УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.711.3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАЖОРИТАРНАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АУКЦИОНА ПО ЦЕНЕ

Т.Р. Шахмуратов

Аннотация

Проведено математическое моделирование финансовых рынков, основные процессы в которых описаны на базе теории игр. Исследовано состояние рынков, близких к краху, когда возникают сильные корреляции в поведении участников рынка и, как следствие, сильные отклонения цен от обычных. Исследована зависимость статистических характеристик модельного рынка от параметров принятой модели. С целью получения объективной оценки адекватности и границ применения построенной модели проведено сравнение рассчитанных характеристик со статистическими характеристиками реальных рынков. На основании полученных результатов предлагаются пути совершенствования моделей финансовых рынков.

Ключевые слова: математические модели рынков, статистические характеристики рынков, теория игр.

Введение

Модели игр, участниками которых являются игроки (агенты), принимающие решения, используются в различных областях науки (см., например, [1]). На сегодняшний день разработано достаточно много финансовых моделей с агентами, каждая из которых строится на основании различных предположений о рынке [2–5]. В целом эти модели обладают многими статистическими свойствами, которые характерны для реальных рынков, например, такими, как распределение изменений цены активов с «тяжелыми хвостами» [6], так называемая кластерная волатильность [7]. Несмотря на различия, развиваемые финансовые модели основаны на одних и тех же идеях, согласно которым модель должна содержать обратные связи [8], учитывать приспосабливаемость игроков к изменяющимся условиям и изменения в структуре участников рынка (агентов) со временем.

Для описания крахов финансовых рынков мы выбрали за основу каноническую миноритарную модель (Grand Canonical Minority Game) [9], далее – ОКММ, или сокращенно «миноритарная модель». Она обладает всеми свойствами, перечисленными выше, и базируется на очень простых предположениях. Между тем вычислительные эксперименты, проведенные на основе этой модели, показали, что она не всегда может адекватно описать крахи финансовых рынков (существенные отклонения цены, выходящие за пределы нормального распределения) и приводит в некоторых случаях к неограниченности ресурса, что не соответствует реальному рынку активов.

В настоящей работе мы предлагаем ввести в эту модель важный элемент рынка – аукцион, через который осуществляются все сделки на реальных финансовых рынках. Отсутствие этого инструмента в ОКММ ограничивало область ее применения и, по нашему мнению, являлось источником названных недостатков этой модели. В статье показано, что использование аукциона привносит в модель два новых элемента: формирующуюся на аукционе цену и различие в степени влияния агентов на рынок, причем сила этого влияния зависит от количества активов, имеющихся у игроков. Тем самым установлено, что модель с аукционом по цене обладает статистическими параметрами, существенно более близкими к реальному рынку, чем ОКММ.

Миноритарная модель получила свое название от способа оценки успешности стратегий агентов. В этой модели каждый агент чаще использует ту стратегию, благодаря которой на предыдущих шагах он оказывался в меньшинстве (minority). Аргументами в пользу успешности такой стратегии являются ограниченность средств у каждого игрока и его желание купить дешевле, а продать дороже. Поэтому считается, что если агент покупал, когда все продавали, то он имел большие шансы купить по хорошей цене. Между тем, как отмечают некоторые исследователи [10], такая стратегия не всегда приводит к положительным результатам. В действительности на финансовом рынке агентам гораздо более свойственно подражательное поведение, то есть стремление поступать аналогично большинству участников (majority). Известно несколько работ (например, [9]), авторы которых пытались совместить наличие миноритарных и мажоритарных (подражательных) агентов. Однако на сегодняшний день моделей, статистически близких к реальному рынку, так и не было построено. В настоящей работе мы предлагаем новую модель, в которой рынком управляет большинство (majority), – мажоритарную модель. Мы покажем, что она должна быть гораздо ближе к реальным рынкам, нежели миноритарная модель. Особое внимание уделяется «крахам» рынков как к одному из наиболее интересных его состояний.

1. Описание ОКММ

Пусть существует N агентов, каждый из которых помнит предыдущие m бит информации о рынке. Например, при $m = 3$ каждый агент помнит 3 бита информации о рынке и информация вида 011 означает, что рынок 3 шага назад падал, 2 шага назад рос и 1 шаг назад тоже рос. Каждый агент имеет s стратегий поведения, входящих в общее число доступных стратегий. Стратегия – это функция, которая по состоянию рынка в прошлом на m шагов выдает прогноз на следующий шаг: 1, если прогнозирует рост, и -1, если прогнозирует падение.

Итак, агенты наблюдают за состоянием рынка, но помнят только последние m бит информации. Этот процесс можно описать как наблюдение агентами в момент времени t некоторого двоичного источника информации. Будем считать, что $t \in \mathbb{N}$. Тогда информация из источника на шаге t представляет собой некое число $\mu[t]$ в двоичной системе, которое состоит из нулей и единиц и описывает состояние рынка от момента времени $t - m$ до t. В десятичном виде эта информация принимает значения $\mu[t] \in \{0, \dots, P-1\}$, где $P = 2^m$. Каждая стратегия a_{iR}, где R – номер стратегии i-го агента, содержит в качестве элементов a_{iR}^{μ}, то есть $a_{iR} = \{a_{iR}^{\mu_1}, a_{iR}^{\mu_2}, \dots, a_{iR}^{\mu_P}\}$. Эти элементы определяют решение агента, которое он принимает в ответ на поступившую информацию $\mu(t)$. Информация влияет на стратегию агента следующим образом.

Элементы a_{iR}^{μ} принимают только два возможных значения из множества $\{-1, 1\}$ для каждого из P значений глобальной информации $\mu[t]$, поэтому множество стратегий имеет размер 2^P. Изначально агенты случайным образом выбирают подмножество s стратегий из этого множества, и впоследствии им не разрешено изменять выбранное подмножество. Агенты также помнят очки своих стратегий S_R, отражающие предыдущий успех стратегий, в том числе и виртуальный успех, то есть даже если стратегия не используется, агент каждый раз ее оценивает.

Общее действие всех агентов на рынке подсчитывается по формуле

$$A[t] = \sum_{i=1}^{N} a_{iR_{\max}}^{\mu[t]},$$

где $a_{iR_{\max}}^{\mu[t]}$ – действие i-го агента, игравшего по своей лучшей стратегии $R_{\max}$, при условии, что имеется информация $\mu[t]$. Предполагается, что агенты всегда играют по самой результативной стратегии, то есть по стратегии с максимальным количеством очков S_R. Очки стратегий обновляются по формуле

$$S_{iR}[t+1] = S_{iR}[t] + g_{iR}[t+1],$$

где $g_{iR}[t]$ – функция, показывающая, насколько хорошо или плохо сыграла стратегия. Согласно миноритарной модели успех стратегии оценивается игроком по тому, насколько он был близок к меньшинству. Поэтому естественно задать функцию $g_{iR}[t]$ следующим образом:

$$g_{iR}[t+1] = \chi[-a_{iR}^{\mu[t]} A[t]], \tag{1}$$

где $\chi[x]$ – неубывающая функция. Обычно в качестве $\chi[x]$ выбирают $\chi[x] = \operatorname{sign}[x]$ или $\chi[x] = x$. Влияние прошлого в миноритарных играх проявляется благодаря глобальной информации $\mu[t]$, в которой самая недавняя информация определяется знаком общего действия $A[t]$:

$$\mu[t+1] = [2\mu[t]]\%P + H[A[t]], \tag{2}$$

где $\%P$ – остаток от деления на P, а $H[x]$ – функция Хевисайда.

Мы определили поведение отдельного агента. Теперь рассмотрим модель на макроуровне, учитывающем вклад всех игроков. Общее действие $A[t]$ формирует превышающий (недостаточный) спрос, вызывающий рост (падение) цены. Поэтому логично, что цена актива $p[t]$ формируется следующим образом:

$$p[t] - p[t-1] = \frac{A[t-1]}{\lambda},$$

иногда используется другая формула с логарифмической зависимостью:

$$\ln p[t] - \ln p[t-1] = \frac{A[t-1]}{\lambda},$$

где λ – ликвидность рынка (показатель, характеризующий, насколько рынок чувствителен к дисбалансу между заявками на покупку и продажу).

В отличие от обычных миноритарных игр [11] ОККМ имеет два дополнительных параметра: T – время, за которое предыдущие очки стратегии забываются, то есть

$$S_{iR}[t+1] = (1 - 1/T)S_{iR}[t] + g_{iR}[t+1], \tag{3}$$

и r – пороговое значение S_{iR} (при переходе через него агенты не будут участвовать в игре, то есть $a_{iR}^{\mu[t]} = 0 \quad \forall R$).

2. Модель с аукционом по цене

Добавим в базовую модель возможность для агента изменять стратегию в случае, если ее S_{iR} становится меньше $r_{\min}$. На первом шаге итераций для простоты распределим «деньги» (финансовый ресурс) и «бумаги» (продаваемый или покупаемый актив) по всем агентам равномерно. Таким образом, у каждого агента есть φ_i «денег» и cash_i «бумаг». Для первого шага игроков рынка установим цену активов, равную

$$p[0] = \sum_i \frac{\mathrm{cash}_i}{\varphi_i}.$$

На каждом шаге агент в соответствии со своей наиболее успешной стратегией выбирает продать или купить актив. Теперь определим уровень агрессивности i-го участника аукциона, использующего R-ю стратегию, как Δ_{iR}. Эта величина будет определять, насколько цена заявки агента на аукционе будет отличаться от последней известной цены, то есть цена в его заявке будет равна

$$\mathrm{ord}_i[t] = p[t-1]\left(1 + \Delta_{iR} \cdot a^{\mu[t]}_{iR_{\max}}\right). \tag{4}$$

Первоначально равномерно распределим Δ_{iR} внутри эмпирически выбранного отрезка $\Delta_{iR} = [-5\%; 5\%]$. Игроки с положительными значениями Δ_{iR} увеличивают (уменьшают) цену активов при покупке (продаже) на соответствующее этим игрокам значение процента Δ_{iR}. Игроки с отрицательными значениями Δ_{iR} действуют противоположным образом.

Примем следующую стратегию для агентов. В случае если агент решил продать актив (то есть когда $a^{\mu[t]}_{iR_{\max}} = -1$), он выставляет весь объем «бумаг» по цене $\mathrm{ord}_i[t]$. В случае если агент решил купить актив (то есть когда $a^{\mu[t]}_{iR_{\max}} = 1$), объем заявляемой им покупки равен $\mathrm{cash}_i[t]/\mathrm{ord}_i$, где $\mathrm{cash}_i[t]$ – объем денежных средств i-го игрока в момент времени t. При такой стратегии агент полностью обновляет свои активы, которыми он торгует, то есть продает все или покупает активы на все имеющиеся у него «деньги».

Теперь рассмотрим сам аукцион. Будем считать, что аукцион организован следующим образом. На первом шаге осуществляется сортировка покупателей и продавцов по ценам представленных ими заявок ($\mathrm{ord}_i[t]$): в порядке убывания цены для покупателей и возрастания цены для продавцов. Затем выбираются лучший продавец и лучший покупатель: продавец по самой низкой цене и покупатель по самой высокой цене. Между ними совершается сделка в случае, если цена, предложенная продавцом, ниже или равна цене, предложенной покупателем. Объем сделки определяется по меньшему объему (обозначим его $v_{ij}[t]$) из объема заявки покупателя и объема заявки продавца, по средней арифметической цене (обозначим ее $\rho_{ij}[t]$) между ценой продавца и ценой покупателя. Таким образом, объем сделки определяется по формуле

$$v_{kl}[t] = \min\left\{\varphi_k, \frac{\mathrm{cash}_l}{p[t-1]}\right\}, \tag{5}$$

где k – номер продавца, l – номер покупателя, а $[.]$ – округление до целого вниз.

После этого из очереди удаляются покупатели и продавцы, у которых в результате сделок оказались нулевые объемы ресурсов. Затем берутся следующий лучший продавец и следующий лучший покупатель. Процесс продолжается до тех пор, пока либо все заявки удовлетворятся, либо пока у лучшего продавца цена не станет выше цены у лучшего покупателя. После этого итоговая цена $p[t]$ формируется как средняя из цен всех сделок, совершенных на данном шаге, то есть

$$p[t] = \sum_{k,l} \rho_{kl} v_{kl} \Big/ \sum_{k,l} v_{kl}. \tag{6}$$

Такой способ подсчета исключает возможность того, что один участник исказит общие данные путем подачи заявки с сильным отклонением по цене.

В конце аукциона при подсчете очков стратегий также пересчитывается и Δ_{iR}. В случае если цена ord_i хуже (в данном случае понятие «хуже» для продавцов и покупателей разное), чем $p[t]$, то Δ_{iR} уменьшается, а в противном случае увеличивается на 1%. Существует также ограничение $-20\% < \Delta_{iR} < 20\%$. Такое ограничение существует и на реальных биржах, оно не позволяет подать заявку с ценой ниже определенного уровня от последней сделки.

Построенный аукцион очень близок к аукционам на реальных биржах, например на ММВБ (см. описание реального аукциона в [12]). Единственным отличием является формирование цены по формуле (6) в виде средневзвешенных цен на данном дискретном шаге, тогда как на реальном рынке при анализе используются цены на равноудаленных промежутках времени (например, каждый час). Поэтому, вообще говоря, формирование цены в нашей модели, которое описывается формулой (6), по причине дискретности времени t вполне естественно.

Таким образом, алгоритм модели выглядит следующим образом:

0) модель начинает работать со следующими параметрами: количество шагов $t = 20000$, $N = 1001$, $T = 10$, $m = 4$, $s = 4$; задаются случайно с равномерными распределениями: cash_i – в интервале от 20 до 200; φ_i – в интервале от 0 до 10; S_{iR} – в интервале от 5 до 10; Δ_{iR} – в интервале от -0.05 до 0.05;

1) каждый агент выбирает стратегию $R_{\max}$ с максимальным S_{iR} и, используя ее, определяет свой $a^{\mu[t]}_{iR_{\max}}$;

2) каждый агент определяет цену своей заявки ord_i по формуле (4);

3) заявки разбиваются на покупки и продажи и сортируются по возрастанию цены;

4) берется заявка на покупку по самой высокой цене и заявка на продажу по самой низкой цене, k – номер выбранного продавца, а l – номер выбранного покупателя;

5) если цена l-й заявки ниже, чем цена k-й заявки, то переходим к п. 13, в противном случае – к п. 6;

6) вычисляем $\rho_{kl}[t]$ как среднее арифметическое между ценами k-й и l-й заявок;

7) определяем объем $v_{kl}[t]$ данной сделки по формуле (5);

8) величины φ_i для продавца и покупателя соответственно уменьшаем и увеличиваем на $v_{kl}[t]$;

9) величину cash_i для продавца и покупателя соответственно увеличиваем и уменьшаем на $v_{kl}[t]\rho_{kl}[t]$;

10) если $\varphi_k = v_{kl}[t]$, то удаляем из списка k-го продавца;

11) если $\mathrm{cash}_l < \mathrm{ord}_l$, то удаляем из списка l-го покупателя;

12) переходим к п. 4;

13) вычисляем $p[t]$ по формуле (6);

14) пересчитываем очки стратегий по формулам (3), (1), где $\chi(x) = \mathrm{sign}\,(x)$;

15) пересчитываем глобальную информацию $\mu(t)$ по формуле (2);

16) для покупателей: если $\mathrm{ord}_i > p[t]$, то $\Delta_{iR} = \Delta_{iR} - 0.01$, если $\mathrm{ord}_i < p[t]$, то $\Delta_{iR} = \Delta_{iR} + 0.01$;

17) для продавцов: если $\mathrm{ord}_i > p[t]$, то $\Delta_{iR} = \Delta_{iR} + 0.01$, если $\mathrm{ord}_i < p[t]$, то $\Delta_{iR} = \Delta_{iR} - 0.01$;

18) полагаем $t = t + 1$;

19) переходим к п. 1.

3. Мажоритарные игры

В целом при изучении миноритарных игр встает вполне закономерный вопрос: почему базовый принцип именно миноритарный? Мы считаем, что большинству людей свойственно стадное поведение или эффект подражания. Именно поэтому, на наш взгляд, ключевым предположением при построении любых моделей коллективного действия должны стать именно подражательные действия, а не стремление стать максимально отличным от других. Если же моделировать именно подражательные действия, то ключевым принципом должен стать мажоритарный, а не миноритарный.

Отличие мажоритарных игр от миноритарных состоит в оценке стратегий на успешность. Если формулу (1) заменить на

$$g_{iR}[t+1] = \chi[a_{iR}^{\mu[t]}(p[t+1] - p[t])], \tag{7}$$

то получим именно мажоритарные игры. Между тем нельзя преобразовать стандартную миноритарную модель в мажоритарную простым изменением стратегии (то есть знака в выражении (1)). Дело в том, что в обычных миноритарных играх отсутствуют какие-либо ограничения на цену и агенты очень быстро начинают на 100% подражать друг другу, а цена либо уходит равномерно в бесконечность, либо начинает периодически колебаться от очень большого значения до очень маленького с интервалом в один шаг.

Чтобы обойти эти проблемы, нами была предпринята попытка модификации модели, предложенной в [13]. В миноритарную модель была добавлена адаптируемая сеть взаимодействий агентов. При построении этого взаимодействия использовался мажоритарный принцип, поэтому в действиях агентов присутствовала «борьба» между миноритарными принципами в самостоятельных действиях и мажоритарными принципами в попытках подражать своим соседям по сети взаимодействий. В такой модели в действиях каждого агента конкурировали стремление быть миноритарным по отношению ко всем агентам и стремление подражать тем коллегам, с которыми он общался (взаимодействовал). Между тем полученные результаты показали отличие статистических параметров модели от реального рынка. В частности, в плотности распределения изменения цен отсутствовали «тяжелые хвосты». Это свидетельствует о том, что в предложенной в [13] системе отсутствует такое важное и в то же время интересное для изучения свойство реального рынка, как крах.

Таким образом, перед исследователями рынка встает задача построить такую модель, чтобы она базировалась на мажоритарных играх, не зацикливалась (то есть не переходила в циклический режим с быстрыми осцилляциями), а также имела «тяжелые хвосты» у плотности распределения изменения цен, чтобы описывать крахи. Оптимальным, на наш взгляд, решением является модель мажоритарных игр с аукционом по цене активов. Аукцион вводит естественные ограничения на действия игроков. Поэтому данная модель не зацикливается, так как при повышении цены до определенного уровня не будет спроса на актив из-за того, что у агентов не будет денег на его покупку, что мы увидим далее. Мы увидим также, что в данной модели присутствуют «тяжелые хвосты».

Алгоритм аукциона идентичен тому, который описан в предыдущем параграфе. Единственным отличием нового алгоритма от старого будет п. 14, в котором выражение (1) заменяется выражением (7).

4. Анализ модели

Мы провели вычислительные эксперименты с использованием модели мажоритарных игр с аукционом по цене. В результате получена плотность распределения изменения цен, которая показана на рис. 1.

При введении аукционов в модели появляется такое понятие, как внутренняя цена. Она определяется как сумма всех активов в игре, деленная на сумму всех

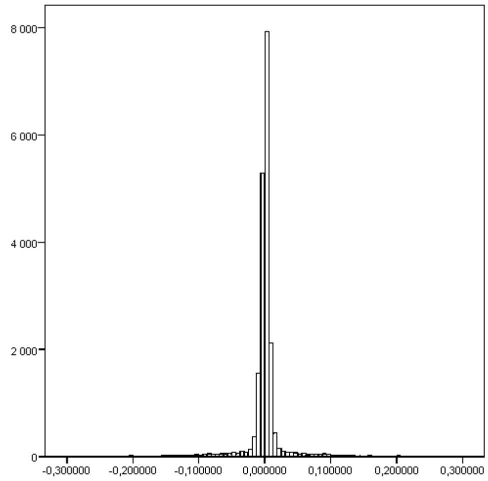

Рис. 1. Гистограмма распределения относительных изменений цен в мажоритарных играх с аукционом по цене

денег. Если $p(t)$ будет равна этой внутренней цене, то система находится в наиболее стабильном состоянии, так как при такой цене стоимость всех активов будет равна количеству денег в системе. На рис. 2 показано изменение цены со временем. Видно, что цена в мажоритарных играх может уходить достаточно далеко от своей внутренней цены.

Рассмотрим статистику полученных изменений цен. Выборочное среднее колеблется около нуля. Выборочная дисперсия получилась равной 0.001. Эксцесс равен 12.806. Ранее экспериментальным путем [14, 15] было установлено, что эксцесс цены для реального рынка находится в интервале от 2 до 50. Таким образом, можно утверждать, что полученная модель близка к реальному рынку, так как полученный в модели эксцесс находится в пределах значений, характерных для реального рынка. Используя процедуру анализа данных, предложенную в [16], по тесту Колмогорова – Смирнова с уровнем значимости 5% для наших данных отвергается гипотеза о нормальности распределения, то есть с вероятностью 95% изменения цен в модели не распределено по нормальному закону.

Проведем аналогично [17] тест гистограммы (рис. 1) на принадлежность распределения относительного изменения цены x к классу степенных, имеющих вид

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\alpha}. \tag{8}$$

Этот тест состоит в поиске методом максимального правдоподобия коэффициента α и последующем подборе $x_{\min}$. После проведения такого анализа наших данных коэффициент α получился равным 2.9177, а $x_{\min} = 0.0071$. Ранее в статье [17] также приводился метод вычисления некоего P-значения (P-value), характеризующего степень согласия гипотетического распределения случайной величины вида (8) с анализируемыми данными. В случае когда P-значение больше 0.1, гипотезу о распределении случайной величины в виде (8) можно принять. Для рассматриваемой мажоритарной модели степень согласия P получилась равной 0.135. Таким образом, на основании проведенных тестов мы можем принять гипотезу о степенном законе распределения относительного изменения цены.

По определению предложенному в [18], если α лежит в интервале $[1; 3]$, то «тяжелые хвосты» у распределения присутствуют. Точность оценки величины α

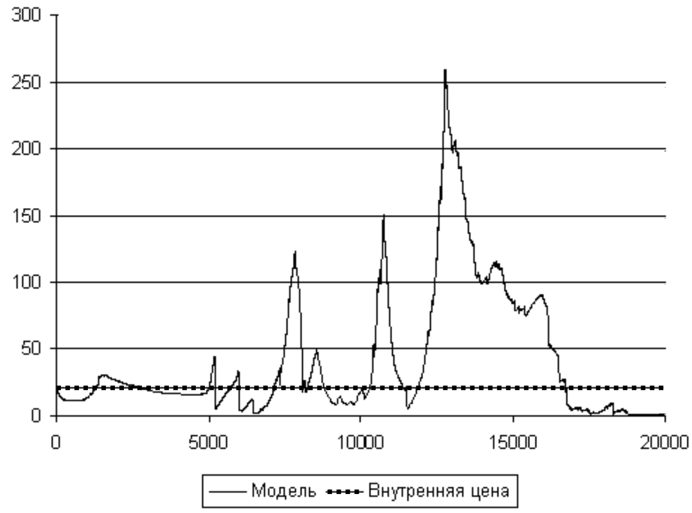

Рис. 2. График изменения цены (вертикальная ось) в мажоритарных играх с аукционом по цене в зависимости от времени (шага алгоритма – горизонтальная ось)

пропорциональна $O(n^{-1})$, где n – количество наблюдений. С учетом того что тесты проводились при n, а коэффициент α получился равным 2.9177, можно с уверенностью заключить, что относительные изменения цены распределены по степенному закону с «тяжелыми хвостами», так как $\alpha < 3$.

Рассмотрим, что же происходит непосредственно при наступлении краха. В каждый конкретный момент времени у всех участников рынка в сумме есть постоянное количество «денег» и «бумаг». Между тем текущее состояние каждого участника рынка различно за счет различной оценки стоимости его «бумаг» и той суммы «денег», которой он располагает. Так как игра – мажоритарная, то игроки стараются подражать друг другу. Однако в нашей модели присутствует естественное препятствие для неограниченного роста цен или их падения. Допустим, что все агенты начинают одновременно покупать. Тогда в определенный момент времени, например когда количество покупающих вырастает до количества продающих, платежеспособный спрос будет все равно ограничен, так как у покупателей уже не будет достаточно средств, чтобы перекрыть предложение.

Таким образом, предложена новая модель, базирующаяся на мажоритарных играх. Модель имеет «тяжелые хвосты» у функции распределения изменения цен и по статистическим параметрам достаточно близка к реальному рынку.

Summary

T.R. Shahmuratov. Statistical Majority Model of Financial Market with Price Auction.

Mathematical modeling of financial markets has been carried out, their main processes being described on the basis of game theory. The condition of markets on the verge of collapse has been investigated, when strong correlations occur in the market participants' behaviour and, consequently, prices greatly deviate from the usual state. The dependence of statistical characteristics of model market on the parameters of the adopted model has been researched. With a view to getting an objective estimate of adequacy and applicability limits of the constructed model,the calculated characteristics have been compared with statistical characteristics of the real markets. On the basis of the results obtained, ways of improving the models of financial markets are suggested.

Key words: mathematical market models, statistical market characteristics, game theory.

Литература

1. *Arthur W.B.* Complexity and the economy // Science. – 1999. – No 284. – P. 107–109.
2. *Cont R., Bouchaud J.P.* Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets. – URL: http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9712318.
3. *Farmer J.D.* Market force, ecology, and evolution // Santa Fe Inst. Working Paper. – 1998. – No 12. – P. 117–183.
4. *Lux T.* Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market // Nature. – 1999. – No 397. – P. 498–500.
5. *Marsili M., Challet D.* Trading behavior and excess volatility in toy markets // SISSA Working Paper. – 2000. – No CM/188/00 – P. 188–202.
6. *Nassim N.T.* The black swan: the impact of the highly improbable. – N. Y.: Random House, 2007. – 366 p.
7. *Mandelbrot B.* The variation of certain speculative prices // J. Business. – 1963. – No 36. – P. 392–419.
8. *Shiller R.J.* Irrational exuberance. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2000. – 344 p.
9. *Jefferies P., Jhonson N.F., Hart M., Hui P.M.* From market games to real world markets // Eur. Phys. J. B. – 2001. – No 20. – P. 493–501.
10. *Jefferies P., Jhonsonm N.F.* Designing agent based models // Oxford Center for Computational Finance Working Paper. – 2002. – No 010702. – P. 1–32.
11. *Challet D., Zhang Y.C.* Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game // Physica A. – 1997. – No 246. – P. 407–418.
12. ММВБ/MICEX. – URL: http://micex.ru/markets/stock/organization/modes/511.
13. *Шахмуратов Т.Р.* Миноритарная модель, основанная на агентах, при условии взаимодействия агентов // Инфокоммуникационные технологии глобального информационного сообщества: Сб. тр. 6-й ежегодной межд. науч.-практ. конф. Казань, 4–5 сент. 2008 г. – Казань: Изд-во ООО «Центр Оперативной Печати», 2008. – С. 383–393.
14. *Campbell J., Lo A.H., McKinlay C.* The econometrics of financial markets. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1997. – 632 p.
15. *Pagan A.* The econometrics of financial markets // J. Empirical Finance. – 1996. – No 3. – P. 15–102.
16. *Massey F.J.* The Kolmogorov – Smirnov test for goodness of fit // J. Amer. Statist. Assoc. – 1951. – V. 46. – No 253. – P. 68–78.
17. *Clauset A., Shalizi C.R., Newman M.E.J.* Power-law distributions in empirical data. – URL: http://arxiv.org/abs/0706.1062.
18. *Bouchaud J.-P., Potters M.* Theory of financial risks. From statistical physics to risk management. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – 218 p.

Поступила в редакцию
23.03.09

Шахмуратов Тимур Рустэмович – аспирант НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *t-s-r@list.ru*