КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.А. Малахальцев, В.Е. Фомин

Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть II

Методическое пособие

Издательство
Казанского государственного университета
2008

УДК 514.7
И 20

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть II: Методическое пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2007. — 56 с.

Пособие содержит задачи и упражнения для проведения практических занятий со студентами механико-математического факультета Казанского университета.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное арифметическое пространство.

1. Производная векторной функции скалярного аргумента

Пусть E– евклидово векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, $\langle .,. \rangle : (x,y) \in E \times E \to \langle x,y \rangle \in \mathbb{R}$– скалярное произведение, $|\,.\,| : x \in E \to |x| \in \mathbb{R}$– длина (норма) вектора на E, $U \subset \mathbb{R}$ – открытое множество, t_0– точка прикосновения множества U.

Определение 1.1. Отображение $\mathbf{r} : t \in U \to E$ называется *векторной функцией скалярного аргумента*. Вектор $\mathbf{r}_0$ называется *пределом функции* $\mathbf{r}$ *при* $t \to t_0$ (пишут $\mathbf{r}_0 = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$), если $\lim\limits_{t\to t_0,\, t\neq t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0$.

Векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ для любого числа $t_0 \in U$.

Пусть $t_0 \in U$, и рассмотрим векторную функцию

$$\mathbf{h}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Отметим, что точка t_0 является точкой прикосновения множества $U \backslash \{t_0\}$ — области определения функции $\mathbf{h}$.

Определение 1.2. Функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$ *дифференцируема в точке* $t_0 \in U$, если существует предел

$$\lim_{t\to t_0,\, t\neq t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}, \tag{1.1}$$

который называется *производной функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *в точке* t_0 и обозначается $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ или $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$. Функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$ *дифференцируема на* U, если она дифференцируема в каждой точке $t_0 \in U$. *Производная* k*-го порядка* определяется по индукции: для любого $k > 1$

$$\overset{(k)}{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^k\mathbf{r}}{dt^k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{dt^{k-1}}\right)(t). \tag{1.2}$$

Говорят, что функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *класса* C^k, если существуют производные до k-го порядка включительно и векторные функции $\overset{(s)}{\mathbf{r}}$, $0 \leq s \leq k$, непрерывны.

Свойства производной.

Если λ– вещественная, а $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ – векторные функции скалярного аргумента $t \in U$, дифференцируемые на U, то

1. Векторная функция $(\mathbf{r}+\mathbf{p})(t)=\mathbf{r}(t)+\mathbf{p}(t)$ дифференцируема и

$$\frac{d(\mathbf{r}+\mathbf{p})}{dt}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)+\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t).$$

2. Векторная функция $(\lambda\cdot\mathbf{r})(t)=\lambda(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ дифференцируема и

$$\frac{d(\lambda\cdot\mathbf{r})}{dt}(t)=\frac{d\lambda}{dt}(t)\cdot\mathbf{r}(t)+\lambda(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t).$$

3. Если векторная функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $t\in U$ постоянна, то она дифференцируема и $\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{0}$ для любого $t\in U$.

4. Вещественная функция $\langle\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle(t)=\langle\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t)\rangle$ дифференцируема и

$$\frac{d\langle\mathbf{r},\mathbf{p}\rangle}{dt}(t)=\left\langle\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t),\mathbf{p}(t)\right\rangle+\left\langle\mathbf{r}(t),\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t)\right\rangle. \tag{1.3}$$

5. Если E_3– трехмерное ориентированное вещественное евклидово векторное пространство с векторным произведением $[.\,,.]:(x,y)\in E_3\times E_3\to[x,y]\in E_3$ и смешанным произведением $(.\,,.\,,.):(x,y,z)\in E_3\times E_3\times E_3\to(x,y,z)\in\mathbb{R}$ векторов, то векторная функция $[\mathbf{r},\mathbf{p}](t)=[\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t)]$ и скалярная функция $(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q})(t)=(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))$ дифференцируемы и

$$\frac{d[\mathbf{r},\mathbf{p}]}{dt}(t)=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t),\mathbf{p}(t)\right]+\left[\mathbf{r}(t),\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t)\right], \tag{1.4}$$

$$\frac{d(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{q})}{dt}(t)=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t),\mathbf{p}(t),\mathbf{p}(t)\right)+\\ +\left(\mathbf{r}(t),\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t),\mathbf{q}(t)\right)+\left(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t),\frac{d\mathbf{q}}{dt}(t)\right). \tag{1.5}$$

6. Если векторная функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $t\in U$, имеет постоянную длину $|\mathbf{r}(t)|=\mathrm{const}$ для любого $t\in U$, то $\dot{\mathbf{r}}(t)\perp\mathbf{r}(t)$ для любого $t\in U$. Обратно, если $\dot{\mathbf{r}}(t)\perp\mathbf{r}(t)$ для любого $t\in U$ и открытое множество U связно, то $|\mathbf{r}(t)|=\mathrm{const}$.

7. Если векторная функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $t\in U$, имеет постоянное направление, то есть существует ненулевой вектор $\mathbf{a}\in E$ такой, что $\mathbf{r}(t)\parallel\mathbf{a}$ для любого $t\in U$, то $\dot{\mathbf{r}}(t)\parallel\mathbf{r}(t)$ для любого $t\in U$. Обратно, если U связно и $\dot{\mathbf{r}}(t)\parallel\mathbf{r}(t)$ для любого $t\in U$, а $\mathbf{r}(t)\neq\mathbf{0}$, то $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ имеет постоянное направление.

8. Если векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$, параллельна постоянной плоскости, то есть существует двумерное векторное подпространство L пространства E такое, что $\mathbf{r}(t) \parallel L$ для любого $t \in U$, то для любого $t \in U$ векторы $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)$ линейно зависимы. Обратно, если U связно и для любого $t \in U$ векторы $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)$ линейно зависимы, а $\mathbf{r}(t) \nparallel \dot{\mathbf{r}}(t)$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ параллельна постоянной плоскости.

9. Если E конечномерно, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ – базис в E и векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$, раскладывается по базису следующим образом: $\mathbf{r}(t) = x^i(t)\mathbf{e}_i$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы все ее координаты $x^i = x^i(t), i = \overline{1, n}$.

Пусть теперь $U \subset \mathbb{R}^k_{st}$ – открытое множество, $\mathbf{r} : (u^i) = (u^1, \ldots, u^k) \in U \to E$ – отображение U в евклидово векторное пространство E, $(u^i_0) = (u^1_0, \ldots, u^k_0) \in U$. *Частной производной по аргументу* u^{i_0}*,* $1 \le i_0 \le k$*, векторной функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^i)$ *в точке* (u^i_0) называется производная

$$\partial_i \mathbf{r}(u^i_0) = \left. \frac{d(\mathbf{r}(u^1_0, \ldots, u^{i_0-1}_0, \, . \, , u^{i_0+1}_0, \ldots, u^k_0))}{du^{i_0}} \right|_{u^{i_0} = u^{i_0}_0} \tag{1.6}$$

частичного отображения

$$\mathbf{r}(u^1_0, \ldots, u^{i_0-1}_0, \, . \, , u^{i_0+1}_0, \ldots, u^k_0) : u^{i_0} \in U^{i_0}(u^i_0) \subset \mathbb{R} \\ \to \mathbf{r}(u^1_0, \ldots, u^{i_0-1}_0, u^{i_0}, u^{i_0+1}_0, \ldots, u^k_0) \in E$$

в точке $(u^{i_0}_0)$. Здесь

$$U^{i_0}(u^i_0) = \{u^{i_0} \in \mathbb{R} \mid (u^1_0, \ldots, u^{i_0-1}_0, u^{i_0}, u^{i_0+1}_0, \ldots, u^k_0) \in U\}$$

есть открытое множество в $\mathbb{R}$, являющееся сечением открытого множества $U \subset \mathbb{R}^k$ по точке (u^i_0). По индукции определяется *частная производная* $\partial_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{r}(u^i_0)$ *m-го порядка в точке* (u^i_0) *по аргументам* $u^{i_1}, \ldots, u^{i_m}$ для любых $m \in \mathbb{N}$, $1 \le i_1, \ldots, i_m \le k$.

Векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^i)$, $(u^i) \in U \subset \mathbb{R}^k$ называется функцией *класса* C^m, если для любых $1 \le i_1, \ldots, i_m \le k$ и для любой точки $(u^i) \in U$ существуют частные производные $\partial_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{r}(u^i)$ и отображения $\partial_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{r} : (u^i) \in U \to \partial_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{r}(u^i) \in E$ непрерывны.

Определение 1.3. *Дифференциалом (первого порядка) векторной функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^i)$, $(u^i) \in U$, *в точке* $(u_0^i) \in U$ называется линейное отображение

$$d\mathbf{r}_{(u_0^1,\ldots,u_0^k)} : (h^1 \ldots h^k) \in \mathbb{R}^k \\ \to \partial_1\mathbf{r}(u_0^i) \cdot h^1 + \cdots + \partial_k\mathbf{r}(u_0^i) \cdot h^k \in E. \quad (1.7)$$

Задачи:

1.1. Следует ли из непрерывности векторной функции

$$\mathbf{r} : (u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{R}^m \to \mathbf{r}(u^1, \ldots, u^m) \in E$$

непрерывность функции $|\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^m)|$? Верно ли обратное?

1.2. $\mathbf{r} : t \in \mathbb{R} \to \mathbf{r}(t) \in E$– векторная функция класса C^3. Найти производные следующих функций в тех точках $t \in \mathbb{R}$, в которых они существуют: a) $\mathbf{r}^2$, b) $\dot{\mathbf{r}}^2$, c) $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$, d) $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$, e) $[\mathbf{r}, [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]]$, f) $\sqrt{\mathbf{r}^2}$.

1.3. Доказать биссекториальное свойство касательной к эллипсу: касательная к эллипсу в произвольной его точке является биссектрисой угла, смежного с углом между фокальными радиусами точки касания.

1.4. $\mathbf{r} : t \in U \to \mathbf{r}(t) \in E$ – дифференцируемая на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}$ векторная функция скалярного аргумента, $L : E \to E$ – непрерывный линейный оператор. Доказать, что функция $\mathbf{h}(t) = (L \circ \mathbf{r})(t)$, $t \in U$, дифференцируема. Найти ее производную.

1.5. Следует ли из дифференцируемости векторной функции $\mathbf{r}(t)$ дифференцируемость скалярной функции $|\mathbf{r}(t)|$?

1.6. Можно ли утверждать, что для дифференцируемой функции $\mathbf{r}(t)$ имеют место равенства:

a) $|\frac{d}{dt}\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}|$, b) $\langle \mathbf{r}, \frac{d}{dt}\mathbf{r} \rangle = |\mathbf{r}| \frac{d}{dt}|\mathbf{r}|$?

1.7. E_2 — двумерное ориентированное евклидово векторное пространство, L_α — поворот в плоскости E_2 на угол α, $\times : (x, y) \in E_2^2 \to x \times y \in \mathbb{R}$ — косое произведение. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, $t \in U$, — дифференцируемые функции, то функции $(L_\alpha \circ \mathbf{r})(t) = L_\alpha(\mathbf{r}(t))$, $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$ также дифференцируемы. Найти их проиэводные.

1.8. Для векторной функции $\mathbf{r}(t) = (t^2+8, 4t-7, t+5)$ найти значение аргумента $t_0 \in \mathbb{R}$, при котором дифференциал $d\mathbf{r}_{t_0} : \tau \in \mathbb{R} \to d\mathbf{r}_{t_0}(\tau) \in E_3$ переводит число 2 в вектор $(4, 8, 2) \in E_3$.

1.9. Если производная векторной функции $\mathbf{r} : t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbf{r}(t) \in E$ тождественно равна $\mathbf{0}$, то эта функция постоянна. Доказать.

1.10. Для того чтобы дифференцируемая векторная функция $\mathbf{r} : (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{r}(t) \in E$, где U – связное множество, имела в каждой точке $(u, v) \in U$ нулевой дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была постоянна. Доказать.

1.11. Для того чтобы дифференцируемая векторная функция $\mathbf{r} : (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{r}(u, v) \in E$, где U – связное множество, имела постоянную длину $|\mathbf{r}(u, v)| = \mathrm{const}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $(u, v) \in U$ $\partial_u \mathbf{r}(u, v) \perp \mathbf{r}(u, v)$ и $\partial_v \mathbf{r}(u, v) \perp \mathbf{r}(u, v)$. Доказать.

2. Кривые и поверхности в аффинном еклидовом пространстве

Пусть $\mathcal{E}$ — аффинное евклидово пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством E, U – область (множество, гомеоморфное открытому шару) в $\mathbb{R}^k_{st}$, $\mathcal{L}$– подмножество в $\mathcal{E}$, наделенное индуцированной топологией.

Определение 2.1. Множество $\mathcal{L}$ называется *простым куском k-мерной поверхности* (*простой дугой* при $k = 1$), если существует гомеоморфизм $f : U \to \mathcal{L}$.

Если $O \in \mathcal{E}$ — полюс в $\mathcal{E}$, то векторная функция $\mathbf{r}(u) = \overrightarrow{Of(u)}$, $u \in U$, называется *векторно-параметрическим уравнением простого куска* $\mathcal{L}$.

Определение 2.2. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in D$, есть векторная функция со значениями в E, заданная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^k_{st}$. Геометрическое место $\mathcal{L}$ точек в $\mathcal{E}$ с радиус-векторами $\mathbf{r}(u)$, $u \in D$, называется *параметризованной поверхностью* (*параметризованной кривой* при $k = 1$) *с уравнением* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in D$.

Мы будем рассматривать параметризованные поверхности, задаваемые векторными функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in D$, класса C^s, $s \geq 1$.

Определение 2.3. Точка $u_0 \in U$ называется *регулярной точкой* параметризованной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in D$, если $\mathrm{Rk}\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}(u_0)\} = k$, в противном случае точка называется *особой*.

В достаточно малой окрестности регулярной точки параметризованная поверхность является простым куском.

Пусть $\{O, e_1, \dots, e_n\}$– аффинная система координат в $\mathcal{E}$, и $F : (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n_{st} \to (F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^k(x^1, \dots, x^n)) \in \mathbb{R}^k_{st}$– отображение, задаваемое k вещественными функциями класса C^s, $s \geq 1$ от n вещественных аргументов.

Определение 2.4. Геометрическое место точек $M(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{E}$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$F^i(x^1, \dots, x^n) = 0, \;\; i = 1, \dots, k, \tag{2.1}$$

называется *поверхностью класса C^s в $\mathcal{E}$, заданной неявно системой уравнений* (2.1).

Определение 2.5. Точка $M_0(x^1_0, \dots, x^n_0)$ поверхности, заданной неявно системой (2.1), называется *регулярной*, если

$$\mathrm{Rk}\{\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x^1_0, \dots, x^n_0)\} = k,$$

в противном случае точка называется *особой*.

В достаточно малой окрестности регулярной точки M_0 поверхность класса C^s, заданная неявно, является простым куском, более того, существует параметризация класса C^s этого простого куска поверхности такая, что точка M_0 — регулярная точка этой параметризации.

Задачи:

2.1. Доказать, что кривая $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 + t^2\,\mathbf{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$, в $\mathcal{E}$, где $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in E$– постоянные векторы, есть парабола, если векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ неколлинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$?

2.2. Доказать, что кривая $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \cos t\,\mathbf{r}_1 + \sin t\,\mathbf{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$, в $\mathcal{E}$, где $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in E$ — постоянные векторы, есть эллипс, если векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ неколлинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$?

2.3. Доказать, что кривая $\mathcal{L}: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \operatorname{ch} t\, \mathbf{r}_1 + \operatorname{sh} t\, \mathbf{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$, в $\mathcal{E}$, где $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in E$ — постоянные векторы, есть ветвь гиперболы, если векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ неколлинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$?

2.4. Пусть $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in E$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2$ некомпланарны. Какие поверхности задаются следующими векторными функциями?

a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 + u^2\,\mathbf{r}_2 + v\,\mathbf{r}_3$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \cos u\,\mathbf{r}_1 + \sin u\,\mathbf{r}_2 + v\,\mathbf{r}_3$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (u + \frac{1}{u})\mathbf{r}_1 + (u - \frac{1}{u})\mathbf{r}_2 + v\,\mathbf{r}_3$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{R}$.

d) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\cos v\,\mathbf{r}_1 + u\sin v\,\mathbf{r}_2 + u^2\,\mathbf{r}_3$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.5. В плоскости $\mathcal{E}_2$ точка M равномерно движется по прямой $ON \subset \mathcal{E}_2$, которая равномерно вращается вокруг точки O. Составить уравнение траектории движения точки M (*спираль Архимеда*).

2.6. В плоскости $\mathcal{E}_2$ прямая OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по прямой OL со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Составить уравнение траектории, описывемой точкой M (*логарифмическая спираль*).

2.7. Траектория точки окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой, называется *циклоидой*. Найти уравнения циклоиды.

2.8. *Трактриса* — плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Найти уравнение трактрисы в прямоугольной системе координат, если за фиксированную прямую взята ось OX.

2.9. Написать уравнение любой заузленной кривой.

2.10. В плоскости $\mathcal{E}_2$ в аффинной системе координат задана параметризованная кривая $\mathcal{L}: x = t^3 - 2t, y = t^2 - 2$, $t \in \mathbb{R}$. Лежат ли точки $M(-1, -1)$, $N(4, 2)$, $P(1, 2)$ на этой кривой? Найти точки пересечения этой кривой с координатными осями. Записать неявное уравнение этой кривой.

2.11. Найти в плоскости $\mathcal{E}_2$ параметризацию окружности, заданной в прямоугольной системе координат неявным уравнением $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, приняв за параметр : a) угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку окружности; b) угол между осью Ox и прямой, проходящей через точку окружности и ее центр.

2.12. Нарисуйте следующие кривые, заданные на плоскости в прямоугольной системе координат параметрическими уравнениями:

a) $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$,

b) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$,

c) $x = a\sin^2 t$, $y = b\cos^2 t$,

d) $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$,

e) $x = 3^t + 3^{-t}$, $y = 3^t - 3^{-t}$,

f) $x = \dfrac{a-t}{a+t}$, $y = \dfrac{t}{a+t}$.

2.13. Параметризацию гиперболы можно задать в виде

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Как движется точка по гиперболе, когда параметр t меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Какую замену параметра надо сделать, чтобы параметризация правой ветви гиперболы приняла вид

$$x = a\,\mathrm{ch}\varphi, \;\; y = b\,\mathrm{sh}\varphi?$$

2.14. Укажите, какие кривые задаются на плоскости в полярных координатах следующими уравнениями: a) $\rho = 4$, b) $\rho = 2a\cos\varphi$, c) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, d) $\rho = \dfrac{b}{\sin\varphi}$, e) $\rho = b\sin\varphi$.

2.15. В пространстве $\mathcal{E}_3$ задана прямоугольная система координат. В координатной плоскости xOz задана параметризованная кривая $\mathcal{L} : x = f(u), y = g(u)$, $u \in U \subset \mathbb{R}$, не пересекающая ось Oz. Найти параметризацию поверхности, полученной при вращении кривой $\mathcal{L}$ вокруг оси Oz (*поверхность вращения*).

2.16. Написать параметрические уравнения *тора*, который получается при вращении окружности

$$x = a + b\cos u, \quad y = 0, \quad z = b\sin u,$$

где $b < a$ и $u \in \mathbb{R}$, вокруг оси Oz.

2.17. Написать векторно-параметрическое уравнение цилиндрической поверхности, для которой кривая $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in U \subset \mathbb{R}$, является направляющей, а прямолинейные образующие параллельны ненулевому вектору $\mathbf{a}$.

2.18. Написать параметрические уравнения цилиндрической поверхности в $\mathcal{E}_3$, направляющая кривая которой задана в аффинной системе координат уравнениями $\mathcal{L} : x = u, y = u^2, z = u^3$, а прямолинейные образующие параллельны вектору $\mathbf{a}(1, 2, 3)$.

2.19. Написать неявное уравнение цилиндрической поверхности в $\mathcal{E}_3$ с направляющей кривой $\mathcal{L} : x = \cos u, y = \sin u, z = 0$ и прямолинейными образующими, параллельными вектору $\mathbf{a}(-1, 3, -2)$.

2.20. Дана поверхность

$$x = 3u + v^2 + 1, \ \ y = 2u + v^2 - 1, \ \ z = -u + 2v.$$

a) Показать, что эта поверхность цилиндрическая.

b) Написать параметрические уравнения какой-нибудь ее направляющей кривой.

c) Найти прямолинейную образующую поверхности, проходящую через точку $M(u = 2, v = 3)$.

2.21. Даны точка $M(a, b, c)$ и параметризованная кривая $\mathcal{L} : x = f(u), y = g(u), z = h(u)$. Найти в параметрическом виде уравнения конической поверхности с вершиной M и направляющей кривой $\mathcal{L}$.

2.22. Найти параметрические и неявное уравнения конической поверхности с вершиной $M(1, -2, 3)$ и направляющей кривой $\mathcal{L} : y = 2x^2, z = 0$.

2.23. Показать, что уравнения

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \ \ y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \ \ z = \frac{1}{u^2 + v^2}, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

и

$$x = u \cos v, \ \ y = u \sin v, \ \ z = u^2, (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

задают одну и ту же поверхность.

2.24. Написать параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к данной параметризованной кривой $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in U \in \mathbb{R}$.

2.25. Написать параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к винтовой линии

$$x = a\cos u, \;\; y = a\sin u, \;\; z = bu.$$

3. Касательная прямая и нормаль плоской кривой

Пусть $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U \subset \mathbb{R}$, — параметризованная дифференцируемая кривая в двумерном аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_2$, $t_0 \in U$ — регулярная точка этой кривой, $M_0 \in \mathcal{L}$ — точка с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Определение 3.1. *Касательной прямой в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ параметризованной кривой* называется прямая в $\mathcal{E}_2$ с уравнением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda \cdot \dot{\mathbf{r}}_0, \;\; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Касательная прямая в регулярной точке параметризованной кривой не меняется при ее перепараметризации.

Если $\{O, e_1, e_2\}$ — аффинная система координат в $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{L} : x = x(t), \;\; y = y(t)$, $t \in U$, — параметрические уравнения кривой, (x_0, y_0) — координаты точки M_0, а $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ — координаты касательного вектора $\dot{\mathbf{r}}_0$, то каноническое уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{X - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}_0}. \tag{3.2}$$

Определение 3.2. *Нормалью в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ параметризованной кривой* называется прямая в $\mathcal{E}_2$, проходящая через точку M_0 ортогонально касательной в этой точке.

Уравнение нормали

$$\langle \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0 \rangle = 0 \tag{3.3}$$

в прямоугольной системе координат записывается в виде:

$$(X - x_0)\dot{x}_0 + (Y - y_0)\dot{y}_0 = 0. \tag{3.4}$$

Если плоская кривая $\mathcal{L}$ задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$ в аффинной системе координат, и $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{L}$ — регулярная точка этой кривой, то в окрестности этой точки кривая может быть задана параметрически, причем точка M_0 останется регулярной точкой этой параметризации. Следовательно, в M_0 определена касательная, ее уравнение будет иметь вид

$$(X - x_0)F_x^0 + (Y - y_0)F_y^0 = 0, \tag{3.5}$$

где

$$F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \;\; F_y^0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{3.6}$$

А уравнение нормали, если система координат прямоугольная, имеет вид:

$$\frac{X - x_0}{F_x^0} = \frac{Y - y_0}{F_y^0}. \tag{3.7}$$

Задачи:

3.1. Составить уравнения касательной и нормали к следующим кривым, заданным на плоскости $\mathcal{E}_2$ уравнениями:

a) $x = t^3 - 2t, \;\; y = t^2 + 1$ в точке $A(t = 1)$;

b) $x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t$;

c) $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t)$;

d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке $A(3a/2, 3a/2)$;

e) $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ в точке $A(a/2, a/2)$;

f) $y^2 = 2px$;

g) $\rho = a\varphi$;

h) $\rho = 2a\cos\varphi$ в точке A, для которой $\varphi = \pi/4$.

3.2. Найти касательные к кривой $x = t^2 - 1, \;\; y = t^3 + 1$, a) параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$; b) перпендикулярные прямой $2x + 3y + 5 = 0$.

3.3. Найти нормали к кривой $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, a) параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$; b) перпендикулярные прямой $x - 2y + 4 = 0$.

3.4. Найти касательные к кривой $x = t^3, \;\; y = t^2$, проходящие через точку $M(-7, -1)$.

3.5. Покажите, что если все нормали плоской кривой проходят через фиксированную точку, то эта кривая есть часть окружности.

3.6. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются кривые $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

3.7. Доказать, что кривые $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ пересекаются под прямым углом.

3.8. Доказать, что касательные к *кардиоиде* $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$, проведенные в концах хорды, проходящей через полюс полярной системы координат, взаимно перпендикулярны.

3.9. Доказать, что угол между касательной в произвольной точке логарифмической спирали $\rho = ca^{\varphi}$, $a > 0$ и радиус-вектором точки касания есть величина постоянная, не зависящая от точки касания.

3.10. Доказать, что только логарифмические спирали и окружности обладают свойством, указанным в задаче 3.9.

3.11. Пусть даны две кривые на плокости в полярной системе координат: $\rho = \rho(\varphi)$ и $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$. Доказать, что они пересекаются под прямым углом, если $\rho\rho_1 + \dot{\rho}\dot{\rho}_1 = 0$.

3.12. Доказать, что следующие кривые пересекаются под прямым углом: a) $\rho = ae^{\varphi}$, $\rho = be^{-\varphi}$; b) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

3.13. Доказать, что длина отрезка касательной к *астроиде*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

заключенного между осями прямоугольной системы координат, равна a.

3.14. Доказать, что касательные к *лемнискате Бернулли* $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, проведенные в концах хорды, проходящей через полюс полярной системы координат, параллельны.

4. Длина дуги параметризованной кривой. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой

Пусть $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U \subset \mathbb{R}$, — параметризованная кривая класса C^1 в аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $[t_0, t_1] \subset U$ и $\tilde{\mathcal{L}} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$,

$t \in (t_0, t_1)$, — простая дуга кривой. Длина простой дуги $\tilde{\mathcal{L}}$ равна

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \tag{4.1}$$

Длина дуги кривой, отсчитываемая от фиксированной точки до переменной точки кривой, может служить параметром кривой, называемым *натуральным.*

Свойства натурального параметра: если $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, — уравнение кривой от натурального параметра s, то

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \right| \equiv 1, \tag{4.2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s) \perp \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s). \tag{4.3}$$

Пусть $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U \subset \mathbb{R}$ — параметризованная кривая класса C^2 в аффинном евклидовом ориентированном пространстве $\mathcal{E}_3$ с уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ в некоторой прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, и $M_0(t_0)(x_0, y_0, z_0)$– ее *бирегулярная точка*, то есть $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \nparallel \ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$. Каждая бирегулярная точка M_0 кривой определяет в $\mathcal{E}_3$ правую аффинную систему координат $\{M_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$, векторы которой имеют вид

$$\mathbf{T}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0, \;\; \mathbf{N}_0 = [[\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0], \dot{\mathbf{r}}_0], \;\; \mathbf{B}_0 = [\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0]. \tag{4.4}$$

Ортонормированный подвижный *репер Френе* $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ в точке M_0 состоит из ортов векторов $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$.

Оси и плоскости подвижной прямоугольной системы координат $\{M_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ имеют следующие названия и уравнения в системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

Касательная

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{T}_0, \;\; \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

и ее уравнение

$$\frac{X - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{Z - z_0}{\dot{z}_0}. \tag{4.6}$$

Главная нормаль

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{N}_0, \;\; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Бинормаль

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{B}_0, \ \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Соприкасающаяся плоскость

$$\langle \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{B}_0 \rangle = 0 \tag{4.9}$$

и ее уравнение

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.10}$$

Нормальная плоскость

$$\langle \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0 \rangle = 0 \tag{4.11}$$

и ее уравнение в прямоугольных координатах

$$(X - x_0)\dot{x}_0 + (Y - y_0)\dot{y}_0 + (Z - z_0)\dot{z}_0 = 0. \tag{4.12}$$

Спрямляющая плоскость

$$\langle \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}_0 \rangle = 0 \tag{4.13}$$

и ее уравнение в прямоугольных координатах

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Если кривая $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_3$ задана в прямоугольной системе координат системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x, y, z) = 0, \\ F^2(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{4.15}$$

и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ — регулярная точка этой кривой, то $\mathcal{L}$ может быть параметризована в некоторой окрестности $V(M_0)$ этой точки: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$,

$t \in U \subset \mathbb{R}$. $M_0(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0))$, $t_0 \in U$, — регулярная точка этой параметризации, и касательный вектор к $\mathcal{L}$ в любой точке $M(x, y, z) \in \mathcal{L} \cap V$

$$T(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = [N_1, N_2], \tag{4.16}$$

где $N_i = (F^i_x, F^i_y, F^i_z)$, $i = 1, 2$. Равенство (4.16) определяет соотношения

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} F^1_y & F^1_z \\ F^2_y & F^2_z \end{vmatrix}, \;\; \dot{y} = \begin{vmatrix} F^1_z & F^1_x \\ F^2_z & F^2_x \end{vmatrix}, \;\; \dot{z} = \begin{vmatrix} F^1_x & F^1_y \\ F^2_x & F^2_y \end{vmatrix}, \tag{4.17}$$

позволяющие выразить координаты векторов $\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0$ сопровождающего трехгранника кривой в точке M_0 через координаты этой точки.

Задачи:

4.1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ между точками $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/3$.

4.2. Найти длину дуги первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

4.3. Найти длину дуги одного витка кривой

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; z = 4a\cos(t/2)$$

между двумя точками ее пересечения с плоскостью xOz.

4.4. Найти длину дуги кривой $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y = a\,\mathrm{sh}t$, $z = at$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра 0 и t. Найти уравнения этой кривой от натурального параметра.

4.5. Показать, что формулы (4.17) определяют координаты касательного вектора кривой (4.15) и в случае, когда (x, y, z)– не прямоугольные, а аффинные координаты в $\mathcal{E}_3$.

4.6. В каких точках касательная к кривой $x = 3t - t^2$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^2$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

4.7. Доказать, что кривая $x = e^{t/\sqrt{2}}\cos t$, $y = e^{t/\sqrt{2}}\sin t$, $z = e^{t/\sqrt{2}}$ лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и пересекает его образующие под углом 45°.

4.8. Показать, что нормальные плоскости кривой

$$x = a\sin^2 t, \;\; y = a\sin t\cos t, \;\; z = a\cos t$$

проходят через начало координат.

4.9. Составить уравнения главной нормали и бинормали кривой $x = t,\ \ y = t^2,\ \ z = e^t$ в точке $M(t = 0)$.

4.10. Найти точки на кривой $x = 2/t,\ \ y = \ln t,\ \ z = -t^2$, в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.

4.11. Найти орты касательной, главной нормали и бинормали кривой $x = t\sin t,\ \ y = t\cos t,\ \ z = te^t$ в начале координат.

4.12. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии

$$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt.$$

Доказать, что главная нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найти орты репера Френе.

4.13. Найти уравнение нормальной плоскости в произвольной точке линии пересечения цилиндров $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$.

4.14. Найти уравнение соприкасающейся плоскости в точке $M(2, 1, 2)$ линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и гиперболического цилиндра $x^2 - y^2 = 3$.

4.15. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в произвольной точке линии пересечения параболических цилиндров $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

5. Формулы Серре-Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой

Пусть $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in U \subset \mathbb{R}$, — параметризованная натурально бирегулярная кривая класса C^3 в аффинном евклидовом ориентированном пространстве $\mathcal{E}_3$. $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ — репер Френе кривой. *Формулы Серре-Френе* кривой имеют вид

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n},\ \ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \varkappa\mathbf{b},\ \ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}, \tag{5.1}$$

где $k = k(s) > 0$ — *кривизна*, а $\varkappa = \varkappa(s)$ — *кручение* параметризованной кривой. Отметим, что при смене ориентации пространства $\mathcal{E}_3$ кривизна не меняется, а кручение меняет знак.

$R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$ называется *радиусом кривизны* кривой в точке $\mathbf{r}(s_0)$, а точка $\mathcal{E}_3$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(s_0) + R(s_0)\mathbf{n}(s_0)$ — *центром кривизны* в точке $\mathbf{r}(s_0)$.

Если уравнение кривой задано от произвольного параметра t, то кривизна и кручение этой кривой могут быть вычислены по формулам

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tag{5.2}$$

$$\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}. \tag{5.3}$$

Функции $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$, $s \in U$, задающие зависимость кривизны и кручения кривой от натурального параметра, называются *натуральными уравнениями* кривой. *Если U связно, то две параметризованные кривые, имеющие одинаковые натуральные уравнения, отличаются друг от друга только положением в пространстве.*

Отметим, что если на параметризованной кривой есть регулярные точки, которые не являются бирегулярными, то в этих точках векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ репера Френе, а также кручение $\varkappa$ не определены, а *кривизна k по определению полагается равной нулю.*

Всюду в дальнейшем производная по натуральному параметру обозначается штрихом, а по произвольному параметру — точкой.

Задачи:

5.1. Доказать, что для кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ выполняются следующие соотношения:

$$|\mathbf{r}'''|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + (k')^2, \;\; \langle \mathbf{r}', \mathbf{r}''' \rangle = -k^2, \;\; \langle \mathbf{r}'', \mathbf{r}''' \rangle = kk'.$$

5.2. Доказать, что

a) $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \varkappa$,

b) $(\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''') = \varkappa^5 \left(\frac{k}{\varkappa}\right)'$,

c) $(\mathbf{t}', \mathbf{t}'', \mathbf{t}''') = k^5 \left(\frac{\varkappa}{k}\right)'$.

5.3. Доказать, что кривизна и кручение кривой не зависят от выбора натуральной параметризации.

5.4. Доказать, что кривизна кривой может быть определена как скорость поворота касательного вектора, а кручение как скорость поворота вектора бинормали, когда точка по кривой движется с единичной скоростью.

5.5. Найти кривизну и кручение кривой

$$x = a\,\mathrm{ch}t, \;\; y = a\,\mathrm{sh}t, \;\; z = at.$$

5.6. Найти кривизну и кручение кривой

$$x = t^2, \;\; y = 1 - t, \;\; z = t^3.$$

в точке $M(t = 0)$.

5.7. Доказать, что для следующих кривых кривизна равна кручению:

a) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$;

b) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$; $z = 3t + t^3$.

5.8. Найти кривизну и кручение винтовой линии

$$x = a\cos t, \;\; y = a\sin t, \;\; z = bt.$$

5.9. Доказать, что радиус кривизны конической спирали $x = a\cos\varphi{\cdot}e^{k\varphi}$, $y = a\sin\varphi \cdot e^{k\varphi}$, $z = be^{k\varphi}$ пропорционален расстоянию от точки спирали до оси конуса.

5.10. Если все нормальные плоскости бирегулярной кривой параллельны постоянному ненулевому вектору $\mathbf{a}$, то кривая плоская. Доказать.

5.11. Если все соприкасающиеся плоскости бирегулярной кривой перпендикулярны некоторой фиксированной прямой, то кривая плоская. Доказать.

5.12. Зная кривизну k и кручение $\varkappa$ винтовой линии, составить ее параметрические уравнения.

5.13. Найти кривизну k плоской кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$.

5.14. Найти кривизну k параболы, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $y = x^2$.

5.15. Найти кручение кривой, полученной пересечением поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ и плоскости $x + y + z = 0$.

5.16. Существует ли кривая, у которой во всех точках a) кривизна и кручение постоянны и отличны от нуля, b) кривизна постоянна и отлична от нуля, а кручение равно нулю, c) кривизна и кручение равны нулю?

5.17. Нарисовать кривую, у которой a) $k(s) = s$, $\varkappa(s) = 0$; b) $k(s) = s$, $\varkappa(s) = s$.

5.18. В каких точках радиус кривизны плоской кривой $x = 4a\sin(t/2)$, $y = a(1 - \cos t)$ минимален?

5.19. Пусть кривизна $k = k(s)$ плоской кривой есть периодическая функция. Верно ли, что эта кривая замкнута?

5.20. Найти все плоские кривые, имеющие постоянную кривизну.

6. Огибающая однопараметрического семейства плоских кривых. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Пусть уравнение

$$F(x, y, c) = 0 \tag{6.1}$$

задает однопараметрическое семейство $\mathcal{L}_c$ плоских кривых класса C^1 в аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}^2$ с аффинными координатами (x, y). Здесь c — параметр семейства, пробегающий открытое множество $C \subset \mathbb{R}_{st}$, а $F = F(x, y, c)$ — вещественная функция класса C^1 от трех вещественных аргументов.

Определение 6.1. *Огибающей семейства кривых* называется такая кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства, но никакой простой кусок огибающей не совпадает с простым куском никакой кривой семейства.

Координаты точек огибающей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F_c(x, y, c) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Множество всех решений системы (6.2) называется *дискриминантной кривой* семейства (6.1). Помимо огибающей дискриминантная кривая может еще содержать некоторые из кривых семейства (6.1), особые точки кривых семейства, а также особые точки самой дискриминантной кривой, в которых касания с кривыми семейства может и не быть.

Однопараметрическое семейство плоских кривых может быть задано и в параметрическом виде:

$$\mathcal{L}_c : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c) = \{x = x(t, c), y = y(t, c)\},$$
$$t \in U \subset \mathbb{R}, \;\; c \in C \subset \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Дискриминантная кривая этого семейства кривых определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t, c), \\ y = y(t, c), \\ \begin{vmatrix} x_t(t, c) & y_t(t, c) \\ x_c(t, c) & y_c(t, c) \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Определение 6.2. *Эволютой* плоской кривой называется огибающая семейства ее нормалей.

Если исходная кривая $\mathcal{L}$ задана параметрически: $x = x(t), y = y(t)$, $t \in U$, то ее эволюта задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} X = x(t) - \dot{y}\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \\ Y = y(t) + \dot{x}\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \end{cases} \quad t \in U. \quad (6.5)$$

Определение 6.3. *Эвольвентой* данной плоской кривой $\mathcal{L}$ называется кривая $\tilde{\mathcal{L}}$, для которой $\mathcal{L}$ является эволютой.

Если $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$, — исходная кривая, то уравнение однопараметрического семейства ее эвольвент имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + (c - s(t))\mathbf{t}(t), \quad (6.6)$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t)$ — орт касательной кривой $\mathcal{L}$, $s = s(t)$ — длина дуги кривой $\mathcal{L}$ (4.1) от произвольно фиксированной точки кривой до точки $M(t) \in \mathcal{L}$, $c \in \mathbb{R}$ — параметр семейства эвольвент.

Задачи:

6.1. Найти огибающую следующих однопараметрических семейств плоских кривых (c — параметр семейства):

a) $(x-c)^2+y^2=a^2$,

b) $(x-c)^2+(y-c)^2=c^2$,

c) $x\cos c+y\sin c-p=0$,

d) $(1-c^2)x+2cy-a=0$.

6.2. Найти огибающую семейства прямых, образующих с осями прямоугольной системы координат треугольники постоянной площади S.

6.3. Найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины a, если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат.

6.4. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на фокальных радисах-векторах данной параболы.

6.5. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на фокальных хордах параболы $y^2=2px$.

6.6. Дан эллипс. На хордах, параллельных одной из осей симметрии эллипса, как на диаметрах, строятся окружности. Найти огибающую каждого семейства окружностей.

6.7. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы $y^2=2px$, перпендикулярных к ее оси.

6.8. Найти уравнения эволюты кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$.

6.9. Составить уравнения и начертить эволюты следующих кривых:

a) $x=a\cos t,\;\; y=b\sin t$,

b) $y=\ln x$,

c) $y=\sin x$,

d) $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

6.10. Доказать, что эволюта плоской кривой есть геометрическое место центров ее кривизны.

6.11. Найти особые точки эволют эллипса, гиперболы, параболы.

6.12. Доказать, что эволюта замкнутой кривой не может быть регулярной кривой во всех точках.

6.13. Составить уравнения эвольвент окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и сделать рисунок.

6.14. Составить уравнения эвольвент параболы $x = t,\ \ y = t^2/4$.

7. Касательная плоскость и нормаль поверхности

Пусть $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ — параметризованная дифференцируемая поверхность в трехмерном аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$, $(u^1_0, u^2_0) \in U$ — регулярная точка этой поверхности, $M_0 \in \Sigma$ — точка с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u^1_0, u^2_0)$, $\partial_i \mathbf{r}_0 = \partial_i \mathbf{r}(u^1_0, u^2_0)$, $i = 1, 2$.

Определение 7.1. *Касательной плоскостью в точке* $M_0(\mathbf{r}_0)$ *параметризованной поверхности* называется плоскость в $\mathcal{E}_3$ с уравнением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\lambda^1, \lambda^2) = \mathbf{r}_0 + \lambda^1 \partial_1 \mathbf{r}_0 + \lambda^2 \partial_2 \mathbf{r}_0,\ \ (\lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2. \tag{7.1}$$

Касательная плоскость в регулярной точке параметризованной поверхности не меняется при ее перепараметризации. Если $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ — аффинная система координат в $\mathcal{E}_3$, $\Sigma : x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = z(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in U$ — параметрические уравнения поверхности, (x_0, y_0, z_0) — координаты точки M_0, а $(\partial_i x_0, \partial_i y_0, \partial_i z_0)$ — координаты касательного вектора $\partial_i \mathbf{r}_0$, $i = 1, 2$, то уравнение касательной плоскости (7.1) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \partial_1 x_0 & \partial_1 y_0 & \partial_1 z_0 \\ \partial_2 x_0 & \partial_2 y_0 & \partial_2 z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

Определение 7.2. *Нормалью в точке* $M_0(\mathbf{r}_0)$ *параметризованной поверхности* называется прямая в $\mathcal{E}_3$, проходящая через точку M_0 ортогонально касательной плоскости в этой точке.

Уравнение нормали

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda[\partial_1 \mathbf{r}_0, \partial_2 \mathbf{r}_0],\ \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

в прямоугольной системе координат принимает вид

$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} \partial_1 y_0 & \partial_1 z_0 \\ \partial_2 y_0 & \partial_2 z_0 \end{vmatrix}} = \frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} \partial_1 z_0 & \partial_1 y_0 \\ \partial_2 z_0 & \partial_1 y_0 \end{vmatrix}} = \frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} \partial_1 x_0 & \partial_1 y_0 \\ \partial_2 x_0 & \partial_2 y_0 \end{vmatrix}}. \tag{7.4}$$

Если поверхность Σ задана неявным уравнением $F(x,y,z)=0$ в аффинной системе координат, и $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ — регулярная точка этой поверхности, то в окрестности этой точки поверхность может быть задана параметрически, причем точка M_0 останется регулярной точкой этой параметризации. Следовательно, в M_0 определена касательная плоскость, ее уравнение имеет вид

$$(X-x_0)F_x^0+(Y-y_0)F_y^0+(Z-z_0)F_z^0=0, \tag{7.5}$$

где

$$F_x^0=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\ \ F_y^0=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),$$
$$F_z^0=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0). \tag{7.6}$$

Уравнение нормали, если система координат прямоугольная, имеет вид:

$$\frac{X-x_0}{F_x^0}=\frac{Y-y_0}{F_y^0}=\frac{Z-z_0}{F_z^0}. \tag{7.7}$$

Задачи:

7.1. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^2,\ \ z=u^3-v^3$ в точке $M(3,5,7)$.

7.2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x=u,\ \ y=u^2-2uv,\ \ z=u^3-3u^2v$ в точке $M(1,3,4)$.

7.3. Дана поверхность $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v,\ \ z=u$. Найти уравнения касательной плоскости, нормали к поверхности и касательной к кривой $u=2$ в точке $M(u=2,v=\pi/4)$ поверхности.

7.4. Показать, что нормали в точках поверхности, образованной касательными к винтовой линии, образуют постоянный угол с осью винта.

7.5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

a) $z = x^3 + y^3$ в точке $M(1, 2, 9)$,

b) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3, 1, -1)$.

7.6. К поверхности $xyz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

7.7. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

7.8. Доказать, что поверхности $z = \mathrm{tg}(xy)$, $x^2 - y^2 = a$ ортогональны в точках их пересечения.

8. Огибающая однопараметрического семейства поверхностей. Развертывающиеся поверхности

Пусть уравнение

$$F(x, y, z, c) = 0 \tag{8.1}$$

задает однопараметрическое семейство Σ_c поверхностей класса C^1 в аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}^3$ с аффинными координатами (x, y, z). Здесь c — параметр семейства, пробегающий открытое множество $C \subset \mathbb{R}_{st}$, $F = F(x, y, z, c)$ — вещественная функция класса C^1.

Определение 8.1. *Огибающей семейства поверхностей* называется такая поверхность, которая в каждой своей точке касается одной из поверхностей семейства, но никакой простой кусок огибающей не совпадает с простым куском никакой поверхности семейства.

Координаты точек огибающей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z, c) = 0, \\ F_c(x, y, z, c) = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

При каждом фиксированном значении $c \in C$ решения системы (8.2) образуют множество, называемое *характеристикой семейства* (8.1). Множество всех характеристик называется *дискриминантной поверхностью* семейства (8.1). Помимо огибающей дискриминантная поверхность может еще содержать некоторые из поверхностей семейства (8.1), особые точки поверхностей семейства, а также особые точки самой дискриминантной поверхности, в которых касания с поверхностями семейства может и не быть.

Огибающая однопараметрического семейства характеристик называется *ребром возврата* семейства поверхностей. Координаты точек ребрам возврата удовлетворяют системе

$$\begin{cases} F(x,y,z,c) = 0, \\ F_c(x,y,z,c) = 0, \\ F_{cc}(x,y,z,c) = 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Однопараметрическое семейство поверхностей может быть задано и в параметрическом виде

$$\Sigma_c : x = x(u_1,u_2,c), y = y(u_1,u_2,c), z = z(u_1,u_2,c),$$
$$(u_1,u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2, \ \ c \in C \subset \mathbb{R}. \tag{8.4}$$

Дискриминантная поверхность этого семейства поверхностей определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(u_1,u_2,c), \\ y = y(u_1,u_2,c), \\ z = z(u_1,u_2,c), \\ \begin{vmatrix} x_1(u_1,u_2,c) & y_1(u_1,u_2,c) & z_1(u_1,u_2,c) \\ x_2(u_1,u_2,c) & y_2(u_1,u_2,c) & z_2(u_1,u_2,c) \\ x_c(u_1,u_2,c) & y_c(u_1,u_2,c) & z_c(u_1,u_2,c) \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Огибающая однопараметрического семейства плоскостей называется *развертывающейся поверхностью*. Примерами развертывающихся поверхностей являются цилиндрические, конические поверхности и поверхности, образованные касательными прямыми пространственных кривых. Характеристики однопараметрического семейства плоскостей — прямые линии.

Задачи:

8.1. Найти огибающую однопараметрического семейства поверхностей:

a) $x^2 + y^2 + (z-c)^2 - 1 = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

b) $x + c^2 y + z - 2c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

c) $(x-c)^2+(y-c)^2+(z-c)^2-c^2=0$, $c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

8.2. Найти огибающую и характеристики семейства сфер

$$(x-c)^2+y^2+z^2-1=0,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

Существует ли ребро возврата семейства?

8.3. Найти ребро возврата семейства плоскостей

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha+z=b\alpha,$$

где $b=\mathrm{const}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ — параметр семейства.

8.4. На хордах эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ z=0,$$

параллельных одной из осей симметрии, как на диаметрах, строятся сферы. Найти огибающую этих сфер.

8.5. На хордах гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ z=0,$$

параллельных одной из осей симметрии, как на диаметрах, строятся сферы. Найти огибающую этих сфер.

8.6. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства сфер радиуса a, центры которых лежат на окружности

$$x^2+y^2=b^2,\ \ z=0.$$

8.7. Найти огибающую семейства плоскостей, каждая из которых образует с координатными плоскостями прямоугольной системы координат тетраэдр заданного объема V.

8.8. Доказать, что линейчатая поверхность $\mathbf{R}=\mathbf{r}(u)+v\mathbf{a}(u)$ является развертывающейся тогда и только тогда, когда

$$(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}})\equiv 0.$$

9. Метрический тензор поверхности и его применение

Пусть

$$\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2, \tag{9.1}$$

есть параметризованная поверхность класса C^1 в трехмерном аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$. В каждой регулярной точке $M(u^1, u^2)$ этой поверхности касательная плоскость поверхности $T_M(\Sigma)$ является векторным евклидовым подпространством пространства E_3. Скалярное произведение $\langle ., . \rangle$ в E_3 индуцирует скалярное произведение в $T_M(\Sigma)$. Таким образом, на Σ возникает поле скалярных произведений, называемое *полем метрического тензора* на Σ, обозначаемое $g : M \in \Sigma \to g_M \in T_0^2(T_M(\Sigma))$ и определяемое по правилу:

$$g_M : (X, Y) \in T_M(\Sigma) \times T_M(\Sigma) \to g_M(X, Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Координаты метрического тензора– это координаты тензора g_M относительно базиса $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ в касательной плоскости поверхности в точке $M(u^1, u^2) \in \Sigma$:

$$g_{ij}(u^1, u^2) = g_{M(u^1,u^2)}(\mathbf{r}_i(u^1, u^2), \mathbf{r}_j(u^1, u^2)), \;\; i, j = 1, 2. \tag{9.3}$$

Функция

$$\mathrm{I}(u^1, u^2; du^1, du^2) = g_{ij}(u^1, u^2) du^i du^j = \\ = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 \tag{9.4}$$

называется *первой квадратичной формой параметризованной поверхности.*

Если $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$, $t \in U \subset \mathbb{R}$, — внутренние уравнения параметризованной кривой $\mathcal{L}$ на параметризованной поверхности Σ, и $\tilde{\mathcal{L}}$: $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$, $t \in (t_1, t_2) \subset U$, — простая дуга кривой, то длина этой простой дуги равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \dot{u}^1(t) \dot{u}^2(t)} \; dt. \tag{9.5}$$

Если $\mathbf{v} = v^i \mathbf{r}_i$, $\mathbf{w} = w^i \mathbf{r}_i \in T_{M_0}(\Sigma)$ — ненулевые векторы, касательные к поверхности в точке $M_0(u_0^1, u_0^2)$, а $g_{ij}^0 = g_{ij}(u_0^1, u_0^2)$ — координаты метрического тензора поверхности в точке M_0, то угол α между этими векторами находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{g^0_{ij}v^iw^j}{\sqrt{g^0_{ij}v^iv^j}\sqrt{g^0_{ij}w^iw^j}}. \tag{9.6}$$

Если $\tilde\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D \subset U$, — простой кусок параметризованной поверхности (9.1), ограниченный кусочно-гладкой кривой, то площадь $\tilde\Sigma$ равна

$$S = \int_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1du^2. \tag{9.7}$$

Пусть Σ, $\widetilde\Sigma$ — простые куски поверхностей в $\mathcal{E}_3$, заданные параметризациями $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ и $\widetilde{\mathbf{r}}(v^1, v^2)$. Отображение $\varphi : \Sigma \to \widetilde\Sigma$ называется *дифференцируемым*, если

$$\varphi(\mathbf{r}(u^1, u^2)) = \widetilde{\mathbf{r}}(v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)),$$

где $v^1(u^1, u^2)$, $v^2(u^1, u^2)$ — дифференцируемые функции. Дифференцируемая биекция φ называется *диффеоморфизмом*, если $\varphi^{-1} : \widetilde\Sigma \to \Sigma$ дифференцируемо. Диффеоморфизм φ называется *изгибанием* или *изометрией*, если для любой кривой $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, на поверхности Σ, кривая $\widetilde\gamma(t) = \varphi(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$, на поверхности $\widetilde\Sigma$ имеет ту же длину, что и γ: $s(\gamma) = s(\widetilde\gamma)$.

Задачи:

9.1. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$.

9.2. Найти первую квадратичную форму прямого геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

9.3. Найти первую квадратичную форму поверхности

$$z = z(x, y).$$

9.4. Укажите, какая из приведенных квадратичных форм не может служить первой квадратичной формой некоторой поверхности:

a) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + dv^2$;

b) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + 4dv^2$;

c) $ds^2 = du^2 - 4du\,dv + 6dv^2$;

d) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv - 2dv^2$.

9.5. Если семейство кривых на параметризованной поверхности задано дифференциальным уравнением $A\,du + B\,dv = 0$, то дифференциальное уравнение ортогональных траекторий, то есть кривых, пересекающих заданные кривые под прямым углом, имеет вид

$$(Bg_{11} - Ag_{12})du + (Bg_{12} - Ag_{22})dv = 0.$$

Доказать.

9.6. Поверхность S образована касательными к некоторой кривой. Найти ортогональные траектории прямолинейных образующих поверхности S.

9.7. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства кривых $\varphi(u, v) = \text{const}$ на параметризованной поверхности.

9.8. Найти ортогональные траектории однопараметрического семейства кривых $u = ce^v$, лежащих на косом геликоиде $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = u+v$.

9.9. На круговом конусе $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = u$ рассматривается однопараметрическое семейство кривых $v = u^2+c$, где c — параметр семейства. Найти семейство их ортогональных траекторий.

9.10. Выведите условие ортогональности двух семейств кривых на поверхности, определяемых как решения дифференциального уравнения

$$P(u, v)\,du^2 + Q(u, v)\,du\,dv + R(u, v)\,dv^2 = 0.$$

9.11. Докажите, что на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$ дифференциальное уравнение

$$du^2 - (u^2 + v^2)\,dv^2 = 0.$$

задает ортогональную сеть.

9.12. Дана поверхность

$$x = u^2 + v^2,\ \ y = u^2 - v^2,\ \ z = uv \quad (|u| + |v| \neq 0).$$

a) Найдите первую квадратичную форму поверхности.

b) Вычислите дифференциал длины дуги кривых $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.

c) Найдите длину дуги кривой $v = au$ между точками ее пересечения с кривыми $u = 1$, $u = 2$.

9.13. Найти, под каким углом пересекаются кривые $u + v = 0$, $u - v = 0$ на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$.

9.14. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm av^2/2$, $v = 1$, расположенного на поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + v^2)\,dv^2.$$

9.15. На поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\,dv^2$$

найти длину дуги кривой $u = v$ между точками $M_1(u_1, u_1)$ и $M_2(u_2, u_2)$.

9.16. Найдите площадь криволинейного четырехугольника на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$, ограниченного кривыми $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

9.17. Покажите, что площади областей на параболоидах $z = a(x^2 + y^2)/2$ и $z = axy$, проектирующихся на одну и ту же область плоскости xOy, равны.

9.18. Доказать, что если $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ — диффеоморфизм поверхностей, то существуют параметризации этих поверхностей $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ и $\widetilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2)$ такие, что

$$\varphi(\mathbf{r}(u^1, u^2)) = \widetilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2).$$

Такие системы координат называются *общими по отображению* φ.

9.19. Доказать, что в системах координат, общих по изгибанию $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$, метрические тензоры g и $\widetilde{g}$ поверхностей Σ и $\widetilde{\Sigma}$, соответственно, имеют одинаковые координаты: $g_{ij} = \widetilde{g}_{ij}$.

9.20. Построить изгибание: a) простого куска цилиндра на простой кусок плоскости, b) простого куска плоскости на простой кусок конуса.

9.21. Доказать, что простой кусок развертывающейся поверхности допускает изгибание на простой кусок плоскости.

10. Тензор второй квадратичной формы поверхности и его применение

Пусть

$$\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \ \ (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2, \tag{10.1}$$

есть параметризованная поверхность класса C^2 в трехмерном ориентированном аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$, для каждой регулярной точке $M(u^1, u^2)$ этой поверхности обозначим через $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u^1, u^2)$ орт нормали поверхности. Функции

$$h_{ij}(u^1, u^2) = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \rangle = \frac{(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \ \ i, j = 1, 2. \tag{10.2}$$

образуют координаты симметричного тензора h валентности $(2, 0)$ на Σ, называемого *тензором второй квадратичной формы поверхности.*

Функция

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(u^1, u^2; du^1, du^2) = h_{ij}(u^1, u^2) du^i du^j = \\ = h_{11}(du^1)^2 + 2h_{12} du^1 du^2 + h_{22}(du^2)^2 \end{aligned} \tag{10.3}$$

называется *второй квадратичной формой параметризованной поверхности.*

Определение 10.1. *Нормальной кривизной поверхности в точке* $M(u^1, u^2) \in \Sigma$ *в направлении ненулевого вектора* $\mathbf{a}(a^1, a^2) \in T_M\Sigma$ называется число

$$k_n(M, \mathbf{a}) = \frac{h_{ij}(u^1, u^2) a^i a^j}{g_{ij}(u^1, u^2) a^i a^j}. \tag{10.4}$$

Определение 10.2. *Индикатрисой Дюпена поверхности в точке* $M \in \Sigma$ называется геометрическое место точек N касательной плоскости $T_M\Sigma$, удаленных от точки M на расстояние, равное

$$\frac{1}{\sqrt{k_n(M, \overrightarrow{MN})}}.$$

Уравнение индикатрисы Дюпена в аффинной системе координат $\{M, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ имеет вид

$$h_{11}(\xi^1)^2 + 2h_{12}\xi^1\xi^2 + h_{22}(\xi^2)^2 = \pm 1. \tag{10.5}$$

Главные направления индикатрисы Дюпена в точке $M \in \Sigma$ называются *главными направлениями поверхности* в этой точке, а нормальные кривизны поверхности в точке $M \in \Sigma$ в главных направлениях называются *главными кривизнами поверхности* в этой точке.

Главные кривизны k_s, $s = 1, 2$, совпадают с корнями характеристического уравнения

$$\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0, \tag{10.6}$$

а главные направления $\mathbf{a}_s(a_s^1, a_s^2)$, $s = 1, 2$, — с нетривиальными решениями системы уравнений

$$(h_{ij} - k_s g_{ij})a^j = 0, \;\; i = 1, 2. \tag{10.7}$$

Если k_s — главные кривизны, $\mathbf{a}_s$, $s = 1, 2$, — главные направления, а $\mathbf{b}$ — произвольное направление поверхности в точке $M \in \Sigma$, составляющее с направлением $\mathbf{a}_1$ угол φ, то

$$k_n(M, \mathbf{b}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \tag{10.8}$$

(*формула Эйлера*).

Произведение главных кривизн поверхности называется *полной (гауссовой) кривизной поверхности*, а сумма главных кривизн – *средней кривизной поверхности.*

Полная и средняя кривизны поверхности выражаются через координаты метрического тензора и тензора второй квадратичной формы поверхности:

$$\mathcal{K} = k_1 \cdot k_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \tag{10.9}$$

$$2\mathcal{H} = k_1 + k_2 = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \tag{10.10}$$

Точка $M \in \Sigma$ называтся *эллиптической*, если $\mathcal{K}(M) > 0$; *гиперболической*, если $\mathcal{K}(M) < 0$; *параболической*, если $\mathcal{K}(M) = 0$, но $k_1(M) \neq k_2(M)$; *точкой уплощения*, если $k_1(M) = k_2(M) = 0$.

Теорема (Гаусс). *Полная кривизна поверхности не меняется при изгибании, то есть* $\widetilde{\mathcal{K}}(\varphi(M)) = \mathcal{K}(M)$, *для любой точки* $M \in \Sigma$, *где* $K : \Sigma \to \mathbb{R}$, $\widetilde{K} : \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{R}$ *— полные кривизны поверхностей* Σ *и* $\widetilde{\Sigma}$, *соответственно.*

Задачи:

10.1. Найти вторую квадратичную форму прямого геликоида $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$.

10.2. Найти вторую квадратичную форму поверхности, заданной явным уравнением $z = z(x, y)$.

10.3. Найти вторую квадратичную форму поверхности вращения $x = f(u)\cos v,\ \ y = f(u)\sin v,\ \ z = g(u)$.

10.4. Найти главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$.

10.5. Доказать, что главные направления прямого геликоида делят пополам углы между направлениями образующей и винтовой линии.

10.6. Вычислить главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $M(1, 1, 1)$.

10.7. Вычислить главные кривизны поверхности

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

в точке $M(0, 0, 0)$.

10.8. Найти кривизны нормальных сечений поверхности $y = x^2/2$

a) в произвольной точке;

b) в точках кривых, получающихся при пересечении поверхности плоскостями $z = k$, в направлениях, идущих по касательным к этим кривым;

c) в точке $M(2, 2, 4)$ в направлении касательной к кривой $y = x^2/2,\ \ z = x^2$.

10.9. На поверхности $x = u^2 + v^2,\ \ y = u^2 - v^2,\ \ z = uv$ дана точка $P(u = 1, v = 1)$.

a) Вычислить главные кривизны поверхности в точке P.

b) Найти уравнения касательных PT_1, PT_2 к главным нормальным сечениям в точке P.

c) Вычислить кривизну нормального сечения в точке P, проходящего через касательную к кривой $v = u^2$.

10.10. Дана поверхность
$$z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2.$$

a) Найти в начале координат уравнение индикатрисы Дюпена поверхности.

b) Вычислить в начале координат радиус кривизны нормального сечения, касательная к которому составляет угол 45° с осью Ox.

10.11. Доказать, что сумма нормальных кривизн поверхности в любых двух перпендикулярных направлениях равна средней кривизне этой поверхности.

10.12. Найти полную кривизну параболоида
$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}.$$

10.13. Найти полную и среднюю кривизны прямого геликоида $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = av$.

10.14. Найти полную и среднюю кривизны поверхности $z = z(x, y)$.

10.15. Найти полную и среднюю кривизны поверхности вращения $z = f(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10.16. Найти среднюю кривизну кругового цилиндра радиуса a.

10.17. Докажите, что у развертывающихся поверхностей полная кривизна во всех точках равна нулю.

10.18. Доказать, что при любом выборе криволинейных координат на плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

10.19. Найдите поверхности, у которых вторая квадратичная форма есть полный квадрат.

10.20. Пусть поверхность образована вращением вокруг оси l кривой $\mathcal{L}$, не имеющей точек с нулевой кривизной. Если кривая $\mathcal{L}$ обращена вогнутостью к оси l, то поверхность состоит из эллиптических точек; если же она обращена к оси l выпуклостью — из гиперболических точек. Доказать.

10.21. Найти области эллиптических, гиперболических и параболических точек на поверхности, образованной вращением графика $y = \sin x + 2$ вокруг оси OX.

10.22. Найдите эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе.

10.23. Какие из следующих поверхностей можно получить из конуса изгибанием: a) сферу, b) плоскость, c) цилиндр, d) псевдосферу ?

10.24. Существует ли изгибание простого куска сферы на a) простой кусок тора; b) простой кусок геликоида?

10.25. Сохраняется ли средняя кривизна при изгибании?

10.26. Поверхность называется *минимальной*, если ее средняя кривизна равна нулю. Найдите минимальные поверхности вращения.

10.27. Привести пример поверхности a) с единственной точкой уплощения; b) с линией точек уплощения.

10.28. Существует ли поверхность, на которой вторая квадратичная форма пропорциональна первой квадратичной форме?

10.29. Пусть поверхность Σ есть график функции $z = f(x, y)$, касающийся в начале координат плоскости XOY. Показать, что вторая квадратичная форма Σ в начале координат определяется матрицей вторых производных функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Вывести отсюда зависимость формы поверхности от гауссовой кривизны.

11. Линии кривизны и асимптотические линии поверхности

Определение 11.1. *Линией кривизны поверхности* называется такая кривая на этой поверхности, касательный вектор которой в каждой ее регулярной точке, отличной от точки уплощения поверхности, имеет главное направление.

Дифференциальное уравнение линий кривизны поверхности $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.1)$$

(здесь g_{ij}, h_{ij} — координаты метрического тензора и тензора второй квадратичной формы поверхности соответственно).

Нормали поверхности в точках кривой на поверхности образуют развертывающуюся поверхность в том и только том случае, когда кривая — линия кривизны поверхности.

Если две поверхности касаются друг друга вдоль кривой, и эта кривая является линией кривизны на одной поверхности, то она — линия кривизны и на другой поверхности.

Определение 11.2. *Асимптотической линией поверхности* называется такая кривая на этой поверхности, касательный вектор которой в каждой ее регулярной точке, отличной от точки уплощения поверхности, имеет асимптотическое направление относительно индикатрисы Дюпена поверхности в этой точке.

Дифференциальное уравнение асимптотических линий поверхности может быть записано в виде

$$h_{ij}du^i du^j = 0. \tag{11.2}$$

Всякая прямая линия, лежащая на поверхности, является ее асимптотической линией. Соприкасающаяся плоскость асимптотической линии совпадает с касательной плоскостью поверхности в каждой точке линии.

На поверхности, состоящей из точек эллиптического типа, вещественных асимптотических линий нет, на поверхности из гиперболических точек есть два однопараметрических семейства асимптотических линий, на поверхности из параболических точек — одно однопараметрическое семейство асимптотических линий.

Задачи:

11.1. Найти линии кривизны следующих поверхностей:

a) произвольной цилиндрической поверхности,

b) произвольной конической поверхности,

c) произвольной поверхности вращения,

d) поверхности $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = v$,

e) произвольной развертывающейся поверхности,

f) прямого геликоида.

11.2. Доказать, что на плоскости и сфере любая кривая является линией кривизны.

11.3. Доказать, что координатные линии параметризованной поверхности являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $g_{12} = h_{12} \equiv 0$.

11.4. Показать, что координатные линии поверхности $x = 3u - u^3 + 3uv^2$, $y = v^3 - 3u^2v - 3v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ являются линиями кривизны.

11.5. Доказать, что координатные линии параметризованной поверхности являются асимптотическими линиями тогда и только тогда, когда $h_{11} = h_{22} \equiv 0$.

11.6. Составить дифференциальное уравнение асимптотических линий поверхности вращения.

11.7. Найти асимптотические линии

a) катеноида $x = \mathrm{ch} u \cos v$, $y = \mathrm{ch} u \sin v$, $z = u$.

b) прямого геликоида,

c) однополостного гиперболоида.

11.8. Прямая перемещается параллельно плоскости xOy, пересекая ось Oz и кривую $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$. Найти асимптотические линии поверхности, описываемой этой прямой.

11.9. На поверхности, образованной главными нормалями пространственной кривой, эта кривая является асимптотической линией. Доказать.

11.10. Если в некоторой точке поверхности средняя кривизна равна нулю, то асимптотические направления взаимно перпендикулярны. Доказать.

11.11. Поверхность называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно равна нулю. Показать, что на минимальной поверхности сеть асимптотических линий ортогональна, то есть во всех точках линии одного семейства ортогональны линиям другого.

11.12. Показать, что на плоскости любая кривая является асимптотической линией и, обратно, связная поверхность, на которой любая кривая является асимптотической линией, есть часть плоскости.

12. Параллельное перенесение вектора вдоль кривой на поверхности. Геодезические линии. Геодезическая кривизна кривой на поверхности.

Пусть

$$\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \ \ (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2 \tag{12.1}$$

есть параметризованная поверхность класса C^2 в трехмерном ориентированном аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$, в каждой регулярной точке $M(u^1, u^2)$ этой поверхности векторы

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \ \ \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \ \ \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|}, \tag{12.2}$$

образуют базис в E_3 — *подвижной репер поверхности.* Частные производные векторов подвижного репера раскладываются по векторам этого репера

$$\begin{cases} \partial_j \mathbf{r}_i = \Gamma^s_{ij}\mathbf{r}_s + h_{ij}\mathbf{n}, \\ \partial_j \mathbf{n} = -h^s_j \mathbf{r}_s, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \tag{12.3}$$

где h_{ij} — координаты тензора второй квадратичной формы поверхности,

$$h^i_j = h_{js} g^{si} \tag{12.4}$$

являются координатами тензора, называемого *тензором Вейнгартена поверхности*, величины

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij}) \tag{12.5}$$

называются *символами Кристоффеля* (*коэффициентами римановой связности*) *поверхности.* В (12.4) и (12.5) g^{si} — координаты тензора валентности $(0, 2)$, образующие матрицу, обратную к матрице из координат метрического тензора g_{ij}.

Пусть $\mathcal{L} : u^i = u^i(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ – параметризованная кривая класса C^1 на поверхности, а $\mathbf{v} : t \in I \to \mathbf{v}(t) \in T_{M(t)}\Sigma$ – векторное поле класса C^1 вдоль кривой, здесь $M(t)(u^1(t), u^2(t)) \in \mathcal{L}$.

Определение 12.1. *Ковариантной (абсолютной) производной поля* $\mathbf{v}$ *вдоль кривой* $\mathcal{L}$ называется векторное поле $\dfrac{\nabla \mathbf{v}}{dt}$ класса C^0 вдоль кривой $\mathcal{L}$ такое, что для любого $t \in I$

$$\frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}(t) = \mathrm{pr}_{T_{M(t)}\Sigma} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t). \qquad (12.6)$$

где $\mathrm{pr}_{T_{M(t)}\Sigma}$– ортогональное проектирование E_3 на касательную плоскость $T_{M(t)}\Sigma$.

Свойства ковариантной производной вдоль кривой:

Если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — векторные поля класса C^1 вдоль кривой на поверхности, а $\lambda = \lambda(t)$, $t \in I$ – функция класса C^1 , то

$$\frac{\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{w})}{dt}(t) = \frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}(t) + \frac{\nabla \mathbf{w}}{dt}(t), \qquad (12.7)$$

$$\frac{\nabla(\lambda \cdot \mathbf{v})}{dt}(t) = \lambda(t) \cdot \frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}(t) + \frac{d\lambda}{dt}(t) \cdot \mathbf{v}(t), \qquad (12.8)$$

$$\frac{d\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{dt}(t) = \left\langle \frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}(t), \mathbf{w}(t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}(t), \frac{\nabla \mathbf{w}}{dt}(t) \right\rangle. \qquad (12.9)$$

Определение 12.2. Говорят, что *векторное поле* $\mathbf{v}$ *вдоль кривой* $\mathcal{L}$ *на поверхности переносится вдоль* $\mathcal{L}$ *(абсолютно) параллельно*, если

$$\frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}(t) \equiv 0. \qquad (12.10)$$

Если $\mathbf{v}(t) = v^k \mathbf{r}_k$, то уравнения (12.10) принимают вид

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} v^i \frac{du^j}{dt} \equiv 0. \qquad (12.11)$$

Определение 12.3. Кривая класса C^2 на поверхности называется *геодезической*, если орт ее касательной переносится вдоль нее абсолютно параллельно.

Если $\mathcal{L} : u^i = u^i(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ – геодезическая кривая, то t — натуральный параметр кривой.

Дифференциальные уравнения геодезических записываются в виде:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2. \qquad (12.12)$$

Через каждую регулярную точку поверхности в каждом направлении проходит единственная геодезическая. Локально, в достаточно малой окрестности всякой регулярной точки M_0 поверхности, геодезическая является наикратчайшей кривой, соединяющей любую точку этой окрестности с M_0. Материальная точка на поверхности, на которую действуют только силы реакции со стороны поверхности, двигается по поверхности с постоянной скоростью, и траектория движения точки является геодезической.

Пусть $\mathcal{L} : u^i = u^i(s), i = 1, 2,\ s \in I \subset \mathbb{R}$ – параметризованная натурально кривая класса C^2 на поверхности, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s)),\ s \in I$– ее векторно-параметрическое уравнение, $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$– орт касательной кривой.

Определение 12.4. *Геодезической кривизной k_g кривой на поверхности* называется модуль абсоютной производной по натуральному параметру вдоль кривой орта касательной этой кривой

$$k_g = \left| \frac{\nabla \mathbf{t}}{ds}(s) \right|. \tag{12.13}$$

Кривая на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда ее геодезическая кривизна тождественно равна нулю.

Задачи:

12.1. Доказать, что геодезическая кривая на поверхности вполне характеризуется каждым из следующих свойств:

а) В каждой бирегулярной точке кривой нормаль к поверхности является главной нормалью кривой.

б) В каждой бирегулярной точке кривой нормаль к поверхности лежит в соприкасающейся плоскости кривой.

в) В каждой точке кривой ее геодезическая кривизна равна нулю.

г) В каждой точке кривой ее кривизна равна абсолютной величине нормальной кривизны.

д) В каждой бирегулярной точке кривой спрямляющая плоскость кривой совпадает с касательной плоскостью поверхности.

12.2. Доказать, что всякая прямая на поверхности является геодезической кривой.

12.3. Две поверхности касаются по кривой $\mathcal{L}$. Докажите, что если $\mathcal{L}$ – геодезическая кривая на одной поверхности, то она является геодезической и на другой поверхности.

12.4. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими кривыми.

12.5. Доказать, что если на поверхности вращения есть геодезическая, пересекающая все меридианы под постоянным углом, то эта поверхность — цилиндр.

12.6. Найти геодезические кривые на сфере.

12.7. Найти геодезические линии на цилиндре и на конусе.

12.8. Пусть задана поверхность: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $x = u$. Найти геодезическую линию, проходящую через точку $A(1,0)$ в направлении вектора $v(0,\sqrt{2})$.

12.9. Доказать, что геодезическая кривизна кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in \mathbb{R}$ на поверхности может быть вычислена по формуле

$$k_g = (\mathbf{n}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''),$$

где $\mathbf{n}$ — орт нормали поверхности в точках кривой.

12.10. Доказать, что геодезическая кривизна в точке кривой на поверхности равна кривизне проекции кривой на плоскость, касательную к поверхности в данной точке кривой.

12.11. Найти геодезическую кривизну окружности радиуса r, лежащую на сфере радиуса R.

12.12. Найти геодезическую кривизну винтовых линий $u = \text{const}$, лежащих на прямом геликоиде $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$.

12.13. Найти геодезическую кривизну кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, лежащих на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = f(v)$.

12.14. Существует ли поверхность: a) через любые две точки которой проходит единственная геодезическая линия? b) через любые две точки которой проходит бесконечно много геодезических? c) на которой есть замкнутые и незамкнутые геодезические?

ОТВЕТЫ

1.1. Да. Обратное неверно, тому пример $\mathbf{r} : t \in (0,2) \to \mathbf{r}(t) \in E_2$, где

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), t \in (0, \pi/2), \\ (\sin t, \cos t), t \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

$\|\mathbf{r}\| \equiv 1$, но в точке $t_0 = \pi/2 \quad \mathbf{r}(t)$ терпит разрыв.

1.2. a) $2\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle$, b) $2\langle \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle$, c) $[\dot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}]$, d) $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})$, e) $[\dot{\mathbf{r}}, [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]] + [\mathbf{r}, [\dot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}]]$, f) $\dfrac{\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle}{\sqrt{\mathbf{r}^2}}$.

1.4. $\dot{h}(t) = (L \circ \dot{\mathbf{r}})(t)$, $t \in U$.

1.5. Нет, если при некотором $t_0 \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{0}$, то производная $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}(t_0)$ может не существовать (см. задачу 1.2 f)), тому пример $\mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{a}$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = \mathbf{const} \neq \mathbf{0}$.

1.6. a) Нет, тому пример $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, b) да.

1.7. $\frac{d}{dt}(L_\alpha \circ \mathbf{r})(t) = L_\alpha(\frac{d}{dt} r(t))$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t) \times \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$.

1.8. $t_0 = 1$.

1.9. Пусть $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $\mathbf{a} \in E$ – произвольный ненулевой вектор. Вещественная функция $h(t) = \langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{a} \rangle$ дифференцируема в (α, β) и $\dot{h}(t) = 0$. Тогда $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $h(t) = \mathrm{const} = h(t_0) = 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$, $\forall \mathbf{a} \in E$ $\langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{a} \rangle = 0 \Longrightarrow \forall t \in (\alpha, \beta)$ $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) = \mathrm{const}$.

1.10. Если $\mathbf{r}(u,v) = \mathrm{const}$, то $\forall (u,v) \in U$ $\partial_1 \mathbf{r}_{(u,v)} = \partial_2 \mathbf{r}_{(u,v)} = \mathbf{0}$ и $\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2$ $d\mathbf{r}_{(u,v)}(h_1,\, h_2) = \partial_1 \mathbf{r}_{(u,v)} + \partial_2 \mathbf{r}_{(u,v)} \equiv \mathbf{0}$. Обратно, если $\forall (u,v) \in U$ и $\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2$ $d\mathbf{r}_{(u,v)}(h_1, h_2) = \mathbf{0}$, то $\partial_1 \mathbf{r}_{(u,v)} = \partial_2 \mathbf{r}_{(u,v)} = \mathbf{0}$ и так как U связно, то $\mathbf{r}(u,v) = \mathrm{const}$.

1.11. $h(u,v) = |\mathbf{r}(u,v)|^2 = \mathrm{const} \Longleftrightarrow \forall (u,v) \in U$ $\partial_1 h_{(u,v)} = \partial_2 h_{(u,v)} = 0$ $\Longleftrightarrow \langle \partial_1 \mathbf{r}_{(u,v)},\, \mathbf{r}(u,v) \rangle = \langle \partial_2 \mathbf{r}_{(u,v)}, \mathbf{r}(u,v) \rangle = 0 \Longleftrightarrow \partial_1 \mathbf{r}_{(u,v)} \perp \mathbf{r}(u,v)$ и $\partial_2 \mathbf{r}_{(u,v)} \perp \mathbf{r}(u,v)$.

2.1. 1) Если $\mathbf{r}_1 \nparallel \mathbf{r}_2$, то в аффинной системе координат с началом $M_0(\mathbf{r}_0)$ и базисными векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ параметрические уравнения кривой $\mathcal{L}$ будут $x = t, y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, или $y = x^2$, что является каноническим уравнением параболы.

2) Если $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, то пусть $\mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{r}_1$, тогда $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (t + \lambda t^2)\mathbf{r}_1$, $t \in \mathbb{R}$ или после замены параметра $\tau = t + \lambda t^2$ $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau \mathbf{r}_1$,

где при $\lambda > 0$ $\tau \in [-1/4\lambda, +\infty)$, а при $\lambda < 0$ $\tau \in (-\infty, -1/4\lambda]$, то есть $\mathcal{L}$ — луч прямой с началом в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 - 1/4\lambda\mathbf{r}_1$.

3) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_2$, $\tau \in [0, +\infty)$ — луч прямой с началом M_0.

4) Если $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, $t \in \mathbb{R}$ — прямая.

5) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ — точка M_0.

2.2. 1) Если $\mathbf{r}_1 \nparallel \mathbf{r}_2$, то в аффинной системе координат с началом $M_0(\mathbf{r}_0)$ и базисными векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ параметрические уравнения кривой $\mathcal{L}$ будут $x = \cos t, y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, или $x^2 + y^2 = 1$, что является в аффинной системе координат каноническим уравнением эллипса.

2) Если $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, то пусть $\mathbf{r}_2 = \lambda\mathbf{r}_1$, тогда $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\cos t + \lambda \sin t)\mathbf{r}_1$, $t \in \mathbb{R}$ или после замены параметра $\tau = \cos t + \lambda \sin t = \sqrt{1+\lambda^2}\cos(t-\varphi)$, где $\cos\varphi = 1/\sqrt{1+\lambda^2}$, $\sin\varphi = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_1$, $\tau \in [-\sqrt{1+\lambda^2}, \sqrt{1+\lambda^2}]$, то есть $\mathcal{L}$ — сегмент прямой, соединяющий точки с радиус-векторами $\mathbf{r}_0 - \sqrt{1+\lambda^2}\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_0 + \sqrt{1+\lambda^2}\mathbf{r}_1$.

3) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sin t\mathbf{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$ — сегмент прямой, соединяющий точки с радиус-векторами $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_2$.

4) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ — точка M_0.

2.3. 1) Если $\mathbf{r}_1 \nparallel \mathbf{r}_2$, то в аффинной системе координат с началом $M_0(\mathbf{r}_0)$ и базисными векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ параметрические уравнения кривой $\mathcal{L}$ будут $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$ или $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$ — ветвь гиперболы.

2) Если $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, то пусть $\mathbf{r}_2 = \lambda\mathbf{r}_1$, тогда $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\operatorname{ch} t + \lambda \operatorname{sh} t)\mathbf{r}_1$, $t \in \mathbb{R}$ или после замены параметра $\tau = \operatorname{ch} t + \lambda \operatorname{sh} t$

а) при $|\lambda| < 1$ $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_1$, $\tau \in [\sqrt{1-\lambda^2}, +\infty)$ — замкнутый луч прямой,

б) при $|\lambda| > 1$ $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_1$, $\tau \in \mathbb{R}$ — прямая,

в) при $|\lambda| = 1$ $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_1$, $\tau \in (0, +\infty)$ — открытый луч прямой,

3) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_2$, $\tau \in \mathbb{R}$ — прямая.

4) Если $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{r}_1$, $\tau \in [1, +\infty)$ — замкнутый луч прямой.

5) Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ — точка M_0.

2.4. a) Параболический цилиндр, b) эллиптический цилиндр, c) гиперболический цилиндр, d) эллиптический параболоид.

2.5. В полярной системе координат с полюсом O и полярной осью ON (в начальный момент времени) уравнение траектории $\rho = a\varphi$.

2.6. В полярной системе координат с полюсом O и полярной осью OL (в начальный момент времени) уравнение траектории $\rho = \rho_0 e^{a\varphi}$.

2.7. Если прямую, по которой катится окружность, взять за ось OX, то уравнение циклоиды имеет вид: $x(t) = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

2.8. $x(t) = \pm a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \sin t$, $t \in (0, \pi)$.

2.10. $M, N \in \mathcal{L}$, $P \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cap Ox = \{(0,0)\}$, $\mathcal{L} \cap Oy = \{(0,0),\ (0,-2)\}$, $\mathcal{L} : y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$.

2.11. a) $x = \dfrac{2a}{1+t^2}, y = \dfrac{2at}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, b) $x = a + a\cos\varphi, y = a\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

2.12. a) Парабола, b) луч прямой $x - 2y - 2 = 0$, $x \geq 2$, c) сегмент прямой $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, заключенный между точками $(a, 0), (0, b)$, d) полуокружность $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $x > 0$ при $a > 0$ или $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $x < 0$ при $a < 0$, e) ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$, f) прямая $x + 2y - 1 = 0$.

2.13. При изменении t от $-\infty$ до -0 точка движется по левой ветви гиперболы, а при изменении t от $+0$ до $+\infty$ — по правой ветви. Замена параметра на правой ветви гиперболы $t = e^{\varphi}$.

2.14. a) Окружность радиуса 4 с центром в полюсе, b) окружность радиуса a с центром в точке $M_0(\rho_0 = a, \varphi_0 = 0)$, c) прямая, проходящая через точку $M_0(\rho_0 = a, \varphi_0 = 0)$ перпендикулярно полярной оси, d) прямая, проходящая через точку $M_0(\rho_0 = b, \varphi_0 = \pi/2)$ параллельно полярной оси, e) окружность радиуса $b/2$ с центром в точке $M_0(\rho_0 = b/2, \varphi_0 = \pi/2)$.

2.15. $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.16. $x = (a + b\cos u)\cos v, y = (a + b\cos u)\sin v, z = b\sin u$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.17. $\mathbf{R} = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}$, $(u, v) \in U \times \mathbb{R}$.

2.18. $x = u + v, y = u^2 + 2v, z = u^3 + 3v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.19. $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xz + 6yz - 2 = 0$.

2.20. В a) и b) данная поверхность является цилиндрической с направляющей кривой $\mathcal{L}: x = v^2+1, y = v^2-1, z = 2v$ и прямолинейными образующими, параллельными вектору $\mathbf{a}(3,2,-1)$.

c) $x = 3u+10, y = 2u+8, z = -u+6$.

2.21. $x = a + v(f(u)-a), y = b + v(g(u)-b), z = c + v(h(u)-c)$.

2.22. Параметрические уравнения конуса: $x = vu, y = -2+2v(u^2+1), z = 3(1-v)$. Неявное уравнение конуса: $6x^2 + (y+2)(z-3) = 0$

2.23. Параболоид вращения $x^2+y^2 = z$.

2.24. $\mathbf{R} = \mathbf{r}(u) + v\dot{\mathbf{r}}(u)$, $(u,v) \in U \times \mathbb{R}$.

2.25. $x = a(\cos u - v\sin u), y = a(\sin u + v\cos u), z = b(u+v), (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3.1. a) Касательная $2x - y + 4 = 0$, нормаль $x + 2y - 3 = 0$; b) касательная $2x\sin t + 2y\cos t - a\sin 2t = 0$, нормаль $x\cos t - y\sin t - a\cos 2t = 0$; c) при $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, касательная $y = 2a$, нормаль $x = (2k+1)\pi a$; при $t \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, касательная $x - y\operatorname{tg}(t/2) + a(2\operatorname{tg}(t/2) - t) = 0$, нормаль $x\operatorname{tg}(t/2) + y - at\operatorname{tg}(t/2) = 0$; d) касательная $x + y - 3a = 0$, нормаль $x - y = 0$; e) касательная $4x - 2y - a = 0$, нормаль $2x + 4y - 3a = 0$; f) касательная $yY = p(X + x)$, нормаль $y(X - x) + p(Y - y) = 0$; g) касательная $(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)x - (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)y - a\varphi^2 = 0$, нормаль $(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)x + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)y - a\varphi = 0$; h) касательная $y - a = 0$, нормаль $x - a = 0$.

3.2. a) $y = 2x + 49/27$; b) $3x - 2y + 4 = 0$.

3.3. a) $2x - y \pm 3/\sqrt{2} = 0$; b) $2x + y \pm 3/\sqrt{2} = 0$.

3.4. $x - 3y + 4 = 0$.

3.6. $M_1(0,0)$, $M_2(4,4)$, $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} 3/4$.

4.1. $s = \ln\operatorname{tg}(5\pi/12)$.

4.2. $s = \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$.

4.3. $s = 8\sqrt{2}a$.

4.4. $s = a\sqrt{2}\operatorname{sh} t$, $x = \sqrt{\frac{2a^2-s^2}{2}}$, $y = \frac{s}{\sqrt{2}}$, $z = a\operatorname{arcsh}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}\sqrt{2}} = \mathrm{a}\ln\frac{\mathrm{s}+\sqrt{2\mathrm{a}^2+\mathrm{s}^2}}{\mathrm{a}\sqrt{2}}$.

4.6. $M_1(-2,12,14)$, $M_2(-2,3,-4)$.

4.9. Главная нормаль $x = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$, бинормаль $\frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{-2}$.

4.10. $A(1,\ln 2,-4)$.

4.11. $\mathbf{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$, $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{6}}{6}(2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)$.

4.12. Касательная прямая: $\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - bt}{b}$; нормальная плоскость: $a\sin tX - a\cos tY - bZ + b^2 t = 0$; бинормаль: $\frac{X - a\cos t}{a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-b\cos t} = \frac{Z - bt}{a}$; соприкасающаяся плоскость: $b\sin tX - b\cos tY + aZ - abt = 0$; главная нормаль: $\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t} = \frac{Z - bt}{0}$; спрямляющая плоскость $X\cos t + Y\sin t - a = 0$; $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$, $\mathbf{n} = (-\cos t, -a\sin t, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$.

4.13. $Xyz - Yxz + Zxy = xyz, xz \neq 0$.

4.14. $4x - y + z - 9 = 0$.

4.15. Касательная: $\frac{X - x}{by} = \frac{Y - y}{bx} = \frac{Z - z}{xy}$, нормальная плоскость: $ay(X - x) + bx(Y - y) + xy(Z - z) = 0$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

5.5. $k = \varkappa = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2\,t}$.

5.6. $k = 2$, $\varkappa = 3$.

5.8. $k = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\varkappa = \frac{b}{a^2+b^2}$.

5.10. По условию $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{a} \rangle \equiv 0$. Интегрируя это тождество, получим $\langle \mathbf{r}(s), \mathbf{a} \rangle \equiv c = \mathrm{const}$, то есть кривая $\mathcal{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ лежит в плоскости $\langle \mathbf{r}, \mathbf{a} \rangle - c = 0$.

5.12. $a = \frac{k}{k^2+\varkappa^2}$, $b = \frac{\varkappa}{k^2+\varkappa^2}$, а уравнения винтовой линии $x = \frac{k}{k^2+\varkappa^2}\cos t$, $y = \frac{k}{k^2+\varkappa^2}\sin t$ $z = \frac{\varkappa}{k^2+\varkappa^2}t$.

5.13. $k = \frac{|\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 \rho\ddot{\rho}|}{(\rho^2+\dot{\rho}^2)^{3/2}}$.

5.14. $k = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$.

5.15. $\varkappa = 0$.

5.16. a), b) см. задачу 5.12; c) нет.

5.18. В точке $(0, 0)$ — вершине куска параболы радиус кривизны минимален и равен $4a$.

5.19. Нет.

5.20. Кривая нулевой кривизны — прямая; кривая кривизны $k > 0$ — окружность радиуса $1/k$.

6.1. a) $y = \pm a$, b) $x = 0$, $y = 0$, c) $x^2 + y^2 = p^2$, d) $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

6.2. $xy = \pm\frac{S}{2}$.

6.3. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6.4. $x = 0$.

6.5. Окружность $(x-\frac{3p}{4})^2+y^2 = (\frac{3p}{4})^2$ и директриса параболы $x = -\frac{p}{2}$.

6.6. Для семейства хорд, параллельных оси Oy, огибающая — эллипс $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для семейства хорд, параллельных оси Ox, огибающая — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1$.

6.7. $y^2 = 2p(x + \frac{p}{2})$.

6.8. $\mathbf{r}(\varphi) = \dfrac{\rho(\dot\rho^2 - \rho\ddot\rho)\mathbf{e}(\varphi) + \dot\rho(\dot\rho^2+\rho^2)\mathbf{g}(\varphi)}{\rho^2+2\dot\rho^2-\rho\ddot\rho}$,
где $\mathbf{e}(\varphi)$ — радиус-вектор точки $M(\rho = 1, \varphi)$, $\mathbf{g}(\varphi) = \mathbf{e}(\varphi + \pi/2)$.

6.9. a) $X = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $Y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$; b) $X = 2x+\frac{1}{x}$, $Y = \ln x - x^2 - 1$; c) $X = x + \frac{1+\cos^2 x}{\operatorname{tg} x}$, $Y = -\frac{2\cos^2 x}{\sin x}$; d) после перехода $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ к прямоугольной системе координат уравнение эволюты примет вид $X = \frac{a}{3}(\cos\varphi - \cos^2\varphi + 2)$, $Y = \frac{a}{3}(1-\cos\varphi)\sin\varphi$.

6.11. Для эллипса с параметризацией $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ точки нерегулярности эволюты — $t = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$; для ветви гиперболы с параметризацией $x(t) = a\operatorname{ch} t$, $y(t) = b\operatorname{sh} t$ — $t = 0$; для параболы с параметризацией $x(t) = t$, $y(t) = at^2$ — $t = 0$.

6.13. $X = a(\cos t + (t-c)\sin t)$, $Y = a(\sin t - (t-c)\cos t)$.

6.14. $X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}(C - \ln(t+\sqrt{t^2+4}))$, $Y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}(C-\ln(t+\sqrt{t^2+4}))$.

7.1. $18x + 3y - 4z - 41 = 0$.

7.2. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$, $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$.

7.3. Касательная плоскость $x + y - \sqrt{2}z = 0$, нормаль поверхности $x - \sqrt{2} = y - \sqrt{2} = \frac{z-2}{-\sqrt{2}}$. Касательная к линии $u = 2$:

$$\begin{cases} x + y &= 2\sqrt{2}, \\ z &= 2. \end{cases}$$

7.5. a) $3x + 12y - z - 18 = 0$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$; b) $3x - 2y + 3z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$;

7.6. $x + y + z - 3 = 0$,

8.1. a) $x^2 + y^2 = 1$ — круговой цилиндр, b) $(x+z)y = 1$ — гиперболический цилиндр, c) $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz = 0$ — круговой конус.

8.2. Огибающая — круговой цилиндр $y^2 + z^2 = 1$; характеристики — окружности $y^2 + z^2 = 1$, $x - c = 0$; ребра возврата не существует.

8.3. Винтовая линия $x = b\cos\alpha$, $y = b\sin\alpha$, $z = b\alpha$.

8.4. Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси Oy, огибающая — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$. Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси Ox, огибающая — эллипсоид $\frac{y^2}{a^2+b^2} + \frac{x^2+z^2}{a^2} = 1$.

8.5. Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси Oy, при $b \geq a$ огибающей нет, а при $b < a$ огибающая $\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$. Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси Ox, при $b \neq a$ огибающая $\frac{x^2+z^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-b^2} = 1$, а при $b = a$ огибающая $y = 0$.

8.6. Уравнение семейства $(x-b\cos\varphi)^2+(y-b\sin\varphi)^2+z^2-a^2 = 0$. Уравнение огибающей: $(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0$. Характеристики семейства — окружности

$$\begin{cases} (x - b\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Ребро возврата семейства при $a > b$ состоит из двух точек $(0, 0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$, при $a = b$ из одной точки $(0, 0, 0)$, при $a < b$ отсутствует.

8.7. $xyz = \frac{2}{9}V$.

9.1. $\mathrm{I} = (\dot{f}^2 + \dot{g}^2)du^2 + f^2dv^2$.

9.2. $\mathrm{I} = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

9.3. $\mathrm{I} = (1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2)dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy + (1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2)dy^2$.

9.4. a) Нет: $\det g_{ij} < 0$, b) нет: $\det g_{ij} = 0$, c) да, d) нет: $g_{22} < 0$.

9.6. Если уравнение поверхности $S : \mathbf{R} = \mathbf{r}(u) + v\dot{\mathbf{r}}(u)$, то уравнения ортогональных траекторий прямолинейных образующих будут $u + v = \mathrm{const}$ (см. задачу 9.5).

9.7. $(g_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - g_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u})du + (g_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - g_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u})dv$.

9.8. $u^2 + u + 1 = c_1e^{-v}$, $c_1 = \mathrm{const}$.

9.9. $v = \frac{1}{2u^2} + c_1$, $c_1 = \mathrm{const}$.

9.10. $g_{11}R - g_{12}Q + g_{22}P = 0$.

9.12. a) $\mathrm{I} = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2$;

b) $ds = 2\sqrt{2v^2+1}\,dv$, $ds = \sqrt{8u^2+1}\,du$, $ds = 2\sqrt{2a^4+a^2+2}\ udu$; c) $s = 3\sqrt{2a^4+a^2+2}$.

9.13. $\cos\alpha = \pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$.

9.14. $p = \frac{10}{3}a$, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

9.15. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$.

9.16. $S = \frac{a^2}{2}[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

9.20. В общих по отображению системах координат: a) простой кусок плоскости: $x = u$, $y = v$, $z = 0$, простой кусок цилиндра $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$; b) простой кусок плоскости: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = 0$, простой кусок конуса $x = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\sqrt{2}\varphi$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\sqrt{2}\varphi$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}r$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

10.1. $\mathrm{II} = -\dfrac{2adudv}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

10.2. $\mathrm{II} = \dfrac{\partial^2_{xx}zdx^2 + 2\partial^2_{xy}zdxdy + \partial^2_{yy}zdy^2}{\sqrt{1+(\partial_x z)^2+(\partial_y z)^2}}$.

10.3. $\mathrm{II} = \dfrac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})du^2 + f\dot{g}dv^2}{\sqrt{\dot{f}^2+\dot{g}^2}}$.

10.4. $\mathbf{a}_1(\sqrt{u^2+a^2}, 1)$, $\mathbf{a}_2(-\sqrt{u^2+a^2}, 1)$; $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}$.

10.6. $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10.7. $k_1 = \frac{1}{p}$, $k_2 = \frac{1}{q}$.

10.8.

a) $k_n((x,z),(a^1,a^2)) = \dfrac{-(a^1)^2}{\sqrt{1+x^2}[(1+x^2)(a^1)^2+(a^2)^2]}$;

b) $k_n((x,k),(1,0)) = -\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$;

c) $k_n((2,4),(1,4)) = -\dfrac{1}{21\sqrt{5}}$.

10.9.

a) $k_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}, k_2 = 0.$ b) $\begin{cases} x - z = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$

c) $k = \dfrac{2}{9\sqrt{5}}$.

10.10. a) $4x^2 + 9y^2 = 1$, b) $R = \frac{2}{13}$.

10.12.
$$\mathcal{K}=\frac{1}{pq(1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2})^2}.$$

10.13. $2\mathcal{H}=0$, $\mathcal{K}=-\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$.

10.14.
$$\mathcal{K}=\frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}, 2\mathcal{H}=\frac{(1+z_x^2)z_{yy}+(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}.$$

10.15.
$$\mathcal{K}=\frac{\dot{f}\ddot{f}}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\dot{f}^2)^2}, 2\mathcal{H}=\frac{\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}+\frac{\dot{f}}{\sqrt{(x^2+y^2)(1+\dot{f}^2)}}.$$

10.16. $2\mathcal{H}=-\frac{1}{a}$.

10.19. Поверхности нулевой полной кривизны (развертывающиеся поверхности).

10.21. Эллиптические точки — $x\in(2\pi k,\pi(2k+1))$, гиперболические точки — $x\in(\pi(2k-1),2\pi k$, параболические точки — $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

10.22. На торе, образованном вращением окружности $x=a+b\cos u$, $y=0$, $z=b\sin u$ $(b<a)$, $u\in\mathbb{R}$ вокруг оси Oz (см. задачу 2.16), параллели радиуса $r=a$ состоят из параболических точек, параллели радиуса $a-b<r<a$ — из гиперболических точек, а радиуса $a<r<a+b$ — из эллиптических точек.

10.23. Простой кусок конуса можно изогнуть на простой кусок плоскости и на простой кусок цилиндра.

10.24. a) Нет, b) нет.

10.25. Нет (см., например, задачу 10.23).

10.26. *Катеноид* — поверхность, заданная параметрическими уравнениями: $x=a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v$, $y=a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v$, $z=u$, где $u\in\mathbb{R}$, $v\in(0,2\pi)$, $a>0$ — константа.

10.27. a) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^4$; b) $x=u$, $y=v$, $z=u^4$.

10.28. Да, сфера и плоскость.

11.1. a) Прямолинейные образующие цилиндра и их ортогональные траектории — сечения цилиндра плоскостями, ортогональными прямолинейным образующим; b) прямолинейные образующие конуса и их ортогональные траектории — линии пересечения конуса со сферами произвольного радиуса с центром в вершине конуса; c) параллели и меридианы; d) координатные линии $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$; e) прямолинейные образующие и их ортогональные траектории; f) для прямого геликоида с уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, уравнения линий кривизны $u+\sqrt{u^2+a^2} = ce^{\pm v}$, $c = \mathrm{const}$.

11.6. Если поверхность получена вращением кривой $x = f(u)$, $y = 0$, $z = \varphi(u)$, $u \in U$ вокруг оси Oz, то дифференциальное уравнение асимптотических линий поверхности $(\dot f\ddot\varphi - \ddot f\dot\varphi)du^2 + f\dot\varphi dv^2 = 0$.

11.7. a) $u \pm v = \mathrm{const}$; b) на прямом геликоиде с уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, асимптотическими линиями являются координатные линии $u = \mathrm{const}$ (винтовые линии) и $c = \mathrm{const}$ (прямолинейные образующие); c) прямолинейные образующие.

11.8. Уравнение поверхности: $x^3z - y^3$. Ее асимптотические линии:

$$\begin{cases} y = c_1x, \\ z = c_1^3, \end{cases} c_1 = \mathrm{const}, \begin{cases} y = c_2x^2, \\ z = c_2^3x^3, \end{cases} c_2 = \mathrm{const}.$$

11.11. Если $2\mathcal{H} = k_1 + k_2 = 0$, а $k_n = 0$ — нормальная кривизна в асимптотическом направлении, образующем угол φ с главным направлением, то по формуле Эйлера $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$, то есть $\varphi = \pm\pi/4$. Тогда угол между асимтотическими направлениями равен 2φ, то есть они перпендикулярны.

12.6. Большие окружности сферы.

12.7. Кривые, переходящие в прямые при изгибании цилиндра и конуса на плоскость (см. задачу 9.20).

12.8. $u = \sqrt{1+t^2}$, $v = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,t$.

12.11.

$$k_g = \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}}.$$

12.12.

$$k_g = \frac{|u|}{u^2+a^2}.$$

12.13.

$$k_g|_{u=\mathrm{const}} = \frac{|u|}{u^2+\dot f^2(v)}, \quad k_g|_{v=\mathrm{const}} = 0.$$

12.14. a) Да, например, плоскость; b) да, например, сфера; c) да, например, эллиптический цилиндр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В., Ведерников В.И., Воднев В.Т., Гусак А.А., Нахимовская А.И., Рябушко А.П., Тутаев Л.К., Феденко А.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1979. - 272 с.
2. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.* – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 183 с.
3. Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии.* – М.: Физматгиз, 1958. – 244 с.