УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 269–284 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.111 doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284

О МОЩНОСТИ СЛОЁВ НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Т.В. Андреева, Ю.С. Семенов

Российский университет транспорта, г. Москва, 127994, Россия

Аннотация

В работе вычислены в явном виде поправки к главному слагаемому асимптотики мощности центральных слоёв n-мерной k-значной решётки для нечётных k при $n \to \infty$, которое было найдено В.Б. Алексеевым для некоторого класса частично упорядоченных множеств. Кроме того, уточнена асимптотика мощности центральных слоёв в декартовых степенях неранжированного частично упорядоченного множества из той же работы В.Б. Алексеева и вычислены суммы граничных функционалов для n-мерной трёхзначной решётки.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, асимптотика, антицепь

Введение

Пусть S – некоторое частично упорядоченное множество (ЧУМ) с отношением порядка $<$, а S^n – его декартова степень. Если $s_1 < s_2$ и $\{s : s_1 < s < s_2\} = \emptyset$, то s_1 *непосредственно предшествует* s_2, обозначение $s_1 \prec s_2$. Про наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in S^n$ $\big(\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\big)$ скажем, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, если $\alpha_i < \beta_i$ или $\alpha_i = \beta_i$ для всех i. Таким образом, S^n тоже является частично упорядоченным множеством.

Антицепью в S^n называется множество, в котором нет пары наборов $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ такой, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Максимальное число элементов в антицепи называется *шириной* S^n, или *числом Шпернера*, обозначается (S^n). Через $\Psi(S^n)$ обозначим число антицепей в множестве S^n. Имеет место тривиальная нижняя оценка

$$2^{(S^n)} \leqslant \Psi(S^n).$$

Пусть на ЧУМ S задана функция веса w, назовём её *допустимой*, если для всех $s_1, s_2 \in S$ из $s_1 < s_2$ следует, что $w(s_1) \leqslant w(s_2) - 1$. Если w – целочисленная функция и из $s_1 \prec s_2$ следует, что $w(s_1) = w(s_2) - 1$, то w является функцией ранга, а S – ранжированным множеством.

Вес набора $\widetilde{\alpha} \in S^n$ определяется по формуле $w(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{n} w(\alpha_i)$, то есть как сумма весов его компонент. Если w – функция ранга, то множество S^n будет ранжированным.

Множество $S^n_r = \{\widetilde{\alpha} \in S^n : w(\widetilde{\alpha}) = r\}$ называется r-м *слоем* множества S^n. Слой, очевидно, является антицепью.

Из работы В.Б. Алексеева [1] следует, что при $n \to \infty$

$$(S^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \cdot \frac{|S|^n}{\sqrt{n}} \big(1 + o(1)\big), \tag{1}$$

где $D = \inf D(\xi_w)$ (берётся точная нижняя грань дисперсий некоторой случайной величины ξ_w, определяемой весовой функцией w, по всем допустимым w).

Асимптотическое решение задачи о числе антицепей в единичном n-мерном кубе B^n, называемой также проблемой Дедекинда, найдено А.Д. Коршуновым в [2].

А.А. Сапоженко получил асимптотику числа антицепей в ранжированных унимодальных ЧУМ (см., например, [3]), из которой вытекает, в частности, асимптотика для $\Psi(B^n)$. Для получения асимптотики А.А. Сапоженко использовал метод граничных функционалов, описанный, например, в [4].

Звездой, или *вилкой*, G_τ называется ЧУМ, диаграммой которого является граф $K_{1,\tau}$. В работе [3] найдена асимптотика $\Psi(G_\tau^n)$ при $2 \leqslant \tau \leqslant 4$. В работе [5] Т.В. Андреева, опираясь на работы А.А. Сапоженко, нашла асимптотику $\Psi(G_\tau^n)$ при $5 \leqslant \tau \leqslant 11$ и нижнюю оценку при $\tau > 11$.

В [5] также найдена нижняя оценка $\Psi(E_3^n)$, где $E_3 = \{0,1,2\}$, $0 < 1 < 2$, предположительно, являющаяся асимптотической.

Из определения унимодальности множества S^n (см., например, [3]) следует, что оно обладает свойством Шпернера, то есть величина (S^n) равна мощности максимального слоя. Нижние оценки, полученные с использованием метода граничных функционалов, имеют вид

$$2^{(S^n)} e^{\mu(n)} \leqslant \Psi(S^n),$$

где $\mu(n)$ – сумма граничных функционалов. Во многих случаях получение оценки мощности слоя, а также вычисление сумм граничных функционалов является непростой задачей.

В настоящей работе мы описываем подход, позволяющий получать асимптотики слоёв, близких к центральным, в некоторых симметричных ЧУМ. Структура работы следующая. Основным результатом является теорема 1, усиливающая результат В.Б. Алексеева (1) для n-мерной k-значной решётки при нечётных k. Она сформулирована в разд. 1. Раздел 2 носит вспомогательный характер, в нем перечислены некоторые формулы и доказаны технические леммы. В разд. 3 дано доказательство теоремы 1 с использованием инструмента производящих функций и техники классического математического (в том числе комплексного) анализа. Там же можно найти обсуждение случая чётных k. В разд. 4 мы рассматриваем пример неранжированного ЧУМ, принадлежащий В.Б. Алексееву, для которого также получено уточнение асимптотики мощности максимальной антицепи. В разд. 5 вычислены суммы граничных функционалов для E_3^n и показана их связь с мощностью слоёв, соседних с центральным, в некоторых ЧУМ.

1. О мощности центральных слоёв n-мерной k-значной решётки

На множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ введём порядок: $0 < 1 < \cdots < k-1$, а n-ю декартову степень E_k^n будем, как обычно, называть *k-значной n-мерной решёткой.* Вес набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ определим как $w(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, тогда E_k^n – ранжированное ЧУМ.

Через $F(n,r,k)$ обозначим *r-й слой* E_k^n, $0 \leqslant r \leqslant n(k-1)$, а его мощность – через $N(n,r,k) = \big|F(n,r,k)\big|$.

Известно, что слои решётки симметричны относительно центрального слоя (центра), а мощности слоёв возрастают от нулевого до центрального. Центральным слоем решётки при нечётных k является слой $F\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right)$.

Из работы (1) следует, что при $n \to \infty$

$$(E_k^n) = N\left(n, \left\lfloor \frac{n(k-1)}{2} \right\rfloor, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi n(k^2-1)}}\,\bigl(1+o(1)\bigr).$$

В частности,

$$(E_3^n) = N(n,n,3) = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\,\bigl(1+o(1)\bigr).$$

В работе [5] доказано, что при $n \to \infty$ справедлива оценка

$$2^{N(n,n,3)} e^{\mu_2(n)} \leqslant \Psi(E_3^n),$$

где

$$N(n,n,3) = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{3}{16n} + o\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\right), \quad \mu_2(n) = \frac{c}{\sqrt{n}}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^n \left(1 + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\right), \tag{2}$$

$$c = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1}{2\pi\sqrt{2}}} \approx 0.656, \qquad \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \approx 1.914.$$

Результат, касающийся мощности центрального слоя решётки E_3^n, обобщается в следующей теореме.

Теорема 1. *Для нечётных* $k \geqslant 3$*:*

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+11}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\right),$$

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2} - 1, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+251}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\right),$$

где

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sqrt{\frac{1}{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\right).$$

2. Вспомогательные формулы и утверждения

2.1. Значения некоторых интегралов от тригонометрических функций. Для дальнейшего нам понадобится известное (см., например, [6]) значение интеграла

$$I_{2p,2q} = I_{2q,2p} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \,\sin^{2q}\varphi \,d\varphi = \frac{(2p-1)!! \cdot (2q-1)!!}{(2p+2q)!!}. \tag{3}$$

В частности,

$$I_{2p,0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \,d\varphi = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}, \tag{4}$$

$$I_{2p,2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \,\sin^2\varphi \,d\varphi = \frac{I_{2p,0}}{2p+2}, \tag{5}$$

$$I_{2p,4} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi\,\sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{3I_{2p,0}}{(2p+2)(2p+4)} = I_{2p,0}\cdot O\Big(\frac{1}{p^2}\Big), \tag{6}$$

$$I_{2p\pm2,0} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p\pm2}\varphi\,d\varphi = I_{2p,0}\left(1\mp\frac{1}{2p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\right). \tag{7}$$

Напомним также формулу Стирлинга: при $n\to\infty$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right).$$

2.2. Технические леммы. При доказательстве теоремы 1 используются леммы 1 и 2, условия которых для решётки E_k^n выполняются ввиду леммы 3.

Лемма 1. *Пусть для интеграла*

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\big(\cos^2\varphi + a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^n\,d\varphi$$

выполнено одно из условий:

(*i*) $|a_4|+|a_6|+\dots+|a_{2m}| = M<1$,

(*ii*) $\max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}\big|a_4+a_6\sin^2\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi\big|\leqslant M<1$.

Тогда

$$G_n - \sum_{b=0}^{2}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^b\,d\varphi = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Доказательство. Условие (*i*) влечёт (*ii*), поэтому будем считать, что всегда выполнено (*ii*). По формуле бинома

$$G_n = \sum_{b=0}^{n}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^b\,d\varphi.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что

$$\sum_{b=3}^{n}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\,\sin^{4b}\varphi\big(a_4+a_6\sin^2\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi\big)^b\,d\varphi = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

В этой сумме рассмотрим отдельно слагаемое при $b=3$:

$$\binom{n}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-6}\varphi\,\sin^{12}\varphi\big(a_4+a_6\sin^2\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi\big)^3\,d\varphi.$$

Раскрывая скобки и применяя формулу (3), убеждаемся, что эта величина имеет вид

$$I_{2n,0}\cdot O\Big(\frac{1}{n^3}\Big) = O\Big(\frac{1}{n^{7/2}}\Big) = o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

так как по формуле Стирлинга $I_{2n,0} = O(n^{-1/2})$.

Оценим теперь

$$S_4 = \sum_{b=4}^{n} \binom{n}{b} \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n-2b}\varphi \, \sin^{4b}\varphi \big(a_4 + a_6 \sin^2 \varphi + \dots + a_{2m} \sin^{2m-4}\varphi\big)^b \, d\varphi.$$

Ввиду (*ii*) и (3) имеем оценку $|S_4| \leqslant A$, где

$$A = \sum_{b=4}^{n} \binom{n}{b} M^b \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n-2b}\varphi \, \sin^{4b}\varphi \, d\varphi = \sum_{b=4}^{n} \binom{n}{b} \cdot M^b \cdot \frac{(2n-2b-1)!! \cdot (4b-1)!!}{(2n+2b)!!}.$$

Поскольку

$$\binom{n}{b} \cdot \frac{(2n-2b-1)!! \cdot (4b-1)!!}{(2n+2b)!!} = \frac{n(n-1)\dots(n-b+1)}{b!} \cdot \frac{(2n-2b-1)!! \cdot (4b-1)!!}{2^{n+b}(n+b)!} =$$
$$= \frac{(2n-2b-1)!!}{2^{n-b}(n-b)!} \cdot \frac{(4b-1)!!}{2^{2b}\, b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)} < \frac{(4b-1)!!}{2^{2b}\, b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)},$$

то

$$A < B = \sum_{b=4}^{n} \frac{M^b \cdot (4b-1)!!}{2^{2b}\, b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}.$$

Положим

$$x_b = \frac{M^b \cdot (4b-1)!!}{2^{2b}\, b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}.$$

Покажем, что при $n \gg 1$ имеет место оценка $B < (n-4)x_4$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{x_{b+1}}{x_b} = \frac{M(4b+1)(4b+3)}{4(b+1)(n+b+1)}.$$

Несложно проверить, что это отношение возрастает по b, когда b меняется от 4 до $n-1$, причём при $n \gg 1$ и $b = 4$ оно меньше 1. Следовательно, в диапазоне от 4 до n последовательность x_b либо убывает, либо сначала убывает, а потом начинает возрастать. В первом случае x_4 – наибольший член последовательности ($4 \leqslant b \leqslant n$), а во втором для определения наибольшего члена следует сравнить x_4 и x_n:

$$x_4 = \frac{M^4 \cdot 15!!}{24 \cdot 256 \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$x_n = \frac{M^n \cdot (4n-1)!!}{2^{2n}\, n! \cdot (n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = \frac{M^n \cdot (4n)!}{2^{4n} \cdot (2n)! \cdot (2n)!} < M^n.$$

Очевидно, что при $n \gg 1$ будет выполнено условие $x_n < x_4$. Поэтому можнос считать, что при $n \to \infty$

$$|S_4| < B < (n-3)x_4 = \frac{(n-3)M^4 \cdot 15!!}{24 \cdot 256 \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{M^4 \cdot 15!!}{24 \cdot 256 \cdot n^3} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть даны интегралы*

$$G_n^{(2)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big(\cos^2 \varphi + a_4 \sin^4 \varphi + a_6 \sin^6 \varphi + \dots + a_{2m} \sin^{2m} \varphi\big)^n \sin^2 \varphi \, d\varphi,$$

$$G_n^{(4)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\big(\cos^2\varphi + a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^n\sin^4\varphi\,d\varphi,$$

$$G_n^{(6)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\big(\cos^2\varphi + a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^n\sin^6\varphi\,d\varphi.$$

и выполнено условие (i) *или* (ii) *леммы* 1. *Тогда*

$$G_n^{(2)} - \sum_{b=0}^{1}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi\big)^b\sin^2\varphi\,d\varphi = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

$$G_n^{(4)} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad G_n^{(6)} = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Доказательство. Проводится по схеме доказательства леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть* $k = 2m+1 > 1$ *– нечётное и*

$$a_{2l} = \frac{(-1)^l\,(3!)^l}{(2l+1)!}\prod_{j=2}^{l}\frac{k^2-(2j-1)^2}{k^2-1}, \quad l = 2,\dots,m.$$

Тогда (*см. условия леммы* 1)

$$|a_4| + |a_6| + \dots + |a_{2m}| < \frac{\operatorname{sh}\sqrt6}{\sqrt6} - 2 < 0.35 = M < 1.$$

Доказательство.

$$|a_4|+|a_6|+\dots+|a_{2m}| < \frac{6^2}{5!} + \frac{6^3}{7!} + \dots + \frac{6^m}{(2m+1)!} + \dots = \frac{\operatorname{sh}\sqrt6}{\sqrt6} - 1 - \frac{6}{3!} = 0.3466\dots$$

□

3. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим многочлен (производящую функцию)

$$A(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + \dots + A_N z^N,$$

Хорошо известно, что значение коэффициентов A_r, $0 \leqslant r \leqslant N$, может быть найдено по интегральной формуле Коши

$$A_r = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{A(z)}{z^{r+1}}\,dz. \tag{8}$$

3.1. Случай $k = 3$**.** Для сравнения с результатами работы [5] подробно докажем теорему 1 для случая $k = 3$. Производящая функция мощности слоя E_3^n имеет вид

$$A(z) = (1 + z + z^2)^n.$$

Для оценки мощности центрального слоя E_3^n воспользуемся формулой (8):

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{(1+z+z^2)^n}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|z|=1} \left(z^{-1}+1+z\right)^n \frac{dz}{2iz} = \left\{z = e^{2iu}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\cos 2u + 1\right)^n du = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(3 - 4\sin^2 u\Big)^n du = 3^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(1 - \frac{4}{3}\sin^2 u\Big)^n du =$$

$$= 3^n \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/3} \Big(1 - \frac{4}{3}\sin^2 u\Big)^n du + \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \Big(1 - \frac{4}{3}\sin^2 u\Big)^n du \right) = 3^n (T_1 + T_2).$$

Сначала оценим интеграл T_2. Положим $f(u) = 1 - \dfrac{4}{3}\sin^2 u$. Несложно проверить, что

$$\big|f(u)\big| \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad u \in \Big[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\Big],$$

следовательно,

$$|T_2| \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6 \cdot 3^n} = \frac{1}{3^{n+1}} = o\Big(\frac{1}{n^p}\Big) \quad \text{для любого} \quad p > 0.$$

Выполним подстановку $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin u = \sin\varphi$ в интеграле T_1. Тогда при $u \in \Big[0, \dfrac{\pi}{3}\Big]$

$$\varphi = \arcsin\Big(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin u\Big), \quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$$

и

$$du = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos u}\, d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - 3/4\sin^2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\sin^4\varphi - \cdots\Big)\Big(1 + \frac{3}{8}\sin^2\varphi + \frac{27}{128}\sin^4\varphi + \cdots\Big)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1 - \frac{1}{8}\sin^2\varphi + \gamma_3 \sin^4\varphi\Big)\, d\varphi,$$

где

$$\gamma_3 = \gamma_3(\sin^2\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{13}{128} \leqslant |\gamma_3| \leqslant \frac{7}{8}.$$

С использованием (4)–(6) получаем

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)^n \Big(1 - \frac{1}{8}\sin^2\varphi + \gamma_3 \sin^4\varphi\Big)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{2n}\varphi \Big(1 - \frac{1}{8}\sin^2\varphi + \gamma_3 \sin^4\varphi\Big)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot I_{2n,0} \left(1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2n+2} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{16n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Табл. 1

n	точное	(9)	(10)	(11)
11	25 653	25 656	25 652	25 653
12	73 789	73 795	73 787	73 788
13	212 941	212 957	212 937	212 940
14	616 227	616 268	616 217	616 224
15	1 787 607	1 787 710	1 787 582	1 787 601

Следовательно,

$$A_n = N(n,n,3) = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{1}{16n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right). \tag{9}$$

Применив формулу Стирлинга, получаем оценку вида

$$N(n,n,3) = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{3}{16n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right), \tag{10}$$

которая совпадает с оценкой из [5].

Беря большее количество слагаемых в формуле Тейлора, можно получить асимптотику мощности слоя с большей точностью. В частности,

$$N(n,n,3) = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{1}{16n} - \frac{7}{512n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right). \tag{11}$$

В табл. 1 приведены точные значения $N(n,n,3)$, а также приближенные, вычисленные по формулам (9)–(11).

Асимптотика мощности слоя решётки E_3^n, соседнего с центральным, получается из аналогичных соображений. Отметим лишь некоторые нюансы.

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{(1+z+z^2)^n}{z^n}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(2\cos t + 1\big)^n(\cos t + i\sin t)\,dt.$$

Поскольку A_{n-1} – число целое (с нулевой мнимой частью),

$$A_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\big(2\cos t+1\big)^n\cos t\,dt = 3^n\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(1-\frac{4}{3}\sin^2 u\Big)^n(1-2\sin^2 u)\,du.$$

Так же, как и для центрального слоя, можно показать, что (сравните с (10), (11))

$$N(n,n-1,3) = 3^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{15}{16n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right),$$

$$N(n,n-1,3) = 3^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{13}{16n} + \frac{449}{512n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right).$$

3.2. Доказательство теоремы 1 для $k \geqslant 5$**.** При $k \geqslant 2$ производящая функция мощности слоёв E_k^n имеет вид

$$A(z) = (1+z+z^2+\dots+z^{k-1})^n.$$

Положим $m = \dfrac{n(k-1)}{2}$ и найдём мощность центрального слоя:

$$A_m = N(n,m,k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{(1+z+z^2+\ldots+z^{k-1})^n}{z^{n(k-1)/2+1}}\,dz = \left\{z = e^{2iu}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(1 + 2\cos 2u + 2\cos 4u + \ldots + 2\cos(k-1)u\big)^n\,du.$$

Несложно получить, воспользовавшись, например, формулами из [6], что при нечётных k

$$1 + 2\cos 2u + 2\cos 4u + \cdots + 2\cos(k-1)u = \frac{\sin ku}{\sin u} =$$
$$= k\Big(1 - \frac{(k^2-1^2)}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big).$$

В правой части этой формулы $\dfrac{k+1}{2}$ слагаемых. Теперь

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin ku}{\sin u}\Big)^n du =$$

$$= k^n \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \Big(1 - \frac{(k^2-1)}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)^n du =$$

$$= k^n \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{6/(k^2-1)}} \Big(1 - \frac{(k^2-1)}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\Big)^n du +$$

$$+ k^n \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_{\arcsin 6/(k^2-1)}^{\pi/2} \Big(\frac{\sin ku}{k\sin u}\Big)^n du = k^n(T_1 + T_2).$$

Второй интеграл несложно оценить:

$$\Big|\frac{\sin ku}{k \sin u}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{при} \quad u \in \left[\arcsin\sqrt{\frac{6}{k^2-1}}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$|T_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{для любого} \quad p > 0.$$

Выполним подстановку в интеграле T_1 при $u \in \left[0, \arcsin\sqrt{\dfrac{6}{k^2-1}}\right]$:

$$\sqrt{\frac{k^2-1}{6}}\sin u = \sin\varphi, \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$du = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \dfrac{6}{k^2-1}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\Big(1 - \frac{(k^2-7)}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \gamma_k \sin^4\varphi\Big)\,d\varphi,$$

где
$$\gamma_k = \gamma_k(\sin^2\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{k^4+10k^2-119}{8(k^2-1)^2} \leqslant |\gamma_k| \leqslant \frac{k^2+5}{2(k^2-1)}.$$
Следовательно,
$$T_1 = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\cos^2\varphi + \frac{3(k^2-3^2)}{10(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\Big)^n \times$$
$$\times\left(1-\frac{(k^2-7)}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \gamma_k\sin^4\varphi\right)d\varphi =$$
$$= \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\cos^{2n}\varphi + n\cos^{2n-2}\varphi\cdot\frac{3(k^2-3^2)}{10(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\Big)\times$$
$$\times\left(1-\frac{(k^2-7)}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \gamma_k\sin^4\varphi\right)d\varphi.$$
В последнем выражении под многоточием подразумеваются те слагаемые в формуле бинома, которые явно можно не выписывать ввиду лемм 1 и 2. Таким образом, с учётом формул (4)–(7)
$$T_1 = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot I_{2n,0}\left(1-\frac{(k^2-7)}{2(k^2-1)}\cdot\frac{1}{2n} + n\cdot\frac{3(k^2-3^2)}{10(k^2-1)}\cdot\frac{3}{(2n)^2} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{k^2+11}{40(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$
Значит,
$$A_m = N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = k^n\cdot\sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{k^2+11}{40(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Для слоя, соседнего с центральным, как и в случае $k=3$, получается формула
$$A_{m-1} = N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}-1, k\right) =$$
$$= k^n\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(1-\frac{(k^2-1)}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{5!}\sin^4 u - \dots\Big)^n(1-2\sin^2 u)\,du,$$
отличающаяся от формулы для A_m наличием множителя $(1-2\sin^2 u)$ в подынтегральной функции. Используя те же соображения, что и для A_m, получим
$$A_{m-1} = k^n\cdot\sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{k^2+251}{40(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание. Формулу (11) можно обобщить:
$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) =$$
$$= k^n\cdot\sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{k^2+11}{40(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + \frac{37k^4-1682k^2+11581}{640(k^2-1)^2}\cdot\frac{1}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right).$$

3.3. Замечания относительно случая чётных k. При чётном n в решётке E_k^n имеется единственный центральный слой, а при нечётном n – два.

При $k = 2$ мощность слоёв выписывается явно. При $k \geqslant 4$ в случае чётного n с помощью описанного подхода получается интегральное представление

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin ku}{\sin u}\Big)^n du =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos u\Big(1 - \frac{(k^2-2^2)}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)\right)^n du,$$

из которого можно получить (доказательство мы в этой статье не приводим ввиду большего (по сравнению со случаем нечётного k) объёма технических деталей) формулы

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(1 + \frac{k^2-4}{10(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$

или

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+11}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

В случае нечётного n оба центральных слоя имеют мощность

$$N\left(n, \frac{n(k-1) \pm 1}{2}, k\right) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin ku}{\sin u}\Big)^n \cos u\, du.$$

Отсюда также можно получить асимптотику

$$N\left(n, \frac{n(k-1) \pm 1}{2}, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{n!!}{(n+1)!!}\left(1 + \frac{3(k^2-4)}{5(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$

или

$$N\left(n, \frac{n(k-1) \pm 1}{2}, k\right) = k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+71}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Кроме того, подобным же образом получаются формулы мощности слоёв, соседних с центральным (с двумя центральными).

4. О мощности слоёв некоторых неранжированных ЧУМ

Рассмотрим ЧУМ $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, диаграмма которого изображена на рис. 1. Вес набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S^n$ определим как $w(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j$. Множество S^n не является ранжированным. Через S_r^n обозначим r-й слой S^n, $-3n \leqslant r \leqslant 3n$.

Из [1] следует, что, с одной стороны, при $n \to \infty$

$$(S^n) = \frac{5^n}{\sqrt{2\pi n}}\big(1 + o(1)\big).$$

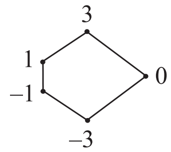

Рис. 1. Диаграмма множества S

Табл. 2

	Значения $\lvert S_0^n\rvert$		Значения $\lvert S_{-1}^n\rvert$	
n	точное	приближённое	точное	приближённое
8	27 525	27 143	26 384	26 719
9	127 237	128 163	127 431	126 384
10	611 665	608 730	598 630	601 126
11	2 897 225	2 905 140	2 881 505	2 872 145
12	13 943 205	13 919 801	13 757 316	13 774 879

С другой стороны,

$$(S^n) = |S_{-1}^n \bigcup S_0^n| = |S_{-1}^n| + |S_0^n|.$$

Найдём оценки $|S_0^n|$ и $|S_{-1}^n|$. Производящая функция мощности слоя:

$$A(z) = (z^{-3} + z^{-1} + 1 + z + z^3)^n.$$

Нас интересуют значения коэффициентов A_0 и A_{-1}, которые вычисляются на основе подхода, описанного в предыдущем разделе:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \left(z^{-3} + z^{-1} + 1 + z + z^3\right)^n \frac{dz}{z} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - 4\cos 2u + 8\cos^3 2u\right)^n du =$$

$$= 5^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - 8\sin^2 u + \frac{96}{5}\sin^4 u - \frac{64}{5}\sin^6 u\right)^n du =$$

$$= \frac{5^n}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 + \frac{1}{160n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right),$$

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \left(z^{-3} + z^{-1} + 1 + z + z^3\right)^n dz = \frac{5^n}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{19}{160n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Следовательно,

$$(S^n) = \frac{5^n}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{9}{80n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

В табл. 2 приведены точные значения мощности слоёв S_0^n и S_{-1}^n, а также значения, вычисленные по найденным формулам.

5. Вычисление сумм граничных функционалов

В работе [5] рассматриваются суммы вида

$$\alpha_1^{\nu,(1)} = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} 2^{-\nu(n-j)},$$

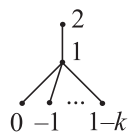

Рис. 2. Диаграмма множества F_k

называемые суммами граничных функционалов для E_3^n (здесь ν – натуральное). Значение $\alpha_1^{1,(1)}$ является главным слагаемым в $\mu_2(n)$ в формуле (2). В настоящей работе это значение найдено на основе рассмотренного выше подхода (в [5] указано ошибочное значение константы c, см. верное значение сразу после (2) выше).

Покажем, как значения сумм граничных функционалов для E_3^n связаны с мощностями слоёв, соседних с центральным, в некоторых ЧУМ. Заметим также, что, в отличие от множеств, рассмотренных ранее, в общем случае диаграммы этих множеств не являются симметричными относительно центрального слоя.

Рассмотрим ЧУМ $F_k = \{1-k, \ldots, -1, 0, 1, 2\}$, диаграмма которого изображена на рис. 2. Весом набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F_k^n$ назовём величину $w(\widetilde{\alpha})$, равную сумме *положительных* компонент набора. Множество F_k^n является ранжированным. Через $F_k^n(r)$ обозначим r-й слой F_k^n, $0 \leqslant r \leqslant 2n$.

Отметим, что $F_1^n = E_3^n$. Производящая функция мощности слоя множества F_k^n имеет вид

$$A(z) = \bigl(k + z + z^2\bigr)^n.$$

Несложно видеть, что

$$\alpha_1^{\nu,(1)} = \bigl|F_{2^\nu}^n(n-1)\bigr| 2^{1-\nu-\nu n},$$

но мы не будем сразу применять подход из разд. 3. Сначала заметим, что для центрального и соседнего с ним слоёв имеет место

$$\bigl|F_k^n(n)\bigr| = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j}\binom{2j}{j} k^j, \quad \bigl|F_k^n(n-1)\bigr| = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2j+1}\binom{2j+1}{j} k^{j+1}.$$

Тогда

$$\binom{n}{2j}\binom{2j}{j} = \binom{n}{2j}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}\, 2^{2j} = \binom{n}{2j} 2^{2j} \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2j} u\, du,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\bigl|F_k^n(n)\bigr| &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} 2^{2j} k^j \cos^{2j} u\, du = \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\bigl(1 + 2\sqrt{k}\cos u\bigr)^n \left(1 + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\right) du = \\
&= \frac{(1+2\sqrt{k})^{n+1/2}}{2k^{1/4}}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{2\sqrt{k}-1}{16n\sqrt{k}} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\right).
\end{aligned}$$

Далее

$$\binom{n}{2j+1}\binom{2j+1}{j} = \binom{n}{2j+1}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}\, 2^{2j+1} = \binom{n}{2j+1} 2^{2j+1} \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2j+2} u\, du.$$

Следовательно,

$$\left|F_k^n(n-1)\right| = \sqrt{k}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2j+1}(2\sqrt{k})^{2j+1}\cos^{2j+1}u\cos u\,du =$$

$$= \sqrt{k}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\big(1+2\sqrt{k}\cos u\big)^n\left(1+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\cos u\,du =$$

$$= \frac{k^{1/2}\big(1+2\sqrt{k}\big)^{n+1/2}}{2k^{1/4}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{3+10\sqrt{k}}{16n\sqrt{k}}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

В итоге получается асимптотическая формула для сумм граничных функционалов

$$\alpha_1^{\nu,(1)} = \sqrt{\frac{1+2^{\nu/2+1}}{2^{3\nu/2}\pi n}}\left(\frac{1+2^{\nu/2+1}}{2^{\nu}}\right)^n\left(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right).$$

Литература

1. *Алексеев В.Б.* О числе монотонных k-значных функций // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1974. – Вып. 28 – С. 5–24.
2. *Коршунов А.Д.* О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. – М: Наука, 1981. – Вып. 38 – С. 5–108.
3. *Сапоженко А.А.* О числе антицепей в многослойных ранжированных частично упорядоченных множествах // Дискрет. матем. 1989. – Т. 1, Вып. 2 – С. 110–128.
4. *Сапоженко А.А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 152 с.
5. *Андреева Т.В.* Развитие метода граничных функционалов и его приложение к комбинаторным задачам // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 2004. – Вып. 13 – С. 145–222.
6. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

Поступила в редакцию
04.08.2020

Андреева Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Цифровые технологии управления транспортными процессами»

Российский университет транспорта

ул. Образцова, д. 9, стр. 9, г. Москва, 127994, Россия

E-mail: *t-v-andreeva@mail.ru*

Семенов Юрий Станиславович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Цифровые технологии управления транспортными процессами»

Российский университет транспорта

ул. Образцова, д. 9, стр. 9, г. Москва, 127994, Россия

E-mail: *yuri_semenoff@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2020, vol. 162, no. 3, pp. 269–284

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284

On the Cardinality of Layers in Some Partially Ordered Sets

T.V. Andreeva, Yu.S. Semenov***

Russian University of Transport, Moscow, 127994 Russia
E-mail: **t-v-andreeva@mail.ru*, ***yuri_semenoff@mail.ru*

Received August 4, 2020

Abstract

In this paper, we explicitly calculated additional terms of cardinality asymptotics of layers in the n-dimensional k-valued lattice E_k^n for odd k as $n \to \infty$. The main term had been previously determined by V.B. Alekseev for a class of posets and, particularly, for E_k^n. Additionally, we precised the cardinality asymtotics of central layers in Cartesian powers of the non-graded poset given by V.B. Alekseev in the same work and calculated the sums of boundary functionals for the n-dimensional three-valued lattice. The obtained theorems, lemmas, and formulas are of combinatorial interest by themselves. They can also be used for estimating the cardinality of maximal antichain or the number of antichains in posets of a definite class.

Keywords: poset, asymptotics, antichain

Figure Captions

Fig. 1. Diagram of the poset S.

Fig. 2. Diagram of the poset F_k.

References

1. Alekseev V.B. On the number of k-valued monotone functions. *Probl. Kibern.*, 1974, no. 28, pp. 5–24. (In Russian)
2. Korshunov A.D. On the number of monotone Boolean functions. *Probl. Kibern.*, 1981, no. 38, pp. 5–108. (In Russian)
3. Sapozhenko A.A. The number of antichains in multilayered ranked sets. *Discrete Math. Appl.*, 1989, vol. 1, no. 2, pp. 149–169. doi: 10.1515/dma.1991.1.2.149.
4. Sapozhenko A.A. *Problema Dedekinda i metod granichnykh funktsionalov* [Dedekind's Problem and the Method of Boundary Functionals]. Moscow, FIZMATLIT, 2009. 152 p. (In Russian)
5. Andreeva T.V. Development of the boundary functional method and its applications to combinatorial problems. *Mat. Vopr. Kibern.*, 2004, no. 13, pp. 145–222. (In Russian)

6. Dwight H.R. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of Integrals and Other Mathematical Data]. Moscow, Nauka, 1978. 224 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Андреева Т.В., Семенов Ю.С.* О мощности слоёв некоторых частично упорядоченных множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 269–284. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284. ⟩

⟨ ***For citation*:** Andreeva T.V., Semenov Yu.S. On the cardinality of layers in some partially ordered sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 269–284. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284. (In Russian) ⟩