УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 52–65 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.62 doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.52-65

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ГРУЗОМ

А.А. Самсонов[1], *С.И. Соловьёв*[1], *Д.М. Коростелева*[2]

[1]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

[2]*Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия*

Аннотация

Исследуется обыкновенная дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, описывающая собственные колебания упругого стержня с присоединённым к торцу грузом. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В статье изучается поведение решений в зависимости от величины массы присоединённого груза. Точнее, формулируются вспомогательные предельные дифференциальные задачи на собственные значения и доказывается сходимость собственных значений и собственных функций исходной задачи к соответствующим собственным значениям и собственным функциям предельных задач при увеличении массы груза до бесконечности. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Исследования статьи могут быть обобщены для случаев более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами.

Ключевые слова: собственное колебание стержня, собственное значение, собственная функция, задача на собственные значения, сеточная аппроксимация, метод конечных элементов

Введение

Сформулируем дифференциальную задачу на собственные значения, описывающую продольные собственные колебания системы стержень – груз. Предположим, что ось упругого стержня занимает в состоянии покоя отрезок $[0,l]$ оси Ox. Будем изучать малые продольные колебания стержня в предположении, что поперечные сечения стержня во время смещения остаются плоскими и ортогональными оси Ox. Обозначим через $\rho(x)$ объёмную плотность, через $E(x)$ – модуль упругости Юнга, через $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня. Предположим, что торец стержня с координатой $x=0$ закреплен, к торцу $x=l$ присоединён груз массой M. Тогда продольные смещения $w(x,t)$ сечений стержня с координатой x в момент времени t удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,w(x,t)\right)=r(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,w(x,t),\quad x\in(0,l),\quad t>0, \tag{1}$$

$$w(0,t)=0,\quad t>0, \tag{2}$$

$$-p(l)\,\frac{\partial}{\partial x}\,w(l,t) = M\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,w(l,t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $p(x) = E(x)S(x),\ r(x) = \rho(x)S(x),\ x \in [0,l]$.

Собственные колебания системы стержень – груз определяются функцией $w(x,t)$ следующего вида: $w(x,t) = u(x)v(t)$, $x \in [0,l]$, $t > 0$, где $v(t) = a_0 \cos\sqrt{\lambda}\,t + b_0 \sin\sqrt{\lambda}\,t$, $t > 0$; a_0, b_0 и λ – постоянные величины. Тогда уравнения (1)–(3) приводят к дифференциальной задаче на собственные значения второго порядка: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in [0,l]$, такие, что

$$\begin{gathered} -(p(x)u'(x))' = \lambda r(x)u(x), \quad x \in (0,l), \\ u(0) = 0, \quad p(l)u'(l) = \lambda\,M\,u(l). \end{gathered} \tag{4}$$

Задача (4) имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В настоящей работе исследуются предельные свойства при $M \to \infty$ и при $M \to 0$ собственных значений и собственных функций параметрической задачи (4) с параметром M. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке с линейными конечными элементами. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций.

Отметим, что сформулированная задача хорошо известна, а применяемые уравнения (1)–(4) содержатся, например, в работе [1]. В [1, 2] изложены хорошо известные результаты существования собственных значений и собственных функций задачи (4), а также их вариационные свойства. Если коэффициенты дифференциальной задачи на собственные значения (4) являются постоянными, то собственные значения можно найти, решив частотное уравнение [3, с. 152]. С помощью этого частотного уравнения в [3, с. 153] исследованы предельные свойства собственных значений параметрической задачи (4). В настоящей статье эти результаты обобщаются на общий случай задачи с переменными коэффициентами, когда неизвестно частотное уравнение. При этом дифференциальная задача на собственные значения (4) формулируется как вариационная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве. Доказательство предельных свойств проводится с помощью предельного перехода в вариационном уравнении задачи для ограниченных слабо сходящихся подпоследовательностей гильбертова пространства и опирается на результаты работы [4]. Исследования статьи допускают обобщения для случаев более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами [5].

1. Вариационная постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}$ – числовая прямая, $\Omega = (0,l)$, $\overline{\Omega} = [0,l]$, $\Lambda = [0,\infty)$. Обозначим, как обычно, через $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ вещественные гильбертовы пространства Лебега и Соболева соответственно со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_0$ и $((\cdot,\cdot))_1$, где

$$(u,v)_0 = \int\limits_0^l u(x)v(x)\,dx, \quad ((u,v))_1 = (u,v)_0 + (u,v)_1, \quad (u,v)_1 = (u',v')_0,$$

и нормами $|\cdot|_0$ и $\|\cdot\|_1$, где

$$|v|_0 = \left(\int\limits_0^l (v(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \quad \|v\|_1 = \left(|v|_0^2 + |v|_1^2\right)^{1/2}, \quad |v|_1 = |v'|_0.$$

Положим $H = L_2(\Omega)$, $V = \{v : v \in W_2^1(\Omega), v(0) = 0\}$. Для непрерывной функции $v(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, обозначим $|v|_{0,\infty} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $v(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, с нормой $|v|_{0,\infty}$. Заметим, что пространство V компактно вложено в пространство H и в пространство $C(\overline{\Omega})$. Полунорма $|\cdot|_1$ является нормой в пространстве V, которая эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_1$. В пространстве V эквивалентным исходному является скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1$. Существуют постоянные c_0 и c_1 такие, что $|v|_{0,\infty} \le c_0|v|_1$, $|v|_0 \le c_1|v|_1$, для любой функции $v \in V$.

Определим достаточно гладкие функции $p(x)$, $r(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, для которых существуют постоянные p_i, r_i, $i = 1, 2$, такие, что $p_1 \le p(x) \le p_2$, $r_1 \le r(x) \le r_2$. Введём число $\mu \in \Lambda$, а также билинейные формы $a : V \times V \to \mathbb{R}$, $b : V \times V \to \mathbb{R}$, $c : V \times V \to \mathbb{R}$, по формулам

$$a(u,v) = \int\limits_0^l p(x)\,u'v'dx, \quad b(u,v) = \int\limits_0^l r(x)\,uv\,dx, \quad c(u,v) = u(l)v(l),$$

для любых функций u, $v \in V$.

Для $\mu = M$ дифференциальная задача (4) эквивалентна следующей вариационной задаче на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(u,v) = \lambda\,(b(u,v) + \mu\,c(u,v)) \quad \forall\, v \in V. \tag{5}$$

Число $\lambda = \varphi(\mu)$, удовлетворяющее уравнению (5), называется собственным значением, а функция $u = u^\mu$ – собственной функцией задачи (5), соответствующей собственному значению λ. Множество $U(\lambda)$, состоящее из собственных функций, отвечающих собственному значению λ, и нулевой функции, образует замкнутое подпространство в пространстве V, которое называется собственным подпространством, соответствующим собственному значению λ. Размерность этого подпространства называется кратностью собственного значения λ. Если размерность собственного подпространства равна единице, то соответствующее собственное значение называется простым. Пара (λ, u) с компонентами λ и u, удовлетворяющими соотношению (5), называется собственной парой задачи (5).

2. Параметрическая задача на собственные значения

Сформулируем результаты существования собственных значений и собственных функций вариационной задачи на собственные значения (5). Положим

$$R(v) = R_\mu(v) = \frac{a(v,v)}{b(v,v) + \mu\,c(v,v)} \quad \forall\, v \in V \setminus \{0\}, \quad \mu \in \Lambda.$$

Если W – подпространство пространства V, то обозначим

$$W_a^\perp = \{v : \ v \in V,\ a(v,w) = 0\ \forall w \in W\}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_k(W)$ множество всех k-мерных подпространств пространства W при $k \ge 1$. Множество $\mathcal{E}_0(W)$ состоит только из $\{0\}$. Положим $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(V)$ при $k \ge 0$.

Вариационная задача на собственные значения (5) имеет [1, 2] возрастающую последовательность положительных простых собственных значений $\lambda_k = \varphi_k(\mu)$, $k = 0, 1, \ldots$, с предельной точкой на бесконечности: $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots, \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Этим собственным значениям соответствует полная ортонормированная система собственных функций $u_k = u_k^\mu$, $k = 0, 1, \ldots$, которую можно выбрать согласно условиям: $a(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) + \mu c(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots$ Выполняется свойство $u_k(l) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Кроме того, для собственных значений и собственных функций справедливы [1, 2] вариационные соотношения

$$\lambda_{k-1} = \min_{v \in (E_{k-1})_a^\perp \setminus \{0\}} R(v) = \max_{v \in E_k \setminus \{0\}} R(v), \tag{6}$$

$$\lambda_{k-1} = \max_{W \in \mathcal{E}_{k-1}} \min_{v \in W_a^\perp \setminus \{0\}} R(v) = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R(v), \tag{7}$$

где $E_k = E_k^\mu = \operatorname{span}\{u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $E_0 = E_0^\mu = \{0\}$, $(E_0)_a^\perp = V$.

Лемма 1. *Имеют место неравенства*

$$\alpha_1 |v|_1^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2 |v|_1^2, \quad \beta_1 |v|_0^2 \leq b(v, v) \leq \beta_2 |v|_0^2, \quad 0 \leq c(v, v) \leq \gamma_2 |v|_1^2$$

для любых функций $v \in V$, $\alpha_i = p_i$, $\beta_i = r_i$, $i = 1, 2$, $\gamma_2 = c_0^2$.

Доказательство. Требуемые неравенства вытекают из определений билинейных форм и свойств коэффициентов задачи. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Имеют место оценки*

$$|\varphi_k(\mu) - \varphi_k(\eta)| \leq \frac{\varphi_k(A)}{A} |\mu - \eta|, \quad \mu, \eta \in [A, B] \subset \Lambda, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Докажем, что $\varphi_k(\mu) \geq \varphi_k(\eta)$ для $\mu \leq \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$, $k = 0, 1, \ldots$ Согласно вариационным свойствам (6), (7), имеем соотношения

$$\varphi_{k-1}(\eta) = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R_\eta(v) \leq \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\eta(v) \leq \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\mu(v) = \varphi_{k-1}(\mu)$$

для $\mu \leq \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$, $k = 1, 2, \ldots$

Докажем оценку леммы для функции $\varphi_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $k \geq 0$. Для $\mu, \eta \in \Lambda$, $k \geq 1$, получим

$$\varphi_{k-1}(\eta) = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R_\eta(v) \leq \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\eta(v) \leq$$

$$\leq \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\mu(v) + \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} |R_\eta(v) - R_\mu(v)| \leq$$

$$\leq \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\mu(v) + \frac{|\mu - \eta|}{\eta} \max_{v \in E_k^\mu \setminus \{0\}} R_\mu(v) = \varphi_{k-1}(\mu) + \frac{|\mu - \eta|}{\eta} \varphi_{k-1}(\mu),$$

где были использованы соотношения

$$|R_\eta(v) - R_\mu(v)| = \left| \frac{a(v, v)}{b(v, v) + \mu c(v, v)} - \frac{a(v, v)}{b(v, v) + \eta c(v, v)} \right| =$$

$$= |\mu - \eta| \frac{a(v, v) c(v, v)}{(b(v, v) + \mu c(v, v))(b(v, v) + \eta c(v, v))} \leq$$

$$\leq \frac{|\mu - \eta|}{\eta} \frac{a(v, v)}{b(v, v) + \mu c(v, v)} = \frac{|\mu - \eta|}{\eta} R_\mu(v).$$

В результате получим неравенства

$$\varphi_k(\eta) - \varphi_k(\mu) \le \frac{|\mu-\eta|}{\eta}\,\varphi_k(\mu), \quad \varphi_k(\mu) - \varphi_k(\eta) \le \frac{|\mu-\eta|}{\mu}\,\varphi_k(\eta),$$

которые дают оценки леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Функции $\varphi_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $k = 0,1,\ldots$, являются непрерывными убывающими функциями.*

Доказательство. Непрерывность функций $\varphi_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $k = 0,1,\ldots$, вытекает из леммы 2.

Из доказательства леммы 2 имеем $\varphi_k(\mu) \ge \varphi_k(\eta)$ для $\mu \le \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$. Чтобы доказать, что $\varphi_k(\mu) > \varphi_k(\eta)$ для $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$, предположим существование μ и η таких, что $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$ и $\varphi_k(\mu) = \varphi_k(\eta)$. Тогда, применяя (5), запишем

$$a(u_k^\mu, u_k^\eta) = \varphi_k(\mu)\left(b(u_k^\mu, u_k^\eta) + \mu\, c(u_k^\mu, u_k^\eta)\right),$$

$$a(u_k^\eta, u_k^\mu) = \varphi_k(\eta)\left(b(u_k^\eta, u_k^\mu) + \eta\, c(u_k^\eta, u_k^\mu)\right).$$

Вычитая эти неравенства, получим $(\mu - \eta)\, c(u_k^\mu, u_k^\eta) = 0$ и поэтому $c(u_k^\mu, u_k^\eta) = 0$, что противоречит свойству $u_k^\mu(l) \ne 0$, $\mu \in \Lambda$. Следовательно, функция $\varphi_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, является убывающей. Лемма доказана. □

3. Предельные свойства параметрической задачи

Определим подпространства $V_0 = \{v : v \in W_2^1(\Omega)\;\; v(0) = v(l) = 0\}$ и $V_1 = (V_0)_a^\perp$ гильбертова пространства V.

Введём следующие предельные задачи.

Найти $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}$, $u \in V_0 \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(u,v) = \lambda^{(0)} b(u,v) \quad \forall\, v \in V_0. \tag{8}$$

Найти $\eta \in \mathbb{R}$, $u \in V_1 \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(u,v) = \eta\mu\, c(u,v) \quad \forall\, v \in V_1. \tag{9}$$

Найти $\lambda^{(1)} \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(u,v) = \lambda^{(1)} b(u,v) \quad \forall\, v \in V. \tag{10}$$

Задача (8) имеет [1, 2] возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности $\lambda_k^{(0)}$, $k = 1,2,\ldots$: $0 < \lambda_1^{(0)} < \lambda_2^{(0)} < \ldots < \lambda_k^{(0)} < \ldots$, $\lambda_k^{(0)} \to \infty$ при $k \to \infty$. Соответствующие собственные функции $u_k^{(0)}$, $k = 1,2,\ldots$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве V_0, которую можно выбрать согласно условиям: $a(u_i^{(0)}, u_j^{(0)}) = \lambda_i^{(0)}\delta_{ij}$, $b(u_i^{(0)}, u_j^{(0)}) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots$

Задача (10) имеет [1, 2] возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности $\lambda_k^{(1)}$, $k = 0,1,\ldots$: $0 < \lambda_0^{(1)} < \lambda_1^{(1)} < \ldots < \lambda_k^{(1)} < \ldots$, $\lambda_k^{(1)} \to \infty$ при $k \to \infty$. Соответствующие собственные функции $u_k^{(1)}$, $k = 0,1,\ldots$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве V, которую можно выбрать согласно условиям: $a(u_i^{(1)}, u_j^{(1)}) = \lambda_i^{(1)}\delta_{ij}$, $b(u_i^{(1)}, u_j^{(1)}) = \delta_{ij}$, $i,j = 0,1,\ldots$

Так как $\dim V_1 = \operatorname{codim} V_0 = 1$, то задача на собственные значения (9) имеет одно положительное простое собственное значение $\eta = \eta(\mu)$. Существует единственная нормированная собственная функция $u^{(\mu)}$ такая, что $u^{(\mu)}(l) = 1/\sqrt{\mu}$, соответствующая собственному значению η. Более того, функции $\widetilde{u}_0^{(0)} = u^{(\mu)}/\sqrt{\eta(\mu)}$, $\widetilde{u}_k^{(0)} = u_k^{(0)}/\sqrt{\lambda_i^{(0)}}$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве V такую, что $a(\widetilde{u}_i^{(0)}, \widetilde{u}_j^{(0)}) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots$

Собственное значение $\eta(\mu)$ и собственная функция $u^{(\mu)}$, $u^{(\mu)}(l) = 1/\sqrt{\mu}$, задачи (9) определяются формулами

$$\eta(\mu) = \frac{1}{\mu \int\limits_0^l \frac{1}{p(y)} dy}, \quad u^{(\mu)}(x) = \frac{\int\limits_0^x \frac{1}{p(y)} dy}{\sqrt{\mu} \int\limits_0^l \frac{1}{p(y)} dy}, \quad x \in [0, l].$$

Заметим, что $u^{(\mu)} = u^{(1)}/\sqrt{\mu}$, $\eta(\mu) = \eta(1)/\mu$.

Пусть $\xi \in \{0, \infty\}$. Как обычно, символом $\to$ будем обозначать сильную сходимость в банаховых пространствах V, H, $C(\overline{\Omega})$, $\mathbb{R}$. Например, будем писать $u_\mu \to u$ в V, если $|u_\mu - u|_1 \to 0$ при $\mu \to \xi$. Заметим также, что $u_\mu \to u$ в V, если для любой последовательности $\mu' \to \xi$ имеет место сходимость $u_\mu \to u$ в V при $\mu = \mu' \to \xi$. Символом $\rightharpoonup$ будем обозначать слабую сходимость в гильбертовом пространстве V. Будем писать $u_\mu \rightharpoonup u$ в V, если $(u_\mu, v)_1 \to (u, v)_1$ при $\mu \to \xi$ для произвольного элемента $v \in V$.

Лемма 4. *Пусть существует положительная постоянная c, для которой выполняется неравенство ограниченности $|v_\mu|_1 \le c$ семейства элементов $v_\mu \in V$, $\mu \in \Lambda$. Тогда для любой последовательности $\mu' \to \xi$ можно выбрать подпоследовательность $\mu'' \to \xi$ и элемент $v \in V$ такой, что $v_\mu \rightharpoonup v$ в V, $v_\mu \to v$ в H, $v_\mu(l) \to v(l)$, при $\mu = \mu'' \to \xi$.*

Доказательство. Для ограниченной последовательности $v_\mu \in V$, $|v_\mu|_1 \le c$, $\mu = \mu' \to \xi$, гильбертова пространства V существует слабо сходящаяся подпоследовательность $v_\mu \in V$ при $\mu = \mu'' \to \xi$ и элемент $v \in V$ такой, что $v_\mu \rightharpoonup v$ в V, $\mu = \mu'' \to \xi$. Поскольку пространство V компактно вложено в пространство H, то оператор вложения является компактным. По свойству компактного оператора оператор вложения из V в H переводит слабо сходящуюся последовательность из пространства V в сильно сходящуюся последовательность в пространстве H. Следовательно, получим $v_\mu \to v$ в H при $\mu = \mu'' \to \xi$. Аналогично, используя компактность вложения пространства V в пространство $C(\overline{\Omega})$, получим $v_\mu \to v$ в $C(\overline{\Omega})$ при $\mu = \mu'' \to \xi$. Из соотношения $|v_\mu(l) - v(l)| \le |v_\mu - v|_{0,\infty} \to 0$ при $\mu = \mu'' \to \xi$ выводим, что $v_\mu(l) \to v(l)$ при $\mu = \mu'' \to \xi$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть $u_\mu \rightharpoonup u$ в V, $v_\mu \to v$ в V, при $\mu \to \xi$. Тогда $a(u_\mu, v_\mu) \to a(u, v)$ при $\mu \to \xi$.*

Доказательство. Поскольку $u_\mu \rightharpoonup u$ в V при $\mu \to \xi$, то существует постоянная c_2, такая, что $|u_\mu|_1 \le c_2$. Для фиксированного элемента $v \in V$ выражение $a(u, v)$ при $u \in V$ определяет линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве V. Тогда по теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала существует элемент $w \in V$ такой,что $a(u, v) = (u, w)_1$ для любого элемента $u \in V$. Следовательно, при $\mu \to \xi$ получим

$$a(u_\mu, v_\mu) - a(u, v) = a(u_\mu, v_\mu - v) + a(u_\mu - u, v) \to 0,$$

так как в силу леммы 1

$$|a(u_\mu, v_\mu - v)| \le \alpha_2 |u_\mu|_1 |v_\mu - v|_1 \le \alpha_2 c_2 |v_\mu - v|_1 \to 0,$$

$$a(u_\mu - u, v) = (u_\mu - u, w)_1 \to 0,$$

при $\mu \to \xi$. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть* $u_\mu \to u$ *в* H, $v_\mu \to v$ *в* H, *при* $\mu \to \xi$. *Тогда* $b(u_\mu, v_\mu) \to$ $\to b(u, v)$ *при* $\mu \to \xi$.

Доказательство. Поскольку $u_\mu \to u$ в H при $\mu \to \xi$, то существует постоянная c_3, такая, что $|u_\mu|_0 \le c_3$. Следовательно, при $\mu \to \xi$ получим

$$b(u_\mu, v_\mu) - b(u, v) = b(u_\mu, v_\mu - v) + b(u_\mu - u, v) \to 0,$$

где были учтены соотношения

$$|b(u_\mu, v_\mu - v)| \le \beta_2 |u_\mu|_0 |v_\mu - v|_0 \le \beta_2 c_3 |v_\mu - v|_0 \to 0,$$

$$|b(u_\mu - u, v)| \le \beta_2 |v|_0 |u_\mu - u|_0 \to 0,$$

при $\mu \to \xi$, вытекающие из леммы 1. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Имеет место сходимость* $0 < \eta(\mu) - \varphi_0(\mu) \to 0$ *при* $\mu \to \infty$, $u^{(\mu)} -$ $- u_0^\mu \to 0$ *в* V *при* $\mu \to \infty$, *где* $b(u_0^\mu, u_0^\mu) + \mu c(u_0^\mu, u_0^\mu) = 1$, $u_0^\mu(l) > 0$, $u^{(\mu)}(l) = 1/\sqrt{\mu}$, $\mu \in \Lambda$.

Доказательство. Используя вариационные свойства собственных значений (6), (7), получим соотношения

$$\varphi_0(\mu) = R_\mu(u_0^\mu) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R_\mu(v) \le R_\mu(u^{(1)}) =$$

$$= \frac{a(u^{(1)}, u^{(1)})}{b(u^{(1)}, u^{(1)}) + \mu c(u^{(1)}, u^{(1)})} < \frac{1}{\mu} \frac{a(u^{(1)}, u^{(1)})}{c(u^{(1)}, u^{(1)})} = \eta(\mu) \to 0$$

при $\mu \to \infty$, $u^{(1)}(l) = 1$. Кроме того, выполняется неравенство $\mu\varphi_0(\mu) < \eta(1)$. Поэтому $\varphi_0(\mu) < \eta(\mu)$ и $\varphi_0(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Так как $\alpha_1 |\widetilde{u}_0^\mu|_1^2 \le a(\widetilde{u}_0^\mu, \widetilde{u}_0^\mu) =$ $= \mu a(u_0^\mu, u_0^\mu) = \mu\varphi_0(\mu) < \eta(1)$ для $\widetilde{u}_0^\mu = \sqrt{\mu}\, u_0^\mu$, то любая последовательность $\mu' \to \infty$ содержит подпоследовательность $\mu'' \to \infty$ такую, что $\widetilde{u}_0^\mu \rightharpoonup w$ в V, $\widetilde{u}_0^\mu \to w$ в H, $\widetilde{u}_0^\mu(l) \to w(l)$, $\mu\varphi_0(\mu) \to \nu$, при $\mu = \mu'' \to \infty$, где $w \in V$.

Учитывая условие нормировки $b(u_0^\mu, u_0^\mu) + \mu c(u_0^\mu, u_0^\mu) = 1$, получим

$$\frac{1}{\mu} b(\widetilde{u}_0^\mu, \widetilde{u}_0^\mu) + c(\widetilde{u}_0^\mu, \widetilde{u}_0^\mu) = 1.$$

Переходя здесь к пределу при $\mu = \mu'' \to \infty$, выводим $c(w, w) = 1$, следовательно, $w(l) = 1$.

Для $v \in V_0$ согласно соотношению (5) имеем $a(\widetilde{u}_0^\mu, v) = \varphi_0(\mu) b(\widetilde{u}_0^\mu, v) \to 0$ при $\mu = \mu'' \to \infty$. Поэтому $a(w, v) = 0$ для любой функции $v \in V_0$, то есть $w \in V_1$.

Совершая предельный переход в уравнении

$$a(\widetilde{u}_0^\mu, v) = \varphi_0(\mu)(b(\widetilde{u}_0^\mu, v) + \mu c(\widetilde{u}_0^\mu, v)) \quad \forall\, v \in V_1$$

при $\mu=\mu''\to\infty$, получим равенство $a(w,v)=\nu c(w,v)$ для любой функции $v\in V_1$, где $w\in V_1\setminus\{0\}$. Следовательно, ν и w есть собственное значение и собственная функция задачи (9) при $\mu=1$, $\nu=\eta(1)$, $w=u^{(1)}$, $u^{(1)}(l)=1$. Установлено, что $\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu\to 0$ при $\mu=\mu''\to\infty$.

Предположим, что для некоторой последовательности $\mu'\to\infty$ существует положительная постоянная c, для которой имеет место соотношение $\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu\geq c$ при $\mu=\mu'\to\infty$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения для последовательности $\mu'\to\infty$, построим подпоследовательность $\mu''\to\infty$, приводящую к противоречию $\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu\to 0$ при $\mu=\mu''\to\infty$. В результате для любой последовательности $\mu'\to\infty$ получим $\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu\to 0$ при $\mu=\mu'\to\infty$, что эквивалентно сходимости $\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu\to 0$ при $\mu\to\infty$.

Обозначим $\varepsilon(\mu)=\eta(1)-\varphi_0(\mu)\mu$, тогда имеем $\varepsilon(\mu)\to 0$ при $\mu\to\infty$. Замечая, что $\varepsilon(\mu)/\mu=\eta(1)/\mu-\varphi_0(\mu)=\eta(\mu)-\varphi_0(\mu)$, выводим $0<\eta(\mu)-\varphi_0(\mu)\to 0$ при $\mu\to\infty$.

Сильная сходимость $\widetilde{u}_0^\mu\to w$ в V при $\mu=\mu''\to\infty$, $w=u^{(1)}$, вытекает из соотношений

$$\alpha_1|\widetilde{u}_0^\mu-w|_1^2\leq a(\widetilde{u}_0^\mu-w,\widetilde{u}_0^\mu-w)=a(\widetilde{u}_0^\mu,\widetilde{u}_0^\mu)-2a(\widetilde{u}_0^\mu,w)+a(w,w)=$$
$$=\varphi_0(\mu)b(\widetilde{u}_0^\mu,\widetilde{u}_0^\mu)+\varphi_0(\mu)\mu c(\widetilde{u}_0^\mu,\widetilde{u}_0^\mu)-2\varphi_0(\mu)b(\widetilde{u}_0^\mu,w)-$$
$$-2\varphi_0(\mu)\mu c(\widetilde{u}_0^\mu,w)+\eta(1)\to\eta(1)-2\eta(1)+\eta(1)=0$$

при $\mu=\mu''\to\infty$.

Поскольку $\eta(1)$ – простое собственное значение задачи (9) при $\mu=1$, то существует единственная собственная функция $u^{(1)}$, удовлетворяющая условию $u^{(1)}(l)=1$. Установлено, что любая последовательность $\mu'\to\infty$ содержит подпоследовательность $\mu''\to\infty$ такую, что $\widetilde{u}_0^\mu\to u^{(1)}$ в V при $\mu=\mu''\to\infty$.

Предположим, что для некоторой последовательности $\mu'\to\infty$ существует положительная постоянная c, для которой имеет место соотношение $|\widetilde{u}_0^\mu-u^{(1)}|_1\geq c$ при $\mu=\mu'\to\infty$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения для последовательности $\mu'\to\infty$, построим подпоследовательность $\mu''\to\infty$, приводящую к противоречию $|\widetilde{u}_0^\mu-u^{(1)}|_1\to 0$ при $\mu=\mu''\to\infty$. В результате для любой последовательности $\mu'\to\infty$ получим $|\widetilde{u}_0^\mu-u^{(1)}|_1\to 0$ при $\mu=\mu'\to\infty$, что эквивалентно сходимости $|\widetilde{u}_0^\mu-u^{(1)}|_1\to 0$ при $\mu\to\infty$. Поэтому

$$\delta(\mu)=|\widetilde{u}_0^\mu-u^{(1)}|_1=|\sqrt{\mu}\,u_0^\mu-u^{(1)}|_1=\sqrt{\mu}\left|u_0^\mu-\frac{u^{(1)}}{\sqrt{\mu}}\right|_1=\sqrt{\mu}\,|u_0^\mu-u^{(\mu)}|_1\to 0$$

при $\mu\to\infty$, следовательно, $|u_0^\mu-u^{(\mu)}|_1=\delta(\mu)/\sqrt{\mu}\to 0$ при $\mu\to\infty$, где $b(u_0^\mu,u_0^\mu)+$ $+\mu c(u_0^\mu,u_0^\mu)=1$, $u_0^\mu(l)>0$, $u^{(\mu)}(l)=1/\sqrt{\mu}$, $\mu\in\Lambda$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Имеет место сходимость* $\varphi_k(\mu)\to\lambda_k^{(0)}$, $u_k^\mu\to u_k^{(0)}$ *в* V, $u_k^\mu(l)=$ $=O(1/\mu)$, *при* $\mu\to\infty$, *где* $b(u_k^\mu,u_k^\mu)+\mu c(u_k^\mu,u_k^\mu)=1$, $u_k^\mu(l)>0$, $b(u_k^{(0)},u_k^{(0)})=1$, $b(u_k^{(0)},u_k^\mu)>0$, $k=1,2,\ldots$, $\mu\in\Lambda$.

Доказательство. 1) Положим $k=1$, $E_k^\mu=\operatorname{span}\{u_0^\mu,u_1^\mu,\ldots,u_{k-1}^\mu\}$, $(E_k^\mu)_a^\perp=$ $=\operatorname{span}\{u_k^\mu,u_{k+1}^\mu,\ldots\}$.

Из условия ортогональности

$$a(u_i^\mu,u_j^\mu)=\varphi_i(\mu)\delta_{ij},\quad b(u_i^\mu,u_j^\mu)+\mu c(u_i^\mu,u_j^\mu)=\delta_{ij},\quad i,j=0,1,\ldots,k,$$

вытекает линейная независимость системы функций u_0^μ, $u_1^\mu,\ldots$, u_k^μ из подпространства E_{k+1}^μ. Убедимся, что система функций $w_i=u_i^\mu-c_iu_0^\mu$, $c_i=u_i^\mu(l)/u_0^\mu(l)$,

$i = 1,2,\ldots,k$, является линейно независимой системой из подпространства $E^{\mu}_{k+1}\bigcap V_0$. Действительно, из равенства $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots+\alpha_k w_k = \alpha_0 u^{\mu}_0+\alpha_1 u^{\mu}_1 + {} + \alpha_2 u^{\mu}_2+\ldots+\alpha_k u^{\mu}_k = 0$, где $\alpha_0 = -\alpha_1 c_1-\alpha_2 c_2-\ldots-\alpha_k c_k$, следует $\alpha_i = 0$, $i=0,1,\ldots,k$.

Учитывая, что $\dim(E^{\mu}_{k+1}\cap V_0)\ge k$, согласно минимаксному принципу для $\mu\in\Lambda$ получим

$$\varphi_k(\mu) = \max_{v\in E^{\mu}_{k+1}\setminus\{0\}} R_\mu(v) \ge \max_{v\in E^{\mu}_{k+1}\cap V_0\setminus\{0\}} R_\mu(v) = {}$$
$$= \max_{v\in E^{\mu}_{k+1}\cap V_0\setminus\{0\}} R_0(v) \ge \min_{W\in\mathcal{E}_k(V_0)} \max_{v\in W\setminus\{0\}} R_0(v) = \lambda^{(0)}_k.$$

С другой стороны, имеем

$$\varphi_k(\mu) = \min_{v\in(E^{\mu}_k)^{\perp}_a\setminus\{0\}} R_\mu(v) \le R_\mu(w^\mu) = \beta^{\mu}_k,$$

где

$$w^\mu = u^{(0)}_k - \sum_{i=0}^{k-1} b(u^{(0)}_k, u^{\mu}_i)u^{\mu}_i.$$

Заметим, что $w^\mu\in(E^{\mu}_k)^{\perp}_a$, $w^\mu\ne 0$ при $\mu\to\infty$, $w^\mu\to u^{(0)}_k$ в V, $\beta^{\mu}_k = R_\mu(w^\mu)\to {} \to\lambda^{(0)}_k$ при $\mu\to\infty$. Поэтому получим $\lambda^{(0)}_k\le\varphi_k(\mu)\le\beta^{\mu}_k\to\lambda^{(0)}_k$ при $\mu\to\infty$. Следовательно, $\varphi_k(\mu)\to\lambda^{(0)}_k$ при $\mu\to\infty$.

Поскольку $\alpha_1|u^{\mu}_k|^2_1 \le a(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k) = \varphi_k(\mu)\le\varphi_k(0)$, то $|u^{\mu}_k|^2_1\le\varphi_k(0)/\alpha_1$. Следовательно, из любой последовательности $\mu'\to\infty$ можно выбрать подпоследовательность $\mu''\to\infty$ такую, что $u^{\mu}_k\rightharpoonup w$ в V, $u^{\mu}_k\to w$ в H, $u^{\mu}_k(l)\to w(l)$, при $\mu=\mu''\to\infty$, где $w\in V$. Поэтому из равенства $a(u^{\mu}_k,v)-\varphi_k(\mu)b(u^{\mu}_k,v) = {} = \varphi_k(\mu)\mu\, u^{\mu}_k(l)\,v(l)$ для $v\in V$, $v(l)\ne 0$, получим $u^{\mu}_k(l) = O(1/\mu)$ при $\mu=\mu''\to\infty$. Отсюда $w(l)=0$, $w\in V_0$, и используя нормировку $b(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k)+\mu\, c(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k) = 1$, выводим $b(w,w)=1$ и $w\ne 0$.

Таким образом, существует функция $w\in V_0$ такая, что $u^{\mu}_k\rightharpoonup w$ в V, $u^{\mu}_k\to w$ в H, $u^{\mu}_k(l)\to 0$, при $\mu=\mu''\to\infty$. Совершая предельный переход в уравнении $a(u^{\mu}_k,v) = \varphi_k(\mu)b(u^{\mu}_k,v)$ для любой функции $v\in V_0$ при $\mu=\mu''\to\infty$, получим $a(w,v) = \lambda^{(0)}_k b(w,v)$ для любой функции $v\in V_0$. Следовательно, $\lambda^{(0)}_k$ и $w=u^{(0)}_k$ — собственное значение и собственная функция задачи (8).

Сильная сходимость для подпоследовательности $u^{\mu}_k\to w$ в V при $\mu=\mu''\to\infty$, $w=u^{(0)}_k$, вытекает из соотношений

$$\alpha_1|u^{\mu}_k-w|^2_1 \le a(u^{\mu}_k-w,u^{\mu}_k-w) = a(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k)-2a(u^{\mu}_k,w)+a(w,w) = {}$$
$$= \varphi_k(\mu)b(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k)+\varphi_k(\mu)\mu c(u^{\mu}_k,u^{\mu}_k) -$$
$$-2\varphi_k(\mu)b(u^{\mu}_k,w)+\lambda^{(0)}_k \to \lambda^{(0)}_k - 2\lambda^{(0)}_k + \lambda^{(0)}_k = 0$$

при $\mu=\mu''\to\infty$.

Так как $\lambda^{(0)}_k$ – простое собственное значение задачи (8), то существует единственная собственная функция $u^{(0)}_k$, удовлетворяющая условиям $b(u^{(0)}_k,u^{(0)}_k)=1$, $b(u^{(0)}_k,u^{\mu}_k)>0$.

Предположим, что для некоторой последовательности $\mu'\to\infty$ существует положительная постоянная c, для которой имеет место соотношение $|u^{\mu}_k-u^{(0)}_k|_1\ge c$

при $\mu = \mu' \to \infty$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения для последовательности $\mu' \to \infty$, построим подпоследовательность $\mu'' \to \infty$, приводящую к противоречию $|u_k^\mu - u_k^{(0)}|_1 \to 0$ при $\mu = \mu'' \to \infty$. В результате для любой последовательности $\mu' \to \infty$ получим $|u_k^\mu - u_k^{(0)}|_1 \to 0$ при $\mu = \mu' \to \infty$, что эквивалентно сходимости $|u_k^\mu - u_k^{(0)}|_1 \to 0$ при $\mu \to \infty$.

Таким образом, $u_k^\mu \to u_k^{(0)}$ в V, $u_k^\mu(l) = O(1/\mu)$, при $\mu \to \infty$, где $b(u_k^\mu, u_k^\mu) + \mu c(u_k^\mu, u_k^\mu) = 1$, $u_k^\mu(l) > 0$, $\mu \in \Lambda$, $b(u_k^{(0)}, u_k^{(0)}) = 1$, $b(u_k^{(0)}, u_k^\mu) > 0$.

2) Пусть $k \geq 2$ и доказана сходимость $\varphi_i(\mu) \to \lambda_i^{(0)}$, $u_i^\mu \to u_i^{(0)}$ в V, $u_i^\mu(l) = O(1/\mu)$, при $\mu \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, где $b(u_i^\mu, u_i^\mu) + \mu c(u_i^\mu, u_i^\mu) = 1$, $u_i^\mu(l) > 0$, $b(u_i^{(0)}, u_i^{(0)}) = 1$, $b(u_i^{(0)}, u_i^\mu) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $\mu \in \Lambda$.

Повторяя рассуждения первого пункта доказательства для $k \geq 2$, получим сходимость $\varphi_k(\mu) \to \lambda_k^{(0)}$, $u_k^\mu \to u_k^{(0)}$ в V, $u_k^\mu(l) = O(1/\mu)$, при $\mu \to \infty$, $b(u_k^\mu, u_k^\mu) + \mu c(u_k^\mu, u_k^\mu) = 1$, $u_k^\mu(l) > 0$, $b(u_k^{(0)}, u_k^{(0)}) = 1$, $b(u_k^{(0)}, u_k^\mu) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mu \in \Lambda$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Имеет место сходимость* $\varphi_k(\mu) \to \lambda_k^{(1)}$, $u_k^\mu \to u_k^{(1)}$ *в* V, *при* $\mu \to 0$, *где* $b(u_k^\mu, u_k^\mu) + \mu c(u_k^\mu, u_k^\mu) = 1$, $u_k^\mu(l) > 0$, $\mu \in \Lambda$, $b(u_k^{(1)}, u_k^{(1)}) = 1$, $u_k^{(1)}(l) > 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Для $k \geq 0$ и $\mu \in \Lambda$ с помощью вариационных принципов (6), (7), получим

$$\varphi_k(\mu) = \min_{W \in \mathcal{E}_{k+1}} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R_\mu(v) \leq \min_{W \in \mathcal{E}_{k+1}} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R_0(v) = \lambda_k^{(1)}.$$

Отсюда в силу монотонности функции $\varphi_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, существует число ν_k такое, что

$$\nu_k = \lim_{\mu \to 0} \varphi_k(\mu) \leq \lambda_k^{(1)}.$$

Из равенства $a(u_k^\mu, u_k^\mu) = \varphi_k(\mu)$ выводим $\alpha_1 |u_k^\mu|_1^2 \leq a(u_k^\mu, u_k^\mu) = \varphi_k(\mu) \leq \lambda_k^{(1)}$ для $\mu \in \Lambda$. Поэтому из любой последовательности $\mu' \to 0$ можно выбрать подпоследовательность $\mu'' \to 0$ такую, что $u_k^\mu \rightharpoonup w$ в V, $u_k^\mu \to w$ в H, $u_k^\mu(l) \to w(l)$, при $\mu = \mu'' \to 0$, где $w \in V$.

Используя нормировку $b(u_k^\mu, u_k^\mu) + \mu\, c(u_k^\mu, u_k^\mu) = 1$, выводим $b(w, w) = 1$ и $w \neq 0$.

Таким образом, существует функция $w \in V$ такая, что $u_k^\mu \rightharpoonup w$ в V, $u_k^\mu \to w$ в H, $u_k^\mu(l) \to w(l)$, при $\mu = \mu'' \to 0$. Совершая предельный переход в уравнении $a(u_k^\mu, v) = \varphi_k(\mu)(b(u_k^\mu, v) + \mu c(u_k^\mu, v))$ для любой функции $v \in V$ при $\mu = \mu'' \to 0$, получим равенство $a(w, v) = \nu_k b(w, v)$ для любой функции $v \in V$. Следовательно, ν_k и $w = w_k$ — собственное значение и собственная функция задачи (10).

Поскольку $b(w_i, w_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, k$, то $\dim W_{k+1} = k + 1$ для $W_k = \mathrm{span}\{w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$, и, следовательно, с учётом (6), (7), выводим

$$\lambda_k^{(1)} = \min_{W \in \mathcal{E}_{k+1}} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R_0(v) \leq \max_{v \in W_{k+1} \setminus \{0\}} R_0(v) = \nu_k \leq \lambda_k^{(1)}.$$

В результате получаем равенства $\nu_k = \lambda_k^{(1)}$ и $w_k = u_k^{(1)}$.

Сильная сходимость для подпоследовательности $u_k^\mu \to w$ в V при $\mu = \mu'' \to 0$, $w = u_k^{(1)}$, вытекает из соотношений

$$\alpha_1 |u_k^\mu - w|_1^2 \leq a(u_k^\mu - w, u_k^\mu - w) = a(u_k^\mu, u_k^\mu) - 2a(u_k^\mu, w) + a(w, w) =$$
$$= \varphi_k(\mu) - 2\varphi_k(\mu) b(u_k^\mu, w) + \lambda_k^{(1)} \to \lambda_k^{(1)} - 2\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)} = 0.$$

Так как $\lambda_k^{(1)}$ – простое собственное значение задачи (10), то существует единственная собственная функция $u_k^{(1)}$, удовлетворяющая условиям $b(u_k^{(1)}, u_k^{(1)}) = 1$, $u_k^{(1)}(l) > 0$.

Предположим, что для некоторой последовательности $\mu' \to 0$ существует положительная постоянная c, для которой имеет место соотношение $|u_k^\mu - u_k^{(1)}|_1 \geq c$ при $\mu = \mu' \to 0$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения для последовательности $\mu' \to 0$, построим подпоследовательность $\mu'' \to 0$, приводящую к противоречию $|u_k^\mu - u_k^{(1)}|_1 \to 0$ при $\mu = \mu'' \to 0$. В результате для любой последовательности $\mu' \to 0$ получим $|u_k^\mu - u_k^{(1)}|_1 \to 0$ при $\mu = \mu' \to 0$, что эквивалентно сходимости $|u_k^\mu - u_k^{(1)}|_1 \to 0$ при $\mu \to 0$.

Таким образом, $u_k^\mu \to u_k^{(1)}$ в V при $\mu \to 0$, где $b(u_k^\mu, u_k^\mu) + \mu c(u_k^\mu, u_k^\mu) = 1$, $u_k^\mu(l) > 0$, $\mu \in \Lambda$, $b(u_k^{(1)}, u_k^{(1)}) = 1$, $u_k^{(1)}(l) > 0$. Теорема доказана. □

4. Аппроксимация задачи

Зададим разбиение отрезка $[0, l]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N_h$, на элементы $e_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, $h = l/N_h$. Пусть V_h есть подпространство пространства V, состоящее из непрерывных функций v^h, линейных на каждом элементе e_i, $i = 1, 2, \ldots, N_h$. Размерность подпространства V_h равна N_h.

Метод конечных элементов бесконечномерной вариационной задаче (5) ставит в соответствие конечномерную задачу: найти $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(u^h, v^h) = \lambda^h \left(b(u^h, v^h) + \mu\, c(u^h, v^h)\right) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{11}$$

Если W_h – подпространство пространства V_h, то обозначим

$$(W_h)_a^\perp = \{v^h : \ v^h \in V_h,\ a(v^h, w^h) = 0\ \forall w^h \in W_h\}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_k^h(W_h)$ множество всех k-мерных подпространств пространства W_h при $k \geq 1$. Множество $\mathcal{E}_0^h(W_h)$ состоит только из $\{0\}$. Положим $\mathcal{E}_k^h = \mathcal{E}_k^h(V_h)$ при $k \geq 0$.

Задача (11) имеет N_h положительных простых собственных значений $\lambda_k^h = \varphi_k^h(\mu)$, $k = 0, 1, \ldots, N_h - 1$, $0 < \lambda_0^h < \lambda_1^h < \ldots < \lambda_{N_h - 1}^h$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных функций u_k^h, $k = 0, 1, \ldots, N_h - 1$, которую можно выбрать согласно условиям:

$$a(u_i^h, u_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}, \quad b(u_i^h, u_j^h) + \mu c(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, N_h - 1.$$

Функции u_k^h, $k = 0, 1, \ldots, N_h - 1$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве V_h. Выполняется соотношение $u_k^h(l) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, N_h - 1$. Кроме того, справедливы [1, 2] вариационные свойства

$$\lambda_{k-1}^h = \min_{v^h \in (E_{k-1}^h)_a^\perp \setminus \{0\}} R(v^h) = \max_{v^h \in E_k^h \setminus \{0\}} R(v^h),$$

$$\lambda_{k-1}^h = \max_{W_h \in \mathcal{E}_{k-1}^h} \ \min_{v^h \in (W_h)_a^\perp \setminus \{0\}} R(v^h) = \min_{W_h \in \mathcal{E}_k^h} \ \max_{v^h \in W_h \setminus \{0\}} R(v^h),$$

где $E_k^h = \operatorname{span}\{u_0^h, u_1^h, \ldots, u_{k-1}^h\}$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, $E_0^h = \{0\}$, $(E_0^h)_a^\perp = V_h$.

Функции $\varphi_k^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $k = 0, 1, \ldots, N_h - 1$, являются непрерывными убывающими функциями. Эти результаты устанавливаются аналогично бесконечномерному случаю.

Теорема 4. *Для достаточно малых h справедливы оценки погрешности*

$$0 \le \lambda_k^h - \lambda_k \le ch^2, \quad |u_k^h - u_k|_1 \le ch, \quad |u_k^h - u_k|_0 \le ch^2, \quad |u_k^h - u_k|_{0,\infty} \le ch^2,$$

где c – постоянная, не зависящая от h, $u_k(l) > 0$, $u_k^h(l) > 0$,

$$b(u_k, u_k) + \mu c(u_k, u_k) = 1, \quad b(u_k^h, u_k^h) + \mu c(u_k^h, u_k^h) = 1.$$

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается с помощью результатов работ [1, 2, 4]. Теорема доказана. □

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90063.

Литература

1. *Babuška I., Osborn J.E.* Eigenvalue problem // Handbook of Numerical Analysis. V. II: Finite element methods / Ed. by P.G. Ciarlet, J.L. Lions. – Amsterdam: North-Holland, 1991. – P. 642–787.
2. *Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Наука, 1983. – 424 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
4. *Solov'ev S.I.* Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differ. Equations. – 2017. – V. 53, No 3. – P. 409–423. – doi: 10.1134/S0012266117030119.
5. *Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д.* Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с.

Поступила в редакцию
14.09.2019

Самсонов Антон Андреевич, аспирант кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*

Соловьёв Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *sergei.solovyev@kpfu.ru*

Коростелева Диана Маратовна, преподаватель кафедры «Информатика и информационно-управляющие системы»

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 1, pp. 52–65

doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.52-65

Asymptotic Properties of the Problem on Eigenvibrations of the Bar with Attached Load

A.A. Samsonov[a*], *S.I. Solov'ev*[a**], *D.M. Korosteleva*[b***]

[a]*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
[b]*Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*
E-mail: **anton.samsonov.kpfu@mail.ru*, ***sergei.solovyev@kpfu.ru*,
****diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*

Received September 14, 2019

Abstract

The ordinary second-order differential eigenvalue problem describing eigenvibrations of an elastic bar with a load attached to its end was investigated. The problem has an increasing sequence of positive simple eigenvalues with a limit point at infinity. To the sequence of eigenvalues, there corresponds a complete orthonormal system of eigenfunctions. In the paper, the behavior of the solutions in dependence on the load mass was studied. More precisely, limit differential eigenvalue problems were formulated and the convergence of the eigenvalues and eigenfunctions of the initial problem to the corresponding eigenvalues and eigenfunctions of the limit problems as load mass tending to infinity were proved. The original differential eigenvalue problem was approximated by the mesh scheme of the finite element method on a uniform grid. Error estimates for approximate eigenvalues and eigenfunctions were established. The results of this paper can be generalized for the cases of more complicated and important applied problems on eigenvibrations of beams, plates, and shells with attached loads.

Keywords: eigenvibration of bar, eigenvalue, eigenfunction, eigenvalue problem, mesh approximation, finite element method

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-90063).

References

1. Babuška I., Osborn J.E. Eigenvalue problem. In: *Handbook of Numerical Analysis*. Vol. II: Finite element methods. Ciarlet P.G., Lions J.L. (Eds.). Amsterdam, North-Holland, 1991, pp. 642–787.
2. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1983. 424 p. (In Russian)
3. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p. (In Russian)
4. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load. *Differ. Equations*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 409–423. doi: 10.1134/S0012266117030119.

5. Andreev L.V., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* [Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 200 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*: *Самсонов А.А., Соловьёв С.И., Коростелева Д.М.* Асимптотические свойства задачи о собственных колебаниях стержня с присоединённым грузом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 1. – С. 52–65. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.52-65. ⟩

⟨ ***For citation*:** Samsonov A.A., Solov'ev S.I., Korosteleva D.M. Asymptotic properties of the problem on eigenvibrations of the bar with attached load. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 52–65. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.52-65. (In Russian) ⟩