Экстремальные задачи в теории тригонометрических рядов с монотонными и выпуклыми коэффициентами

А. П. Солодов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии
23 – 27 августа 2021, Казань

Изучаются ряды по косинусам и синусам

$$h(\boldsymbol{a}, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

с невозрастающей и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$a_0 > 0, \quad \Delta a_k = a_k - a_{k+1} \geqslant 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

$$b_1 > 0, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1} \geqslant 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Класс таких последовательностей обозначим через $\mathcal{M}$.
Как известно, такие ряды при любом $\delta > 0$ сходятся равномерно на отрезке $[\delta; 2\pi - \delta]$ и, следовательно, их суммы $h(\boldsymbol{a}, x)$, $g(\boldsymbol{b}, x)$ являются непрерывными функциями на $(0; 2\pi)$.

Обозначим $m(x) = [\pi/x]\,,\ 0 < x < \pi$.
$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняется*, если $\forall\delta > 0\ \lim_{k\to\infty} \alpha_{[\delta k]}/\alpha_k = 1$.

G.H. Hardy, W.W. Rogosinski, "Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometrical series", *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, 16 (1945), 49–58.

Пусть $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеют вид* $a_k = \alpha_k/k^q$, $0 < q < 1$, $b_k = \beta_k/k^p$, $0 < p < 2$, *а последовательности* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняются. Тогда*

$$h(\boldsymbol{a}, x) \sim \Gamma(1-q)\sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) x^{q-1}\alpha_{m(x)}, \qquad x \to +0.$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x^{p-1}\beta_{m(x)}, \qquad x \to +0.$$

S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić, "Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones", *Publ. Inst. Math. Serbe Sci.*, 10 (1956), 101–120.

Пусть $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *— выпуклые, медленно меняющиеся, стремящиеся к нулю последовательности. Тогда*

$$h(\boldsymbol{a}, x) \sim \frac{\Delta a_{m(x)}}{x^2}, \qquad g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x}, \qquad x \to +0.$$

Хорошо известно, что

1. $\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M} \quad \exists x_0 > 0\colon g(\boldsymbol{b}, x) > 0,\ 0 < x < x_0;$
2. $\exists \boldsymbol{a} \in \mathcal{M},\ \exists x_n \to +0\colon h(\boldsymbol{a}, x_n) < 0.$

А.Ю. Попов, “Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами”, *Матем. заметки*, 96:5 (2014), 747–761.

Обозначим $\xi(\boldsymbol{b})$ — наименьший положительный корень $g(\boldsymbol{b}, x)$.

$$\inf_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}\colon\, b_2 \leqslant (3/4)b_1} \xi(\boldsymbol{b}) = \frac{2}{3}\pi, \qquad \inf_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}\colon\, b_2 \leqslant (8/9)b_1} \xi(\boldsymbol{b}) = 0.$$

А.Ю. Попов, “Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами”, *Матем. заметки*, 109:5 (2021), 768–780.

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M} \qquad g(\boldsymbol{b}, x) > -\frac{b_n}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}, \quad \frac{2\pi}{n+1} < x < \frac{2\pi}{n}, \qquad n \geqslant 2.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел. $\mathcal{M}_\Lambda$ — множество всех последовательностей $\boldsymbol{b}$, для которых $\{b_k/\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda < +\infty$.

А.Ю. Попов, А.П. Солодов, “Об отрицательной части сумм рядов по синусам с квазимонотонными коэффициентами”, *Матем. сб.*, 208:6 (2017), 146–169.

Теорема 1

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty$, *то*

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda \quad \exists x_0 > 0\colon g(\boldsymbol{b}, x) > 0,\ 0 < x < x_0.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то*

$$\exists \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda,\ \exists x_n \to +0\colon g(\boldsymbol{b}, x_n) < 0.$$

$$a_0 > 0, \quad \Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

$$b_1 > 0, \quad \Delta^2 b_k = b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

1. $h(\boldsymbol{a}, x) > 0$, дифференцируема и суммируема на $(0; \pi)$.
2. $g(\boldsymbol{b}, x) > 0$, дифференцируема на $(0; \pi)$, но суммируема на $(0; \pi)$ только при условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k/k < \infty$.

R. Salem, “Determination del’ordre de grandeur ál’origine de certaines séries trigonométriques”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), 1804–1806.

$$v(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k, \qquad u(\boldsymbol{a}, x) = \sum_{k=0}^{m(x)} (k+1)\Delta a_k.$$

Пусть $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— выпуклые и стремящиеся к нулю последовательности,* $\{(k+1)\Delta a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— неубывающие последовательности. Тогда найдётся такое* x_0, *что*

$$C_1(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b},x) < g(\boldsymbol{b},x) < C_2(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b},x), \qquad 0 < x < x_0,$$
$$C_3(\boldsymbol{a})u(\boldsymbol{a},x) < h(\boldsymbol{a},x) < C_4(\boldsymbol{a})u(\boldsymbol{a},x), \qquad 0 < x < x_0,$$

для некоторых величин $C_1(\boldsymbol{b})$, $C_2(\boldsymbol{b})$, $C_3(\boldsymbol{a})$ *и* $C_4(\boldsymbol{a})$.

М.И. Дьяченко

1. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *и* $\Delta^2 a_k \geqslant 0$, *то* $h(\boldsymbol{a},x) < 5u(\boldsymbol{a},x)$, $0 < x < \pi$.
2. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *и* $\Delta^3 a_k \geqslant 0$, *то* $\exists C > 0\colon h(\boldsymbol{a},x) > Cu(\boldsymbol{a},x)$, $0 < x \leqslant \pi/6$.

А.Ю. Попов, “Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами”, *Матем. заметки*, 109:5 (2021), 768–780.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *и* $\Delta^2 a_k \geqslant 0$, *то* $h(\boldsymbol{a},x) < u(\boldsymbol{a},x)$, $0 < x \leqslant \pi/3$.

S.A. Telyakovskiĭ, “On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients”, *Publ. Inst. Math. Nouvelle série*, 58 (72) (1995), 43–50.

1. *Если* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, *то* $\exists C_1 > 0\colon g(\boldsymbol{b}, x) < C_1 v(\boldsymbol{b}, x)$, $0 < x < \pi$.
2. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, $\Delta^2 b_k \geqslant 0$, *то* $\exists C_2 > 0\colon g(\boldsymbol{b}, x) > C_2 v(\boldsymbol{b}, x), 0 < x < \pi/11$.

А.Ю. Попов, “Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов”, *Матем. заметки*, 74:6 (2003), 877–888.

1. *Если* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, *то* $g(\boldsymbol{b}, x) < v(\boldsymbol{b}, x)$, $0 < x < \pi$.
2. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ *и* $\Delta^2 b_k \geqslant 0$, *то*

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right), \ 0 < x < \pi/2.$$

$$\max_{\boldsymbol{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} = 1, \qquad \min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

А.Ю. Попов, А.П. Солодов, “Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами к её мажоранте”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Мех.*, № 4 (2014), 51–55.

Теорема 2

Для любой последовательности $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ *существует последовательность положительных чисел* $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *такая, что при всех* $n \in \mathbb{N}$

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) > \frac{2}{\pi^2} v(\boldsymbol{b}, x_n).$$

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

$$\mathcal{B}\downarrow = \{\boldsymbol{b} \in \mathcal{M} \colon (k+1)b_{k+1} \leqslant kb_k \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$
$$\mathcal{B}\uparrow = \{\boldsymbol{b} \in \mathcal{M} \colon kb_k \leqslant (k+1)b_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 3

Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\downarrow$, *то при любом* $x \in (0, \pi/3]$ *верна оценка снизу*

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{3}{2} b_{m(x)+1} \sin\frac{x}{2}, \qquad \underline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Существуют последовательности $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\downarrow$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \underline{I}\, v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

Теорема 4

Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$, *то при любом* $x \in (0, \pi)$ *верна оценка сверху*

$$g(\boldsymbol{b}, x) < \overline{I}\left(1 + \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{1}{2} b_{m(x)+1} \operatorname{tg}\frac{x}{4}, \qquad \overline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Существуют последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

$$w(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k.$$

Теорема 5

Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{\pi - 2}{12\pi^2}\, w(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right), \ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Следствие

Пусть $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая, стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого* $x_0 > 0$

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)}, \qquad 0 < x < x_0.$$

Теорема 6

Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \to +0$*, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x_n).$$

$$v_0(\boldsymbol{b}, x) = x\left(\sum_{k=1}^{m(x)-1} kb_k + \frac{1}{2}\, m(x) b_{m(x)}\right).$$

Теорема 7

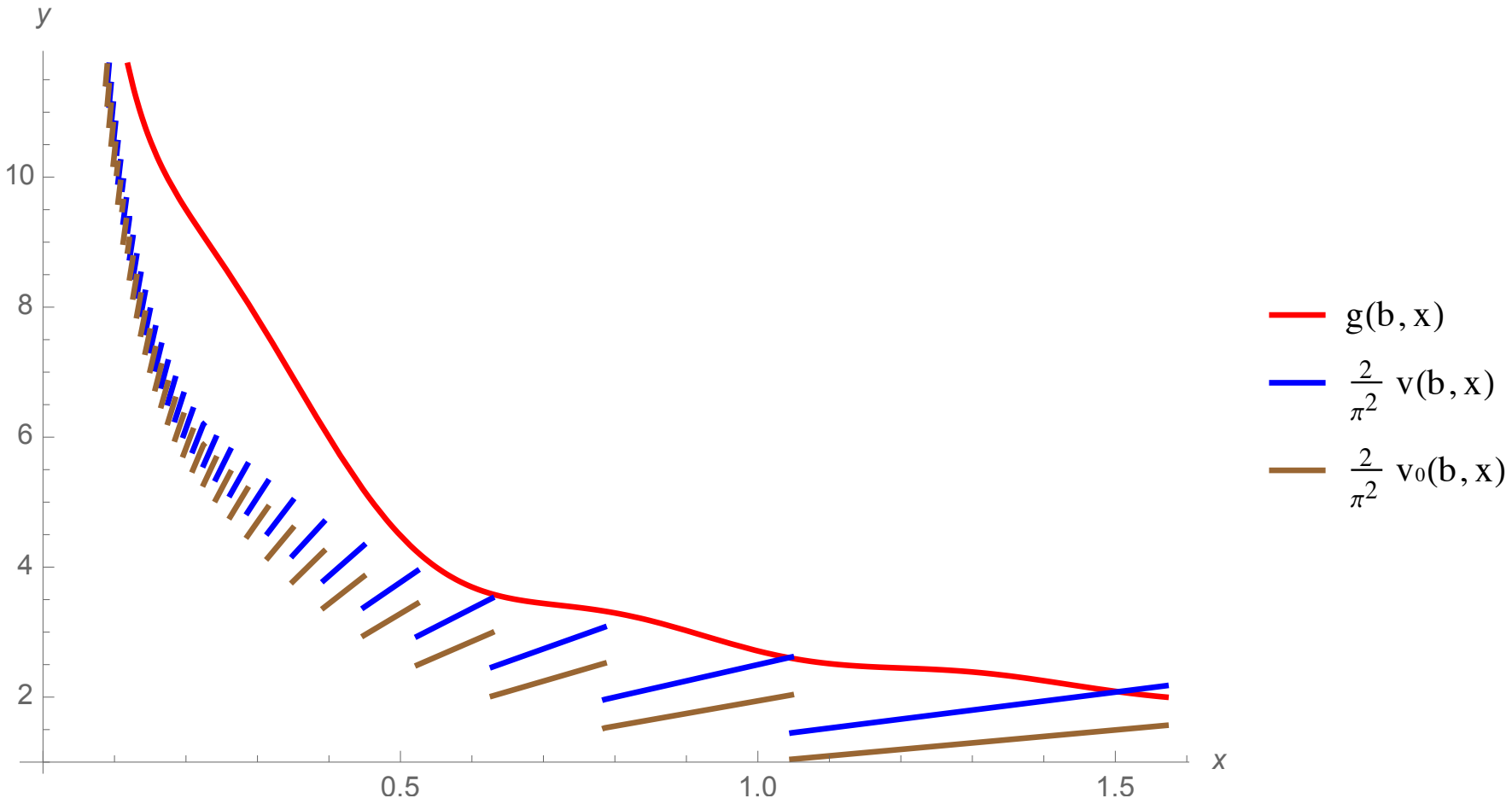
Пусть $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого* $x_0 > 0$

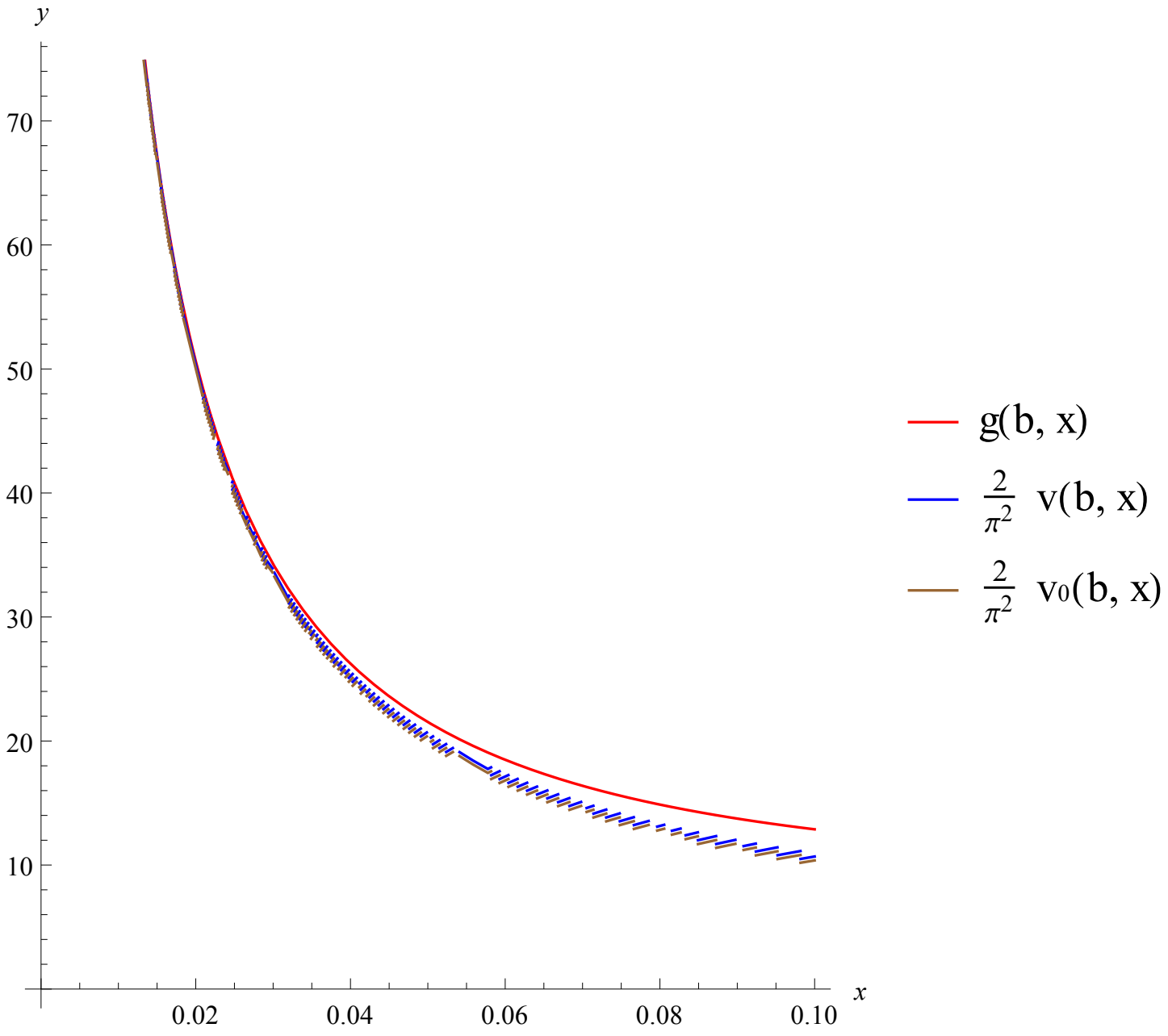
$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x), \qquad 0 < x < x_0.$$

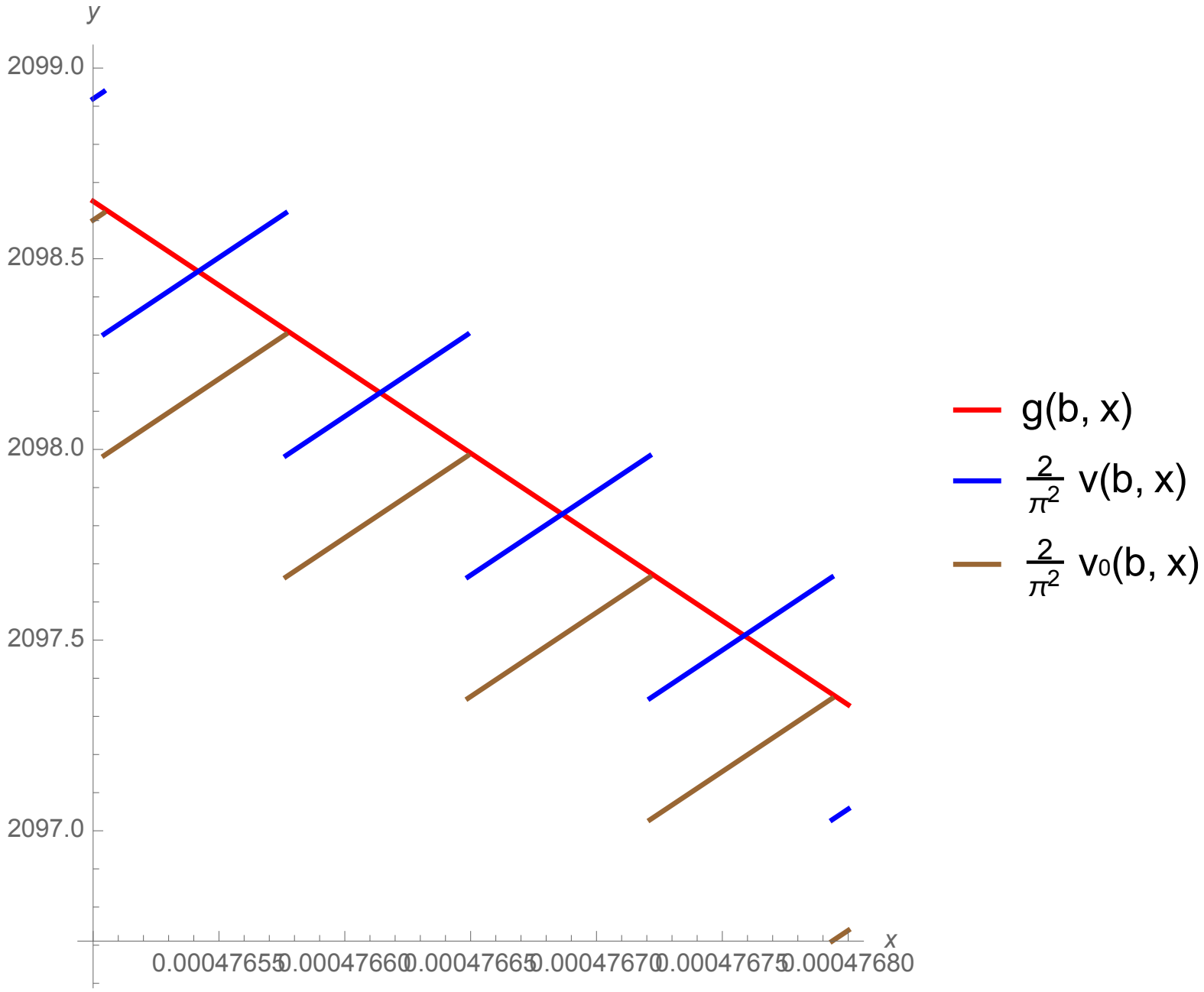
Для любого $\varepsilon > 0$ *существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \to +0$*, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2} x_n \left(\sum_{k=1}^{m(x_n)-1} kb_k + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) m(x_n) b_{m(x_n)}\right).$$

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x \to +0} \left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2} v(\boldsymbol{b}, x)\right) = 0, \quad \min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x \to +0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v_0(\boldsymbol{b}, x)}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$


y
10
8
6
4
2
0.5
1.0
1.5
x
g(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v_0(b, x)


y
70
60
50
40
30
20
10
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
x
g(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v0(b, x)


y
2099.0
2098.5
2098.0
2097.5
2097.0
x
0.00047655
0.00047660
0.00047665
0.00047670
0.00047675
0.00047680
g(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v(b, x)
$\frac{2}{\pi^2}$ v0(b, x)

$$\sigma(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{k(k+1)}{2} \Delta b_k.$$

С.А. Теляковский, “О поведении рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами вблизи нуля”, *Докл. РАН*, 357:4 (1997), 462–463.

Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ *найдутся такие не зависящие от* $\boldsymbol{b}$ *положительные постоянные* C_1 *и* C_2*, что*

$$C_1\, \sigma(\boldsymbol{b}, x) + \frac{b_{m(x)}}{x} < g(\boldsymbol{b}, x) < C_2\, \sigma(\boldsymbol{b}, x) + \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad 0 < x < x_0.$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x} \asymp \sigma(\boldsymbol{b}, x).$$

Теорема 8

Пусть $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда*

$$\frac{b_{m(x)}}{x} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\sigma(\boldsymbol{b},x) - \frac{\Delta b_{m(x)}}{\pi} < g(\boldsymbol{b},x) < \frac{b_{m(x)}}{x} + \sigma(\boldsymbol{b},x), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

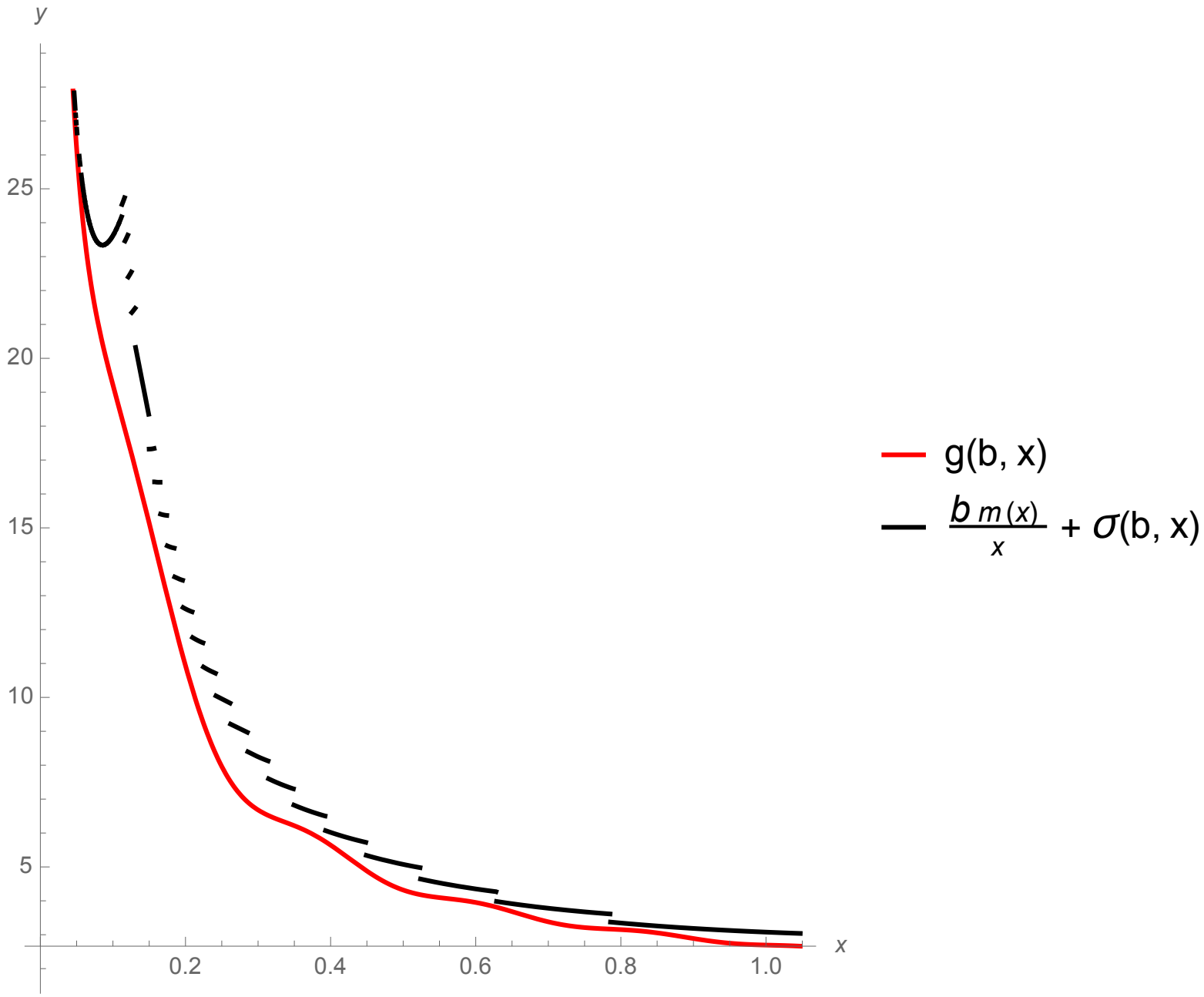
Существуют выпуклые, медленно меняющиеся и стремящиеся к нулю последовательности $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$, *такие, что*

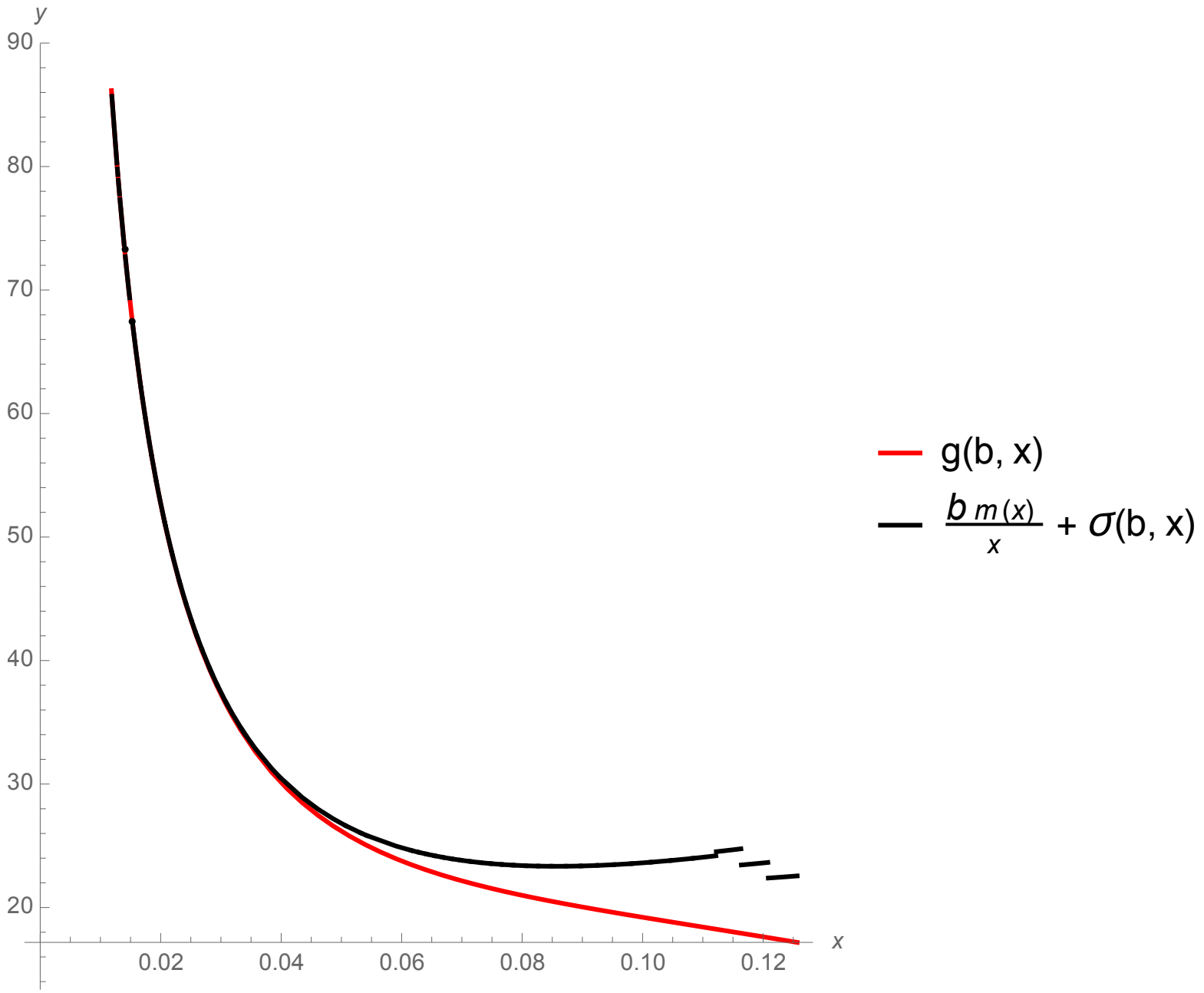
$$\varliminf_{x\to+0}\left(g(\underline{\boldsymbol{b}},x) - \frac{\underline{b}_{m(x)}}{x}\right)/\sigma(\underline{\boldsymbol{b}},x) = \frac{6(\pi-1)}{\pi^3},$$

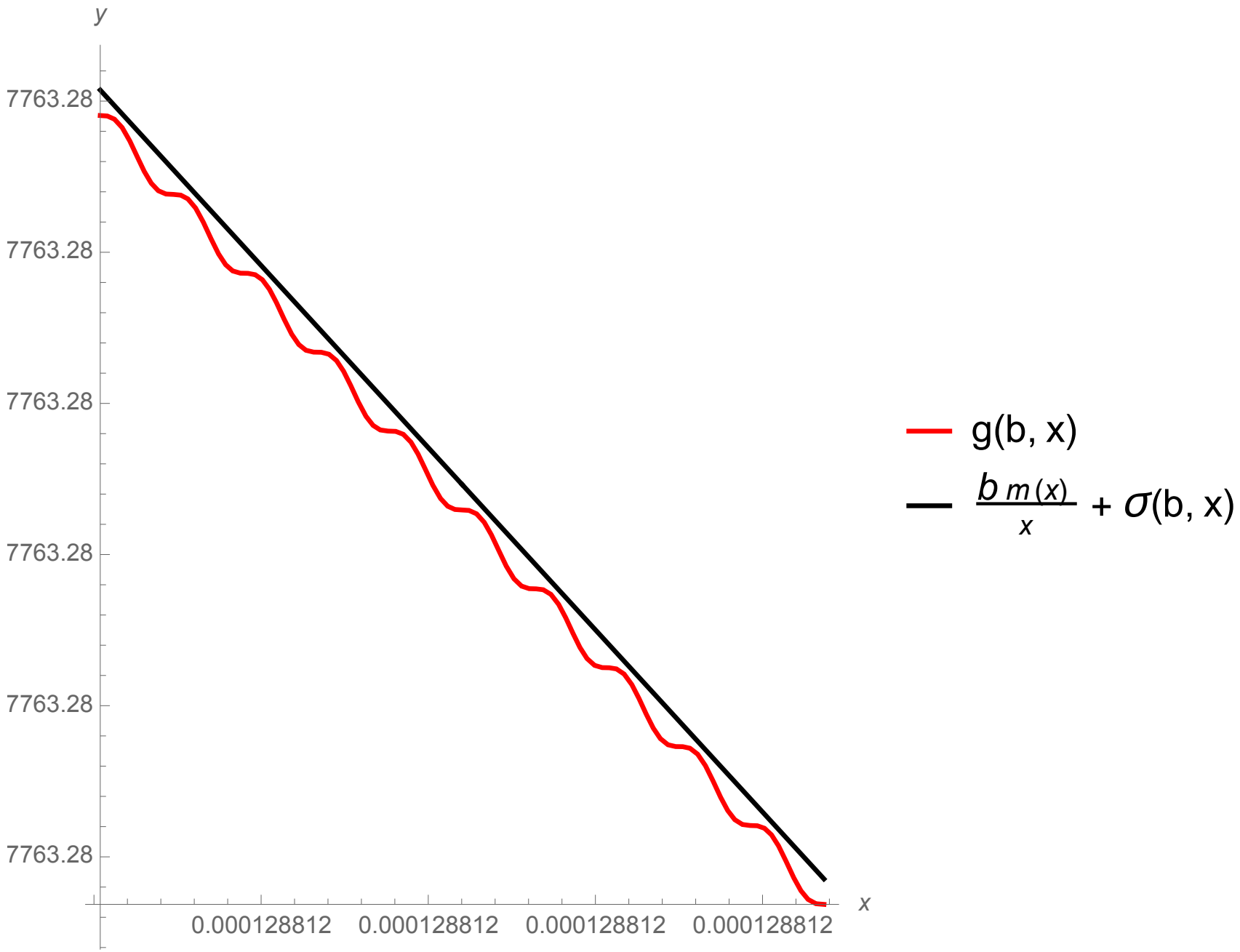
$$\varlimsup_{x\to+0}\left(g(\overline{\boldsymbol{b}},x) - \frac{\overline{b}_{m(x)}}{x}\right)/\sigma(\overline{\boldsymbol{b}},x) = 1.$$

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x\to+0}\left(\frac{b_{m(x)}}{x} + \sigma(\boldsymbol{b},x) - g(\boldsymbol{b},x)\right) = 0.$$

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x\to+0}\frac{\left(\frac{b_{m(x)}}{x} + \sigma(\boldsymbol{b},x) - g(\boldsymbol{b},x)\right)}{x} = 0.$$


y
25
20
15
10
5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
g(b, x)
$\frac{b\, m(x)}{x} + \sigma(b, x)$


y
90
80
70
60
50
40
30
20
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
x
g(b, x)
$\frac{b\, m(x)}{x} + \sigma(b, x)$


y
7763.28
7763.28
7763.28
7763.28
7763.28
7763.28
x
0.000128812
0.000128812
0.000128812
0.000128812
g(b, x)
$\frac{b\, m(x)}{x} + \sigma(b, x)$

Теорема 9

Пусть $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая, стремящаяся к нулю последовательность. Если последовательность* $\{k\Delta b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняется, то*

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{4}{\pi^2}(\gamma + \ln \pi)\sigma(\boldsymbol{b}, x), \quad x \to +0.$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln(k+1)} = \frac{1}{x \ln(1/x)} + \frac{\gamma}{x \ln^2(1/x)} + o\left(\frac{1}{x \ln^2(1/x)}\right), \quad x \to +0.$$

Следствие

Пусть $b(t)$ *— неотрицательная, выпуклая и дифференцируемая функция, стремящаяся к нулю при* $t \to +\infty$*. Если функция* $-tb'(t)$ *медленно меняется, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b(k) \sin kx = \frac{b\left(e^{-\gamma}/x\right)}{x} + o\left(\frac{b'(1/x)}{x^2}\right), \quad x \to +0.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ