элемента e_k^i, если Γ_k^{ij} является частью границы $\partial\Omega_k$. Тем самым, $i < j$ для любого вектора $\mathbf{n}_k^{ij}$.

Таким образом, первым поточечным уравнениям в (3) равносильны следующие:

$$\int\limits_{e_k^i} \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{w}_k^i \, dx + \int\limits_{e_k^i} u_k^i \operatorname{div} \mathbf{w}_k^i \, dx - \sum_{j>i} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij}) \, d\Gamma +$$
$$+ \sum_{j<i} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ji}) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w}_k^i \quad \text{на} \;\; e_k^i \subset \Omega_k. \tag{8}$$

Аналогично, вторым уравнениям в (3) эквивалентны уравнения

$$\int\limits_{e_k^i} \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_k^i + f_k^i\right) q_k^i \, dx = 0 \quad \forall q_k^i \quad \text{на} \;\; e_k^i \subset \Omega_k. \tag{9}$$

Условия равенства потоков на границах конечных элементов внутри подобластей и равенство потоков нулю на границах элементов из Γ_N принимают вид

$$\int\limits_{\Gamma_k^{ij}} (-\mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij} + \mathbf{v}_k^j \cdot \mathbf{n}_k^{ij}) \mu_k^{ij} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mu_k^{ij} \quad \text{на} \;\; \Gamma_k^{ij} \subset \Omega_k, \tag{10}$$

$$-\int\limits_{\Gamma_k^{ij}} (\mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij})\mu_k^{ij}\, d\Gamma = 0 \quad \forall \mu_k^{ij} \quad \text{на} \quad \Gamma_k^{ij} \subset \Gamma_N. \tag{11}$$

Соотношения (6) на сторонах элементах, принадлежащих Γ_C, эквиваленты вариационным неравенствам

$$\lambda_2^{ij} \geqslant 0: \int\limits_{\Gamma_2^{ij}} (\mathbf{v}_2^i \cdot \mathbf{n}_2^{ij})(\mu_2^{ij} - \lambda_2^{ij})\, d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall \mu_2^{ij} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_k^{ij} \subset \Gamma_C. \tag{12}$$

Наконец, соотношения (7) на сторонах элементов, лежащих на Γ, принимают вид:

$$\int\limits_{\Gamma_1^{ij}} \lambda_1^{i,j}\varphi\, d\Gamma = \sum_{s=1}^{\ell} \int\limits_{\Gamma_2^{r_s,t_s}} \lambda_2^{r_s,t_s}\varphi\, d\Gamma \quad \forall \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma_1^{ij} = \cup \Gamma_2^{r_s,t_s} \subset \Gamma,$$

$$\int\limits_{\Gamma_1^{ij}} (\mathbf{v}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i)\varphi\, d\Gamma = \sum_{s=1}^{\ell} \int\limits_{\Gamma_2^{r_s,t_s}} (\mathbf{v}_2^{r_s} \cdot \mathbf{n}_1^i)\varphi\, d\Gamma \quad \forall \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma_1^{ij} = \cup \Gamma_2^{r_s,t_s} \subset \Gamma. \tag{13}$$

Теперь для слабой постановки задачи введем соответствующие пространства и множества. Прежде всего, определим гильбертовы пространства функций, заданных на некоторой подобласти ω области Ω:

$$H(\mathrm{div}, \omega) = \{\mathbf{v} \in L_2(\omega)^2 : \ \mathrm{div}\, \mathbf{v} \in L_2(\omega)\}, \quad \|\mathbf{v}\|_H^2 = \int\limits_{\omega} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathrm{div}\, \mathbf{v}|^2)\, dx,$$

$$\mathscr{H}(\mathrm{div}, \omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \omega) : \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega} \in L_2(\partial\omega)\}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathscr{H}}^2 = \|\mathbf{v}\|_H^2 + \int\limits_{\partial\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2\, d\Gamma.$$

Пусть далее

$$\mathbf{V}_k = \prod_{i=1}^{m_k} \mathscr{H}(\mathrm{div}, e_k^i), \quad U_k = \prod_{i=1}^{m_k} L_2(e_k^i) \quad \text{и} \quad \Lambda_k = \prod_{i<j} L_2(\Gamma_k^{ij}),$$

$$\Lambda_k^0 = \{\lambda_k \in \Lambda_k : \lambda_k^{ij} = 0 \text{ на } \Gamma_k^{ij} \cap \Gamma_D\}.$$

Определим выпуклые замкнутые множества K_{ad}^{λ} и K_{λ} равенствами

$$K_{ad}^{\lambda} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1^0 \times \Lambda_2^0 : \ \lambda_2^{ij} \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_2^{ij} \subset \Gamma_C\},$$

$$K_{\lambda} = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2) \in K_{ad}^{\lambda} : \int\limits_{\Gamma_1^{ij}} \lambda_1^{ij}\varphi\, d\Gamma = \sum_{s=1}^{\ell} \int\limits_{\Gamma_2^{r_s,t_s}} \lambda_2^{r_s,t_s}\varphi\, d\Gamma \quad \forall \varphi \in L_2(\Gamma_1^{ij}) \text{ для всех } \Gamma_1^{ij} \subset \Gamma\Big\}.$$

Пусть билинейные формы $\mathscr{M}_k$, $\mathscr{B}_k$, $\mathscr{G}_k$ и линейные формы $\mathscr{F}_k$ заданы равенствами

$$\mathscr{M}_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{w}_k^i\, dx, \quad \mathscr{B}_k(u_k, \mathbf{w}_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} u_k^i \mathrm{div}\, \mathbf{w}_k^i\, dx,$$

$$\mathscr{G}_k(\lambda_k, \mathbf{w}_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=i+1}^{m_k} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^j - \mathbf{w}_k^i) \cdot \mathbf{n}_k^{ij} \, d\Gamma - \sum_{(i,j) \in I_k} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij}) \, d\Gamma,$$

$$\mathscr{F}_k(q_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} f_k^i q_k^i \, dx.$$

Билинейные формы $\mathscr{G}_k$ будем также представлять в расщепленном виде, выделяя слагаемые по границе Γ:

$$\mathscr{G}_k(\lambda_k, \mathbf{w}_k) = \mathscr{G}_{k,\Omega}(\lambda_k, \mathbf{w}_k) + \mathscr{G}_{k,\Gamma}(\lambda_k, \mathbf{w}_k),$$

$$\mathscr{G}_{k,\Gamma}(\lambda_k, \mathbf{w}_k) = -\sum_{i=1}^{m_k} \sum_{\Gamma_k^{ij} \subset \Gamma} \int\limits_{\Gamma_k^{ij}} \lambda_k^{ij} (\mathbf{w}_k^i \cdot \mathbf{n}_k^{ij}) \, d\Gamma.$$

Используя введенные обозначения и суммируя соотношения (8)–(13) по всем соответствующим конечным элементам e_k^i и/или их сторонам Γ_k^{ij}, получим следующую слабую постановку задачи:

требуется найти $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_1$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in K_\lambda$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{cases} \mathscr{M}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) & +\mathscr{B}_1(u_1, \mathbf{w}_1) & +\mathscr{G}_1(\lambda_1, \mathbf{w}_1) & = 0, \\ \mathscr{M}_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) & +\mathscr{B}_2(u_2, \mathbf{w}_2) & +\mathscr{G}_2(\lambda_2, \mathbf{w}_2) & = 0, \\ \mathscr{B}_1(q_1, \mathbf{v}_1) & & & = -\mathscr{F}_1(q_1), \\ \mathscr{B}_2(q_2, \mathbf{v}_2) & & & = -\mathscr{F}_2(q_2), \\ \mathscr{G}_{1,\Omega}(\mu_1, \mathbf{v}_1) & & & = 0, \\ \mathscr{G}_{2,\Omega}(\mu_2 - \lambda_2, \mathbf{v}_2) & & & \leqslant 0, \\ & \mathscr{G}_{1,\Gamma}(\mu_1, \mathbf{v}_1) + \mathscr{G}_{2,\Gamma}(\mu_2, \mathbf{v}_2) & & = 0. \end{cases} \tag{14}$$

для любых $(q_1, q_2) \in U_1 \times U_1$, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, $(\mu_1, \mu_2) \in K_\lambda$.

Теорема 1. *Задачи* (1) *и* (14) *эквивалентны в следующем смысле:*

если $u \in K \cap H^{3/2}(\Omega)$ *– решение* (1), *то* $(\mathbf{v}_1, u_1, \lambda_1)$, $(\mathbf{v}_2, u_2, \lambda_2)$ *является решением* (14), *где* $u_k^i = u|_{e_k^i}$ *– сужение* u *на* e_k^i, $\mathbf{v}_k^i = \nabla u_k^i$ *п. вс. на* e_k^i, *и* $\lambda_k^{ij} = u_k^i$ *п. вс. на* Γ_k^{ij};

обратно, если $(\mathbf{v}_1, u_1, \lambda_1)$, $(\mathbf{v}_2, u_2, \lambda_2)$ *– решение задачи* (14), *то функция* $u = (u_1^1, \ldots, u_1^{m_1}, u_2^1, \ldots, u_2^{m_2})$, $u_k^i = u|_{e_k^i}$ *является решением задачи* (1), $\mathbf{v}_k^i = \nabla u$ *п. вс. на* e_k^i, *и* $\lambda_k^{ij} = u$ *п. вс. на* Γ^{ij}.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы следует из построения задачи (14). Докажем обратное утверждение.

Зафиксируем произвольный элемент e^i, здесь мы опускаем индекс k, подразумевая под e^i любой из элементов e_k^i. Выбирая в первом (или во втором, в зависимости от подобласти) уравнении (14) $\mathbf{w}^i \in (\mathscr{D}(e^i))^n$, где $\mathscr{D}(e^i)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в области e^i функций, получим

$$\int\limits_{e^i} \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{w}^i \, dx + \int\limits_{e^i} u^i \mathrm{div} \, \mathbf{w}^i \, dx = 0.$$

Выбрав $\mathbf{w}^i = (w_1^i, 0)$, будем иметь

$$\int\limits_{e^i} v_1^i w_1^i \, dx + \int\limits_{e^i} u^i \frac{\partial w_1^i}{\partial x_1} \, dx = 0 \quad \forall \; w_1^i \in \mathscr{D}(e^i).$$

Последнее равенство есть определение того, что v_1^i является обобщенной производной функции u^i по x_1. По определению пространства $H(\mathrm{div}, e^i)$ функция v_1^i принадлежит $L_2(e^i)$. Аналогично устанавливается, что $\partial u^i/\partial x_2 = v_2^i \in L_2(e^i)$. Следовательно, $\mathbf{v}^i = \nabla u^i$ п. вс. на e^i и $u^i \in H^1(e^i)$.

Полагая теперь $\mathbf{w}^j \equiv 0, \; j \neq i$, и учитывая равенство $\mathbf{v}^i = \nabla u^i$, получим

$$\int\limits_{e^i} \nabla u^i \cdot \mathbf{w}^i \, dx + \int\limits_{e^i} u^i \mathrm{div}\; \mathbf{w}^i \, dx - \\ - \sum_{j>i} \int\limits_{\Gamma^{ij} \subset \partial e^i} \lambda^{ij} (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^{ij}) \, d\Gamma + \sum_{j<i} \int\limits_{\Gamma^{ij} \subset \partial e^i} \lambda^{ji} (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^{ji}) \, d\Gamma = 0.$$

После применения формулы Остроградского – Гаусса к первому интегралу это равенство примет вид

$$\int\limits_{\partial e^i} u^i (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^i) \, d\Gamma = \sum_{j>i} \int\limits_{\Gamma^{ij}} \lambda^{ij} (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^{ij}) \, d\Gamma - \sum_{j<i} \int\limits_{\Gamma^{ij}} \lambda^{ji} (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^{ji}) \, d\Gamma$$

для всех $\mathbf{w}^i \in \mathscr{H}(\mathrm{div}, e^i)$. В силу определения пространства $\mathscr{H}(\mathrm{div}, e^i)$ имеем, что пространство $L_2(\partial e^i)$ исчерпывается функциями $\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{n}^i$, где $\mathbf{w}^i \in \mathscr{H}(\mathrm{div}, e^i)$. Поэтому из последнего соотношения получим $\lambda^{ij} = u^i$ п. вс. на $\Gamma^{ij} \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma \cup$ $\cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$. В частности, в силу произвольности выбранного элемента e_i, это влечет равенство $u^i = u^j$ п. вс. на $\Gamma^{ij} = \bar{e}^i \cap \bar{e}^j$. Из полученного равенства следует также $u = 0$ п. вс. на Γ_D и, используя принадлежность λ множеству K_λ, получим $u \geqslant 0$ п. вс. на Γ_C.

Рассуждая подобным предыдущему случаю образом, на стороне Γ_1^{ij} элемента $e_1^i \subset \Omega_1$, принадлежащей Γ и состоящей из ℓ границ $\Gamma_2^{r_1, t_1}, \dots, \Gamma_2^{r_\ell, t_\ell}$, получим, с одной стороны,

$$\int\limits_{\Gamma_1^{ij}} u_1^i (\mathbf{w}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i) \, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_1^{ij}} \lambda_1^{ij} (\mathbf{w}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i) \, d\Gamma,$$

а с другой,

$$\int\limits_{\Gamma_2^{r_s, t_s}} u_2^{r_s} (\mathbf{w}_2^{r_s} \cdot \mathbf{n}_2^{r_s, t_s}) \, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_2^{r_s, t_s}} \lambda_2^{r_s, t_s} (\mathbf{w}_2^{r_s} \cdot \mathbf{n}_2^{r_s, t_s}) \, d\Gamma, \quad s = 1, \dots, \ell,$$

где $\mathbf{n}_1^i = -\mathbf{n}_2^{r_s, t_s}$ в точках $\Gamma_1^{ij} \cap \Gamma_2^{r_s, t_s}$. Суммируя эти равенства, учитывая, что $\lambda \in K_\lambda$, и выбирая $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$, будем иметь

$$\int\limits_{\Gamma_1^{ij}} u_1^i (\mathbf{w}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i) \, d\Gamma = \sum_{s=1}^{\ell} \int\limits_{\Gamma_2^{r_s, t_s}} u_2^{r_s} (\mathbf{w}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i) \, d\Gamma.$$

Выбирая теперь $(\mathbf{w}_1^i \cdot \mathbf{n}_1^i) \in \mathscr{D}(\Gamma_2^{r_s, t_s})$, получим $u_1 = u_2$ п. вс. на $\Gamma_2^{r_s, t_s}$ для любого $\Gamma_2^{r_s, t_s} \subset \Gamma$, так что $u_1 = u_2$ п. вс. на Γ.

Воспользуемся теперь следующим известным утверждением (см., например, [8]): функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

а) $u|_e \in H^1(e)$ для всех $e \in \mathcal{T}_h$;

б) на каждой общей границе $\Gamma^{ij} = \bar{e}_i \cap \bar{e}_j$, $e_i, e_j \in \mathcal{T}_h$, совпадают следы функций $u|_{e_i}$ и $u|_{e_j}$.

Таким образом, из проведенных исследований следует, что функция u с $u|_{e_i} = u^i$ принадлежит $H^1(\Omega)$.

Далее, из пятого (шестого) соотношения в (14) имеем

$$\int\limits_{\Gamma^{ij}} (-\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}^{ij} + \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{n}^{ij})\mu^{ij} d\Gamma = 0 \quad \forall \mu^{ij} \in L_2(\Gamma^{ij}), \text{ если } \Gamma^{ij} \subset \Omega_k \tag{15}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma^{ij}} \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{n}^{ij} \mu^{ij} d\Gamma = \int\limits_{\Gamma^{ij}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mu^{ij} d\Gamma = 0 \quad \forall \mu^{ij} \in L_2(\Gamma^{ij}) \text{ для } \Gamma^{ij} \subset \Gamma_N,$$

откуда выводим справедливость граничного условия $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ п. вс. на Γ_N.

Из предпоследнего соотношения в (14) также следует

$$-\int\limits_{\Gamma_{ij}} \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}^{ij} (\mu^{ij} - \lambda^{ij}) d\Gamma \leqslant 0 \text{ на } \Gamma^{ij} \subset \Gamma_C \quad \forall \mu^{ij} \in L_2(\Gamma^{ij}) : \mu^{ij} \geqslant 0.$$

Снова учитывая равенство $\nabla u^i = \mathbf{v}^i$, получим

$$-\int\limits_{\Gamma_C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} (\mu - u) d\Gamma \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_C \quad \forall \mu \in L_2(\Gamma_C) : \mu \geqslant 0 \text{ п. вс.} \tag{16}$$

Возьмем теперь пробную функцию $q \in K$, где K – множество ограничений в задаче (1), и пусть $q_k^i = q|_{e_k^i}$. Подставим в третье и четвертое уравнения (14) $\nabla u_k^i = \mathbf{v}_k^i$ и, используя в качестве пробной функции $((q-u)_k^1, \ldots, (q-u)_k^{m_k})$, получим в каждой из подобластей Ω_k:

$$\sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} (q_k^i - u_k^i) \Delta u_k^i dx = -\sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} f_k^i (q_k^i - u_k^i) dx.$$

Применим к интегралу в левой части формулу интегрирования по частям, воспользовавшись (15) и последним равенством в (14) и просуммировав соотношения по подобластям, придем к равенству

$$-\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} \nabla (q_k^i - u_k^i) \nabla u_k^i \, dx + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\Gamma^{ij} \subset \Gamma_D} \int\limits_{\Gamma^{ij}} \frac{\partial u_k^i}{\partial \mathbf{n}^{ij}} (q_k^i - u_k^i) \, d\Gamma +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} \sum_{\Gamma^{ij} \subset \Gamma_N} \int\limits_{\Gamma^{ij}} \frac{\partial u_k^i}{\partial \mathbf{n}^{ij}} (q_k^i - u_k^i) \, d\Gamma + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\Gamma^{ij} \subset \Gamma_C} \int\limits_{\Gamma^{ij}} \frac{\partial u_k^i}{\partial \mathbf{n}^{ij}} (q_k^i - u_k^i) \, d\Gamma =$$

$$= -\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{e_k^i} f_k^i (q_k^i - u_k^i) \, dx.$$

Второй интеграл равен нулю в силу равенства $q = 0$ на Γ_D и доказанного условия $u = 0$ на Γ_D, третий интеграл равен нулю в силу доказанного условия $\partial u/\partial \mathbf{n} = 0$, четвертый интеграл в силу (16) неотрицателен (в качестве μ в (16) можно взять след q на Γ_C, т. к. $H^{1/2}(\Gamma_C) \subset L_2(\Gamma_C)$), следовательно,

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\int\limits_{e_k^i}\nabla(q_k^i - u_k^i)\nabla u_k^i\,dx \leqslant -\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\int\limits_{e_k^i} f_k^i(q_k^i - u_k^i)\,dx \quad \forall q\in K : q_k^i = q|_{e_k^i}.$$

Итак, если $(u, \mathbf{v}, \lambda)$ – решение задачи (14), то $u \in K$ и удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla(q-u)\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(q-u)\,dx \quad \forall q\in K.$$

Это есть формулировка задачи Синьорини (1). □

Из доказанной теоремы следует, в частности, что в предположении дополнительной гладкости решения задачи Синьорини (1) задача (14) имеет решение, единственное в силу единственности решения (1). Далее будем строить аппроксимацию (14) и итерационный метод ее решения.

2. Аппроксимация по методу конечных элементов, алгебраическая форма записи сеточной схемы

Пусть $\mathbf{V}_{kh}^i$ – конечномерное подпространство пространства $\mathscr{H}(\mathrm{div}, e_k^i)$, состоящее из таких вектор-функций $\mathbf{v}_k^i$, что $\mathbf{v}_k^i\cdot\mathbf{n}_k^{ij}$ является константой на каждой из границ Γ_k^{ij}. Например, в случае прямоугольных конечных элементов $\mathbf{V}_{kh}^i = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2)\in\mathbb{P}_{1,0}\times\mathbb{P}_{0,1}\}$, где $\mathbb{P}_{l,m}$ – пространство полиномов, имеющих степень l по x_1 и степень m по x_2, то есть каждая из компонент вектора $\mathbf{v}$ линейна по одному из направлений: $v_1 = a_1 + b_1x_1$, $v_2 = a_2 + b_2x_2$. Определим $\mathbf{V}_{kh} = \prod\limits_{i=1}^{m_k}\mathbf{V}_{kh}^i$ – конечномерное подпространство пространства $\mathbf{V}_k$.

Через U_{kh}^i обозначим подпространство U_k^i, состоящее из постоянных на элементах e_k^i функций, и положим $U_{kh} = \prod\limits_{i=1}^{m_k} U_{kh}^i = \{u = (u_1,\ldots,u_{m_k}) :\ u_i\in\mathbb{P}_0 \ \text{ на } \ e_k^i\}$.

Наконец, пусть Λ_{kh} – подпространство пространства Λ_k функций с постоянными компонентами, то есть $\Lambda_{kh} = \{\lambda_k^{ij}\in\mathbb{P}_0 \ \text{ на } \ \Gamma_k^{ij}\}$,

$$\Lambda_{kh}^0 = \{\lambda_{kh}\in\Lambda_{kh} :\ \lambda_{kh}^{ij} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_k^{ij}\subset\Gamma_D\}.$$

Определим выпуклые замкнутые подмножества:

$$K_{ad,h}^{\lambda} = \{(\lambda_{1h}, \lambda_{2h})\in\Lambda_{1h}^0\times\Lambda_{2h}^0 :\ \lambda_{2h}\geqslant 0 \quad \text{на } \ \Gamma_2^{ij}\subset\Gamma_C\},$$

$$K_{\lambda h} = \{(\lambda_{1h}, \lambda_{2h})\in K_{ad,h}^{\lambda} :\ \lambda_{1h}^{ij} = \sum_{s=1}^{\ell}\alpha_s^{ij}\lambda_{2h}^{r_s,t_s} \quad \text{на } \ \Gamma_1^{ij} = \bigcup_{s=1}^{\ell}\Gamma_2^{r_s,t_s}\subset\Gamma\},$$

где $\alpha_s^{ij} = \int\limits_{\Gamma_2^{r_s,t_s}} d\Gamma\left(\int\limits_{\Gamma_1^{ij}} d\Gamma\right)^{-1}$. Отметим, что множество $K_{\lambda h}$, аппроксимирующее K_λ, получили, выбрав в определении K_λ пробную функцию $\varphi\in\mathbb{P}_0$ на $\Gamma_1^{ij}\subset\Gamma$.

Конечномерная аппроксимация задачи (14) состоит в нахождении функций $(u_{1h}, u_{2h}) \in U_{1h} \times U_{2h}$, $(\mathbf{v}_{1h}, \mathbf{v}_{2h}) \in \mathbf{V}_{1h} \times \mathbf{V}_{2h}$, $(\lambda_{1h}, \lambda_{2h}) \in K_{\lambda h}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \mathscr{M}_1(\mathbf{v}_{1h}, \mathbf{w}_1) & +\mathscr{B}_1(u_{1h}, \mathbf{w}_1) & +\mathscr{G}_1(\lambda_{1h}, \mathbf{w}_1) & = 0, \\ \mathscr{M}_2(\mathbf{v}_{2h}, \mathbf{w}_2) & +\mathscr{B}_2(u_{2h}, \mathbf{w}_2) & +\mathscr{G}_2(\lambda_{2h}, \mathbf{w}_2) & = 0, \\ \mathscr{B}_1(q_1, \mathbf{v}_{1h}) & & & = -\mathscr{F}_1(q_1), \\ \mathscr{B}_2(q_2, \mathbf{v}_{2h}) & & & = -\mathscr{F}_2(q_2), \\ \mathscr{G}_{1,\Omega}(\mu_1, \mathbf{v}_{1h}) & & & = 0, \\ \mathscr{G}_{2,\Omega}(\mu_2 - \lambda_{2h}, \mathbf{v}_{2h}) & & & \leqslant 0, \\ & \mathscr{G}_{1,\Gamma}(\mu_1, \mathbf{v}_{1h}) + \mathscr{G}_{2,\Gamma}(\mu_2, \mathbf{v}_{2h}) & & = 0 \end{cases} \tag{17}$$

для всех $(q_1, q_2) \in U_{1h} \times U_{2h}$, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{V}_{1h} \times \mathbf{V}_{2h}$, $(\mu_1, \mu_2) \in K_{\lambda h}$.

Перейдем к построению алгебраической формы записи сеточной схемы (17).

Размерность n_k^i пространства $\mathbf{V}_{kh}^i$ равна числу сторон элемента e_i, поэтому размерность $\mathbf{V}_{kh}$ равна $N_{vk} = \sum\limits_{i=1}^{m_k} n_k^i$. Размерность U_{kh} равна $N_{uk} = m_k$, а размерность Λ_{kh}^0 обозначим через $N_{\lambda k}$, где $N_{\lambda k}$ есть общее число границ Γ_k^{ij}.

Пусть v_k^{ij} – узловые параметры вектор-функции $\mathbf{v}_k^{ih}$, ассоциированные с Γ_k^{ij}, u_k^i – узловые параметры функции u_{kh}, ассоциированные с e_k^i, λ_k^{ij} – узловые параметры λ_{kh}, ассоциированные с Γ_k^{ij}, $j > i$. Будем обозначать через $v_k \in \mathbb{R}^{N_{vk}}$, $u_k \in \mathbb{R}^{N_{uk}}$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}^{N_{\lambda k}}$ векторы узловых параметров для $\mathbf{v}_{kh}$, u_{kh} и λ_{kh}, $k = 1, 2$, соответственно.

Пусть

$K_1 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{N_{\lambda 1}} \times \mathbb{R}^{N_{\lambda 2}} :\ \lambda_2^{ij} \geqslant 0$ для индексов, соответствующих узловым параметрам, ассоциированным с $\Gamma_2^{ij} \subset \Gamma_C\}$,

$K_2 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{N_{\lambda 1}} \times \mathbb{R}^{N_{\lambda 2}} :\ \lambda_1^{ij} = \sum_{s=1}^{\ell} \alpha_s^{ij} \lambda_2^{r_s, t_s}$ на $\Gamma_1^{ij} = \bigcup_{s=1}^{\ell} \Gamma_2^{r_s, t_s}$ для индексов, соответствующих узловым параметрам, ассоциированным с $\Gamma_1^{ij} \subset \Gamma\}$.

Обозначим через $C_l = \partial I_{K_l}$, $l = 1, 2$, субдифференциал индикаторной функции множества K_l. Поскольку $\mathrm{int} K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, то оператор $C \equiv \partial I_{K_1 \cap K_2} = C_1 + C_2$.

Далее, пусть матрицы M_k, B_k, G_k определяются равенствами

$$(M_k v, w) = \mathscr{M}_k(\mathbf{v}_{kh}, \mathbf{w}_{kh}), \quad (B_k q, v) = \mathscr{B}_k(q_{kh}, \mathbf{v}_{kh}), \quad (G_k v, \mu) = \mathscr{G}_k(\mu_{kh}, \mathbf{v}_{kh})$$

$$\forall \mathbf{v}_{kh}, \mathbf{w}_{kh} \in \mathbf{V}_{kh}, \quad \forall q_{kh} \in U_{kh}, \quad \forall \mu_{kh} \in \Lambda_{kh}^0, \quad k = 1, 2,$$

где $(\cdot\,, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве векторов соответствующей размерности. Аналогично определим векторы f_k:

$$(f_k, q) = \mathscr{F}(q_{kh}) \quad \forall q_{kh} \in \Lambda_{kh}^0.$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & B_1^T & 0 & 0 & G_1^T & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & B_2^T & 0 & G_2^T \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & v_2 & u_2 \end{pmatrix}^T, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & 0 & -f_2 \end{pmatrix}^T.$$

Задача (17) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} A_0 z + G^T \lambda = F, \\ Gz + C(\lambda) \ni 0. \end{cases}$$

Исключая u_k, v_k, $k = 1, 2$, получим так называемую конденсированную систему

$$S\lambda + C(\lambda) \ni g, \tag{18}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

$$S_k = G_k M_k^{-1} G_k^T - G_k M_k^{-1} B_k^T (B_k M_k^{-1} B_k^T)^{-1} B_k M_k^{-1} G_k^T,$$

$$g_k = -G_k M_k^{-1} B_k^T (B_k M_k^{-1} B_k^T)^{-1} f_k, \quad k = 1, 2.$$

Полученная задача представляет собой включение с симметричной положительно определенной матрицей S [23] и максимально монотонным оператором $C = \partial I_{K_1 \cap K_2}$. Это включение равносильно задаче на минимум квадратичного функционала

$$\frac{1}{2}(S\lambda, \lambda) - (g, \lambda)$$

на выпуклом замкнутом множестве $K_1 \cap K_2$ и имеет единственное решение.

3. Итерационные методы решения сеточной схемы

3.1. Метод верхней релаксации. Как уже отмечалось выше, задача (18) равносильна задаче минимизации квадратичного функционала на выпуклом замкнутом множестве. В [24] для решения таких задач доказана сходимость метода верхней релаксации

$$\left(\frac{1}{\sigma} D_S - L_S\right) \lambda^{k+1} + C\lambda^{k+1} \ni \left(\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) D_S + U_S\right) \lambda^k + g,$$

где $S = D_S - L_S - U_S$ – расщепление матрицы S на диагональную, строго нижнюю и строго верхнюю треугольные матрицы, $\sigma \in (0, 2)$ – параметр релаксации.

Матрица S может быть получена в явном виде при помощи процедуры поэлементной сборки. Это разреженная матрица ленточной структуры. Например, в случае прямоугольной области и равномерной прямоугольной сетки при лексикографической нумерации узлов S является девятидиагональной матрицей, причем в каждой строке этой матрицы присутствует не более семи элементов.

Оптимальный итерационный параметр σ теоретически не определен. Однако, как показывают вычислительные эксперименты, достаточно близким к оптимальному является параметр, выбранный как при решении системы линейных алгебраических уравнений с матрицей S. В частности, выбор σ достаточно близким к 2 обеспечивает существенное улучшение скорости сходимости по сравнению с методом Гаусса–Зейделя ($\sigma = 1$).

3.2. Метод расщепления. Для решения задачи (18) можно также использовать метод расщепления, который в общем случае записывается как

$$D^{-1} B(\lambda^{n+1} - \lambda^n) + S\lambda^n + C(B(\lambda^{n+1} - \lambda^n) + \lambda^n) \ni g, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

где B, D – симметричные и положительно определенные матрицы.

Рассмотрим вариант метода с

$$B = E + DS, \quad D = \mathrm{diag}(\underbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}_{N_{\lambda 1}}, \underbrace{\tau_2, \ldots, \tau_2}_{N_{\lambda 2}}),$$

где E – единичная матрица. Он может быть записан в виде

$$\begin{cases} D^{-1}(\lambda^{n+1/2} - \lambda^n) + S\lambda^n + C\lambda^{n+1/2} \ni g, \\ (E + DS)(\lambda^{n+1} - \lambda^n) = \lambda^{n+1/2} - \lambda^n \end{cases} \tag{20}$$

и при выбранных матрицах B и D соответствует варианту метода Дугласа–Рэкфорда для вариационных неравенств с различными итерационными параметрами по подобластям.

В [4] обоснована сходимость (20) при любых положительных итерационных параметрах τ_1 и τ_2, получены оценки скорости сходимости и значения оптимальных итерационных параметров этого метода, которые выражаются через собственные числа матриц S_1 и S_2.

Более того, из [23] следует, что матрица $S_k,\ k = 1, 2$, спектрально эквивалентна (с постоянными, не зависящими от шага сетки) дополнению Шура матрицы жесткости некоторой классической схемы метода линейных конечных элементов для оператора Лапласа. Это позволяет получить оценки для минимального и максимального собственных чисел S_k. В частности, пусть триангуляции областей Ω_1 и Ω_2 квазиравномерные, то есть для всех конечных элементов e_k^i

$$\mathrm{diam}\, e_1^i \asymp h_1, \quad \mathrm{diam}\, e_2^i \asymp h_2.$$

Тогда для чисел обусловленности матриц S_k справедливы оценки

$$\mu(S_k) \asymp h_k^{-2},$$

поэтому норма оператора итерационного шага при оптимальных итерационных параметрах оценивается величиной

$$\rho = 1 - ch_2, \quad c = \mathrm{const} \quad (h_1 > h_2).$$

Перейдем к обсуждению численной реализации итерационного метода (20). Будем далее использовать следующие обозначения для подмножеств индексов векторов $\lambda_k,\ k = 1, 2$, соответствующих узловым параметрам, ассоциированным с различными Γ_k^{ij}:

ω_k соответствует $\Gamma_k^{ij} \subset \Omega_k,\ \gamma_{kN}$ соответствует $\Gamma_k^{ij} \subset \Gamma_N \cap \partial\Omega_k$,

γ_C соответствует $\Gamma_2^{ij} \subset \Gamma_C,\ \gamma_k$ соответствует $\Gamma_k^{ij} \subset \Gamma$.

В этих обозначениях решение первого включения в (20) для компонент векторов $\lambda_k^{n+1/2}$, $k = 1, 2$, с индексами $i \in \omega_k \cup \gamma_{kN} \cup \gamma_C$ осуществляется по явным формулам, а именно:

$$\begin{cases} \lambda_{1i}^{n+1/2} = \lambda_{1i}^n + \tau_1(g_1 - S_1\lambda_1^n)_i, & i \in \omega_1 \cup \gamma_{1N}, \\ \lambda_{2i}^{n+1/2} = \lambda_{2i}^n + \tau_2(g_2 - S_2\lambda_2^n)_i, & i \in \omega_2 \cup \gamma_{2N}, \\ \lambda_{2i}^{n+1/2} = \max\{0;\ \lambda_{2i}^n + \tau_2(g_2 - S_2\lambda_2^n)_i\}, & i \in \gamma_C. \end{cases}$$

Пусть теперь μ_k – усеченный вектор, составленный из компонент $\lambda_k^{n+1/2}$ с индексами $i \in \gamma_k$, $\tilde{f}_k$ – усеченный таким же образом вектор $g_k - S_k\lambda_k^n + \lambda_k^n/\tau_k$. Будем использовать далее одни и те же обозначения $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ для евклидовых скалярных произведений и норм этих векторов (вне зависимости от их размерности). Тогда для (μ_1,μ_2) включение в (20) эквивалентно задаче минимизации функции

$$\Phi(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\tau_1}|\mu_1|^2+\frac{1}{2\tau_2}|\mu_2|^2-(\tilde f_1,\mu_1)-(\tilde f_2,\mu_2)$$

на подпространстве, определенном ограничениями $\lambda_1^{ij}=\sum\limits_{s=1}^{\ell}\alpha_s^{ij}\lambda_2^{r_s,t_s}$ на $\Gamma_1^{ij}=\bigcup\limits_{s=1}^{\ell}\Gamma_2^{r_s,t_s}$. Эти ограничения запишем в виде $\mu_1=P\mu_2$. Таким образом, для вектора μ_2 получим систему уравнений

$$\left(\frac{1}{\tau_1}PP^T+\frac{1}{\tau_2}E\right)\mu_2=P^T\tilde f_1+\tilde f_2.$$

Матрица этой системы – блочно-диагональная с квадратными блоками размера $\ell\times\ell$. При реализации итерационного процесса достаточно обратить ее один раз и использовать обратную матрицу при вычислении очередного итерационного приближения к вектору λ.

Второе уравнение системы (20) представляет собой две не связанные между собой системы линейных алгебраических уравнений с симметричными и положительно определенными матрицами $E_k+\tau_kS_k$ (E_k – единичная матрица соответствующего размера). Для решения этих систем необходимо использовать внутренний итерационный процесс, например метод последовательной верхней релаксации.

Числа обусловленности матриц $E_k+\tau_kS_k$ относительно невелики. В частности, в случае квазиравномерной триангуляции областей Ω_k числа обусловленности $E_k+\tau_kS_k$ есть величины порядка h_k^{-1}. Это позволяет при решении данных систем уравнений эффективно использовать также, например, метод сопряженных градиентов без предобусловливания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00484).

Summary

M.A. Ignatieva, A.V. Lapin, N.V. Lapin. Domain decomposition method for Signorini problem in mixed hybrid formulation.

A mixed hybrid finite element method in combination with non-overlapping domain decomposition and non-matching grids are used for Signorini problem. For solving the constructed finite element problem SOR- and splitting iterative methods are analyzed.

Литература

1. *Dostal Z., Friedlander A., Gomes F.A.M., Santos S.A.* Preconditioning by projectors in the solution of contact problems: A parallel implementation // Ann. Oper. Res. m. – 2002. – V. 117. – P. 117–129.

2. *Dostal Z., Horak D.* Scalability and FETI based algorithm for large discretized variational inequalities // Math. Comput. Simul. – 2003. – V. 61. – P. 347–357.

3. *Danek J., Hlaváček I, Nedoma J.* Domain decomposition for generalized unilateral semicoercive contact problem with given friction in elasticity // Math. Comput. Simul. – 2005. – V. 68. – P. 271–300.

4. *Laitinen E., Lapin A.V., Pieskä J.* Splitting iterative methods and parallel solution of variational inequalities // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2001. – V. 8. – P. 167–184.

5. *Herrera I., Keyes D., Widlund O., Yates R. (Eds.)* Domain Decomposition Methods in Science and Engineering. – Mexico City, Mexico: National Autonomous University of Mexico (UNAM), 2003. – 466 p.

6. *Kornhuber R., Hoppe R., Periaux J., Pironneau O., Widlund O.; Xu J. (Eds.)* Domain Decomposition Methods in Science and Engineering. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – Springer, 2004. – V. 40. – 700 p.

7. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. – N. Y.: Springer Verlag, 1991.

8. *Roberts J.E., Thomas J.M.* Mixed and hybrid methods // Numer. Anal. – 1991. – V. II. – P. 523–639.

9. *Farhloul M.* A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem // IMA J. of Numer. Anal. – 1998. – V. 18. – P. 121–132.

10. *Milner F.A.* Mixed finite element methods for quasilinear second-order elliptic problems // Math. Comp. – 1985. – V. 44. – P. 303–320.

11. *Park E.-J.* Mixed finite element methods for nonlinear second order elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – V 32. – P. 865–885.

12. *Chen Z.* Expanded mixed finite element methods for linear second order elliptic problems I, II // M^2 AN. – 1998. – V. 32. – No 4. – P. 479–499, P. 500–520.

13. *Milner F.A., Park E.-J.* A mixed finite element method for a strongly nonlinear second order elliptic problem // Math. Comp. – 1995. – V. 64. – P. 973–988.

14. *Lee M., Milner F.A.* Mixed finite element methods for nonlinear elliptic problems: the p-version // Numer. Meth. for Part. Diff. Eq. – 1996. – V. 12. – P. 729–741.

15. *Milner F.A., Suri M.* Mixed quasilinear second-order elliptic problems: the p-version // M^2 AN. – 1992. – V. 26. – P. 913–931.

16. *Hua D., Wang L.* A mixed finite element method for the contact problem in elasticity // J. Comput. Math. – 2005. – V. 23, No. 4. – P. 441–448.

17. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Контактная задача для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко // ПММ. – 2003. – Т. 67, № 6. – С. 940–953.

18. *Hlaváček I.* Reliable solution of a unilateral contact problem with friction, considering uncertain input data // Applied nonlinear analysis. In honor of the 70th birthday of Professor Jindrich Necas. – N. Y.: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999. – P. 175–183.

19. *Ignatieva M.A., Lapin A.V.* Mixed hybrid finite element scheme for Stefan problem with prescribed convection // Lobachevskii J. Math. – 2003. – V. 13. – P. 15–24. (URL: http://ljm.ksu.ru/vol13/ila.htm)

20. *Ignatieva M.A., Lapin A.V.* Iterative solution of a mixed hybrid finite element scheme for the Signorini problem // Comp. Meth. in Appl. Math. – 2004. – V. 4, No 2. – P. 180–191.

21. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.

22. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Ведение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – 239 с.

23. *Kuznetsov Yu.A.* Spectrally equivalent preconditioners for mixed hybrid discretizations of diffusion equations on distorted meshes // J. Numer. Math. – 2003. – V. 11. – P. 61–74.

24. *Лапин А.В.* Методы типа релаксации для суммы квадратичного и выпуклого функционалов // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 30–39.

Поступила в редакцию
24.08.06

Игнатьева Марина Александровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Marina.Ignatieva@ksu.ru*

Лапин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского государственного университета.

E-mail: *alapin@ksu.ru*

Лапин Николай Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.