КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 127, кн. 1 *Ученые записки* *1967*

Б. Г. Габдулхаев

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В работе выводится ряд оценок для погрешности аппроксимации полиномами. Полученные результаты применяются к квадратурным процессам для сингулярных интегралов*.

I ЧАСТЬ

Аппроксимация полиномами

Некоторые вопросы вычислительной математики, связанные с квадратурными формулами для сингулярных интегралов и решением сингулярных интегральных уравнений прямыми методами, приводят к оценке выражения

$$\|x - Px\| = \|x - Px\|_Z \quad (x \in M) \tag{0.1}$$

в смысле метрики некоторого линейного нормированного пространства Z, где M — множество пространства непрерывных функций $C\,(M \subseteq C)$, а $Px \equiv T_n(s)$ — тригонометрический полином вида

$$T_n(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos ms + b_m \sin ms, \tag{0.2}$$

аппроксимирующий функцию $x = x(s)$ в метрике $C\,(C \neq Z)$.

Ниже мы укажем ряд эффективных оценок выражения (0.1) при конкретном выборе пространства Z, множества M и оператора P.

---

* Основные результаты этой статьи были доложены автором на II Всесоюзной конференции по вычислительной математике (Москва, МГУ, январь 1965 г.)

§ 1. Случай $Z = H_\beta$

П. 1. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами наилучшего равномерного приближения

Пусть H_β означает множество непрерывных 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\beta\,(0 < \beta \leqslant 1)$. Известно, [1], что при нормировке

$$\|x\| = \|x\|_\beta = M(x) + H(x;\,\beta) \quad (x \in H_\beta), \tag{1.1}$$

где

$$M(x) = \|x\|_C = \max_s |x(s)|, \quad H(x;\,\beta) = \sup_{s' \neq s''} \frac{|x(s') - x(s'')|}{|s' - s''|^\beta}, \tag{1.2}$$

множество H_β превращается в B-пространство. Постоянная $H(x;\,\beta)$ называется наименьшей постоянной Гельдера (условия H_β) функции $x(s)$ при заданном β.

Через $H_\alpha^{(m)}$ будем обозначать множество m раз непрерывно-дифференцируемых функций, $m^{\underline{e}}$ производные которых удовлетворяют условию H_α.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть функция $x = x(s)$ удовлетворяет условию*

$$x \in M \equiv H_\alpha^{(m)} \quad (m \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1). \tag{1.3}$$

Тогда существует такой тригонометрический полином степени n вида (0.2), *что*

$$M(x - T_n) \leqslant \frac{A_1 H(x^{(m)};\,\alpha)}{n^{m+\alpha}} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots); \tag{1.4}$$

если произвольное число β таково, что $0 < \beta \leqslant \alpha$, то справедливы оценки:

$$H(x - T_n;\,\beta) \leqslant \frac{A_1 B_1 H(x^{(m)};\,\alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{1.5}$$

$$\|x - T_n\| \leqslant \frac{A_1(1 + B_1) H(x^{(m)};\,\alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{1.6}$$

где A_1 и B_1 — постоянные, определяемые ниже.

Доказательство. При условии (1.3) справедливость неравенства (1.4) устанавливается многими известными способами аппроксимации $x(s)$ полиномами вида (0.2). Пусть, например, $T_n(s)$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения для $x(s)$ и $E_n = E_n(x)$ — соответствующее наилучшее приближение. Тогда, как известно [2], равномерно относительно s имеем

$$|x(s) - T_n(s)| \leqslant E_n \leqslant \frac{3}{(n+1)^m}\,\omega\left(x^{(m)};\ \frac{1}{n+1}\right) \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, \ldots \\ m = 0, 1, \ldots \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

где $\omega(x^{(m)}; \delta)$ — модуль непрерывности m-й производной $x(s)$. Из этого неравенства следует соотношение (1.4) при $A_1 = 3$, т. е.

$$M(x - T_n) \leqslant \frac{3H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}}. \tag{1.8}$$

Теперь докажем справедливость неравенства (1.5). Положим при любом вещественном h и s

$$\Delta(h, s) = |x(s+h) - T_n(s+h) + T_n(s) - x(s)|. \tag{1.9}$$

Очевидно, можно считать $h > 0$ и рассмотреть два случая:

$$0 < h \leqslant \frac{1}{n} \text{ и } h > \frac{1}{n}.$$

1 случай. $h > \dfrac{1}{n}$.

Здесь $(nh)^\beta > 1$. Поэтому из (1.3), (1.4) и (1.9) находим оценку:

$$\Delta(h, s) \leqslant 2\max_s |x(s) - T_n(s)| \leqslant \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} =$$

$$= \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \cdot \frac{1}{n^\beta} < \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} h^\beta \tag{1.10}$$

2 случай. $0 < h \leqslant \dfrac{1}{n}$

Этот случай разобьем снова на два случая: $m = 0$ и $m \geqslant 1$. Пусть сначала

$$m = 0. \tag{1.11}$$

Тогда, в силу (1.4), из работы С. Б. Стечкина [3] следует, что полином $T_n(s)$ удовлетворяет условию H_α, т. е. $T_n \in H_\alpha$, причем

$$H(T_n; \alpha) \leqslant KH(x; \alpha). \tag{1.12}$$

Здесь K — постоянная, для которой с учетом условий (1.7), (1.8) и (1.11) можно [3] указать простую оценку вида

$$K \leqslant 1 + 2A_1. \tag{1.13}$$

Теперь из соотношений (1.9), (1.12) и (1.13) находим

$$\Delta(h, s) \leqslant |x(s+h) - x(s)| + |T_n(s+h) - T_n(s)| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + K) H(x; \alpha) h^\alpha \leqslant \frac{2(1 + A_1) H(x; \alpha)}{n^{\alpha-\beta}} h^\beta. \tag{1.14}$$

Учитывая неравенства (1.10) и (1.14), при $m = 0$ для любого $0 < h \leqslant 2\pi$ получаем

$$\Delta(h, s) \leqslant \frac{2(1 + A_1) H(x; \alpha)}{n^{\alpha-\beta}} h^\beta. \tag{1.15}$$

Отсюда уже ясно, что

$$H(x - T_n; \beta) \leqslant \frac{2(1 + A_1) H(x; \alpha)}{n^{\alpha-\beta}}. \tag{1.16}$$

Из конструктивной теории функций известно, что постоянная A_1, вообще говоря, больше единицы для любого полинома $T_n(s)$ вида (0.2) и поэтому при $m = 0$ имеем

$$H(x - T_n; \beta) < \frac{4A_1 H(x; \alpha)}{n^{\alpha-\beta}}. \tag{1.17}$$

Теперь пусть

$$m \geqslant 1. \tag{1.18}$$

В силу условия (1.4) разность $x - T_n$ может быть представлена в виде [3]:

$$x(s) - T_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(s), \quad U_k = T_{2^k n} - T_{2^{k-1} n}. \tag{1.19}$$

Легко видеть, что

$$|U_k(s)| \leqslant |x(s) - T_{2^k n}(s)| +$$

$$+ |x(s) - T_{2^{k-1} n}(s)| \leqslant \frac{A_1 (1 + 2^{-m-\alpha}) H(x^{(m)}; \alpha)}{(2^{k-1} n)^{m+\alpha}}. \tag{1.20}$$

Далее, используя последовательно теорему о среднем Лагранжа, неравенство Бернштейна [4]

$$|T'_n(s)| \leqslant n \max |T_n(s)| \tag{1.21}$$

277(8)

и оценку (1.20), находим

$$\Delta(h, s) = \left|\sum_{k=1}^{\infty} U_k(s+h) - U_k(s)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} hU'_k(s + \theta h)\right|^* \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} (2^k n) \max_s |U_k(s)| \leqslant \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)\, nh (1 + 2^{-m-\alpha})}{n^{m+\alpha}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-k)(m-1+\alpha)} = \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)(1 + 2^{-m-\alpha})\, nh}{(1 - 2^{1-m-\alpha})\, n^{m+\alpha}}. \tag{1.22}$$

Так как $nh \leqslant n^\beta h^\beta$, то из (1.22) следует, что

$$\Delta(h, s) \leqslant 2A_1 H(x^m; \alpha) \frac{1 + 2^{-m-\alpha}}{1 - 2^{1-m-\alpha}} \cdot \frac{h^\beta}{n^{m+\alpha-\beta}}. \tag{1.23}$$

Учитывая соотношения (1.10) и (1.23), при $m \geqslant 1$ находим

$$H(x - T_n; \beta) \leqslant \frac{2A_1 H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \cdot \frac{1 + 2^{-m-\alpha}}{1 - 2^{1-m-\alpha}}. \tag{1.24}$$

---

* $0 < \theta = \text{const} < 1$.

Из соотношений (1.17) и (1.24) следует неравенство (1.5), а из (1.4) и (1.5) — неравенство (1.6), причем для постоянной $B_1 = B_1(m+\alpha)$ можно использовать оценки:

$$B_1(\alpha) \leqslant 4, \text{ если } 0 < \alpha \leqslant 1,$$

$$B_1(m+\alpha) = \frac{2(1+2^{-m-\alpha})}{1-2^{1-m-\alpha}} < \begin{cases} 5, & \text{при } m \geqslant 2 \\ \dfrac{3}{1-2^{-\alpha}}, & \text{при } m = 1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Лемма доказана.

Далее, пусть $C^{(m)}$ означает множество m раз ($m = 0, 1, \dots$) непрерывно-дифференцируемых 2π-периодических функций. Очевидно, что $C^{(m)} \subset H_1^{(m-1)}$ ($m \geqslant 1$). Поэтому при $m \geqslant 1$ доказанная лемма справедлива и для функций из множества $C^{(m)}$. Однако в этом случае можно указать и несколько более точные оценки. А именно, справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть функция $x(s)$ удовлетворяет условию*

$$x \in M \equiv C^{(m)} \quad (m \geqslant 1). \quad (1.26)$$

Тогда существует тригонометрический полином $T_n(s)$ такой, что

$$M(x - T_n) \leqslant \frac{A_2 M(x^{(m)})}{n^m} \quad (m = 1, 2, \dots;\ n = 1, 2, \dots), \quad (1.27)$$

$$H(x - T_n;\ \beta) \leqslant \frac{A_2 B_2 M(x^{(m)})}{n^{m-\beta}} \quad (m = 1, 2, \dots;\ n = 1, 2, \dots), \quad (1.28)$$

где

$$A_2 = \frac{\pi}{2},\quad B_2 = B_2(m) \leqslant \begin{cases} \dfrac{1+\pi+2\sin\frac{1}{2}}{\pi\sin\frac{1}{2}}, & m = 1, \\ \dfrac{2(1+2^{-m})}{1-2^{1-m}}, & m \geqslant 2. \end{cases} \quad (1.29)$$

Действительно, неравенство (1.27) с постоянной $A_2 = \frac{\pi}{2}$ известно [2]. Для доказательства (1.28) заменим в (1.24) постоянные A_1, m и α соответственно на A_2, $m-1$ и 1. Тогда получаем

$$H(x - T_n;\ \beta) \leqslant \frac{2A_2 M(x^{(m)})}{n^{m-\beta}} \cdot \frac{1+2^{-m}}{1+2^{1-m}} \quad (m \geqslant 2). \quad (1.30)$$

При $m = 1$ эта оценка не верна. В этом случае, пользуясь вычислениями, аналогичными приведенным при рассмотрении случая $m = 0$ в лемме 1, с помощью работы [3] находим

$$H(x - T_n;\ \beta) \leqslant \left(1 + \frac{1+\pi}{2\sin\frac{1}{2}}\right)\frac{M(x')}{n^{1-\beta}}. \quad (1.31)$$

П. 2. Об аппроксимации тригонометрическими интерполяционными полиномами

Из использованных выше методов доказательства видно, что леммы 1 и 2 при $m \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$ соответственно справедливы для любых тригонометрических полиномов $T_n(s)$ вида (0.2), равномерно аппроксимирующих $x(s)$ с определенной точностью. При этом постоянные A_1 и A_2 определяются из соответствующей задачи аппроксимации, а для B_1 и B_2 можно использовать ранее найденные оценки. Однако при $m = 0$ и $m = 1$ (соответственно) в общем случае все эти постоянные должны быть определены исходя из рассматриваемой задачи приближения. Как только A_1 и A_2 указаны, то B_1 и B_2 могут быть найдены, в частности, отмеченным выше способом.

Теперь с учетом этих замечаний рассмотрим оценки для выражения (0.1) в случае, когда $T_n(s) = P_n x$ является полиномом, интерполирующим функцию $x(s)$ в узлах

$$s_k = s_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = \overline{0,\ 2n}), \quad (1.32)$$

где $P = P_n$ — соответствующий оператор проектирования.

Известно, что для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\|P\| = \|P\|_C = \sup_{\|x\|_C \leqslant 1,\ x \in C} \|Px\|_C < 4 + \ln n, \quad (1.33')$$

или более точно

$$\|P\|_C \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1). \quad (1.33'')$$

Отметим, что первая из этих оценок приводится в книге В. Л. Гончарова [5], а вторая доказана В. В. Ивановым [6].

Далее, из известной формулы

$$|x - Px| \leqslant (1 + \|P\|_C)\, E_n(x) \quad (x \in C) \quad (1.34)$$

и из лемм 1 и 2 вытекает следующая

Лемма 3. *Если $x = x(s) \in H_\alpha^{(m)}$ ($m \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$), то при любых $m = 0, 1, 2\dots$ и $n = 1, 2\dots$ справедливы неравенства*

$$M(x - Px) \leqslant \frac{3(1+\|P\|)}{n^{m+\alpha}} H(x^{(m)};\ \alpha), \quad (1.35)$$

$$H(x - Px;\ \beta) \leqslant \frac{3(1+\|P\|)B_1}{n^{m+\alpha-\beta}} H(x^{(m)};\ \alpha), \quad (1.36)$$

$$\|x - Px\|_\beta \leqslant \frac{3(1+\|P\|)(1+B_1)H(x^{(m)};\ \alpha)}{n^{m+\alpha-\beta}} \quad (0 < \beta \leqslant \alpha). \quad (1.37)$$

Если же $x(s) \in C^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$, *то для любых* $m = 1, 2 \ldots$ *и* $n = 1, 2 \ldots$ *имеем*

$$M(x - Px) \leqslant \frac{\pi(1 + \|P\|) M(x^{(m)})}{2n^m}, \tag{1.38}$$

$$H(x - Px; \beta) \leqslant \frac{\pi(1 + \|P\|) B_2 M(x^{(m)})}{2n^{m-\beta}}, \tag{1.39}$$

$$\|x - Px\|_\beta \leqslant \frac{\pi(1 + \|P\|)(1 + B_2) M(x^{(m)})}{2n^{m-\beta}} \quad (0 < \beta \leqslant 1), \tag{1.40}$$

где норма $\|P\| = \|P\|_C$ *оценена в* (1.33), *а постоянные* B_1 *и* B_2 *определены соответственно в* (1.25) *и* (1.29).

Оценки (1.35)—(1.40) весьма удобны для дальнейших приложений. Дело в том, что они равномерны относительно n, и это позволит нам использовать их при оценке погрешности рассматриваемых ниже процессов на каждом шаге приближения.

Можно получить также более простые (в смысле определения постоянных в правых частях) оценки, но справедливые лишь для достаточно больших n. Например, с помощью формул (1.7), (1.8), (1.33) и (1.34) равномерно относительно s получаем

$$|x - Px| \leqslant 3(1 + \|P\|_C) \frac{H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{m+\alpha}} H(x^{(m)}; \alpha) \quad (n \geqslant n_1). \tag{1.41}$$

Отсюда и из неравенства (1.16) при $m = 0$ находим

$$H(x - Px; \beta) \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(x; \alpha) \quad (n \geqslant n_2 \geqslant n_1).$$

Поэтому, если $x(s) \in H_\alpha^{(m)}$ $(m \geqslant 0)$, то в силу соотношения (1.41) нетрудно видеть, что при достаточно больших n будем иметь

$$H(x - Px; \beta) \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{m+\alpha-\beta}} H(x^{(m)}; \alpha) \quad (n \geqslant n_2 \geqslant n_1). \tag{1.42}$$

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 4. *Для достаточно больших* n *справедливы оценки:*

$$|x - Px| \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{m+\alpha}} H(x^{(m)}; \alpha), \quad H(x - Px; \beta) \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{m+\alpha-\beta}} H(x^{(m)}; \alpha), \tag{1.43}$$

где

$$x \in H_\alpha^{(m)} \ (m \geqslant 0, \ 0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1);$$

$$|x - Px| \leqslant \frac{2 \ln n}{n^m} M(x^{(m)}), \quad H(x - Px; \beta) \leqslant \frac{2 \ln n}{n^{m-\beta}} M(x^{(m)}), \tag{1.44}$$

если $x \in C^{(m)}$ $(m \geqslant 1, \ 0 < \beta \leqslant 1)$.

Пусть теперь $H_\beta = H_\beta(\gamma)$ означает множество функций (вообще говоря комплексных) $\varphi = \varphi(t)$ от комплексной переменной t, определенных на единичной окружности γ с центром в начале координат и удовлетворяющих там условию Гельдера с показателем β $(0 < \beta \leqslant 1)$. Здесь под $H(\varphi; \beta) \equiv H(\varphi_t; \beta)$ так же, как и выше, будем понимать наименьшую постоянную Гельдера функции $\varphi(t)$ в пространстве H_β, определяемую из условия

$$H(\varphi; \beta) = \sup_{t' \neq t''} \frac{|\varphi(t') - \varphi(t'')|}{|t' - t''|^\beta} \quad (t', t'' \in \gamma).$$

Множество функций $\varphi = \varphi(t)$, для которых $\varphi^{(m)} = \frac{d^m \varphi}{dt^m} \in H_\alpha$, будем обозначать через $H_\alpha^{(m)} = H_\alpha^{(m)}(\gamma)$ $(m \geqslant 0)$.

Ниже покажем справедливость формул предыдущих пунктов для функций из $H_\alpha^{(m)}(\gamma)$. Полагая $t = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$, в верности многих из них можно убедиться непосредственно. Однако в неравенства, связанные с самого начала с наименьшими постоянными Гельдера, необходимо внести некоторые уточнения. Это можно сделать, в частности, с помощью следующего простого предложения.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi = \varphi(t) \in H_\beta$, *а* $H(\varphi_t; \beta)$ *и* $H(\varphi_s; \beta)$ — *наименьшие постоянные Гельдера функции* $\varphi(t) = \varphi(e^{is}) \equiv \psi(s)$, *вычисленные соответственно относительно переменных* t *и* s. *Тогда справедливы неравенства:*

$$H(\varphi_s; \beta) \leqslant H(\varphi_t; \beta) \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta H(\varphi_s; \beta). \tag{1.45}$$

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$q = q(s', s'') = \frac{|e^{is'} - e^{is''}|}{|s' - s''|},$$

где s' и s'' $(s' \neq s'')$ — произвольные точки из промежутка $[0, 2\pi]$. Покажем, что

$$\frac{2}{\pi} \leqslant q \leqslant 1. \tag{1.46}$$

Полагая $\sigma = |s' - s''|$, находим

$$q = \frac{|e^{is'} - e^{is''}|}{\sigma} = \frac{|1 - e^{i\sigma}|}{\sigma} = \frac{2}{\sigma} \sin \frac{\sigma}{2}. \tag{1.47}$$

Так как для любого $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin \sigma}{\sigma} \leqslant 1, \tag{1.48}$$

то при $0 \leqslant s \leqslant \pi$ из (1.47) и (1.48) следует (1.46). Если же $\pi < s \leqslant 2\pi$, то заменой переменной $u = 2\pi - s$ $(0 \leqslant u < \pi)$ с учетом периодичности этот случай сводим к предыдущему.

Теперь положим $t' = e^{is'}$, $t'' = e^{is''}$ $(s' \neq s'')$. Тогда

$$\frac{|\varphi(e^{is'}) - \varphi(e^{is''})|}{|s' - s''|^\beta} = \frac{|\varphi(t') - \varphi(t'')|}{|t' - t''|^\beta} \cdot q^\beta \leqslant H(\varphi_t;\ \beta)\, q^\beta, \tag{1.49}$$

$$\frac{|\varphi(t') - \varphi(t'')|}{|t' - t''|^\beta} = \frac{|\varphi(e^{is'}) - \varphi(e^{is''})|}{|s' - s''|^\beta} \cdot q^{-\beta} \leqslant H(\varphi_s;\ \beta)\, q^{-\beta}. \tag{1.50}$$

Переходя в соотношениях (1.49) и (1.50) к точным верхним границам, с помощью (1.46) получаем неравенства (1.45).

Далее, обозначим через

$$P\varphi = P_t\varphi(t) = P_s\psi(s) = P\psi = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k \ (t \in \gamma). \tag{1.51}$$

многочлен, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ в узлах

$$t_k = t_k^{(n)} = e^{is_k},\quad s_k = s_k^{(n)}\quad (k = \overline{0,\ 2n}). \tag{1.52}$$

Полагая $\rho\varphi = \varphi - P\varphi = \varphi - P_n\varphi$, $H(\rho\varphi;\ \beta) = H((\rho\varphi)_t;\ \beta)$ и

$$H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha) = H\left[\left(\frac{d^m\varphi(t)}{ds^m}\right)_s;\ \alpha\right],$$

с помощью лемм 3, 4 и 5 легко получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $\varphi(t) \in H_\alpha^{(m)}$ $(m \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$. *Тогда*

а) для всех $n = 1, 2 \ldots$ *справедливы оценки:*

$$|\rho\varphi| \leqslant \frac{3(1 + \|P\|)}{n^{m+\alpha}} H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.53}$$

$$H(\rho\varphi;\ \beta) \leqslant \frac{3(1 + \|P\|)B_1}{n^{m+\alpha-\beta}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.54}$$

$$\|\rho\varphi\|_\beta \leqslant \frac{3(1 + \|P\|)}{n^{m+\alpha-\beta}} \left[1 + B_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta\right] H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.55}$$

где норма $\|P\| = \|P\|_C$ *оценена в* (1.33);

б) для достаточно больших n *имеют место неравенства:*

$$|\rho\varphi| \leqslant \frac{2\ln n}{n^{m+\alpha}} H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.56}$$

$$H(\rho\varphi;\ \beta) \leqslant \frac{2\ln n}{n^{m+\alpha-\beta}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.57}$$

$$\|\rho\varphi\|_\beta \leqslant \frac{(2+\pi)\ln n}{n^{m+\alpha-\beta}} H(\varphi_s^{(m)};\ \alpha), \tag{1.58}$$

где $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, *причем оценки* (1.53) *и* (1.56) *равномерны относительно* $t \in \gamma$.

§ 2. Случай $\mathbf{Z} = \mathbf{L}_2$

Пусть $L_2 = L_2(0,\ 2\pi)$ — гильбертово пространство измеримых комплекснозначных 2π-периодических функций, суммируемых на $(0,\ 2\pi)$ с квадратом. Определим в нем скалярное произведение и норму, полагая

$$(x,\ y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\overline{y(s)}\,ds,\qquad \|x\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |x^2(s)|\,ds. \tag{2.1}$$

Найдем оценку выражения (0.1), когда M совпадает со множеством непрерывных комплекснозначных 2π-периодических функций $C = C(0,\ 2\pi)$, а $Px = P_nx$ является интерполяционным полиномом по узлам (1.32).

Имеет место следующая

Лемма 7. *Для любой функции* $x = x(s) \in C$ *справедливо неравенство*

$$\|x - Px\| \leqslant 2\sqrt{2}E_n(x)\ (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{2.2}$$

где $E_n(x)$ — *наилучшее равномерное приближение* $x(s)$ *тригонометрическими полиномами степени* n.

Сначала оценим норму оператора P как оператора, действующего из пространства C в пространство L_2. С этой целью полином Px представим в виде (0.2). Тогда [4]

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x_k \cos ms_k\ (m = 0,\ 1, \ldots,\ n), \\ b_m &= \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x_k \sin ms_k\ (m = 1,\ 2, \ldots,\ n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

и поэтому

$$Px = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x_k D_n(s - s_k), \tag{2.4}$$

где $D_n(s)$ — ядро Дирихле, определяемое формулой

$$D_n(s) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s}{2\sin\frac{s}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos ms.$$

Теперь с помощью равенства Парсеваля из соотношений (2.3) — (2,4) находим

$$\|Px\|^2 = \frac{|a_0^2|}{2} + \sum_{m=1}^{n} (|a_m|^2 + |b_m|^2) = \frac{4}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} x_k \bar{x}_j \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} (\cos ms_k \cos ms_j + \sin ms_n \sin ms_j) \right] =$$

$$= \frac{4}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} x_k \bar{x}_j D_n (s_k - s_j) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} |x_k|^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|P\| = \|P\|_{C \to L_2} = \sup_{\|x\|_C \leqslant 1,\ x \in C} \|Px\|_{L_2} \leqslant \sqrt{2}. \tag{2.5}$$

Так как для операции вложения из C в L_2 норма

$$\|E\| = \|E\|_{C \to L_2} = \sup_{\|x\|_C \leqslant 1,\ x \in C} \|x\|_{L_2} \leqslant \sqrt{2},$$

то, обозначая через $T_n(s)$ тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения, с учетом неравенства (2.5), находим требуемую оценку (2.2).

Далее, если $M = H_\alpha^{(m)} (m \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$ или $M = C^{(m)} (m \geqslant 1)$, то в силу неравенств (1.8), (1.27), и (2.2) соответственно имеем:

$$\|x - Px\| \leqslant \frac{6\sqrt{2} H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.6}$$

$$\|x - Px\| \leqslant \frac{\pi \sqrt{2} M(x^{(m)})}{n^m} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.7}$$

Из использованных в этом параграфе рассуждений легко видеть, что неравенства (2.2), (2.6) и (2.7) справедливы также для полиномов (1.51)—(1.52).

II ЧАСТЬ

О погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов

В наших заметках [8] — [10] для приближенного вычисления сингулярного интеграла (с. и.) с ядром типа Гильберта

$$Ix \equiv (Ix)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)\, d\sigma \tag{0.1}$$

и с. и. с ядром типа Коши вида

$$S\varphi \equiv (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t}, \tag{0.2}$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат, был рассмотрен ряд квадратурных формул и способ нахождения порядка их погрешности.

Однако для практического использования предлагаемых квадратурных процессов необходимо знать их погрешность. Знание же лишь порядка допускаемой погрешности во многих случаях может оказаться недостаточным.

В этой части работы мы указываем способы эффективной оценки погрешности квадратурных формул для с. и. (0.1) и (0.2) в среднем и в равномерной метрике.

§ 1. Основные формулы

Для с. и. (0.1) в случае любой плотности $x(s)$ из C справедливы (см. [8]—[10] формулы:

$$\tilde{I}x = IPx = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_k \frac{\sin (n+1) \frac{s_k - s}{2} \sin n \frac{s_k - s}{2}}{\sin \frac{s_k - s}{2}}, \tag{1.1}$$

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \alpha_{jk} x_k, \tag{1.2}$$

где $s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}$, $x_j = x(s_j)$ $(j = \overline{0, 2n})$,

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{s_j - s_k}{4}, & \text{если } j\text{-}k \text{ — четно,} \\ \operatorname{ctg} \frac{s_k - s_j}{4}, & \text{если } j\text{-}k \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

Учитывая соотношение

$$S\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\sigma})\, d\sigma + \frac{1}{i} I\varphi(e^{i\sigma}), \tag{1.3}$$

с помощью (1.1) — (1.2) для с. и. (0.2) в [8] получены формулы:

$$\tilde{S}\varphi = SP\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\varphi(e^{i\sigma})\, d\sigma + \frac{1}{i} IP\varphi(e^{i\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\varphi(t_k)\left[1+2i\,\frac{\sin(n+1)\frac{s-s_k}{2}\,\sin n\frac{s-s_k}{2}}{\sin\frac{s-s_k}{2}}\right], \qquad (1.4)$$

$$(\tilde{S}\varphi)(t_j)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\beta_{jk}\varphi_k \quad (\varphi\in C), \qquad (1.5)$$

где $\beta_{jk}=1-i\alpha_{jk}$, $\varphi_j=\varphi(t_j)$, $t_j=e^{is_j}$ $(j=\overline{0,\,2n})$.

Далее, если плотность $x(s)$ является четной или нечетной, то формулы (1.1) — (1.2) несколько упрощаются. Например, если $x(-s)=-x(s)$, то (1.2) принимает вид

$$(\tilde{I}x)(s_j)=-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k\sin\frac{s_k}{2}}{\cos\frac{s_k}{2}+(-1)^{j-k}\cos\frac{s_j}{2}} \quad (j=\overline{1,\,n}); \qquad (1.6)$$

если же $x(-s)=x(s)$, то получаем

$$(\tilde{I}x)(s_j)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k\left[\frac{(-1)^j-\cos\frac{s_j}{2}}{\sin\frac{s_j}{2}}+\frac{2\sin\frac{s_j}{2}}{\cos\frac{s_j}{2}+(-1)^{j-k}\cos\frac{s_k}{2}}\right]$$
$$(j=\overline{0,\,n}). \qquad (1.7)$$

Заметим, что легко могут быть выписаны также значения $\tilde{I}x$ в любой точке s. При этом достаточно учесть вид интерполяционных полиномов [2] по узлам s_j $(j=\overline{0,\,2n})$* и пользоваться приемом, примененным в заметке [8].

§ 2. Исследование сходимости квадратурных формул

П. 1. Сходимость квадратурных формул в среднем

Обозначим остаточный член квадратурных формул для интеграла (0.1) через $R_n(s)$. Тогда, очевидно, имеем

$$R_n(s)\equiv R_n(x;\,s)=I(x-Px)=I(x-P_nx). \qquad (2.1)$$

Пусть плотность $x(s)$ интеграла (0.1) является непрерывной комплекснозначной 2π-периодической функций. В этом случае, как известно [4], никаким выбором узлов нельзя обеспечить равномерную сходимость Px к x на всем пространстве C. Известно также [1], что с. и. с ядрами Гильберта и Коши в пространстве непрерывных функций C с обычным

* В случае узлов, отличных от рассматриваемых здесь, для частных случаев в [8] приведены также другие квадратурные формулы.

определением нормы не являются ограниченными операторами. Следовательно, при такой постановке рассмотрение погрешности в равномерной метрике лишено смысла.

Однако, с другой стороны, известно [7], что с. и. с ядрами Гильберта и Коши являются линейными операторами в пространстве функций L_2. Известны [4] также некоторые результаты о сходимости интерполяционных полиномов в среднеквадратичном смысле. Поэтому в такой ситуации вполне естественно поставить вопрос о сходимости квадратурных процессов в среднем.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть плотность $x(s)$ интеграла* (0.1) *непрерывная комплекснозначная 2π-периодическая функция. Тогда квадратурные формулы* (1.1) — (1.2) *сходятся в среднем к интегралу* (0.1) *при безграничном возрастании числа узлов интерполяции. При этом средняя погрешность оценивается формулой*

$$\|R_n(x;\,s)\|_{L_2}\leqslant 2\sqrt{2}E_n(x) \quad (n=1,\,2,\,\ldots), \qquad (2.2)$$

где $E_n(x)$ — наилучшее равномерное приближение $x(s)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Доказательство. Пусть $x\in L_2=L_2(0,\,2\pi)$. Тогда из упомянутой выше работы С. Г. Михлина следует, что

$$\|Ix\|\leqslant\|x\| \quad (x\in L_2), \qquad (2.3)$$

причем знак равенства достигается для всякой функции $x(s)$, ряд Фурье которой не содержит свободного члена [7]. Отсюда и из (2.1) находим оценку

$$\|R_n(x;\,s)\|\leqslant\|x-P_nx\| \quad (x\in C). \qquad (2.4)$$

Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 7 из первой части работы.

П. 2. Некоторые следствия. Равномерная сходимость квадратурных формул

Пусть теперь $x(s)\in C^{(m)}$ $(m\geqslant 1)$ или $x(s)\in H_{\alpha}^{(m)}$ $(m\geqslant 0,$ $0<\alpha\leqslant 1)$. Тогда, в силу фактов § 2 предыдущей части и неравенства (2.2), среднюю погрешность квадратурных формул для интеграла (0.1) можно оценить соответственно неравенствами:

$$\|R_n(x;\,s\|\leqslant\frac{\pi\sqrt{2}M(x^{(m)})}{n^m} \quad (n=1,\,2,\,\ldots), \qquad (2.5)$$

$$\|R_n(x;\,s)\|\leqslant\frac{6\sqrt{2}H(x^{(m)};\,\alpha)}{n^{m+\alpha}} \quad (n=1,\,2,\,\ldots). \qquad (2.6)$$

Отметим, что в условиях (2.5) и (2.6) можно получить также равномерную сходимость изучаемых квадратурных процессов. С этой целью докажем следующее предложение.

Лемма 8. *Пусть*

$$\|R_n(s)\|_{L_2} \leqslant \frac{A}{n^r}, \tag{2.7}$$

где A — постоянная, зависящая от $x(s)$ и r — любое положительное число, причем $r > \frac{1}{2}$. Тогда равномерно относительно s справедливо неравенство

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{AB}{n^{r-\frac{1}{2}}}, \tag{2.8}$$

где

$$B = B(r) = \frac{2(1+2^{-r})}{1-2^{-r+\frac{1}{2}}} \quad \left(r > \frac{1}{2}\right). \tag{2.9}$$

Для доказательства положим $Ix \equiv f(s)$ и $IP_n x \equiv F_n(s)$. Тогда, представляя интерполяционный полином Px в виде

$$Px = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ks + b_k \sin ks$$

и применяя формулы [7]

$$I(\cos m\sigma) = -\sin ms \ (m = 0, 1, \ldots),$$
$$I(\sin m\sigma) = \cos ms \ (m = 1, 2, \ldots),$$

находим, что

$$F_n(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cos ks - a_k \sin ks. \tag{2.10}$$

Далее нетрудно видеть, что остаточный член может быть представлен в виде

$$R_n(s) = f(s) - F_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(s), \tag{2.11}$$

где $U_k(s) = F_{2^k n}(s) - F_{2^{k-1}n}(s)$, причем ряд сходится в среднем. Из (2.7) и (2.11) следует оценка

$$\|U_k(s)\| \leqslant \|F_{2^k n} - f\| + \|F_{2^{k-1}n} - f\| \leqslant \frac{A(1+2^r)}{(2^k n)^r}. \tag{2.12}$$

Теперь $\|F_n(s)\|_C$ оценим через $\|F_n(s)\| = \|F_n(s)\|_{L_2}$. С помощью

формулы (2.10), неравенства Коши-Буняковского и равенства Парсеваля последовательно находим

$$\|F_n\|_C = \left\|\sum_{k=1}^{n} (b_k \cos ks - a_k \sin ks)\right\|_C \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2 + 2|a_k b_k|\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{2n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |F_n^2(s)|\, ds\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2n}\,\|F_n\|_{L_2}.$$

Отсюда и из (2.12) получаем

$$\|U_k\|_C \leqslant \sqrt{2^{k+1}n}\,\|U_k\|_{L_2} \leqslant \frac{A\sqrt{2}(1+2^r)}{2^{k\left(r-\frac{1}{2}\right)} n^{r-\frac{1}{2}}}. \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.11) и (2.13) следует требуемая оценка:

$$|R_n(s)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|U_k\|_C \leqslant \frac{A\sqrt{2}(1+2^r)}{n^{r-\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\left(r-\frac{1}{2}\right)} =$$
$$= \frac{2A(1+2^{-r})}{n^{r-\frac{1}{2}}\left(1-2^{-r+\frac{1}{2}}\right)} = \frac{AB}{n^{r-\frac{1}{2}}}.$$

Теперь из лемм 1, 2 и 8 вытекает следующая

Теорема 2. *Если плотность $x(s)$ удовлетворяет соответственно условиям*

$$x(s) \in C^{(m)} \ (m \geqslant 1), \tag{2.14}$$
$$x(s) \in H_\alpha^{(m)} \ (m \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1), \tag{2.15}$$

то квадратурные формулы для интеграла (0.1) сходятся равномерно (относительно s) к интегралу (0.1) при $n \to \infty$. Погрешность может быть оценена соответственное неравенствами:

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{2\sqrt{2\pi}(1+2^{-m})}{1-2^{-m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{M(x^{(m)})}{n^{m-\frac{1}{2}}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.16}$$

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{12\sqrt{2}(1+2^{-m-\alpha})}{1-2^{-m-\alpha+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{H(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha-\frac{1}{2}}} \quad \left(m+\alpha > \frac{1}{2}\right)$$
$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{2.17}$$

Далее, обозначим через

$$Q_n\varphi \equiv Q_n(\varphi;\ t) = S(\varphi - P_n\varphi) = S(\varphi - P\varphi) \tag{2.18}$$

остаточный член квадратурных формул для с. и. (0.2). Рассмотрим формулу (1.3), связывающую интегралы (0.1) и (0.2). Ясно, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau})\, d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}$$

есть не что иное, как свободный член ряда Фурье функции $\varphi(\tau) = \psi(\sigma)$. Тогда, используя результаты работы [7], в силу неравенства (2.3) получим, что

$$\| S\varphi \|_{L_2} = \| S\varphi(e^{i\sigma}) \| = \| \varphi(e^{i\sigma}) \| = \| \psi(\sigma) \|_{L_2}. \tag{2.19}$$

Теперь из условий (2.2), (2.4), (2.18) и (2.19) легко находим требуемое соотношение

$$\| Q_n\varphi \|_{L_2} = \| S(\varphi - P\varphi) \| = \| \varphi - P\varphi \| =$$
$$= \| \psi - P\psi \| \leqslant 2\sqrt{2}\, E_n(\psi) = 2\sqrt{2} E_n(\varphi),$$

где $E_n(\varphi)$ — наилучшее приближение $\varphi(t)$ полиномами вида $\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k\ (t \in \gamma)$.

Таким образом, средняя погрешность квадратурных формул для с. и. с ядром Коши (0.2) оценивается неравенством

$$\| Q_n(\varphi;\ t) \| \leqslant 2\sqrt{2} E_n(\varphi) \quad (\varphi \in C), \tag{2.20}$$

т. е. теорема 1 в этом случае справедлива. Справедлива также теорема 2 с учетом того, что в соответствующих неравенствах вместо $x = x(s)$ нужно подставить функцию

$$\psi = \psi(s) = \varphi(t).$$

П. 3. Равномерная сходимость квадратурных формул. Второй способ оценки погрешности

Из результатов п. 2 следует, что если плотности сингулярных интегралов (0.1) и (0.2) удовлетворяют условию H_α, то при $\alpha > \frac{1}{2}$ квадратурные процессы § 1 оказываются сходящимися в равномерной метрике. Однако при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ равномерную сходимость с помощью этих результатов нельзя гарантировать.

Ниже мы предлагаем второй способ оценки погрешности квадратурных процессов в равномерной метрике. Этот способ, основанный на рассмотрении сингулярных интегралов

как линейных операторов из пространства H_β в пространство C и на аппроксимации функций тригонометрическими полиномами в метрике пространства H_β, гарантирует равномерную сходимость квадратурных формул для плотностей из класса Гельдера с любым положительным показателем.

Существенную роль в дальнейшем будет играть следующая

Лемма 9. *Пусть $\varphi(t) \in H_\alpha$ и произвольные вещественные числа β и δ таковы, что*

$$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 2 < \delta < \infty. \tag{2.21}$$

Тогда равномерно относительно $t \in \gamma$ справедливо неравенство

$$| S\varphi | \leqslant (1 + 2\ln\delta)\, M(\varphi) + \frac{2^\beta}{\beta\delta^\beta} H(\varphi;\ \beta). \tag{2.22}$$

Доказательство. Так как

$$S\varphi = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau \equiv \varphi + \sigma\varphi, \tag{2.23}$$

то достаточно оценить интеграл $\sigma\varphi = S[\varphi(\tau) - \varphi(t)]$.

Пусть t — произвольная, но фиксированная точка контура γ, от которой отсчитывается длина дуги. Разобьем окружность γ на дугу γ_1 с длиной $\frac{2\pi}{\delta}$, для которой точка t является серединой, и на дугу $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$. Тогда

$$\sigma\varphi = \sigma_1\varphi + \sigma_2\varphi, \tag{2.24}$$

где

$$\sigma_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau, \quad \sigma_2\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Легко видеть, что

$$| \sigma_1\varphi | \leqslant \frac{H(\varphi;\ \beta)}{\pi}\int_{\gamma_1} | \tau - t |^{\beta - 1}\, | d\tau | = \frac{2H(\varphi;\ \beta)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\delta}} | \tau - t |^{\beta-1} d\sigma, \tag{2.25}$$

$$| \sigma_2\varphi | \leqslant \frac{2M(\varphi)}{\pi}\int_{\gamma_2} \frac{| d\tau |}{| \tau - t |} = \frac{2M(\varphi)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\delta}}^{2\pi - \frac{\pi}{\delta}} \frac{d\sigma}{| \tau - t |}. \tag{2.26}$$

Далее, опираясь на лемму 5, нетрудно видеть, что $| \tau - t | \geqslant \frac{2}{\pi}\sigma$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ и $| \tau - t | \geqslant \frac{2}{\pi}(2\pi - \sigma)$ при $\pi \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$.

Используя эти соотношения, в силу (2.25) и (2.26) получаем следующие оценки:

$$|\sigma_1\varphi| \leqslant \frac{2H(\varphi;\beta)}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\beta}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\delta}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} = \frac{2^\beta}{\beta\delta^\beta}H(\varphi;\beta), \tag{2.27}$$

$$|\sigma_2\varphi| \leqslant \frac{2M(\varphi)}{\pi}\left[\int\limits_{\frac{\pi}{\delta}}^{\pi}\frac{d\sigma}{|\tau-t|}+\int\limits_{\pi}^{2\pi-\frac{\pi}{\delta}}\frac{d\sigma}{|\tau-t|}\right]\leqslant$$

$$\leqslant M(\varphi)\left[\int\limits_{\frac{\pi}{\delta}}^{\pi}\frac{d\sigma}{\sigma}+\int\limits_{\pi}^{2\pi-\frac{\pi}{\delta}}\frac{d\sigma}{2\pi-\sigma}\right]=2M(\varphi)\ln\delta. \tag{2.28}$$

Из соотношений (2.23), (2.24), (2.27) и (2.28) следует неравенство (2.22).

Теперь легко доказывается следующая

Теорема 3. *Если плотность сингулярного интеграла* (0.2) *удовлетворяет условию*

$$\varphi(t)\in H_\alpha^{(m)}\quad (m=0,\ 1,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant 1), \tag{2.29}$$

то приближенные значения (1.4) — (1.5) *этого интеграла равномерно сходятся к точному значению при неограниченном возрастании числа узлов. При этом остаточный член может быть оценен неравенствами:*

$$|Q_n\varphi| \leqslant \frac{3K_n}{n^{m+\alpha}}\left(1+2\ln n+\frac{\pi^\alpha}{\alpha}B_1\right)H(\varphi_s^{(m)};\alpha) \tag{2.30}$$

при любом $n=3,\ 4,\ 5,\ldots$, *а при* $n\geqslant n_0$

$$|Q_n\varphi| \leqslant \frac{2\ln n}{n^{m+\alpha}}\left(1+2\ln n+\frac{2\pi^\alpha}{\alpha}\right)H(\varphi_s^{(m)};\alpha), \tag{2.31}$$

где

$$B_1=B_1(m+\alpha)\leqslant\begin{cases}4, & \text{если } m=0,\\ \dfrac{2(1+2^{-m-\alpha})}{1-2^{1-m-\alpha}}, & \text{если } m\geqslant 1,\end{cases} \tag{2.32}$$

$$K_n=1+\|P_n\|_C,\ \|P_n\|_C\leqslant\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1).\ (n=1,\ 2,\ldots). \tag{2.33}$$

Действительно, полагая в лемме 9 $\delta=n=3,\ 4,\ldots$ и $\beta=\alpha$, равномерно относительно $t\in\gamma$ находим оценку

$$|Q_n\varphi|=|S(\rho\varphi)|\leqslant(1+2\ln n)M(\rho\varphi)+\frac{2^\alpha}{\alpha n^\alpha}H(\rho\varphi;\alpha), \tag{2.34}$$

где $\rho\varphi=\varphi-P\varphi$. Отсюда и из леммы 6 следуют неравенства (2.30) и (2.31).

Далее, относительно квадратурных формул для интеграла (0.1) результат, аналогичный теореме 3, можно доказать самостоятельно. Однако здесь можно поступить и несколько проще. А именно, пользуясь соотношениями (1.1), (1.3), (1.4) и (2.34), равномерно относительно s имеем оценку

$$|R_nx|\leqslant(1+2\ln n)M(\rho x)+\frac{2^\alpha}{\alpha n^\alpha}H(\rho x;\alpha)+2E_n(x). \tag{2.35}$$

Отсюда и из лемм 1 и 4 относительно квадратурных формул (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7) следует

Теорема 4. *Если* $x\in H_\alpha^{(m)}$ $(m=0,\ 1,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant 1)$, *то равномерно относительно* s *справедливы неравенства*:

$$|R_nx|\leqslant\frac{3H(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha}}\left[2+K_n\left(1+2\ln n+\frac{2^\alpha}{\alpha}B_1\right)\right]\ (n\geqslant 3), \tag{2.36}$$

$$|R_nx|\leqslant\frac{2H(x^{(m)};\alpha)}{n^{m+\alpha}}\left[3+\ln n\left(1+2\ln n+\frac{2^\alpha}{\alpha}\right)\right]\ (n\geqslant n_0), \tag{2.37}$$

где постоянные K_n *и* B_1 *оценены в* (2.32) *и* (2.33).

Оценки (2.30) и (2.34)—(2.36) справедливы для всех n, начиная с $n=3$. Используя же соотношение

$$|Q_n\varphi|\leqslant(1+4\ln n)M(\rho\varphi)+\frac{1}{\alpha n^\alpha}H(\rho\varphi;\alpha)\ (n\geqslant 2), \tag{2.38}$$

которое следует из леммы 2 при $\delta=n^2$ и $\alpha=\beta$, аналогичные оценки можно получить начиная с $n=2$. С другой стороны, в оценках (2.30) — (2.31) и (2.36) — (2.37) числители можно заменить на $A\ln n+B$ (A и B — постоянные). Это удастся сделать за счет более точной оценки $S\varphi$ в лемме 9.

Заметим также, что с помощью соответствующих сведений из первой части теоремы 3 и 4 легко переформулируются и для плотностей из класса $C^{(m)}$. Однако в этом случае в работе В. В. Иванова [6] для квадратурной формулы (1.4), которая получена им несколько другим способом, чем у нас [8], указана другая весьма эффективная оценка для остаточного члена $Q_n\varphi$ в равномерной метрике.

В заключение отметим, что приведенные в данной работе простые оценки существенным образом будут использованы нами в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
2. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
3. С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 15, № 3, 1951, 219—242.
4. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. М. — Л., Гостехиздат, 1949.
5. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954.
6. В. В. Иванов. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Серия „Итоги науки“, М., Изд-во АН СССР, 1965, 125—177.
7. С. Г. Михлин. Сингулярные интегральные уравнения. УМН, том III, вып. 3 (25), 1948.
8. Б. Г. Габдулхаев. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые применения. Сб. „Функциональный анализ и теория функций“, № 3, 7—17 Изд-во КГУ, Казань, 1965. (1966)
9. Б. Г. Габдулхаев. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Изв. вузов. Математика, № 5 (48), 43—51, 1965.
10. Б. Г. Габдулхаев. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Сб. „Доклады третьей Сибирской конференции по математике и механике.“ Томск, изд-во ТГУ. 92—94. 1964.

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 127, кн. 1 *Ученые записки* *1967*

Б. Г. Габдулхаев

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ КВАДРАТУРНОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В данной работе для сингулярного интеграла с ядром типа Гильберта

$$Ix = (Ix)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, x(\sigma)\, d\sigma \qquad (0.1)$$

предлагается один общий квадратурный процесс, основанный на интерполировании плотности $x(s)$ по корням уравнения

$$\sin(ns + \omega) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (0.2)$$

где ω — произвольное вещественное число. Для рассматриваемого квадратурного процесса указываются эффективные оценки погрешности.

§ 1. Вывод квадратурных формул

1°. Сначала рассмотрим тригонометрическое интерполирование по корням уравнения (0.2), т. е. по узлам

$$s_j = s_j^{(n)} = \frac{j\pi}{n} - \frac{\omega}{n}\,(j = \overline{0,\ 2n-1}). \qquad (1.1)$$

Известно [1], что тригонометрический полином степени n, совпадающий в точках (1.1) с непрерывной 2π-периодической функцией $x = x(s)$, имеет вид

$$Lx = L_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k D_n^*(s - s_k) + K\sin(ns + \omega), \qquad (1.2)$$

где $x_j = x(s_j)$, K — произвольная постоянная и

$$D_n^*(s) = \frac{1}{2}\sin ns \operatorname{ctg}\frac{s}{2} — \qquad (1.3)$$

так называемое видоизмененное ядро Дирихле.