

УДК 517.518.235

## НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ С ТОЧЕЧНО СИНГУЛЯРНЫМ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ВЕСОМ

*M.P. Тимербаев, Н.В. Тимербаева*

### Аннотация

В работе рассматриваются пространства Соболева с весом, принимающим бесконечные значения в некоторых внутренних точках двумерной области. Для функций этих пространств доказывается неравенство Харди. Устанавливаются теоремы вложения в весовые пространства Лебега и теоремы о перенормировках.

**Ключевые слова:** неравенство Харди, весовые пространства Соболева, теоремы вложения, теоремы о перенормировках.

### Введение

Неравенства типа Харди находят многочисленные применения в вопросах анализа: в теории функциональных пространств, в теории аппроксимации пространств функций, при исследовании интегральных и дифференциальных уравнений и анализе сходимости приближенных методов для этих уравнений.

Относительно интегрального неравенства Харди [1, с. 289] с весовой функцией справедлив следующий результат [2, с. 120]:

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$ ,  $\mu(x) \geq 0$  на  $(0, c)$ ,  $\mu$  абсолютно непрерывна на  $[0, c]$ , причем  $\mu'(x) > 0$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда для  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  справедлива оценка

$$\int_0^c \mu'(x) \left( \frac{F(x)}{\mu(x)} \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^c \mu'(x)^{1-p} f(x)^p dx.$$

Классическое неравенство Харди получается отсюда при  $\mu(x) = x$ . Часто это неравенство применяется для степенных весовых функций  $\mu(x) = x^\alpha$ . Имеются обобщения неравенства Харди на многомерные области интегрирования, где в качестве весовых функций берутся подходящие степени расстояния от точки области до ее границы.

Настоящая работа посвящена доказательству неравенства типа Харди для функций из пространства Соболева с весом, стремящимся к бесконечности при приближении к некоторой точке внутри двумерной области. На основе этого неравенства устанавливаются свойства пространств Соболева с весом указанного типа, такие как теоремы вложения и теоремы об эквивалентных нормировках.

### 1. Весовые пространства

В этом разделе вводятся пространства Лебега и Соболева с весом, который может иметь особые точки внутри области. Такие пространства возникают при

описании решений дифференциальных уравнений с сингулярностью в коэффициентах дифференциального оператора и/или в правой части. По теории пространств Соболева с весом, сингулярные точки которого лежат на границе области, имеется обширная литература (см., например, монографии [3, 4] и ссылки в них).

Пусть  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < d\}$  — круг радиуса  $d$ ,  $\Omega_0 = \Omega \setminus \{0\}$ . Если  $\rho(x)$  — некоторая положительная почти всюду функция на  $\Omega$ , называемая весом, то мы можем определить весовое пространство Лебега  $L_{2,\rho}(\Omega)$  как пространство измеримых по Лебегу функций с конечной нормой

$$|u|_{0,\rho} = |u|_{0,\rho,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\rho(x)u(x)|^2 dx \right)^{1/2} = |\rho u|_0 = |\rho u|_{0,\Omega}.$$

Тогда через  $H_{\rho}^1(\Omega)$  обозначим множество функций с конечной полуноской  $|u|_{1,\rho} = |\nabla u|_{0,\rho} = |\rho \nabla u|_0$ . Если  $\rho(x) \equiv 1$ , то вместо  $H_{\rho}^1(\Omega)$  будем писать  $H^1(\Omega)$ . Всюду далее мы считаем, что весовые функции имеют вид  $\rho(x) = \rho_1(|x|)$ , где  $\rho_1 : (0, d] \rightarrow (0, +\infty)$  — некоторая монотонная непрерывная функция. Более того, допуская вольность в обозначениях, но упрощая запись, мы будем  $\rho_1$  отождествлять с  $\rho$ , то есть если  $x \in \Omega$  и  $t = |x|$ , то  $\rho(x) = \rho(t)$ . Поскольку особенность такого веса (обращение в нуль или бесконечность) может быть лишь в точке  $x = 0$ , вне окрестности нуля градиент функции из  $H_{\rho}^1(\Omega)$  интегрируем с квадратом. Поэтому для таких весов в качестве нормы пространства  $H_{\rho}^1(\Omega)$  можно взять, например, норму  $\|u\|_{1,\rho} = |u|_{1,\rho} + |u|_{0,D}$ , где  $D \subset \Omega_0$  — любой компакт ненулевой меры в  $\mathbb{R}^2$ . Различный выбор  $D$  приводит лишь к эквивалентным нормам, как будет показано ниже (см. теорему 5).

Хорошо известно, что для функций  $u \in H^1(\Omega)$  и фиксированной точки  $z \in \Omega$  нельзя определить значение (или «след»)  $u(z)$  как линейный непрерывный функционал на  $H^1(\Omega)$ . Другими словами, дельта-функция  $\delta_z$ , сосредоточенная в  $z$  и действующая по формуле  $(\delta_z, u) = u(z)$ , не является элементом сопряженного пространства  $H^1(\Omega)'$ . Однако при определенных условиях на весовую функцию  $\rho(x)$  для функций  $u \in H_{\rho}^1(\Omega)$  можно корректно определить значение функции  $u(0)$  в сингулярной точке  $z = 0$ , то есть при определенных условиях роста  $\rho(x)$  в окрестности  $z = 0$  будем иметь включение  $\delta_0 \in H_{\rho}^1(\Omega)'$ . Выясним эти условия.

Введем следующие функции:

$$\omega_0(s) = \int_s^d \frac{1}{t\rho^2(t)} dt, \quad \omega(x) = \omega_0(|x|). \quad (1)$$

**Лемма 1.** *Функция  $\omega$  принадлежит пространству  $H_{\rho}^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда  $\omega(0) < \infty$ .*

**Доказательство.** Имеем

$$\nabla \omega(x) = \omega'_0(|x|) \nabla |x| = -\frac{x}{|x|^2 \rho^2(x)},$$

откуда для  $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega : |x| > \varepsilon\}$

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} |\rho(x) \nabla \omega(x)|^2 dx = 2\pi \int_{\varepsilon}^d \frac{dt}{t \rho^2(t)} = 2\pi \omega_0(\varepsilon).$$

Предельным переходом по  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Замечание 1.** Из условия  $\omega(0) < \infty$  следует, что  $\rho(0) = +\infty$ . В этом случае пространство  $H_\rho^1(\Omega)$  непрерывно вложено в  $H^1(\Omega)$ .

**Лемма 2.** Если  $\omega(0) = \infty$ , то найдется такая неотрицательная непрерывная в  $\Omega_0$  функция  $u \in H_\rho^1(\Omega)$ , что  $u(0) = \infty$ .

**Доказательство.** Условие леммы означает, что функция  $\frac{1}{\sqrt{t}\rho(t)}$  не принадлежит пространству  $L_2(0, d)$ . Следовательно, найдется такая неотрицательная функция  $v_0 \in L_2(0, d)$ , что  $\int_0^d \frac{v_0(t)}{\sqrt{t}\rho(t)} dt = \infty$ . Положим

$$u_0(s) = \int_s^d \frac{v_0(t)}{\sqrt{t}\rho(t)} dt \quad \text{и} \quad u(x) = u_0(|x|).$$

По построению  $u(x)$  неотрицательна и всюду непрерывна в  $\Omega$ , за исключением точки  $x = 0$ , в которой она принимает бесконечное значение. Кроме того, поскольку  $\sqrt{t}\rho(t)u'_0 = -v_0 \in L_2(0, d)$  и  $|\nabla u(x)| = |u'_0(|x|)|$ , то

$$\int_{\Omega} |\rho(x)\nabla u(x)|^2 dx = 2\pi \int_0^d t\rho^2(t)|u'_0(t)|^2 dt = 2\pi \int_0^d |v_0(t)|^2 dt < \infty,$$

то есть  $u \in H_\rho^1(\Omega)$ . □

**Лемма 3.** Если  $\omega(0) < \infty$ , то для любой функции  $u \in H_\rho^1(\Omega)$  и любого  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\int_{|x|<\varepsilon} |u| dx \leq c\varepsilon^2 \|u\|_{1,\rho}, \tag{2}$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $u$  и  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Положим

$$\sigma(s) = \int_0^s \frac{dt}{t\rho^2(t)}. \tag{3}$$

Для произвольной функции  $u \in H_\rho^1(\Omega)$  при  $s, t \in (0, d)$  оценим в полярных координатах  $|u(t, \varphi) - u(s, \varphi)|$ , используя неравенство Коши–Шварца:

$$|u(t, \varphi) - u(s, \varphi)| = \left| \int_s^t \partial_r u(r, \varphi) dr \right| \leq \sqrt{\sigma(d)} \left( \int_0^d r\rho^2(r) |\partial_r u(r, \varphi)|^2 dr \right)^{1/2}.$$

Интегрируя по угловой координате и снова используя неравенство Коши–Шварца для интеграла по  $\varphi$ , получим

$$\int_0^{2\pi} |u(t, \varphi) - u(s, \varphi)| d\varphi \leq \sqrt{2\pi\sigma(d)} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^d r\rho^2(r) |\partial_r u(r, \varphi)|^2 dr d\varphi \right)^{1/2} \leq c\|u\|_{1,\rho},$$

откуда  $\int_0^{2\pi} |u(s, \varphi)| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} |u(t, \varphi)| d\varphi + c|u|_{1,\rho}$ . Умножим это неравенство на  $t$  и проинтегрируем по  $(0, d)$ :

$$\frac{d^2}{2} \int_0^{2\pi} |u(s, \varphi)| d\varphi \leq \|u\|_{L_1(\Omega)} + c \frac{d^2}{2} |u|_{1,\rho} \leq c_1 \|u\|_{1,\rho}.$$

Наконец, умножая последнее неравенство на  $s$  и интегрируя по интервалу  $(0, \varepsilon)$ , будем иметь

$$\int_{|x|<\varepsilon} |u| dx \leq c_2 \varepsilon^2 \|u\|_{1,\rho}.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.** Следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $\delta_0 \in H_\rho^1(\Omega)'$ ;
- (ii)  $\omega \in H_\rho^1(\Omega)$ ;
- (iii)  $\omega(0) < \infty$ .

**Доказательство.** Эквивалентность утверждений (ii) и (iii) доказана в лемме 1. То, что (i) влечет (iii), следует из леммы 2. Осталось показать, что из (iii) вытекает (i). Рассмотрим регуляризацию дельта-функции вида

$$(f_\varepsilon, v) = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{|x|<\varepsilon} v dx.$$

Ясно, что  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в пространстве распределений  $D'(\Omega)$ . Из оценки (2) следует, что для  $v \in H_\rho^1(\Omega)$   $|(f_\varepsilon, v)| \leq \frac{c}{\pi} \|v\|_{1,\rho}$ , то есть последовательность  $\{f_\varepsilon\}$  ограничена в  $H_\rho^1(\Omega)'$ , а значит, из нее можно выделить подпоследовательность  $\{f_{\varepsilon_n}\}$ , слабо сходящуюся к некоторому предельному функционалу  $f \in H_\rho^1(\Omega)'$ , который, очевидно, совпадет с  $\delta_0$ .  $\square$

**Примерами** весовых функций  $\rho$ , удовлетворяющих условию  $\omega(0) < \infty$ , являются

- 1)  $\rho(t) = t^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ;
- 2)  $\rho(t) = \ln^\alpha \frac{2d}{t}$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ ;
- 3)  $\rho(t) = \sqrt{\ln \frac{2d}{t}} \ln^\alpha \left( \ln \frac{2d}{t} \right)$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ ;
- 4)  $\rho(t) = t^\alpha \exp \frac{\beta}{t^\gamma}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta, \gamma > 0$ .

## 2. Неравенство Харди

Всюду далее в работе рассматривается случай  $\omega(0) < \infty$ . Как уже отмечалось выше, в этом случае имеет место непрерывное вложение  $H_\rho^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ . Кроме того, корректно определено подпространство  $\dot{H}_\rho^1(\Omega) = \{u \in H_\rho^1(\Omega) : u(0) = 0\}$ .

Переформулируем теорему 1 в случае  $p = 2$  в другом, более удобном для нас виде:

**Лемма 4.** Пусть весовая функция  $\nu(t)$  такова, что  $\frac{1}{\nu} \in L_2(0, d)$ . Тогда для любой функции  $u \in \dot{H}_\nu^1(0, d)$  имеет место оценка

$$\int_0^d \left| \frac{\nu}{\theta} u \right|^2 dt \leq 4 \int_0^d |\nu u'|^2 dt, \quad \text{где } \theta(s) = \nu^2(s) \int_0^s \frac{dt}{\nu^2(t)}.$$

Это утверждение получается из теоремы 1 заменой в ней  $f$  на  $|u'|$ ,  $\mu(s)$  на  $\int_0^s \nu^{-2} dt$  и учетом неравенства  $|u(s)| \leq F(s) = \int_0^s |u'(t)| dt$ .

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.** Для любой функции  $u \in \dot{H}_\rho^1(\Omega)$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |\lambda(x)u(x)|^2 dx \leq 4 \int_{\Omega} |\rho(x)\nabla u(x)|^2 dx, \quad (4)$$

где  $\lambda(t) = \frac{\rho(t)}{\mu(t)}$ ,  $\mu(t) = t\rho^2(t)\sigma(t)$ , а  $\sigma(t)$  определяется соотношением (3). Множитель 4 в этом неравенстве неулучшаем.

**Доказательство.** Применяя лемму 4 для  $\nu(t) = \sqrt{t}\rho(t)$ , оценим в полярных координатах

$$\int_0^d t \left| \frac{\rho(t)}{t\rho^2(t)\sigma(t)} u(t, \varphi) \right|^2 dt \leq 4 \int_0^d r |\rho \partial_r u(r, \varphi)|^2 dr.$$

Интегрируя по  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^d t \left| \frac{\rho(t)}{t\rho^2(t)\sigma(t)} u(t, \varphi) \right|^2 dt d\varphi = \int_{\Omega} |\lambda(x)u(x)|^2 dx \leq \\ & \leq 4 \int_0^{2\pi} \int_0^d dr |\rho \partial_r u(r, \varphi)|^2 dr d\varphi \leq 4 \int_0^{2\pi} \int_0^d r |\rho \partial_r u(r, \varphi)|^2 + \frac{1}{r} |\rho \partial_\varphi u(r, \varphi)|^2 dr d\varphi = \\ & = 4 \int_{\Omega} |\rho(x)\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

Вес  $\lambda = \frac{\rho}{\mu}$  в теореме 3 в определенном смысле является предельно максимальным. Кроме того,  $1 \notin L_{2,\lambda}(\Omega)$ , то есть  $\lambda \notin L_2(\Omega)$ . Действительно,

$$\int_{\Omega} \lambda^2(|x|) dx = 2\pi \int_0^d \frac{dt}{t\rho^2(t)\sigma^2(t)} = 2\pi \int_0^d \frac{\sigma'(t)}{\sigma^2(t)} dt \geq \frac{2\pi}{\sigma(d)} \int_0^d (\ln \sigma(t))' dt = +\infty,$$

так как  $\sigma(0) = 0$ . В то же время  $1 \in H_\rho^1(\Omega)$  по определению. Поэтому дополнительное условие  $u(0) = 0$  при получении оценки (4) существенно.

Приведем примеры интегральных оценок с сингулярными в точке  $x = 0$  весами (всюду  $u(0) = 0$ ).

**Пример 1.** Пусть  $\rho(t) = t^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда  $\sigma(t) = \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha}$ ,  $\mu(t) = \frac{t}{2\alpha}$  и неравенство (4) примет вид:

$$\int_{\Omega} ||x|^{-\alpha-1} u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} ||x|^{-\alpha} \nabla u(x)|^2 dx.$$

**Пример 2.** Для  $R > d$  положим  $\rho(t) = \ln^{\alpha} \frac{R}{t}$ ,  $\alpha > 1/2$ . В этом случае  $\sigma(t) = \frac{1}{2\alpha-1} \ln^{2\alpha-1} \frac{R}{t}$ . Тогда

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\ln^{\alpha+1}(R/|x|)}{|x|} u \right|^2 dx \leq \frac{4}{(2\alpha-1)^2} \int_{\Omega} \left| \ln^{\alpha} \frac{R}{|x|} \nabla u(x) \right|^2 dx.$$

### 3. Вложение в весовое $L_2$ и эквивалентные нормировки

Пусть, как и выше,  $\mu(t) = t\rho^2(t)\sigma(t)$ . Теорему 3 можно трактовать как теорему вложения (непрерывного, но не компактного!) подпространства  $\dot{H}_{\rho}^1(\Omega)$  в  $L_{2,\lambda}(\Omega)$ , где  $\lambda = \frac{\rho}{\mu}$ , причем константа вложения 2 в оценке не улучшаема:

$$|u|_{0,\lambda} \leq 2|u|_{1,\rho}.$$

Однако все пространство  $H_{\rho}^1(\Omega)$  не вкладывается в  $L_{2,\lambda}(\Omega)$  хотя бы потому, что, как уже отмечалось выше,  $1 \in H_{\rho}^1(\Omega)$  и  $1 \notin L_{2,\lambda}(\Omega)$ .

Справедлива

**Теорема 4.** Пусть вес  $\nu \leq c\lambda$  ( $c > 0$  – постоянная). Для того чтобы имело место непрерывное вложение  $H_{\rho}^1(\Omega) \subset L_{2,\nu}(\Omega)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\int_{\Omega} \nu^2(|x|) dx < \infty$ , то есть чтобы  $\nu \in L_2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Необходимость сразу следует из того, что  $1 \in H_{\rho}^1(\Omega)$ . Далее, для произвольной функции  $u \in H_{\rho}^1(\Omega)$  запишем разложение  $u(x) = u(0) + (u(x) - u(0))$ . При этом постоянная  $u(0)$  принадлежит  $L_{2,\nu}(\Omega)$  по условию теоремы, а функция  $u - u(0)$  принадлежит  $\dot{H}_{\rho}^1(\Omega) \subset L_{2,\lambda}(\Omega) \subset L_{2,\nu}(\Omega)$ . Таким образом,  $u \in L_{2,\nu}(\Omega)$ . Это доказывает достаточность.  $\square$

Пространство  $H_{\rho}^1(\Omega)$  можно трактовать как пространство с нормой графика [5] оператора градиента:

$$H_{\rho}^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \nabla u \in L_{2,\rho}(\Omega)\}.$$

Теорема 2.7 о перенормировках пространств с нормой графика работы [5] в нашем случае примет вид:

**Теорема 5.** Пусть  $p$  – непрерывная на  $H_{\rho}^1(\Omega)$  полунорма такая, что  $p(1) > 0$ . Тогда норма  $\|u\| = p(u) + |u|_{1,\rho}$  эквивалентна норме  $\|u\|_{1,\rho}$ .

**Следствие 1.** Норма  $\|u\| = |u(0)| + |u|_{1,\rho}$  эквивалентна норме  $\|u\|_{1,\rho}$ .

**Заключительное замечание.** Все представленные в работе результаты справедливы, конечно, и для областей более общего вида, а также если имеется несколько сингулярных точек; в оценке (4) теоремы 3 в этом случае точная постоянная 4 заменится на некоторую другую постоянную, зависящую от геометрии области и взаимного расположения сингулярных точек весовой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00667-а, 12-01-00955-а).

### Summary

*M.R. Timerbaev, N.V. Timerbaeva. Hardy Inequality with a Singular Weight inside a Domain.*

We consider Sobolev spaces with singular weights at some internal points of a 2D-domain. For the functions of these spaces, Hardy inequality is proved. Embedding theorems for weighted Sobolev spaces and theorems on equivalent renorming are obtained.

**Key words:** Hardy inequality, weighted Sobolev spaces, embedding theorems, equivalent renorming theorems.

### Литература

1. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
2. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
5. Тимербаев М.Р. Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. I // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 5. – С. 55–65.

Поступила в редакцию  
07.05.12

---

**Тимербаев Марат Равилевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *marat.timerbaev@ksu.ru*

**Тимербаева Наиля Вакифовна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *timnell@mail.ru*