КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математической статистики

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2008

Печатается по решению секции
Научно-методического совета
Казанского университета

А в т о р
доцент А.М. Сидоров

Числовые ряды:
Учебно-методическое пособие /А.М. Сидоров.-Казань: КГУ, 2008.-45 с.

Оглавление

Предисловие

Учебно-методическое пособие «Числовые ряды» входит в комплекс учебно-методических пособий, предназначенных для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики, которые учатся решать задачи по математическому анализу.

В пособии содержатся основные теоретические сведения, относящиеся к числовым рядам, даны решения типовых задач и упражнения для самостоятельного решения.

Формулы пособия, на которые имеются ссылки, имеют нумерацию вида (а.в), где а – номер параграфа, в – номер формулы в этом параграфе.

Литература

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн.2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов /Под ред. В.А.Садовничего.-М.:Высш.шк., 2000.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.-М.:Наука, 1977.
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. Л.Д.Кудрявцева.-М.:Наука, 1986.

§1. Понятие числового ряда

Пусть дана числовая последовательность (a_n). Формальная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется числовым рядом или, короче, рядом. Члены последовательности (a_n) называются членами ряда, a_n называется общим или n- ым членом ряда. Для обозначения ряда часто используется короткая форма записи: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только ряды, члены которых – действительные числа.

Для каждого $n \in N$ сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$$

первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется n- й частичной суммой этого ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел S последовательности (S_n) его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число S называется суммой ряда, при этом пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся, если последовательность (S_n) его частичных сумм не имеет конечного предела, т.е. либо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, либо этот предел бесконечен.

Пример 1.1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Общим членом данного ряда является $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Поскольку

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

то n- ую частичную сумму S_n ряда можно записать в виде

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$$
$$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Это означает, что ряд сходится и его сумма равна 1, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Пример 1.2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится.

Решение. Имеем:

$$a_n=\ln(n+1)-\ln n,$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right)=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ldots+$$
$$+\ln n-\ln(n-1)+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, то данный ряд расходится.

Пример 1.3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Разложим $a_n=\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$ **-** общий член ряда на простейшие дроби следующим образом:

$$a_n=\frac{(n+3)-n}{3n(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3n(n+2)}-\frac{1}{3(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{(n+2)-n}{6n(n+2)}-\frac{(n+3)-(n+2)}{3(n+2)(n+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Тогда $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{6}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)-\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{36}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{36} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}\right) = \frac{5}{36}$. Значит, ряд сходится и его суммой является число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{36}.$$

Пример 1.4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Чтобы упростить выражение для n- ой частичной суммы ряда S_n, нужно разложить общий член ряда $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ на простейшие дроби. Это можно сделать так же, как это было сделано в примере 1.3. Но можно применить и метод неопределенных коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби, поскольку a_n является рациональной функцией переменной n. Запишем a_n в виде

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{(n+1)^2} + \frac{D}{n+1},$$

где A, B, C и D- подлежащие определению коэффициенты. После приведения этого равенства к общему знаменателю и его отбрасывания получим равенство

$$2n+1 = A(n+1)^2 + Bn(n+1)^2 + Cn^2 + Dn^2(n+1).$$

Положим в этом равенстве $n=0$, получим $A=1$; положив $n=-1$, получим $C=-1$.

Приравняв коэффициенты при n^3 и n в обеих частях равенства, получаем:

$$0 = B + D,\ 2 = 2A + B,$$

откуда $B=0,\ D=0$.

Таким образом,

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Следовательно,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1.$$

Поэтому ряд сходится и его сумма $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

При рассмотрении следующего примера нам понадобится

Утверждение 1.1. 1) Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. 2) Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Докажем это утверждение, воспользовавшись определением предела числовой последовательности

1) При $q=0$ утверждение очевидно. Пусть $0<|q|<1$. Тогда для $0<\varepsilon\le 1$ неравенство $|q^n|<\varepsilon$ равносильно неравенству $n>\log_{|q|}\varepsilon$. Значит, $|q^n|<\varepsilon$ при $n>n(\varepsilon)=\left[\log_{|q|}\varepsilon\right]+1$. Напомним, что символ $[a]$ обозначаем целую часть числа $a\in R$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Для $\varepsilon>1$ $|q^n|<\varepsilon$ при $n>n(\varepsilon)=1$.

Значит, мы доказали, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n(\varepsilon)\ \ \forall n>n(\varepsilon)\quad \left(|q^n|<\varepsilon\right).$$

Это означает: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2) Пусть $|q|>1$. Тогда для $\varepsilon>0$ $|q^n|>\varepsilon$ при $n>n(\varepsilon)=\left[\log_{|q|}\varepsilon\right]+1$. Значит, $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n(\varepsilon)\ \ \forall n>n(\varepsilon)\ \ \left(|q^n|>\varepsilon\right)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Утверждение доказано.

Пример 1.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1+q+\ldots+q^{n-1}+\ldots$.

Решение. Составим n- ую частичную сумму ряда:

$$S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} \tag{1.1}$$

Умножив обе части равенства (1.1) на q, получим

$$qS_n = q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n \tag{1.2}$$

Почленно вычтем равенство (1.2) из равенства (1.1):

$$S_n(1-q)=1-q^n.$$

Пусть $q\ne 1$. Тогда

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1.3}$$

Воспользовавшись утверждением 1.1 и формулой (1.3), мы получим, что при $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$;

при $|q|>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Осталось рассмотреть случай $|q|=1$.

Если $q=1$, то ряд примет вид

$$1+1+1+\ldots .$$

Для него $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Пусть $q=-1$. Тогда ряд примет вид

$$1-1+1-1+\ldots .$$

Для него $S_{2k-1}=1$, $S_{2k}=0$, $k\in N$.

Имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1}=1$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}=0$. Таким образом, две подпоследовательности (S_{2k-1}) и (S_{2k}) последовательности (S_n) имеют различные пределы. Значит, предел последовательности (S_n) не существует.

В итоге получен следующий результат: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ при $|q|<1$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \dfrac{1}{1-q}$, при $|q|\ge 1$ ряд расходится. Заметим, что часто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ записывают в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Легко видеть, что при $|q|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \qquad (1.4)$$

Теорема 1.1. 1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то для любого $\lambda\in R$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, называемой произведением ряда на число λ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то для любого $\lambda\ne 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ также расходится.

3) Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n-1}^{\infty} b_n$, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, называемый суммой этих рядов и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Теорема 1.2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то при каждом $m \in N$ сходится ряд $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, называемый m- м остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.

Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд.

Следствие. Отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Пример 1.6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}$.

Решение. Вычислим $\cos\frac{2\pi n}{3}$. Если $n = 3k$, где $k \in N$, то $\cos\frac{2\pi n}{3} = \cos 2\pi k = 1$. Если $n = 3k+1$, то $\cos\frac{2\pi n}{3} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$. Если $n = 3k+2$, то $\cos\frac{2\pi n}{3} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2\pi k\right) = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$. Значит, если $n = 3k$, то $\cos\frac{2\pi n}{3} = 1$, а если $n \neq 3k$, то $\cos\frac{2\pi n}{3} = -\frac{1}{2}$. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходятся (см. пример 1.5), причем по формуле (1.4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n} = \frac{1}{7}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$.Поэтому на основании теоремы 1.1 получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \ldots =$$
$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{7}.$$

В ходе вычислений члены вида $\frac{1}{2^{3n}}$ данного ряда мы представим в виде $\frac{1}{2^{3n}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$.

Упражнения.

В упражнениях 1.1 – 1.13 для каждого ряда найти его сумму S:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. Ответ: $S = \frac{11}{18}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$. Ответ: $S=\frac{1}{8}$.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$. Ответ: $S=\frac{1}{4}$.

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$. Ответ: $S=\frac{1}{3}$.

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$. Ответ: $S=1$.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-2\cdot\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)$. Ответ: $S=1-\sqrt[3]{2}$.

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$. Ответ: $S=1$.

1.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Ответ: $S=-\ln 2$.

1.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$. Ответ: $S=\frac{2}{3}$.

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$. Ответ: $S=\frac{3}{2}$.

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}\right)$. Ответ: $S=\frac{51}{8}$.

1.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln^{2n}2$. Ответ: $S=\frac{1}{1-\ln^2 2}$.

1.14. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln^{\frac{n}{2}}5$ расходится.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{1.5}$$

Следствие. Если условие (1.5) не выполняется, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\neq 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Замечание. Условие (1.5) не является достаточным условием сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, как установлено в примере 1.2, расходится. В то же время в силу непрерывности логарифмической функции $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$.

Пример 1.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{2n+1}$.

Решение. Имеем: $a_n = \frac{5n-1}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{5}{2} \neq 0$.

Необходимое условие сходимости ряда не выполняется и, следовательно, ряд расходится.

Пример 1.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$.

Решение. Применив первый замечательный предел, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Значит, ряд расходится.

Пример 1.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$.

Решение. Поскольку функция $y = \cos x$ непрерывна на R, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Данный ряд расходится.

Пример 1.10. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ расходится.

Решение. Найдем $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$. С помощью правила Лопиталя находим (см. (2.6)), что $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Используя это, равенство $n = e^{\ln n}$ и непрерывность показательной функции, получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Как известно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=1$. Учтя это, как и выше имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=e^{0\cdot 1}=1.$$

Наконец, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq 0$. Поэтому ряд расходится.

Упражнения.

Используя необходимое условие сходимости, доказать, что каждый из следующих рядов является расходящимся:

1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n+1}{3n-1}$.

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\dfrac{1}{n}$.

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{n+2}$.

1.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

Критерий Коши сходимости ряда. Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ необходимо и остаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n(\varepsilon)\ \ \forall n>n(\varepsilon)\ \ \forall p\in N\ \ \left(\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon\right) \tag{1.6}$$

Замечание. Если условие (1.6) не выполняется, т.е.

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall k\in N\ \ \exists n>k\ \ \exists p\in N\ \ \left(\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|\geq\varepsilon\right), \tag{1.7}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 1.11. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n(n+1)}$.

Решение. Имеем: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| =$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)^2}{(n+p)(n+p+1)} \right| \le$$

$$\le \frac{\left|\cos(n+1)^2\right|}{(n+1)(n+2)} + \frac{\left|\cos(n+2)^2\right|}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\left|\cos(n+p)^2\right|}{(n+p)(n+p+1)} \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Поскольку $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому для любых натуральных чисел n и p

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{1}{n+1} \tag{1.8}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \tag{1.9}$$

равносильно неравенству $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Если $0 < \varepsilon \le 1$, то неравенство (1.9) справедливо при $n > n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$.

Если $\varepsilon > 1$, то неравенство (1.9) справедливо при $n > n(\varepsilon) = 1$. Использовав неравенство (1.8), мы получили, что

$$\forall n > n(\varepsilon) \quad \forall p \in N \quad \left(|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \right),$$

т.е. выполнено условие (1.6). Значит, данный ряд сходится.

Пример 1.12. Пользуясь критерием Коши, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Решение. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Для любого натурального k возьмем $n = k+1$ и $p = k+1$. Тогда

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| = \frac{1}{\sqrt{k+2}} + \frac{1}{\sqrt{k+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2k+2}} \tag{1.10}$$

В правой части равенства (1.10) находится сумма, состоящая из $k+1$ слагаемого, причем, очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}} > \frac{1}{\sqrt{2k+2}},\ \frac{1}{\sqrt{k+3}} > \frac{1}{\sqrt{2k+2}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{2k+1}} > \frac{1}{\sqrt{2k+2}}.$$

Поэтому заменив в (1.10) $\frac{1}{\sqrt{k+2}}, \frac{1}{\sqrt{k+3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ на $\frac{1}{\sqrt{2k+2}}$, мы получим:

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| > \frac{k+1}{\sqrt{2k+2}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

Следовательно, выполнено условие (1.7), и данный ряд расходится.

Пример 1.13. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{10^n}$, где $|\alpha_n| < 10$, $n \in N$.

Решение. Положив $a_n = \frac{\alpha_n}{10^n}$, воспользовавшись условием $|\alpha_n| < 10$ и формулой (1.3), получаем $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| =$

$$= \left|\frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{\alpha_{n+p}}{10^{n+p}}\right| \le \frac{|\alpha_{n+1}|}{10^{n+1}} + \frac{|\alpha_{n+2}|}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{\alpha_{n+p}}{10^{n+p}} <$$

$$< \frac{10}{10^{n+1}} + \frac{10}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{10}{10^{n+p}} = \frac{1}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{p-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{10}{9 \cdot 10^n} < \frac{2}{10^n}.$$

Значит, для всех натуральных чисел n и p

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \frac{2}{10^n} \tag{1.11}$$

Пусть ε - произвольное положительное число. Рассмотрим неравенство

$$\frac{2}{10^n} < \varepsilon, \quad n \in N, \tag{1.12}$$

которое равносильно неравенству $n > \lg\frac{2}{\varepsilon}$. Если $0 < \varepsilon < 2$, то неравенство (1.12) выполняется при $n > n(\varepsilon) = \left[\lg\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. Если $\varepsilon \geq 2$, то $\lg\frac{2}{\varepsilon} \leq 0$, и неравенство (1.12) справедливо при $n > n(\varepsilon) = 1$. Значит, для произвольного положительного ε мы нашли такой номер $n(\varepsilon)$, что если $n > n(\varepsilon)$, а p-произвольное натуральное число, то

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \frac{2}{10^n} < \varepsilon.$$

Таким образом, выполнено условие (1.6) и поэтому данный ряд сходится.

Упражнения.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$.

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$.

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

§2. Ряды с неотрицательными членами.

Теорема 2.1. Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны: $a_n \geq 0$, $n \in N$. Для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху и достаточно, чтобы была ограничена сверху хотя бы одна подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

Пример 2.1. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, $n \in N$, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится.

Решение. Пусть (S_n)- последовательность частичных сумм первого ряда, а (σ_n)- второго ряда. Согласно теореме 2.1 (необходимость) из сходимости первого ряда следует, что последовательность (S_n) ограничена сверху. Тогда ограничена сверху и последовательность (S_n^2): $\exists M \quad \forall n \in N \quad (S_n^2 \leq M)$. Отсюда в силу условия $a_n \geq 0$ следует, что $\sigma_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leq$
$\leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = S_n^2 \leq M$ для всех $n \in N$. Поэтому ограничена сверху последовательность (σ_n). Применив теорему 2.1 (достаточность), мы видим, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Пример 2.2. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}}$ расходится.

Решение. Данный ряд состоит из положительных членов: $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}} > 0$, $n \in N$. В силу очевидного неравенства.

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{1-(-1)^n}{2}}} > \frac{n}{2}, \; n \in N,$$

последовательность (S_n) частичных сумм ряда не ограничена сверху. Согласно теореме 2.1 это и означает расходимость данного ряда.

Пример 2.3. Если $a_n \geq 0$ и $a_n \geq a_{n+1}$, $n \in N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$.

Решение. Пусть $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $\sigma_n = 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$ - частичные суммы данных рядов. Поскольку $a_n \geq a_{n+1}$, $n \in N$, то

$$a_1 + a_2 \leq 2a_1,$$
$$a_3 + a_4 \leq 2a_2,$$
$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4,$$
$$\ldots$$
$$a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2a_1 + \left(2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n \cdot a_{2^n}\right), \text{ т.е.}$$

$$S_{2^{n+1}} \leq 2a_1 + \sigma_n. \tag{2.1}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходится, то по теореме 2.1 последовательность (σ_n) ограничена сверху. В силу неравенства (2.1) ограничена сверху подпоследовательность $\left(S_{2^{n+1}}\right)$ последовательности (S_n) частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Согласно теореме 2.1 этот ряд сходится.

С другой стороны, справедливы неравенства

$$a_2 \leq a_1 + a_2,$$
$$2a_4 \leq a_3 + a_4,$$
$$4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8,$$
$$\ldots$$
$$2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}}$$

Сложив эти неравенства почленно, получим $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^n a_{2^{n+1}} \leq$, $\leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{n+1}}$ т.е.

$$\frac{1}{2}\sigma_{n+1} \leq S_{2^{n+1}} \tag{2.2}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ расходится, то (теорема 2.1) последовательность (σ_n) его частичных сумм не ограничена сверху. В силу неравенства (2.2) тогда не ограничена сверху и подпоследовательность $\left(S_{2^{n+1}}\right)$. Отсюда следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Если $p \le 0$, то $a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p} \ge 1$, $n \in N$. Поэтому не выполняется необходимое условие (1.5) сходимости ряда. Следовательно, при $p \le 0$ данный ряд расходится. Пусть $p > 0$. Тогда $a_n > 0$ и $a_n = \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p} = a_{n+1}$, $n \in N$. Согласно примеру 2.1 исследуемый ряд сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$, т.е. с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \tag{2.3}$$

где $q = 2^{1-p} > 0$. Если $p > 1$, то $q < 1$ и, как установлено в примере 1.5, ряд (2.3) сходится.

Если $p \le 1$, то $q \ge 1$ и ряд (2.3) расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим. Поскольку для него $p = 1$, то этот ряд расходится.

Мажорантный признак сравнения. Пусть существует номер n_0 такой, что для всех $n \ge n_0$ справедливы неравенства $0 \le a_n \le b_n$. Тогда 1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + n}$.

Решение. Поскольку для любого натурального числа n справедливы неравенства $0 < \frac{1}{7^n + n} < \frac{1}{7^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$ сходится (см. пример 1.5), то на основании мажорантного признака сравнения данный ряд сходится.

Пример 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 - n}$.

Решение. Заметим, что при $n \geq 2$ справедливо неравенство $n + \sqrt{n} < 2n$. Поэтому $b = \dfrac{n - \sqrt{n}}{n^2 - n} = \dfrac{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})}{(n^2 - n)(n + \sqrt{n})} = \dfrac{n^2 - n}{(n^2 - n)(n + \sqrt{n})} = \dfrac{1}{n + \sqrt{n}} > \dfrac{1}{2n} = a_n$, $n \geq 2$. Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится (см. пример 2.4), то в силу теоремы 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ также расходится. Значит, согласно мажорантному признаку расходится и исследуемый ряд.

Пример 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Решение. Имеем: $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)}$, $\ln(\ln n) > 2 \Leftrightarrow \ln n > e^2 \Leftrightarrow n > e^{e^2}$. Значит, при $n > e^{e^2}$ $0 < a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \dfrac{1}{n^2}$. Ряд с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ сходится, как это было установлено в примере 2.4. Поэтому сходится и данный ряд.

Пример 2.8. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n+1}{n} \right)$.

Решение. Сначала докажем, что при $x > -1$ справедливо неравенство

$$\ln(1 + x) \leq x. \tag{2.4}$$

Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1 + x) - x$, $x > -1$. Ее производная $f'(x) = -\dfrac{x}{x+1}$. Легко видеть, что при $-1 < x < 0$ $f'(x) > 0$, при $x > 0$ $f'(x) < 0$. Значит, $f(0) = 0$- наибольшее значение функции f. Поэтому при $x > -1$ $f(x) \leq f(0)$, и неравенство (2.4) доказано. Их этого неравенства следует, что $\ln \dfrac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$. Поэтому $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n+1}{n} > 0$, $n \in N$. Снова использовав (2.4), получаем

$$-\ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{n}{n+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < -\frac{1}{n+1}.$$

Значит, $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$, $n \in N$. Таким образом, $0 < a_n < \dfrac{1}{n^2}$, $n \in N$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, как уже отмечалось, сходится. Следовательно, данный ряд сходится.

При исследовании рядов, общий член которых содержит логарифмическую функцию, бывает полезным

Утверждение 2.1. Пусть $p \in R$, $q > 0$. Тогда существует такое натуральное число n_0, что при $n \geq n_0$

$$\ln^p n < n^q. \tag{2.5}$$

Для доказательства этого утверждения, покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^p n}{n^q} = 0. \tag{2.6}$$

Если $p \leq 0$, то равенство (2.6) верно, поскольку $0 < \frac{\ln^p n}{n^q} < \frac{1}{n^q}$, $n \geq 3$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$, т.к. $q > 0$. Пусть $p > 0$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q}$. Сделав в нем замену $\ln x = t$, получим $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^p}{e^{qt}}$. Положим $k = [p] + 1$. Применим правило Лопиталя k раз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{e^{qt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{pt^{p-1}}{qe^{qt}} = \ldots = \lim_{t\to+\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)\cdot t^{p-k}}{q^k \cdot e^{qt}} = 0,$$

т.к. $p - k < 0$. Итак, равенство (2.6) доказано. Согласно определению предела числовой последовательности, для $\varepsilon = 1$ найдется такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ справедливо неравенство $0 < \frac{\ln^p n}{n^q} < 1$, т.е. $\ln^p n < n^q$. Утверждение доказано.

Пример 2.9. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ расходится.

Решение. Применяя неравенство (2.5), взяв в нем $\ln n$ вместо n, $p = 2$, $q = 1$, мы видим, что при $n \geq n_0$ $\ln^2(\ln n) < \ln n$. Значит, при $n \geq n_0$

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{e^{\ln^2(\ln n)}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}, \text{ т.е. } 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}},\ n \geq n_0.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Пример 2.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Решение. При $n \geq 4$ справедливо неравенство $2^n < n! < n^n$. Поэтому $n \ln 2 < \ln n! < n \ln n$ и, следовательно,

$$\frac{\ln 2}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n!}{n^{\alpha}} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}},\ n \geq 4.$$

При $\alpha \leq 2$ $\alpha - 1 \leq 1$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ расходится (см. пример 2.4). Тогда расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^{\alpha-1}}$ (теорема 1.1). Из неравенства $0 < \frac{\ln 2}{n^{\alpha-1}} < \frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$, Согласно мажорантному признаку сравнения получаем, что при $\alpha \leq 2$ данный ряд расходится.

Пусть $\alpha > 2$. Тогда найдется число q такое, что $0 < q < \alpha - 2$. Применив неравенство (2.5) для этого q и $p = 1$, получим: $\ln n < n^{q}$ при $n \geq n_0$. Тогда $\alpha - 1 - q > 1$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1-q}}$ сходится (пример 2.4). Из неравенств $0 < \frac{\ln n!}{n^{\alpha}} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} < \frac{n^{q}}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1-q}}$ согласно мажорантному признаку сравнения следует, что при $\alpha > 2$ данный ряд сходится.

Пример 2.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$- число цифр числа n.

Решение. Сначала получим формулу для $\nu(n)$. Поскольку $\nu(n)$- число цифр числа n, то $10^{\nu(n)-1} \leq n < 10^{\nu(n)}$, откуда логарифмируя, получаем: $\nu(n) - 1 \leq \lg n < \nu(n)$. Значит, $[\lg n] = \nu(n) - 1$, т.е. $\nu(n) = [\lg n] + 1$. Очевидно, что $[\lg n] \leq \ln n$. Итак, получена оценка: $\nu(n) = [\lg n] + 1 \leq \ln n + 1$, из которой следует, что

$$0 < \frac{\nu(n)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}. \qquad (2.7)$$

Рассуждая как при решении примера 2.10, легко установить, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Как уже упоминалось, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Согласно теореме 1.1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)$. Наконец, из неравенства (2.7) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$.

Упражнения.

Используя мажорантный признак сравнения, исследовать на сходимость ряды 2.1-2.6:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$. Ответ: сходится.

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$. Ответ: расходится.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{3^n}$. Ответ: сходится.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Ответ: сходится.

2.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$. Ответ: расходится.

2.6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$. Ответ: сходится.

2.7. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n \geq 0$, $n\in N$, сходится. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$. Указание: применить неравенство $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Признак сравнения в предельной форме. Пусть даны ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, где $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n\in N$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$, $0 \leq k \leq +\infty$. Тогда 1) если $k < +\infty$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$; 2) если $k > 0$ и расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, то расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Таким образом, при $0 < k < +\infty$ оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

Следствие 1. Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n\in N$, и $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. Пусть $a_n > 0$, $n\in N$ и существуют числа p и $c > 0$ такие, что $a_n \sim \frac{c}{n^p}$ при $n\to\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p \leq 1$.

Пример 2.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot\sqrt[n]{n}}$.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{n}} > 0$, $b_n = \dfrac{1}{n} > 0$, $n \in N$. При решении примера 1.10 было установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n \cdot \sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{2}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. То согласно признаку сравнения в предельной форме данный ряд расходится.

Пример 2.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot arctg\, \dfrac{1}{3^n}$.

Решение. Пусть $a_n = 2^n \cdot arctg\, \dfrac{1}{3^n} > 0$, $n \in N$. Известно, что $arctg\, t \sim t$ при $t \to 0$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ (см. утверждение 1.1). Поэтому $arctg\, \dfrac{1}{3^n} \sim \dfrac{1}{3^n}$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, где $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$, $n \in N$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ сходится (см. пример 1.5). В силу следствия 1 данный ряд сходится.

Пример 2.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

Решение, Имеем:

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^{n+a}} > 0,\ n \in N. \qquad (2.8)$$

Поступая также, как при решении примера 1.10, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{a(n+b)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{a(n+b)}{n}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a\left(1+\frac{b}{n}\right)\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}} = e^a$$

и, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^{n+a} = e^b$. Поэтому (см. (2.8)) $a_n \sim \dfrac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{a+b}}$ сходится при $a+b>1$ (см. пример 2.4). Согласно следствию 2 данный ряд сходится при $a+b>1$.

При исследовании рядов, члены которых содержат факториалы, иногда бывает полезной формула Стирлинга:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 2.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

Решение. Применив формулу Стирлинга: $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+p}} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{e^n}{n^{n+p}} = \frac{\sqrt{2x}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ сходится при $p - \frac{1}{2} > 1$ (см. пример 2.4). В силу следствия 2 исследуемый ряд сходится при $p > \frac{3}{2}$.

Упражнения.

Используя признак сравнения в предельной форме, исследовать на сходимость ряды:

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)$. Ответ: сходится.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$. Ответ: сходится.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{2^n}\left(1 + \frac{3}{n}\right)$. Ответ: сходится.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cdot \sin^2 \frac{1}{n}$. Ответ: сходится, если $\alpha < 1$ и расходится, если $\alpha \geq 1$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)^{\alpha}$. Ответ: сходится, если $\alpha > 1$ и расходится, если $\alpha \leq 1$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^{\alpha}$. Ответ: сходится, если $\alpha > 1$ и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Признак Даламбера. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n > 0$, $n \in N$ 1) сходится, если существуют такие $q < 1$ и $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, в частности, если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; 2) расходится, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ для всех $n \geq n_0$, в частности, если $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Если $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1\le\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может как сходится, так и расходится.

Следствие. Пусть $a_n>0$, $n\in N$ и существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда при $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а при $q>1$- расходится. При $q=1$ ряд может как сходится, так и расходится.

Пример 2.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$.

Решение. Имеем: $a_n=\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}>0$, $a_{n+1}=\frac{4^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$. Поскольку $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!4^n(n!)^2}=\frac{2n+2}{2n+1}>1$ для всех $n\in N$, то согласно признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 2.17. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$.

Решение. Имеем: $a_n=\frac{3^n}{n^3}>0$, $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}$,

$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot 3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=3$. Значит, $q>1$, и в силу следствия признака Даламбера ряд расходится.

Пример 2.18. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Решение. Имеем: $a_n=\frac{n!}{n^n}>0$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$,

$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$ и поэтому ряд сходится.

Пример 2.19. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

Решение. Имеем: $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot \ldots \cdot (5n-4)} > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot \ldots \cdot (5n-4)(5n+1)} = a_n \dfrac{3n+2}{5n+1}$, $n \in N$. Значит,

$q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{5+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{3}{5}$. Поскольку $q<1$, то ряд сходится.

Пример 2.20. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

Решение. Имеем $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$, $n \in N$. Пусть $q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3+(-1)^{n+1}}{2\left(3+(-1)^n\right)}$. Все члены последовательности (q_n) содержатся в последовательностях $q_{2n} = \dfrac{1}{4}$ и $q_{2n-1} = 1$. Поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_{2n} = \dfrac{1}{4}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_{2n-1} = 1$. Значит, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, и признак Даламбера ответа не дает. Данный ряд можно исследовать с помощью приводимого ниже радикального признака Коши.

Упражнения.

Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряды:

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!}$. Ответ: расходится.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$. Ответ: сходится.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}}$. Ответ: сходится.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n+2)}$. Ответ: сходится.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n \cdot (n!)^2}{n^{2n}}$. Ответ: сходится.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{(n+1)!} arctg\, \dfrac{1}{2^n}$. Ответ: расходится.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n}$. Ответ: сходится.

Радикальный признак Коши. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ 1) сходится, если существуют такие $q<1$ и $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, в частности, если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}<1$; 2) расходится, если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ для всех $n \geq n_0$, в частности, если $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$.

Если $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq 1 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходится, так и расходится.

Следствие. Пусть $a_n \geq 0$, $n \in N$, и существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тогда при $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q>1$- расходится. При $q=1$ ряд может как сходится, так и расходится.

Пример 2.21. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots$.

Решение. Общий член данного ряда можно записать в виде

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2k-1}},\ \textit{если}\ n=2k-1;\\ \dfrac{1}{3^{2k}},\ \textit{если}\quad n=2k;\end{cases}\qquad k\in N.$$

Ясно, что

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2},\ \textit{если}\ n=2k-1;\\ \dfrac{1}{3},\ \textit{если}\quad n=2k;\end{cases}\qquad k\in N.$$

Значит, для всех $n \in N$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, где $q=\frac{1}{2}<1$. Согласно радикальному признаку Коши ряд сходится.

Пример 2.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

Решение. Имеем: $a_n=\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}>0$, $n \in N$, $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3}.$$

Значит, $q = \frac{e}{3} < 1$, и согласно следствию радикального признака Коши ряд сходится.

Пример 2.23. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2} + (-1)^n\right)^n}{3^n}$.

Решение. Пусть $q_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3\left(\sqrt{2} + (-1)^n\right)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}\left(\sqrt{2} + (-1)^n\right)}{3}$. Имеем: $\lim_{n\to\infty} q_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n)^3}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{3} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$, т.к. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2n)^3} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(2n)^3}{2n}} = e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n)}{n}} = e^0 = 1$ и, аналогично, $\lim_{n\to\infty} q_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n-1]{(2n-1)^3}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$. Поскольку $\frac{\sqrt{2} - 1}{3} < \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} q_n = \lim_{n\to\infty} q_{2n} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1$. Значит, ряд сходится.

Упражнения.

Используя радикальный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$. Ответ: сходится.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$. Ответ: сходится.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$. Ответ: сходится.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Ответ: сходится.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{1}{2n}$. Ответ: сходится.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(5 - (-1)^n\right)^n}{n^3 \cdot 4^n}$. Ответ: расходится.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^{\sqrt{n}}}{2^n}$. Ответ: сходится.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ неотрицательна и убывает на промежутке $[\alpha;+\infty)$, где $a \geq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и несобственный интеграл

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2.24. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x}{2^{x^2}}$ при $x \geq 1$. Ясно, что $f(x)>0$ и $f'(x)=\frac{2^{x^2}\left(1-2x^2 \ln 2\right)}{2^{2x^2}}<0$ при $x \geq 1$, т.е. $f(x)$ убывает на промежутке $[1;+\infty)$. Исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{2^{x^2}}dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} \frac{x}{2^{x^2}}dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} 2^{-x^2} d\left(-x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{2^{-x^2}}{\ln 2} \right|_{1}^{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{2^{-t^2}}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} \right) = \frac{1}{4\ln 2}.$$

Значит, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{2^{x^2}}dx$ сходится и согласно интегральному признаку Коши сходится и данный ряд.

Пример 2.25. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$, $\alpha \in R$.

Решение. Пусть $f(x)=\frac{1}{x \ln^{\alpha} x}$, $x \in [2,+\infty)$. При $x > e^{-\alpha}$ справедливо неравенство $\ln x + \alpha > 0$ и, следовательно, $f'(x) = -\frac{\ln x + \alpha}{x^2 \ln^{\alpha+1} x} < 0$. Пусть α - наибольшие из чисел: 2 и $e^{-\alpha}$. Поскольку функция $f(x)$ положительна и убывает на промежутке $[\alpha;+\infty)$, то для исследования ряда на сходимость можно применить интегральный признак Коши. При $\alpha \neq 1$ $\int\limits_{a}^{t} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int\limits_{a}^{t} \frac{d(\ln x)}{\ln^{\alpha} x} = \left. \frac{\ln^{1-\alpha} x}{1-\alpha} \right|_{a}^{t} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\ln^{1-\alpha} t - \ln^{1-\alpha} a\right).$ Если $\alpha < 1$, то

$\lim\limits_{t\to+\infty}\ln^{1-\alpha}t=+\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t\frac{dx}{x\ln^\alpha x}=+\infty$. Если $\alpha>1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln^{1-\alpha}t=0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t\frac{dx}{x\ln^\alpha x}=\frac{\ln^{1-\alpha}a}{\alpha-1}$. При $\alpha=1$ $\int\limits_a^t\frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_a^t\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_a^t=\ln\ln t-\ln\ln a$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t\frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln\ln t-\ln\ln a)=+\infty$. Значит, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\alpha x}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пример 2.26. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$.

Решение. Поскольку при $n\ge 2$ $n!<n^n$, то $\ln n!<n\ln n$ и, стало быть, $0<\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{\ln n!}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится (см. пример 2.25). Согласно мажорантному признаку сравнения данный ряд расходится.

Пример 2.27. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha\in R$.

Решение. Если $\alpha\le 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=+\infty$. Поэтому не выполнено условие (1.5) и ряд расходится.

Пусть $\alpha>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x^\alpha}$ на промежутке $[1;+\infty)$. Имеем: $f'(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-\alpha\ln x)}{x^{2\alpha}}\le 0$ при $x\ge e^{\frac{1}{\alpha}}$. Функция $f(x)$ положительна и убывает на промежутке $\left[e^{\frac{1}{\alpha}};+\infty\right)$. Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{e^{\frac{1}{p}}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$. Для этого найдем интеграл $\int\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$. Пусть $\alpha\ne 1$. Применим формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$, положив $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^\alpha}$. Тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ и

$\int \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} - \int \frac{dx}{x^{\alpha}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right)$. Поэтому

$$\int_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{t} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{t} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right).$$

Если $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} = 0$ и согласно (2.6) предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{t} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx$ существует и конечен. При $\alpha \le 1$ этот предел бесконечен. При $\alpha = 1$ имеем:

$$\int_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{t} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to+\infty} \ln^2 x\Big|_{e^{\frac{1}{\alpha}}}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln^2 t - \frac{1}{p^2}\right) = +\infty.$$

Итак, несобственный интеграл $\int_{e^{\frac{1}{p}}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx$ и, следовательно, данный ряд сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \le 1$.

Пример 2.28. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}} - 1\right)$.

Решение. Пусть $a_n = n^{n^{\alpha}} - 1$. Если $\alpha \ge 0$, то, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$ и ряд расходится. Пусть $\alpha < 0$. Тогда согласно (2.6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\ln n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} = 0$. Поэтому можно применить эквивалентность $e^t - 1 \sim t$ при $t \to 0$, взяв $t = n^{\alpha}\ln n$. Имеем: $a_n = n^{n^{\alpha}} - 1 = e^{n^{\alpha}\ln n} - 1 \sim n^{\alpha}\ln n$ при $n \to \infty$. Значит, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^{-\alpha}}$. Использовав следствие 1 признака сравнения в предельной форме и пример 2.27, получаем, что данный ряд сходится при $\alpha < -1$.

Пример 2.29. Пусть $a_n > 0$, $n \in N$, и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Решение. Выберем число b так, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < b < \frac{1}{e}$. Из определения верхнего предела следует, что найдется такое натуральное число n_0, что

$(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < b$ при $n \geq n_0$. Значит, $0 < a_n < \dfrac{b^{\ln\ln n}}{n}$. Поскольку $b^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln b}$, то получаем: $0 < a_n < \dfrac{(\ln n)^{\ln b}}{n}$. Поскольку $b < \dfrac{1}{e}$, то $-\ln b > 1$. Но тогда, как установлено в примере 2.25, сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^{\ln b}}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^{-\ln b}}$. Поэтому в силу мажорантного признака сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$.

Упражнения.

Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2}$. Ответ: расходится.

2.29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln\ln n}$. Ответ: расходится.

2.30. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^2}$. Ответ: сходится.

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$. Ответ: сходится.

2.32. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$. Ответ: ряд сходится при любом β, если $\alpha > 1$, и при $\beta > 1$, если $\alpha = 1$; ряд расходится при любом β, если $\alpha < 1$, и при $\beta \leq 1$, если $\alpha = 1$.

§3. Знакопеременные ряды

Числовой ряд, членами которого являются числа разных знаков, называется знакопеременным.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 3.1. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Теорема 3.2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то для любых чисел α и β абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ является рядом с неотрицательными членами, поэтому при исследовании ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютную сходимость можно применять признаки, приведенные в §2.

Пример 3.1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ абсолютно сходится.

Решение. Имеем: $0 < \left|\frac{\sin(n^2)}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ для всех $n \in N$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 2.4), то согласно мажорантному признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n^2)}{n^2}\right|$. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Пример 3.2. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \ln n \cdot \cos n}{n^2 + 1}$ абсолютно сходится.

Решение. Применив неравенство (2.5) при $p = 1$ и q удовлетворяющим неравенству $0 < q < \frac{1}{2}$, получим, что при $n \geq n_0$

$$\left|\frac{\sqrt{n} \ln n \cdot \cos n}{n^2 + 1}\right| \leq \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} < \frac{\sqrt{n} \cdot n^q}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2} - q}}.$$

В силу выбора числа q справедливо неравенство $\frac{3}{2}-q>1$. Но тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-q}}$ и по мажорантному признаку сравнения исследуемый ряд сходится абсолютно.

Пример 3.3. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится абсолютно.

Решение. Из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a_n^2+b_n^2\right)}{2}$. Поскольку $\left|a_nb_n\right|\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ для всех $n\in N$, то применив мажорантный признак сравнение, получаем требуемый результат.

Пример 3.4. Доказать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+4}\right)^n$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{2n}{3n+4}\right)^n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n$. Применим к этому ряду следствие радикального признака Коши: $q=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{4}{n}}=\frac{2}{3}<1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{2n}{3n+4}\right)^n\right|$ сходится и, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пусть для знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n\ne0$, $n\in N$ существует такой номер n_0, для всех $n\ge n_0$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$ или $\sqrt[n]{|a_n|}\ge1$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$. Тогда не выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, следовательно, не выполнено и условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Значит, признак Даламбера и радикальный признак Коши можно применять для доказательства расходимости ряда с членами любого знака.

Пример 3.5. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(-\frac{5}{n}\right)^n$ расходится.

Решение. Пусть $a_n = n!\left(-\frac{5}{n}\right)^n$, $a_n \neq 0$, $n \in N$. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!\cdot 5^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e} > 1$. Значит, ряд расходится.

Упражнения.

Доказать, что ряды 3.1-3.6 абсолютно сходятся:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(-n)^n}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\cdot 5^n}$.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1^n n^2\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\cdot\arcsin\frac{\pi}{4n}$.

3.7. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ сходится абсолютно.

3.8. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n$ также абсолютно сходится.

Доказать, что ряды 3.9 и 3.10 расходятся:

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$.

Признак Лейбница. Пусть существует такое $n_0 \in N$, что при всех $n \geq n_0$ $a_n \geq a_{n+1} > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

Пример 3.5. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение. Пусть $a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} > 0$, $n \in N$. Последовательность (a_n) является убывающей. Действительно, $a_n - a_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0$, $n \in N$. Кроме того,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$. Условия признака Лейбница выполнены. Значит, ряд сходится.

Пример 3.6. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln^2 n}{n}$.

Решение. Пусть $a_n = \frac{\ln^2 n}{n}$. Для доказательства убывания последовательности (a_n) рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$. Имеем: $f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2} < 0$ при $x > e^2$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $(e^2, +\infty)$. Значит, $a_n > a_{n+1} > 0$ при $n \geq n_0 = 8$. Согласно (2.6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0$. По признаку Лейбница ряд сходится.

Пример 3.7. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right)$, $a \in R$.

Решение. Преобразовать общий член данного ряда:

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = \sin\left(\left(\pi\sqrt{n^2+a^2} - \pi n\right) + \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\right) =$$

$= (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = (-1)^n a_n$, где $a_n = \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x}$ для $x \geq 1$. Имеем:

$f'(x) = -\cos\frac{\pi a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x} \cdot \frac{\pi a^2}{\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)} < 0$ при $x \geq x_0$, так как существует такое x_0, что при $x \geq x_0$ $0 < \frac{\pi a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x} < \frac{\pi}{2}$ (проверьте это). Значит, последовательность положительных чисел (a_n) начиная с некоторого номера убывает, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = 0$. По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится. Следовательно сходится и данный ряд.

Упражнения.

Применяя признак Лейбница, доказать сходимость рядов:

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+2008}$.

3.12. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-4n+1}}$.

3.13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^{\alpha} n}$, $\alpha>0$.

Признак Дирихле. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполнены условия: 1) последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю, т.е. $a_{n+1}\le a_n$ или $a_{n+1}\ge a_n$ для всех $n\ge n_0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n=0$; 2) последовательность (B_n) частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, т.е. $\exists M>0\ \ \forall n\in N\ \left(|B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|\le M\right)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример 3.8. Доказать, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

Решение. Пусть $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$. Ясно, что последовательность (a_n) убывая стремится к нулю.

Применив формулу $\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k^2-k\right)-\cos\left(k^2+k\right)\right)$, получаем:

$$B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k^2-k\right)-\cos\left(k^2+k\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 0-\cos 2+\cos 2-\cos 6+\ldots+\cos\left(n^2-n\right)-\cos\left(n^2+n\right)\right)=$$

$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n^2+n\right)\right)$. Поэтому $|B_n|=\left|\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n^2+4\right)\right)\right|<1$ для всех $n\in N$. По признаку Дирихле ряд расходится.

Пример 3.9. Доказать, что если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha\in R$.

Решение. Пусть $\alpha\ne 2\pi m$, $m\in Z$. Докажем, что последовательность (B_n) частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$ ограничена. Умножим обе части равенства $B_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и применим формулу $2\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha$. Имеем:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}B_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)=$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha+\cos\frac{3}{2}\alpha-\cos\frac{5}{2}\alpha+\ldots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=$$

$=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}$. Поскольку при $\alpha\neq 2\pi m$, $m\in Z$, $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, то $B_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $|B_n|\leq\dfrac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$ при всех $n\in N$. Значит, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\alpha$ сходится при $\alpha\neq 2\pi m$, $m\in Z$. Если $\alpha=2\pi m$, $m\in Z$, то $\sin n\alpha=\sin 2\pi mn=0$ при всех $n\in N$ и поэтому ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha\in R$, если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю.

Пример 3.10. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^{\beta}}$, $\beta>0$, сходится при любом $\alpha\in R$.

Решение. Пусть $a_n=\frac{1}{n^{\beta}}$. Поскольку $\beta>0$, то $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^{\beta}}<\frac{1}{n^{\beta}}=a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}}=0$. Значит, последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю. Осталось сослаться на пример 3.9.

Пример 3.11. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=\frac{\ln^{100}x}{x}$, $x\geq 1$. Имеем: $f'(x)=\frac{\ln^{99}x(100-\ln x)}{x^2}<0$ при $x>e^{100}$. Значит, последовательность $a_n=\frac{\ln^{100}n}{n}$ при $n>e^{100}$ убывает. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}=0$ (см. (2.6)). Согласно примеру 3.9 данный ряд сходится.

Признак Абеля. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполнены условия: 1) последовательность (a_n) монотонна и ограничена; 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример 3.12. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}} arctgn$ сходится при любом $\alpha \in R$.

Решение. Пусть $a_n = arctgn$, $b_n = \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}$ Последовательность (a_n), очевидно, возрастает и $0 < arctg\, n < \frac{\pi}{2}$ для всех $n \in N$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}$ согласно примеру 3.9 сходится при любом $\alpha \in R$, т.к. последовательность $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ убывает и стремится к нулю, По признаку Абеля исследуемый ряд сходится при любом $\alpha \in R$.

Пример 3.13. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Решение. По формуле приведения получаем:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = \cos\left(\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) + \pi n\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \cos\frac{\pi n}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$ Поэтому общий член данного ряда представим в виде $\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} = \cos\frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$. Пусть $f(x) = \cos\frac{\pi}{x+1}$, $x \in [2, +\infty)$. Имеем: $f'(x) = \frac{\pi}{(x+1)^2}\sin\frac{\pi}{x+1} > 0$ на промежутке $[2, +\infty)$. Поэтому последовательность $a_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$ является возрастающей и, кроме того, она ограничена: $\left|\cos\frac{\pi}{n+1}\right| \le 1$ при всех $n \in N$. Функция $g(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$ убывает на промежутке $[2, +\infty)$, поскольку $g'(x) = -\frac{2}{x\ln^3 x} < 0$

при $x \geq 2$. Значит, последовательность $\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)$ убывает и, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = 0$. По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ сходится. Сославшись на признак Абеля, мы получили, что данный ряд сходится.

Упражнения.

Используя признаки Дирихле и Абеля, доказать сходимость рядов:

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$, если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю, $\alpha \neq 2\pi m$, $m \in Z$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{3n+2}$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n \cdot \sin n\alpha}{n}$, $\alpha \in R$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{1+3n^2}{1+2n^2}$.

3.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \, arctg\, n}{\sqrt{n}}$.

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если этот ряд сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится.

Пример 3.14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$. Поскольку

$$a_n = \frac{1}{n-\ln n} = \frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)} \sim \frac{1}{n}$$

при $n \to \infty$, то согласно следствию 2 признака сравнения в предельной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ расходится. Поэтому исследуемый ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем ряд на условную сходимость. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x-\ln x}$, $x \geq 1$. Эта функция убывает на промежутке $[1, +\infty)$, т.к.

$f'(x)=-\dfrac{x-1}{x(x-\ln x)^2}\le 0$ при $x\ge 1$. Поэтому последовательность (a_n) является убывающей и, очевидно, стремящейся к нулю. По признаку Лейбница данный ряд сходится, причем условно.

Пример 3.15. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$, $p\in R$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$. Имеем:

$a_n=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{n^p\cdot n^{\frac{1}{n}}}\sim\dfrac{1}{n^p}$ при $n\to\infty$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ (см. решение примера 1.9).

Из эквивалентности $a_n\sim\dfrac{1}{n^p}$, во-первых, получаем согласно примеру 2.4, что данный ряд абсолютно сходится при $p>1$ и не сходится абсолютно при $p\le 1$. Во-вторых, из эквивалентности следует, что при $p\le 0$ ряд расходится, т.к. тогда не выполняется необходимое условие сходимости.

Пусть $p>0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Докажем, что последовательность (a_n) убывает. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x^{p+\frac{1}{x}}}=e^{-\left(p+\frac{1}{x}\right)\ln x}$ для $x\ge 1$. Имеем:

$$f'(x)=-e^{-\left(p+\frac{1}{x}\right)\ln x}\left(\left(p+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x^2}\right)=-\frac{e^{-\left(p+\frac{1}{x}\right)\ln x}}{x}\left(p-\frac{\ln x-1}{x}\right) \qquad (3.1)$$

С помощью правила Лопиталя находим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Согласно определению предела функции отсюда следует, что для $p>0$ найдется такое число x_0, что при $x>x_0$ справедливо неравенство $\dfrac{\ln x-1}{x}<p$, т.е. $p-\dfrac{\ln x-1}{x}>0$. Поэтому из (3.1) получаем, что при $x>x_0$ $f'(x)<0$ и функция $f(x)$ на промежутке $(x_0,+\infty)$ убывает. Значит, последовательность (a_n) убывает, начиная с некоторого номера. По признаку Лейбница при $p>0$ данный ряд сходится. Подведем итоги: при $p\le 0$ ряд расходится, при $0<p\le 1$ сходится условно, при $p>1$ сходится абсолютно.

Пример 3.16. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

Решение. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится. Поскольку и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по условию абсолютно сходится, то согласно критерию Коши сходимости ряда $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n(\varepsilon) \ \ \forall n \geq n(\varepsilon) \ \ \forall p \in N \ \ \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$. Но тогда $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $n \geq n(\varepsilon)$ и всех натуральных числах p. Опять сославшись на критерий Коши, мы видим, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится абсолютно.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится абсолютно. Тогда, как и выше, применив неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |(a_k + b_k) - a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k + b_k| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

и критерий Коши, получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно. По теореме 3.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а тогда по теореме 1.1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Если бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ сходился, то из неравенств $|b_n| \leq |a_n + b_n| + |a_n|$, $n \in N$, и абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ согласно мажорантному признаку сравнения следовала бы сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, что противоречит предположению об условной сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится условно. Также получаем, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится условно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Если бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходился, то из равенства $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, $n \in N$, и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ согласно теоремы 1.1 следовала бы сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ расходится. Наконец, так же получаем, что из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 3.17. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + (-1)^n\right)^p}$, $p \in R$.

Решение. Пусть $a_n \frac{(-1)^n}{\left(n + (-1)^n\right)^p}$. Если $p \le 0$ то a_n не стремится к нулю, и ряд расходится. Пусть $p > 0$. Применив формулу Маклорена $(1+t)^{-p} = 1 - pt + 0(t)$, $t \to 0$, для $t = \frac{(-1)^n}{n}$, получим:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 - \frac{p(-1)^n}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + 0\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

.

Значит,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + \alpha_n, \tag{3.2}$$

где

$$|\alpha_n| \le \frac{c}{n^{p+1}}. \tag{3.3}$$

Поскольку $p>0$, то сходится ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{n^{p+1}}$, а согласно неравенству (3.3) и мажорантному признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится абсолютно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ при $0<p\le 1$ сходится условно, при $p>1$ сходится абсолютно. Поэтому из равенства (3.2) согласно примеру 3.16 получаем, что исходный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ при $0<p\le 1$ сходится условно, при $p>1$ сходится абсолютно.

Упражнения.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n!}{n^2+1}$. Ответ: сходится условно.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$. Ответ: сходится абсолютно.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. Ответ: сходится условно.

3.17. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n\ln\ln n}$. Ответ: сходится условно.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^2}$. Ответ: сходится абсолютно.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^{\alpha}\left(1+tg\,\frac{1}{n}\right)$, $\alpha\in R$. Ответ: сходится абсолютно при $\alpha>1$, сходится условно при $0<\alpha\le 1$, расходится при $\alpha\le 0$.

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$, $\alpha\in R$. Ответ: сходится абсолютно при $\alpha>\frac{1}{2}$, сходится условно при $0<\alpha\le\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha\le 0$.