

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
”Казанский (Приволжский) федеральный университет”
Институт вычислительной математики и информационных технологий

В. М. Конюхов, А. Н. Чекалин, М. Г. Храмченков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА РАССОЛОВ
В ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ**

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2016

Оглавление

Предисловие	3
1 Математическая модель фильтрации рассолов	5
1.1 Физическое и математическое описание	5
1.2 Основные особенности и свойства решения	9
1.3 Постановка граничных условий	14
1.3.1 Граничные условия для насыщенности	14
1.3.2 Граничные условия для давления	17
2 Аналитические решения одномерных задач	19
2.1 Формирование неподвижного пятна рассола	21
2.2 Задача расслоения «рассол над водой»	27
2.3 Внедрение рассола через зеркало грунтовых вод	29
3 Численная модель миграции рассола	37
3.1 Разностная схема	37
3.2 Итерационный метод расчета давления	39
3.3 Метод вычисления насыщенности	42
Литература	54

Предисловие

В пособии изложены материалы лекций по курсу «Математическое моделирование и численные методы» для студентов кафедры прикладной математики Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета, специализирующихся в области математического моделирования, а также по курсу «Введение в численные методы» для студентов кафедры общей геологии и гидрогеологии Института геологии и нефтегазовых технологий по специальности «Гидрогеология, инженерная геология и геокриология».

Рассмотрены особенности распространения тяжелых высокоминерализованных водных растворов (рассолов) в наклонных водоносных горизонтах сложного строения. Для описания миграции рассолов используется известная математическая модель двухфазной фильтрации Баклея – Леверетта. На основе анализа экспериментальных данных в эту модель вносятся необходимые дополнения, позволяющие обобщить ее на случай совместной фильтрации разноплотностных жидкостей. Проведен анализ общих свойств решения построенной системы дифференциальных уравнений и с учетом полученной априорной информации разработаны численные методы решения задач миграции рассола.

Представленные методы решения конкретных прикладных задач направлены на выработку у студентов навыков самостоятельного выполнения математических выкладок. Эти задачи могут служить основой для семинарских занятий, курсовых и дипломных работ и ориентированы на достижение понимания студентами физической сущности изучаемых теоретических положений.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов физико-математических факультетов, знакомых с общими университетскими курсами естественно-научного цикла. Оно будет полезно также и аспирантам соответствующих специальностей.

Многие вопросы, затронутые в пособии, активно обсуждались с сотрудниками Казанского федерального университета. В пособии широко используются материалы монографии [6], редактирование рукописи которой было выполнено А.М. Елизаровым. Авторы с благодарностью учли его замечания, равно, как и пожелания других сотрудников университета.

Авторы заранее выражают свою признательность всем читателям за критические замечания и пожелания, которые будут присланы на их имя в адрес Казанского университета.

1. Математическая модель фильтрации рассолов

1.1. Физическое и математическое описание

Как известно (см., например, [8], [17], [18]), миграция высоко- и слабokonцентрированных растворов в пористых средах существенно различается по своей физической природе. В первом случае основное влияние на процесс фильтрации оказывает разность плотностей ρ_2 и ρ_1 пресной воды и рассола, а во втором – конвективно-молекулярный массооперенос.

При моделировании геофильтрации и переноса загрязнений в водоносных пластах особо приходится рассматривать ситуацию, когда в пласт поступает высококонцентрированный раствор. При этом часто оказывается возможным пренебречь изменением химического состава раствора ввиду высокого содержания хлоридов. Динамика загрязнения в этом случае главным образом определяется двумя факторами – геофильтрацией и разноплотностной конвекцией. Если тяжелые соленые растворы проникают в водоносный пласт сверху, через зону аэрации, то происходит гравитационное перераспределение жидкостей, которое носит неустойчивый характер и сопровождается образованием ”языков” (или ”пальцев”) [10], [16], [17], см. рис. 1.1, которое невозможно описать в рамках теории классической дисперсии. Более адекватной в этом случае оказывается схема двухфазной фильтрации, поскольку при развитии гравитационной неустойчивости смешением пресной и соленой воды можно пренебречь.

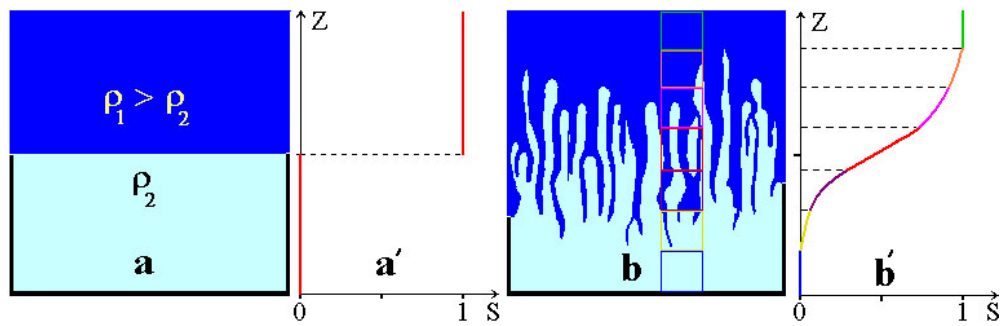


Рис. 1.1. Схема языкообразования при гравитационной фильтрации тяжелой и легкой жидкостей: а – начальная неустойчивая плоская граница их раздела в пористой среде; б – развитая пальцеобразная граница контакта между рассолом и пресной водой; а', б' – профили насыщенности пористой среды рассолом

Рассмотрим элементарный представительный объем пористой среды. Контуры таких ячеек схематично показаны на рис.1.1б. Гравитационная фильтрация рассола и воды протекает гораздо быстрее диффузионного выравнивания его концентрации, причем в силу струйного неустойчивого характера фильтрации часть пор элементарных объемов будет занята рассолом, а оставшаяся часть – пресной водой. Следовательно, каждая из этих жидкостей будет двигаться относительно друг друга в противоположном направлении по своим поровым каналам. Назовем насыщенностью долю объема пор, занятую рассолом, и обозначим ее через S , см. рис. 1.1, а' и б'. Очевидно, доля объема пор, занятых водой, составит $1 - S$.

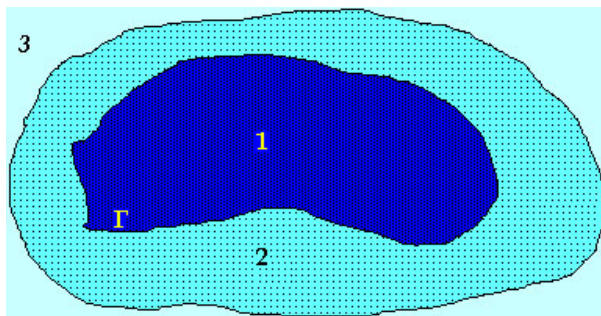


Рис. 1.2. Строение пятна загрязнения. 1 – ядро; 2 – ореол; 3 – зона пресной воды

Зона 3 – область водоносного горизонта, занятая пресной водой: здесь $S = 0$. Между этими двумя зонами находится зона 2 (ореол), представляющая собой часть порового пространства, в котором присутствуют как рассол с насыщенностью S , меньшей единицы ($0 < S < 1$), так и пресная вода. Подобласти 1 и 2 составляют пятно загрязнения, причем

В области пласта, занятой пятном загрязнения, можно выделить три характерные зоны, схематично показанные на рис. 1.2. Зона 1 – это часть коллектора, все поры которого полностью насыщены рассолом, т. е. в ней $S = 1$. В дальнейшем эту зону будем называть ядром пятна загрязнения.

формирование ореола обусловлено неустойчивыми процессами языкообразования при внедрении рассола в пресную воду.

Отметим, что граница Γ подобласти 1 является подвижной и перемещается в процессе миграции рассола. Очевидно, при устойчивом режиме фильтрации рассола и воды (например, когда вода находится над рассолом) ореол отсутствует, и на границе Γ раздела фаз насыщенность изменяется скачком от 0 до 1.

Подчеркнем, что начальная концентрация C_0 соли в рассоле не изменяется, следовательно, ядро – это часть коллектора, полностью насыщенная рассолом постоянной концентрации $C = C_0 = \text{const}$. В ореоле насыщенность S является функцией координат и времени, так что в этой зоне концентрация C соли в единице элементарного объема определяется простым соотношением: $C = SC_0$.

Уравнения миграции рассола. Внедрение рассола и его последующая миграция в водоносном пласте в основном определяются силой тяжести, инфильтрационным потоком и напорным течением в горизонтальном направлении. При решении задач геофильтрации влияние этих факторов часто преобладает над конвективно-молекулярным переносом (в силу медленности этого процесса), поэтому при построении математической модели диффузией соли из рассола в пресную воду можно пренебречь. Поскольку рассол и вода движутся по собственным каналам и перемешивание между ними практически отсутствует, то их можно рассматривать как отдельные фазы. Тогда описание их совместного движения можно выполнить на основе модели двухфазной фильтрации, в рамках которой скорости фильтрации рассола (1-я фаза) и воды (2-я фаза) подчиняются обобщенному закону Дарси (см., например, [1]):

$$\mathbf{V}_i = -\frac{K}{\mu_i} K_i^* (\nabla P + \rho_i \mathbf{g}), \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

где K – абсолютная проницаемость, P – давление, μ_i , ρ_i , \mathbf{V}_i , K_i^* – коэффициент динамической вязкости, плотность, скорость и относительная фазовая проницаемость i -й фазы, \mathbf{g} – ускорение силы тяжести.

Так как на границе раздела фаз капиллярные эффекты отсутствуют, то обе фазы сохраняют подвижность при любых значениях насыщенности, и фазовые проницаемости K_1^* и K_2^* являются функциями, линейно зависящими от соответствующих насыщенностей, т. е.

$$K_1^* = S, \quad K_2^* = 1 - S, \quad S \in (0, 1). \quad (1.2)$$

Более того, как показано в работе [2], именно такой вид фазовых проницаемостей позволяет описать неустойчивый характер двухфазных течений при развитии языкообразования.

Уравнения неразрывности фаз записываются в обычном виде:

$$m \frac{\partial (\rho_1 S)}{\partial \tau} + \operatorname{div} (\rho_1 \mathbf{V}_1) = 0, \quad m \frac{\partial (\rho_2 (1 - S))}{\partial \tau} + \operatorname{div} (\rho_2 \mathbf{V}_2) = 0. \quad (1.3)$$

Введем суммарную скорость фильтрации $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. Тогда из соотношений (1.1) будем иметь

$$\mathbf{V} = -\frac{K^* K}{\mu_2} (\nabla P + \rho \mathbf{g}), \quad \mathbf{V}_1 = f \mathbf{V} + \frac{K}{\mu_2} \rho_{1-2} \Psi \mathbf{g}, \quad (1.4)$$

где K^* – относительная подвижность суммарного потока, ρ – плотность двухфазной смеси, $\rho_{1-2} = \rho_1 - \rho_2$ – разность плотностей фаз, f – функция Баклея – Леверетта:

$$K^* = \mu K_1^* + K_2^*, \quad f = \mu K_1^* / K^*, \quad \Psi = f K_2^*, \quad (1.5)$$

$$\rho = f \rho_1 + (1 - f) \rho_2, \quad \mu = \mu_2 / \mu_1. \quad (1.6)$$

При фильтрации рассолов вязкости фаз и двухфазной смеси практически одинаковы, так что можно положить $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ мПа·с, $\mu = 1$. Тогда, учитывая линейность зависимостей фазовых проницаемостей от насыщенности S , соотношения (1.5) и (1.6) могут быть представлены в более простом виде, а именно:

$$K^* = 1, \quad f = S, \quad \Psi = S(1 - S), \quad \rho = S \rho_1 + (1 - S) \rho_2. \quad (1.7)$$

Отметим, что общие формулы (1.5), (1.6) остаются в силе и в случае фильтрации фаз с нелинейными относительными проницаемостями, например, при миграции тяжелой органической жидкости.

Поскольку плотность ρ_1 рассола постоянна, то из уравнений (1.3) следует

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad m \frac{\partial S}{\partial \tau} + \operatorname{div}\mathbf{V}_1 = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение суммарного двухфазного потока и уравнение неразрывности рассола справедливы во всем водоносном горизонте, т. е. во всех зонах 1 – 3 (см. рис. 1.2).

Относительно функций P и S системы уравнений (1.4), (1.8) являются эллиптической и гиперболической, соответственно. Постановка граничных условий для давления P не вызывает затруднений. Граничные условия для функции S должны быть заданы на тех частях границы, где рассол втекает в пласт. Формулировка этих условий в рассматриваемом случае имеет специфическую особенность, обусловленную тем, что поведение насыщенности S на границах связано с решением общей задачи внутри всей области фильтрации. Поэтому их корректная постановка требует проведения предварительного анализа поведения функции S .

1.2. Основные особенности и свойства решения

1. О направлениях скоростей фаз. Как отмечалось выше, высококонцентрированный раствор и вода могут двигаться в противоположных направлениях. Покажем, что уравнения двухфазной фильтрации описывают такой режим течения.

Для этого достаточно рассмотреть зависимость вертикальной составляющей V_{1z} скорости фильтрации \mathbf{V}_1 рассола от насыщенности S при различных фиксированных значениях проекции V_z суммарной скорости \mathbf{V} . Положив, как и ранее, для простоты $\mu_1 \approx \mu_2$ и обозначив разность удельных весов фаз через $\gamma_{1-2} = \rho_{1-2}g$, с учетом выражений (1.2) для относительных фазовых проницаемостей будем иметь

$$V_{1z} = SV_z + K\gamma_{1-2}S(1 - S),$$

где $S \in [0, 1]$. Отсюда следует, что $V_{1z} = 0$ при $S = 0$ и $V_{1z} = V_z$ при $S = 1$,

так что парабола $V_{1z}(S)$ проходит через начало координат и в зависимости от величины V_z может иметь максимум или внутри интервала при некотором $\bar{S} \in (0, 1)$, или на его границах. Типичные качественные зависимости функции $V_{1z}(S)$ для четырех характерных значений суммарного потока V_z приведены на рис. 1.3, а.

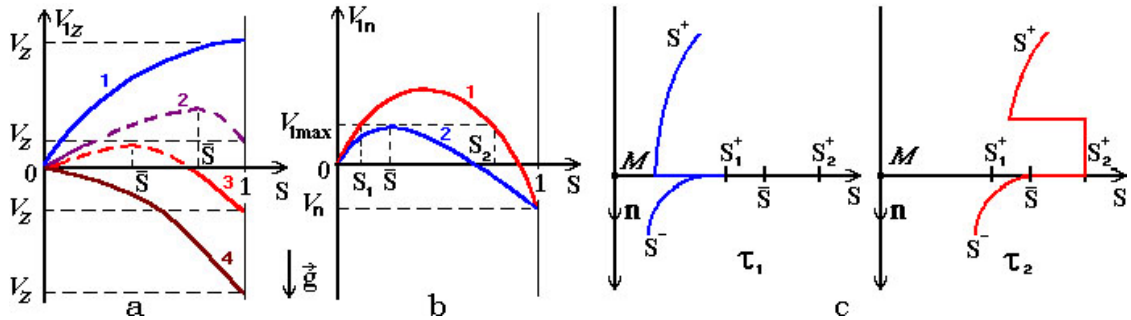


Рис. 1.3. К анализу поведения и свойств решения задачи. а – зависимость скорости $V_{1z}(S)$ фильтрации рассола от насыщенности S при различных значениях V_z ; б – зависимость $V_{1n}(S)$ на линии разрыва проницаемости K ; в – профили функции S при формировании подвижных скачков в окрестности точки $M \in \Gamma_D$ границе разрыва ($K^+ > K^-$)

Если функция $V_{1z}(S)$ имеет максимум либо при $S = 1$ (кривая 1), либо при $S = 0$ (кривая 4), то это означает, что обе фазы движутся в одном направлении. Если ее максимум достигается при $S = \bar{S}$ (кривые 2 и 3), то, очевидно, из равенства $V_z = V_{1z} + V_{2z}$ следует, что для значений S из некоторой окрестности точки $S = \bar{S}$ скорости рассола и воды будут противоположно направленными. В случае 2 это выполняется для тех значений насыщенности, при которых $V_{1z} > V_z$, а в случае 3 – при $V_{1z} > 0$. На рис. 1.3, а сплошные и пунктирные участки кривых соответствуют движению обеих фаз в одинаковом и противоположном направлениях соответственно. Кривая 2 соответствует случаю однонаправленного движения рассола и смеси, а кривая 3 – случаю противоположного движения.

2. Насыщенность на границах разрыва проницаемости. Другая особенность решения рассматриваемых задач связана с тем, что пласты могут иметь слоисто-неоднородную структуру. В этом случае абсолютная проницаемость является кусочно-непрерывной функцией, т. е. имеет разрывы 1-го рода. На них должны выполняться условия сопряжения: равен-

ство давлений и непрерывность нормальных составляющих потоков флюидов. Обозначим через K^+ и K^- значения проницаемости с разных сторон поверхности разрыва Γ_D , и пусть D^+ и D^- – области пористой среды, прилегающие к этой поверхности. Верхние индексы “+” и “-” обозначают значения функций в граничной окрестности D^+ и D^- . Тогда условия сопряжения записываются в виде

$$P^+ = P^-, \quad V_n^+ = V_n^-, \quad V_{1,n}^+ = V_{1,n}^-, \quad (1.9)$$

где \mathbf{n} – внешняя по отношению к области D^+ нормаль в произвольной точке M . Из последнего равенства в (1.9) и выражения (1.4) для скорости \mathbf{V}_1 следует, что

$$(f^+ - f^-) V_n = -\gamma_{1-2} \cos \alpha (K^+ \Psi^+ - K^- \Psi^-). \quad (1.10)$$

Здесь $V_n = V_n^+ = V_n^-$, $\Psi^+ = \Psi(S^+)$, $f^- = f(S^-)$, $\Psi^- = \Psi(S^-)$, α – угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{g} в рассматриваемой точке.

Из равенства (1.10) следуют три важных свойства функции S .

Во-первых, если $\alpha = \pi/2$ в некоторой точке $M \in \Gamma_D$, то $f^+ = f^-$, так что функция S непрерывна в этой точке в силу однозначности $f(S)$.

Во-вторых, если $\alpha \neq \pi/2$ в некоторой точке $M \in \Gamma_D$, то $S^+ \neq S^-$, т. е. в таких точках разрыва абсолютной проницаемости насыщенность теряет непрерывность.

В-третьих, если поверхность разрыва является непроницаемой (например, когда $K^- = 0$), то и из соотношения (1.10) следует, что $\Psi^+ = 0$. Это возможно только при $S = 0$ или при $S = 1$. Следовательно, на непроницаемой границе могут находиться или только вода, или только рассол. Отсюда можно сделать вывод, что как только рассол достигнет непроницаемой границы (кроме вертикальной), то насыщенность S мгновенно становится равной 1.

3. Формирование подвижных скачков насыщенности. Обсудим дополнительно некоторые свойства искомого решения, порожденные разрывом абсолютной проницаемости. На рис. 1.3, b показаны характерные

графики 1 и 2 функций $V_{1,n}^+(S)$ и $V_{1,n}^-(S)$ в некоторой точке $M \in \Gamma_D$ в зависимости от S . При этом кривая 1 отвечает потоку рассола из области D^+ с бóльшей проницаемостью K^+ , $K^+ > K^-$. В силу условия сопряжения $V_{1,n}^+ = V_{1,n}^-$ функция S со стороны этой области не может принимать значений из интервала (S_1, S_2) , где S_1 и S_2 – проекции на ось S точек пересечения касательной к кривой 2 при $S = \bar{S}$, что хорошо видно на рисунке.

Пусть суммарный поток V_n направлен *сверху вниз* из области D^+ в область D^- , т. е. $V_n > 0$. Тогда может оказаться, что к поверхности разрыва поступает больше рассола, чем может "принять" область D^- в единицу времени через границу разрыва проницаемости. Очевидно, существует значение \bar{S} , при котором функция

$$V_{1n}(S) = SV_n + K^- \gamma_{1-2} \cos \alpha S (1 - S)$$

достигает наибольшего значения $V_{1\max}^-$. Тогда из условия $\partial V_{1n}(\bar{S})/\partial S = 0$ при заданном V_n получим уравнение $V_n + K^- \gamma_{1-2} \cos \alpha (1 - 2\bar{S}) = 0$ для определения \bar{S} . Поскольку $\bar{S} \in [0, 1]$, то при $\alpha \neq \pi/2$

$$\bar{S} = \min \{1; 0.5 (1 + V_n/(K^- \gamma_{1-2} \cos \alpha))\}. \quad (1.11)$$

Итак,

$$V_{1\max}^- = \max_{S \in [0,1]} V_{1n}^- = V_{1n}^-(\bar{S}). \quad (1.12)$$

Зная величину $V_{1\max}^-$ в точке $M \in \Gamma_D$ в области D^- , найдем значение функции S^+ в области D^+ из условия (1.9) сопряжения скоростей рассола. Обозначим через $A^+ = K^+ \gamma_{1-2} \cos \alpha$ в уравнении $V_{1n}^+(S) = V_{1\max}^-$, приведем его к виду $S^2 - (1 + V_n/A^+)S + V_{1\max}^-/A^+ = 0$. Это уравнение имеет два вещественных корня:

$$S_{1,2}^+ = 0.5 \left(1 + V_n/A^+ \mp \sqrt{(1 + V_n/A^+)^2 - 4V_{1\max}^-/A^+} \right).$$

Так как функция S определена только в интервале $[0, 1]$, то

$$S_1^+ = 0.5 \left(1 + V_n/A^+ - \sqrt{(1 + V_n/A^+)^2 - 4V_{1\max}^-/A^+} \right),$$

$$S_2^+ = \min \left\{ 1; 0.5 \left(1 + V_n/A^+ + \sqrt{(1 + V_n/A^+)^2 - 4V_{1\max}^-/A^+} \right) \right\}. \quad (1.13)$$

Поскольку при $S \in (S_1^+, S_2^+)$ выполняется неравенство $V_{1n}^+(S) > V_{1\max}^-$, то на поверхности разрыва $S^+ \notin (S_1^+, S_2^+)$. Отсюда следует, что если в области D^+ в точке $M \in \Gamma_D$ насыщенность S^+ возрастает то, достигнув в некоторый момент времени $\tau = \bar{\tau}$ величины S_1^+ , функция S^+ мгновенно скачком изменяется до значения S_2^+ . Таким образом, на поверхности разрыва в области D^+ происходит формированиедвигающегося ”вверх” скачка насыщенности с переменной амплитудой, бóльшее значение S_2^+ которой остается неизменным. В качестве иллюстрации на рис. 1.3, с приведены профили насыщенности S по направлению нормали к точке $M \in \Gamma_D$ на моменты τ_1 и τ_2 до и после образования скачка соответственно.

Теперь рассмотрим случай, когда область D^+ расположена под областью D^- . В этом случае $S^- \leq \bar{S}$, а $S^+ \leq S_1^+$. Даже если в начальный момент времени τ_0 область D^- была полностью насыщена рассолом ($S = 1$), а область D^+ – водой ($S = 0$), то при $\tau > \tau_0$ насыщенность в этих областях на поверхности разрыва будет равна соответственно $S^- = \bar{S}$ и $S^+ = S_1^+$. Такое состояние сохраняется до тех пор, пока ”снизу” не придет скачок насыщенности, ”отраженный” от менее проницаемых нижележащих слоев, либо пока весь рассол не покинет область D^- .

Таким образом, наличие разрыва абсолютной проницаемости приводит не только к образованию неподвижного скачка функции S , но может породить и подвижные скачки.

Пусть теперь суммарный поток V_n направлен *снизу вверх*, т. е. $V_n < 0$. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда область D^+ расположена над областью D^- и суммарная скорость такова, что $V_{1n}^-(S) < 0$ при любых значениях насыщенности S , а $V_{1n}^+(S)$ – знакопеременна.

При таких условиях в области D^- обе фазы (конечно же, при наличии рассола в D^-) могут двигаться только строго в одном направлении (вверх), а в области D^+ при тех значениях S , при которых $V_{1,n}^+(S) > 0$, фазы будут двигаться в противоположных направлениях. Следовательно, в области D^+ рассол может опускаться вниз, несмотря на то, что поток воды направлен вверх, но только до поверхности разрыва, так как

в области D^- он может двигаться только вверх. Значение насыщенности $S^* = 1 + V_n / (K^+ \gamma_{1-2} \cos \alpha)$, при котором функция $V_{1n}^+(S)$ меняет знак, находится из условия $V_{1n}^+(S^*) = 0$. Тогда, если $S^- = 0$, то $S^+ = S^*$. Это означает, что на поверхности разрыва Γ_D образуется "висячий" скачок насыщенности.

Такое свойство функции S может привести к формированию неподвижных пятен рассола внутри неоднородного водоносного пласта на поверхностях разрыва абсолютной проницаемости, причем такие пятна образуются в области с большей проницаемостью, расположенной над менее проницаемой областью. Подробно это свойство обсуждается в параграфе 2.

1.3. Постановка граничных условий

В дальнейшем особенности миграции рассола исследуется на примере вертикального разреза наклонного слоисто-неоднородного пласта длиной L и толщиной H (в плоскости XZ), образованного гидродинамически взаимосвязанными слоями с толщинами H_i , проницаемостями K_i и пористостями m_i , $i = \overline{1, N}$, N – число слоев. Направим ось OX вдоль кровли, а ось OZ – вниз ортогонально к ней, см. рис. 1.4.

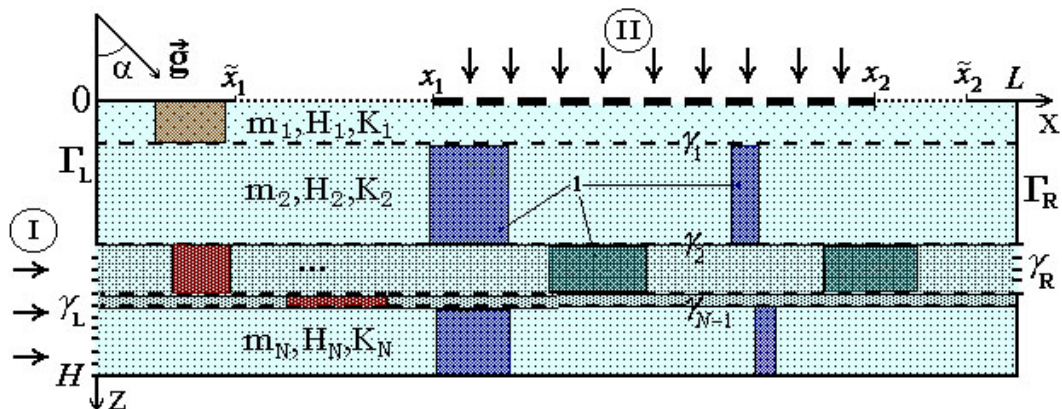


Рис. 1.4. Вертикальный разрез водоносного пласта. (I) и (II) – возможные положения источника загрязнения; γ_i – проницаемые границы слоев; 1 – включения

В данном случае проницаемые границы γ_i слоев являются линиями разрыва проницаемости, наклон α которых совпадает с углом наклона пласта. Слои могут также содержать включения с иной проницаемостью. Входы

и выходы слоев могут быть как проницаемыми (границы γ_L и γ_R), так и непроницаемыми (границы Γ_L и Γ_R).

1.3.1. Граничные условия для насыщенности

Выделим два основных типа задач в зависимости от пространственного местоположения источника загрязнения. В задачах I-го типа рассол поступает в пласт с боковым потоком через левую границу γ_L проницаемых слоев (например, интрузия морской воды в пресноводные горизонты). В задачах II-го типа рассол проникает в пласт под действием силы тяжести через некоторую часть x_1x_2 его кровли (зеркало грунтовых вод). В этих задачах, в свою очередь, возникают две различные ситуации, определяемые величиной интенсивности источника загрязнения на границе x_1x_2 .

А. Поток загрязнения малой интенсивности q проникает в водоносный горизонт в течение длительного времени τ_1 и может быть обусловлен, например, продолжительной утечкой загрязняющего вещества из резервуаров на земной поверхности.

В. Загрязнение поступает в пласт с максимально возможной интенсивностью, и известен его общий объем Q . Такая ситуация возникает, когда при аварии большая масса загрязнения вытекает из резервуаров в течение довольно короткого времени.

Выполненный выше анализ особенностей функции S позволяет теперь дать корректную постановку граничных условий.

В задачах I-го типа граничные условия на участке левой боковой границы, где загрязнение втекает в пласт, записывается в обычном виде:

$$S \Big|_{x=0, z \in \gamma_L^b} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq \tau_1, \\ 0, & \tau > \tau_1, \end{cases} \quad S \Big|_{x=0, z \in \gamma_L^f} = 0, \quad \tau > 0, \quad (1.14)$$

где γ_L^b и γ_L^f – участки границы γ_L ($\gamma_L = \gamma_L^b \cup \gamma_L^f$), через которые в пласт поступают рассол и вода соответственно, τ_1 – время прекращения поступления рассола в пласт.

Замечание. Если на некотором участке левой границы γ_L в ходе решения возникает такая ситуация, когда рассол начинает вытекать из пласта, то насыщенность определяется из решения уравнения (1.8), а не из соотношения (1.14). Аналогично, если на некоторых частях правой открытой границы γ_R суммарный поток становится направленным внутрь области, то $V_{1,n} = 0$, т. е. рассол здесь может только вытекать из пласта.

В задачах II-го типа учитывается, что скачок насыщенности, отраженный от границ разрыва или от подошвы пласта, может достигнуть участка x_1x_2 , через который поступает рассол, и изменить интенсивность его притока q . С учетом этого граничное условие на x_1x_2 при $\tau \in (0, \tau_1)$ будет иметь вид

$$V_{1n} = \begin{cases} \mathbf{A} : \tilde{q}(x, \tau) = \min \{q; V_{1\max}(x, \tau)\}, \\ \mathbf{B} : V_{1\max}(x, \tau), \end{cases} \quad (1.15)$$

где величина $V_{1\max}$ определяется с помощью соотношений (1.11), (1.12). Но тогда для того, чтобы в А-задачах заданная величина объема $Q = q(x_2 - x_1)\tau_1$ загрязнения сохранялась, необходимо задать не τ_1 , а объем Q , и время действия τ_1 источника загрязнения должно определяться из интегрального уравнения

$$Q = \int_0^{\tau} \int_{x_1}^{x_2} \tilde{q}(x, \tau) dx dt. \quad (1.16)$$

Если на некоторых участках левой и правой границ γ_L и γ_R при решении задачи окажется, что поток направлен внутрь пласта, то насыщенность S будем полагать равной нулю.

1.3.2. Граничные условия для давления

Граничные условия относительно давления не зависят от типа рассматриваемой задачи, обусловленного режимом притока рассола. Будем считать, что на боковых границах задается гидростатическое распределение давления. На левой границе проницаемых слоев при $x = 0$ может быть задано либо давление

$$P|_{x=0} = P_0 - g \cos \alpha \int_0^z \rho dz, \quad z \in \gamma_L, \quad (1.17)$$

либо расход Q_0 (при дополнительном условии для давления, обеспечивающем единственность решения системы уравнений (1.4), см. [12] – [14])

$$\int_0^H V_x|_{x=0} dz = Q_0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}|_{x=0} = g\rho \cos \alpha, \quad z \in \gamma_L. \quad (1.18)$$

Гидростатическое распределение давления по сечению γ_R выходов проницаемых слоев, расположенных на правой границе пласта при $x=L$, определим соотношением

$$P|_{x=L} = P_L - g \cos \alpha \int_0^z \rho dz, \quad z \in \gamma_R. \quad (1.19)$$

В соотношениях (1.17) и (1.19) через P_0 и P_L обозначены значения давления на кровле пласта в точках $x=0$ и $x=L$ соответственно.

В задачах обоих типов может учитываться инфильтрационный поток q_I пресной воды заданной интенсивности на некоторой части $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ кровли пласта:

$$V_n = V_{2n} = q_I, \quad x \in \tilde{x}_1\tilde{x}_2. \quad (1.20)$$

Подошва коллектора по всей его длине, кровля пласта вне зоны $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ инфильтрации, участки Γ_L и Γ_R боковых границ являются непроницаемыми. Поэтому на всех этих границах

$$V_n = 0, \quad V_{1n} = 0. \quad (1.21)$$

Однако, если в задачах II-го типа участок x_1x_2 не принадлежит интервалу $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, то на границе x_1x_2 задается условие $V_n = 0$, а величина V_{1n} определяется из соотношения (1.15).

Отметим также, что вместо условий (1.21) на непроницаемых границах в рассматриваемых задачах нельзя использовать условие типа $\partial P/\partial n = 0$, так как оно не обеспечивает непроницаемости этих границ.

Итак, сформулируем *математическую постановку задачи*: в области $\Omega = \{0 < x < L, 0 < z < H\}$ с границей $\partial\Omega$ при $\tau > 0$ требуется из си-

стемы уравнений (1.4) – (1.8) с условиями сопряжения (1.9), граничными условиями (1.14) – (1.21) и начальным условием

$$S(x, z, 0) = S^0(x, z) \quad (1.22)$$

найти функцию P , принадлежащую классу непрерывных функций с кусочно-непрерывными производными, и функцию S , принадлежащую классу однозначных, кусочно-непрерывных и ограниченных функций.

Для единственности решения задачи будем полагать, что наряду с дифференциальными законами сохранения (1.8) выполняются и их интегральные аналоги.

2. Аналитические решения одномерных задач

Как отмечалось выше, относительно функций P и S система (1.4) – (1.8) является эллиптической и гиперболической соответственно. Эта система обычно решается методом сеток. Для нелинейных задач, вообще говоря, нет доказательств сходимости или хотя бы устойчивости разностных схем. Соображения об их устойчивости и сходимости основываются на анализе линеаризованных задач. Как известно (см., например, [3]), даже наличие доказательств сходимости разностной схемы не гарантирует хорошее качество полученного по схеме решения. Действительно, сходимость в интегральных нормах обеспечивает только передачу некоторых интегральных характеристик, а в норме для разрывных решений сходимость отсутствует. Отсюда возникает необходимость проверки разностных схем на системе тестов. Тестами могут служить задачи, имеющие точное решение и содержащие специфические особенности рассматриваемого класса задач.

Для задачи миграции рассола основные особенности обусловлены характером поведения функции S . К ним относятся: 1) возникновение, эволюция и взаимовлияние скачков насыщенности, зарождающихся на линиях разрыва абсолютной проницаемости; 2) движение скачков насыщенности с переменной амплитудой как по направлению суммарного фильтрационного потока, так и против него; 3) формирование неподвижного ядра загрязнения на границе разрыва абсолютной проницаемости в восходящем фильтрационном потоке; 4) зависимость граничных условий, описывающих режимы втекания рассола в пористую среду, от решения внутри области фильтрации.

В качестве тестовой задачи рассмотрим фильтрацию рассола и пресной воды в вертикальной трубке тока единичного сечения. В этом случае суммарный поток постоянен по все ее длине, а система (1.4) – (1.8) сводится к одному уравнению относительно насыщенности:

$$m \frac{\partial S}{\partial \tau} + V_1' \frac{\partial S}{\partial Z} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$V_1 = S(V + A(1 - S)), \quad A = \frac{\rho_{1-2} g K}{\mu_2}, \quad V_1' = \frac{\partial V_1}{\partial S} = V + A(1 - 2S),$$

а ось OZ направлена вниз вдоль трубки тока.

Пусть абсолютная проницаемость K принадлежит классу кусочно-непрерывных функций. Тогда в точках ее разрыва должно выполняться условие сопряжения $[V_1] = 0$. Как известно, уравнение (2.1) имеет решение

$$Z(S, \tau) = Z_0(S) + V_1'(S) \tau / m. \quad (2.2)$$

Здесь $Z_0(S)$ – распределение насыщенности в начальный момент времени $\tau = 0$. Это решение справедливо только в области однозначности функции S . В противном случае появляется скачок насыщенности, определяемый из непрерывного многозначного решения (2.2) и из соответствующих балансовых соотношений. В решение (2.2) входит функция $V_1'(S)$, обращающаяся в нуль при $S = \bar{S} = 0.5(1 + V/A)$. Если $V < -A$, то $\bar{S} \in (0, 1)$, и функция $V_1(S)$ является знакопеременной. В этом случае, как следует из (2.2), значения насыщенности $S < \bar{S}$ будут двигаться в направлении силы тяжести, значения $S > \bar{S}$ – в противоположном направлении, а значение $S = \bar{S}$ останется неподвижным. Именно знакопеременность функции приводит к возможности возникновения указанных выше специфических особенностей задачи фильтрации рассола в пористой среде, неоднородной по абсолютной проницаемости.

Перейдем к построению решений для некоторых тестовых задач фильтрационного переноса рассола.

2.1. Формирование неподвижного пятна рассола

Пусть в некоторой точке \bar{Z} пористой среды имеется скачок абсолютной проницаемости K и

$$K = \begin{cases} K^-, & Z < \bar{Z}, \\ K^+, & Z > \bar{Z}, \end{cases}$$

где $K^+ < K^-$, т. е. область с бóльшей проницаемостью расположена над областью с меньшей проницаемостью. Суммарный поток \mathbf{V} направлен против вектора силы тяжести, так что его величина равна $-V$ ($V > 0$).

Если $A^+ < V < A^-$, то на участке с проницаемостью K^+ рассол не может опускаться вниз, а в области $Z < \bar{Z}$ он может не только подниматься вверх под действием суммарного потока, но и опускаться вниз, двигаясь против него. В данном примере будем считать, что суммарный поток удовлетворяет указанному неравенству.

Зададим начальное распределение насыщенности в виде

$$S = \begin{cases} 1, & Z \in [Z_1, Z_2], \\ 0, & Z \notin [Z_1, Z_2], \end{cases}$$

где $Z_2 < Z_1 < \bar{Z}$, т. е. рассол находится выше точки \bar{Z} разрыва проницаемости K , см. рис. 2.1, а, и насыщенность имеет два скачка: нижний в точке Z_1 и верхний в точке Z_2 .

Очевидно, что при $\tau > 0$ произойдет распад нижнего скачка, и решение определяется по формуле

$$Z(S, \tau) = Z_1 + (A^- - V - 2A^- S) \tau / m. \quad (2.3)$$

Верхний же скачок при $\tau > 0$ сохранится и вначале будет подниматься со скоростью V/m . Так как $V < A^-$, то языки рассола будут двигаться вниз и достигнут границы $Z = \bar{Z}$ в момент времени

$$\tau_1 = m (\bar{Z} - Z_1) / (A^- - V). \quad (2.4)$$

Поскольку $V > A^+$, то рассол не может проникнуть в область $Z > \bar{Z}$.

Это значит, что $V_1^+ = 0$, и в силу условия сопряжения $V_1^- = 0$. Отсюда

$$Z_G = Z_F = Z_1 + (A^- - V - 2A^- S_H^-) \tau / m, \quad S_G = 0, \quad S_F = S_H^-;$$

$$Z_B = Z_D = \bar{Z} = Z_1 + (A^- - V) \tau_1 / m, \quad S_B = 0, \quad S_D = S_H^+.$$

Отсюда $AG = 2A^- S_H^- \tau / m$, $BG = 2A^- S_H^- \tau / m - (A^- - V) (\tau - \tau_1) / m$, $GF = S_H^-$, $BD = S_H^+$, так что для определения S_H^- получим уравнение

$$A^- (S_H^-)^2 \tau = [2A^- S_H^- \tau - (A^- - V) (\tau - \tau_1)] S_H^+.$$

Учитывая, что $A^- - V = S_H^+ A^-$, после несложных преобразований получим при $Z = Z_F$:

$$S_H^- = S_H^+ \left(1 - \sqrt{\tau_1 / \tau}\right). \quad (2.6)$$

Как упоминалось выше, верхний скачок насыщенности движется в направлении суммарного потока V , и при $\tau > 0$ его подвижная координата $Z_B^{(1)}(\tau)$ определяется из соотношения $Z_B^{(1)} = Z_2 - V\tau/m$. Однако такое движение скачка с постоянной скоростью будет происходить только до тех пор, пока в некоторый момент τ_2 его не догонит значение $S = 1$ нижнего начального скачка: $Z_2 - V\tau_2/m = Z_1 - (V + A^-) \tau_2/m$. Отсюда

$$\tau_2 = m(Z_1 - Z_2)/A^-. \quad (2.7)$$

В этот момент верхний скачок достигнет точки $Z_{B,2}^{(1)} = Z_2 - V\tau_2/m$.

При $\tau > \tau_2$ амплитуда верхнего скачка начинает убывать за счет большего значения S_B^+ на нем, которое до момента τ_2 было постоянным и равнялось единице. Вследствие этого скорость его движения вверх начинает уменьшаться. Значение насыщенности S_B^+ на скачке также найдем из балансовых соотношений.

Решение и дополнительные построения в окрестности верхнего скачка насыщенности в некоторый момент времени $\tau > \tau_2$ показаны на рис. 2.1, с. Необходимо найти такую точку B , чтобы площади заштрихованных треугольников были равны. Нетрудно проверить, что $AC \cdot BC = AF \cdot FE - DF \cdot FE$. Запишем координаты входящих в это равенство точек:

$$Z_A = Z_1 + (A^- - V) \tau / m, \quad S_A = 0;$$

$$Z_C = Z_B = Z_1 + (A^- - V - 2A^-S_B^+) \tau / m, \quad S_C = 0, \quad S_B = S_B^+;$$

$$Z_F = Z_E = Z_1 - \frac{(A^- + V) \tau}{m} = Z_{B,2}^{(1)} - \frac{(A^- + V) (\tau - \tau_2)}{m},$$

$$S_F = 0, \quad S_E = 1; \quad Z_D = Z_{B,2}^{(1)} + (A^- - V) (\tau - \tau_2) / m, \quad S_D = 0.$$

Отсюда

$$AC = 2A^-S_B^+\tau/m, \quad BC = S_B^+, \quad AF = 2A^-\tau/m,$$

$$FE = 1, \quad DF = 2A^-(\tau - \tau_2)/m.$$

Тогда

$$S_B^+ = \sqrt{\tau_1/\tau}. \quad (2.8)$$

Координата скачка определяется равенством

$$Z_B^{(2)} = Z_1 + (A^- - V - 2A^-S_B^+) \tau / m. \quad (2.9)$$

При $0.5S_B^+ > \bar{S}$ этот скачок движется вверх, при $0.5S_B^+ = \bar{S}$ останавливается, а при $0.5S_B^+ < \bar{S}$ начинает двигаться вниз. Таким образом, при $\tau > \tau_2 / (S_H^+)^2$ верхний и нижний отраженный скачки будут двигаться навстречу друг другу. Процесс закончится, когда они встретятся. Этот момент времени T определяется из уравнения $S_B^+ = S_H^-$, т. е. $S_H^+ (1 - \sqrt{\tau_1/T}) = \sqrt{\tau_2/T}$. Отсюда получим

$$T = \tau_1 \left(1 + \sqrt{\tau_2/\tau_1} / S_H^+ \right)^2. \quad (2.10)$$

Распределение насыщенности на момент T будет иметь вид

$$S(Z) = \begin{cases} 0, & Z > \bar{Z}, \\ S_H^+, & Z_T < Z < \bar{Z}, \\ 0, & Z < Z_T, \end{cases}$$

где значение Z_T определяется из соотношения $Z_T = \bar{Z} - Q/(mS_H^+)$. Здесь $Q = m(Z_1 - Z_2)$ – количество рассола, находящегося в пласте в начальный момент времени.

В качестве иллюстрации приведем решение задачи при конкретных исходных данных. Пусть вертикальная трубка тока пористостью $m=0.2$ имеет длину $H=100$ м. В точке $\bar{Z}=90$ м абсолютная проницаемость меняется

скачком от $K^- = 1 \text{ мкм}^2$ до $K^+ = 0.1 \text{ мкм}^2$. В начальный момент $\tau = 0$ рассол насыщает часть трубки при $Z_1 < Z < Z_2$, где $Z_1 = 35 \text{ м}$, $Z_2 = 76 \text{ м}$, а вода – всю оставшуюся ее часть, см. рис. 2.2. Разность относительных удельных весов фаз равна 0.05. При $\tau > 0$ вода поступает в нижнюю часть трубки и создает восходящий фильтрационный поток со скоростью $V = 0.02 \text{ м/сут}$. Такое значение V обеспечивает выполнение неравенства $A^+ < V < A^-$ ($A^+ = 0.005 \text{ м/сут}$, $A^- = 0.05 \text{ м/сут}$), необходимого для формирования неподвижного ядра рассола.

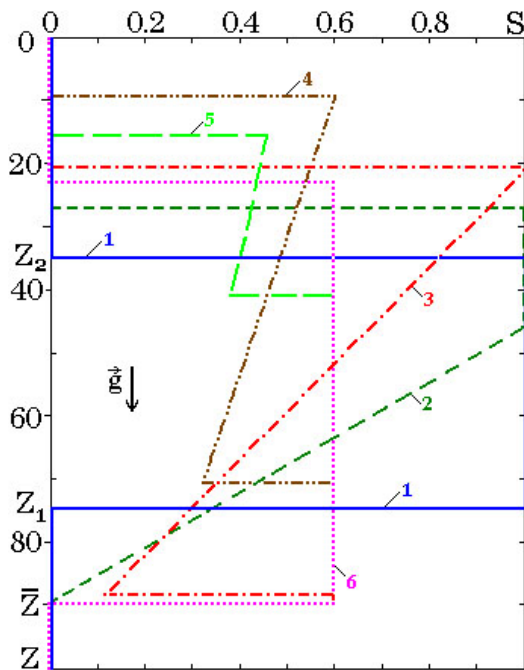


Рис. 2.2. Графики насыщенности $S(z)$ пористой среды рассолом на моменты времени $\tau = 0; 85; 160; 450; 780; 980 \text{ сут}$ (линии 1 – 6)

$Z = \xi$, с одной стороны которой $S(\xi + 0) > 0$, а с другой $S(\xi - 0) = 0$.

Верхний скачок вначале движется вверх с постоянной скоростью V до момента времени $\tau_2 = 160 \text{ сут}$ (линия 3). Затем при $\tau > \tau_2$ его скорость уменьшается, и когда значение S_B^+ достигнет величины S_H^+ , она обращается в нуль (линия 4). В этот момент ядро рассола достигает своего максимального размера ($9 \leq Z \leq 90 \text{ м}$). После этого направление скорости меняется на противоположное, и верхний скачок начинает двигаться навстречу отраженному скачку (линия 5) вплоть до их слияния при $T = 980 \text{ сут}$

Результаты расчетов по формулам (2.3) – (2.10) для данного примера представлены на рис. 2.2. Сплошная линия 1 соответствует начальной границе контакта между рассолом и водой.

При подходе переднего фронта к этой проницаемой границе в момент времени $\tau_1 = 85 \text{ сут}$ (кривая 2) здесь возникает отраженный скачок, большее значение которого, равное $S_H^+ = 0.60$, остается в дальнейшем постоянным (см. линии 3 – 6).

Замечание. Передний фронт здесь и в дальнейшем – это точка $Z = \zeta$, с одной стороны которой $S(\zeta + 0) = 0$, а с другой $S(\zeta - 0) > 0$. Задний фронт – это точка

(линия 6). В результате формируется неподвижное ядро тяжелого загрязнения в восходящем фильтрационном потоке, препятствующем внедрению рассола из верхней высокопроницаемой зоны пласта в слабопроницаемую нижнюю его часть. Интересно отметить, что данный эффект наблюдается также и в двумерном случае (см., например, [5], [15]).

Приведем некоторые расчетные соотношения для случая, когда ядро рассола в начальный момент времени $\tau_0 = 0$ находится в слабопроницаемой нижней зоне трубки тока в области D^- ниже точки разрыва \bar{Z} , т. е. $S = 1$ при $Z_2^0 \leq z \leq Z_1^0$ и $S = 0$ вне этого интервала, см. рис. 2.3.

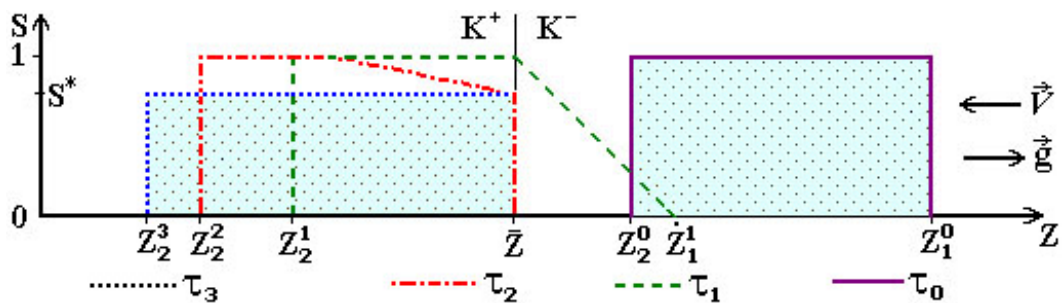


Рис. 2.3. Решение задачи о миграции рассола в восходящем вертикальном потоке. τ_0 – начальный, τ_3 – конечный, τ_1 и τ_2 – промежуточные моменты времени

При $\tau > 0$ на переднем фронте $Z_1(\tau)$ происходит распад первоначального скачка насыщенности. В точке $Z_1(\tau)$ значение функции S определяется из неявного уравнения (2.2). Из этого же уравнения легко найти время $\tau_1 = m (Z_1^0 - \bar{Z}) / (V + K^- \gamma_{1-2})$, за которое рассол с насыщенностью $S = 1$ из начальной точки Z_1^0 дойдет до точки разрыва \bar{Z} . Распределение насыщенности $S(z)$ для $\tau = \tau_1$ показано на рис. 2.3 пунктирными линиями.

При $\tau > \tau_1$ в точке \bar{Z} насыщенность имеет неподвижный скачок, значение S^- которого в области D^- определяется из уравнения (2.2), а S^+ – из условия сопряжения $V_1^+ = V_1^-$. В момент времени, определяемый значением $\tau_2 = m (Z_1^0 - \bar{Z}) / (V - K^- \gamma_{1-2})$, рассол полностью переходит из области D^- в область D^+ , и при $\tau \geq \tau_2$: $S^- = 0$, $S^+ = S_H^+$, а $Z_1(\tau) = \bar{Z}$, т. е. передний фронт насыщенности перестает двигаться. Распределение функции $S(z)$ при $\tau = \tau_2$ нанесено на рис. 2.3 штрих-пунктирными линиями.

С момента $\tau = \tau_2$ продолжает двигаться только задний фронт $Z_2(\tau)$, на котором насыщенность имеет скачок, величина которого непрерывно уменьшается от 1 до S_H^+ . В некоторый момент $\tau = \tau_3$ она станет равной S_H^+ , и задний фронт останавливается в точке $Z_2^{(3)} = \bar{Z} - Q/(mS_H^+)$, где Q – объем рассола в пласте. Распределение насыщенности на конечной стадии процесса показано на рис. 2.3 точечной линией.

Таким образом, при определенных условиях в областях с более высокой проницаемостью в неоднородном пласте могут формироваться неподвижные пятна рассола, причем конечная стадия процесса не зависит от начального положения ядра и определяется лишь количеством в нем рассола. Если ядро первоначально находится в слабопроницаемой нижней зоне трубки тока, то восходящий поток вытесняет рассол в верхний более проницаемый слой, и в дальнейшем процесс перераспределения фаз происходит по тому же сценарию, как в случае начального расположения ядра выше точки разрыва абсолютной проницаемости.

2.2. Задача расслоения «рассол над водой»

Сегрегация (расслоение) разноплотностных жидкостей – это еще один интересный процесс, для которого можно построить аналитическое решение соответствующей тестовой задачи. Пусть в вертикальной трубке тока единичного сечения проницаемостью K , пористостью m , длиной H в начальный момент времени $\tau = 0$ рассол занимает верхнюю часть трубки $0 < Z < Z_0$, а вода – нижнюю ее часть $Z_0 < Z < H$. Верхний и нижний концы трубки тока непроницаемы.

Под действием силы тяжести при $\tau > 0$ начинается гравитационное перераспределение фаз. Этот процесс имеет те же самые характерные особенности, что и в тестовой задаче из предыдущего параграфа. Отличие состоит в том, что в задаче о сегрегации отсутствует суммарный поток (т. е. $V = 0$), а координата H нижней непроницаемой границы трубки тока соответствует точке \bar{Z} скачка абсолютной проницаемости. Непроницаемость

границы приводит к тому, что бóльшее значение S_H^+ возникающего на ней отраженного скачка равно 1, так как на такой границе может находиться или вода, или рассол. Таким образом, решение тестовой задачи сегрегации несложно получить из основных соотношений (2.3) – (2.10):

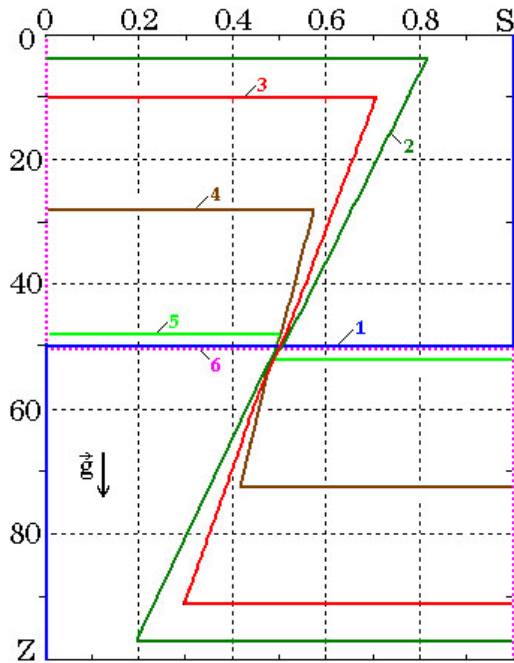


Рис. 2.4. Графики функции $S(Z)$ при сегрегации рассола и воды на моменты времени $\tau = 0; 300; 400; 600; 770; 800$ сут (линии 1 – 6)

$\tau_1 = m(H - Z_0)/A$ – момент времени, в который передний фронт насыщенности достигает нижней границы $Z = H$;

$\tau_2 = mZ_0/A$ – момент времени, в который задний фронт насыщенности достигает верхней границы $Z = 0$;

$S_H^- = 1 - \sqrt{\tau_1/\tau}$ – меньшее значение скачка насыщенности при $\tau > \tau_1$, отраженного от нижней непроницаемой границы $Z = H$;

$S_B^+ = \sqrt{\tau_1/\tau}$ – бóльшее значение скачка насыщенности при $\tau > \tau_1$, возникшего на верхней непроницаемой границе $Z = 0$;

$T = \tau_1 \left(1 + \sqrt{\tau_2/\tau_1}\right)^2$ – время завершения процесса сегрегации рассола.

На рис. 2.4 приведено решение задачи сегрегации при $A = 0.05$ м/сут, $K = 1$ мкм², $H = 100$ м, $Z_0 = 50$ м, $m = 0.2$. Линия 1 соответствует начальной границе контакта между рассолом и водой, где насыщенность меняется скачком от 0 до 1.

В силу неустойчивости при $\tau > 0$ происходит распад начального скачка насыщенности. Значения $S < 0.5$ движутся вниз за счет языков рассола, а значения $S > 0.5$ – вверх за счет языков воды. Передний и задний фронты достигают соответствующих непроницаемых границ трубки тока в один и тот же момент времени $\tau_1 = \tau_2 = 200$ сут. При $\tau > \tau_1$ образуются верхний и нижний скачки, движущиеся навстречу друг другу, см. линии 2 – 5. Значения S_B^- в моменты $\tau = 300; 400; 600; 770$ сут равны соответственно 0.184; 0.293; 0.423; 0.490. Время завершения сегрегации рассола составляет

$T = 800$ сут (при этом линии 1 и 6 совпадают, а для наглядности линия 6 показана точками с некоторым смещением).

Приведенное решение позволяет тестировать численные модели данного класса задач не только с целью проверки точности расчета основных особенностей решения, но и симметрии разностного решения.

2.3. Внедрение рассола через зеркало грунтовых вод

Построим решение задачи в "трехслойной" вертикальной трубке тока единичного сечения пористостью m и длиной H с непроницаемым нижним концом, в которую через верхний конец $Z = 0$ поступает рассол общим объемом $Q < mH$ с максимально возможной интенсивностью q . Трубка тока состоит из трех областей ("слоев"): $D_1 = (0, Z_1)$, $D_2 = (Z_1, Z_2)$, $D_3 = (Z_2, H)$ проницаемостями K_1, K_2, K_3 соответственно. Для определенности будем полагать, что $K_1 > K_2, K_3 > K_2$.

Так как суммарный поток $V = 0$, то

$$V_1 = A(Z)S(1 - S), \quad V_1' = A(Z)(1 - 2S).$$

По условию задачи рассол поступает в трубку тока с максимально возможной интенсивностью, т. е. $V_1'|_{Z=0} = 0$. Отсюда получим граничное условие для насыщенности S : $S|_{Z=0} = 0.5$. При этом $q = 0.25A_1$.

Для удобства будем строить решение задачи по отдельным областям.

1. Непрерывное распределение насыщенности в "слое" D_1 определяется соотношением

$$Z(S, \tau) = A_1(1 - 2S)\tau/m. \tag{2.11}$$

Языки рассола, образующие передний фронт, достигнут границы Z_1 в момент времени $\tau_1 = mZ_1/A_1$, и при $\tau > \tau_1$ на этой границе возникнет неподвижный скачок со значениями S_1^- и S_1^+ соответственно со стороны первого и второго слоев, связанными между собой условием сопряжения $V_1^- = V_1^+$. Задав значение S_1^- , определим величину S_1^+ в точке $Z = Z_1$ со стороны области D_2 :

$$S_1^+ = 0.5 \left[1 \pm \sqrt{1 - 4S_1^-(1 - S_1^-) A_1/A_2} \right]. \quad (2.12)$$

Так как по условию задачи $A_1 > A_2$, то при значениях

$$\bar{S}_{1,1} = 0.5 \left(1 - \sqrt{1 - A_2/A_1} \right), \quad \bar{S}_{1,2} = 0.5 \left(1 + \sqrt{1 - A_2/A_1} \right) \quad (2.13)$$

подкоренное выражение (2.12) обращается в нуль, а при $S \in (\bar{S}_{1,1}, \bar{S}_{1,2})$ становится отрицательным. Это означает, что насыщенность S_1^- не может принимать значения из интервала $(\bar{S}_{1,1}, \bar{S}_{1,2})$, и, следовательно, в момент достижения ею величины $\bar{S}_{1,1}$ она изменяется мгновенно от $\bar{S}_{1,1}$ до $\bar{S}_{1,2}$. В результате зарождается движущийся вверх отраженный скачок с постоянным верхним и переменным нижним значениями $\bar{S}_{r,1}^+ = \bar{S}_{1,2}$ и $\bar{S}_{r,1}^-$. Время $\tau_{r,1}$ его возникновения определяется из решения (2.11):

$$\tau_{r,1} = \frac{mZ_1}{A_1 (1 - 2\bar{S}_{1,1}^-)}. \quad (2.14)$$

С этого момента времени на границе Z_1 неподвижный скачок будет иметь постоянную амплитуду, определяемую значениями $\bar{S}_{1,1} = \bar{S}_{1,2}$ и $\bar{S}_1^+ = 0.5$, а скорость V_1 фильтрации рассола в граничной точке Z_1 области D_2 достигает максимальной величины $0.25A_2$. Координата $Z_{r,1}$ отраженного скачка и значение $\bar{S}_{r,1}^-$ определяются из балансовых соотношений и решения (2.11).

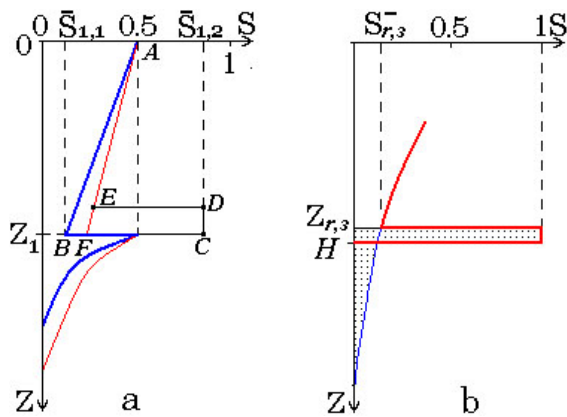


Рис. 2.5. Иллюстрации к построению решения

Обратимся к рис. 2.5, а, на котором сплошными жирной и тонкой линиями показаны решения на момент времени $\tau_{r,1}$ и некоторый момент $\tau_{r,1} + t$. За время t количество рассола, поступившего в область D_1 , составляет $0.25A_1t$, а количество рассола, вытекшего из D_1 в слой D_2 , равно $0.25A_2t$. Следовательно, объем рассола, находящегося в области $ABCDE$, равен $0.25(A_1 - A_2)t$.

Как видно из рисунка,

$$\begin{aligned} & 0.25 (A_1 - A_2) t = \\ & = m \left[0.5 Z_1 (S_F - \bar{S}_{1,1}) + (Z_1 - Z_{r,1}) (\bar{S}_{1,2} - 0.5 (S_F + S_{r,1}^-)) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Значения насыщенности в формуле (2.15) определяются из непрерывного решения (2.11):

$$\begin{aligned} S_F &= 0.5 \left[1 - \frac{mZ_1}{A_1\tau} \right], \quad \bar{S}_{1,1} = 0.5 \left[1 - \frac{mZ_1}{A_1\tau_{r,1}} \right], \\ \bar{S}_{1,1} = 1 - \bar{S}_{1,2} &= 0.5 \left[1 + \frac{mZ_1}{A_1\tau_{r,1}} \right], \quad \bar{S}_{r,1}^- = 0.5 \left[1 - \frac{mZ_{r,1}}{A_1\tau} \right]. \end{aligned}$$

С учетом соотношения (2.14) после несложных преобразований будем иметь

$$Z_{r,1} = Z_1 \sqrt{\tau/\tau_{r,1}} \left(2 - \sqrt{\tau/\tau_{r,1}} \right). \quad (2.16)$$

По найденному значению $Z_{r,1}$ из решения (2.11) определим величину $S_{r,1}^-$:

$$S_{r,1}^- = 0.5 \left[1 - (m/A_1) Z_{r,1}/\tau \right]. \quad (2.17)$$

Отраженный скачок будет подниматься вверх и, как следует из соотношения (2.16), в момент времени $\tau_{1,0} = 4\tau_{r,1}$ достигнет границы $Z = 0$, через которую рассол поступает в трубку тока. Граничное значение насыщенности изменится скачком от 0.5 до $\bar{S}_{1,2}$, а величина q упадет до $0.25A_2$. Это граничное значение будет сохраняться постоянным до тех пор, пока весь объем Q рассола не окажется в трубке тока и не появится задний фронт, момент появления которого вычисляется из равенства

$$\bar{\tau} = 4Q/A_2 + (1 - A_1/A_2) \tau_{1,0}. \quad (2.18)$$

Этот фронт является устойчивым, он будет перемещаться вниз, а его положение определяется соотношением

$$Z_f = (A_1/m) (1 - \bar{S}_{1,2}) (\tau - \bar{\tau}).$$

При $T_1 = \bar{\tau} + m/A_1 Z_1 / (1 - \bar{S}_{1,2})$ задний фронт достигнет нижней границы Z_1 области D_1 , и процесс фильтрации рассола в этой области закончится.

2. Перейдем к решению задачи в "слое" D_2 . Процесс фильтрации рассола начнется в нем с момента τ_1 . До момента времени $\tau_{r,1}$ "граничное" значение насыщенности в области D_2 будет изменяться от 0 до 0.5, а за-

тем останется постоянным до тех пор, пока в точку $Z = Z_1$ не придет задний фронт или скачок, отраженный от нижележащего слоя. Момент времени $\tau_{1,S}^+$ появления "граничного" значения S в этой точке определяется из условия сопряжения $V_1^- = V_1^+$ при $S_1^+ = S$ и решения (2.11):

$$\tau_{1,S}^+ = \frac{mZ_1}{A_1(1-2S_1^-)} = \frac{mZ_1}{A_1\sqrt{1-4S(1-S)}A_2/A_1}. \quad (2.19)$$

Непрерывное решение в "слое" D_2 будет иметь вид

$$\begin{aligned} Z(S, \tau) &= Z_1 + A_2(1-2S)(\tau - \tau_{1,S}^+)/m = \\ &= Z_1 \left[1 - \frac{A_2}{A_1} \frac{1-2S}{\sqrt{1-4S(1-S)}A_2/A_1} \right] + \frac{A_2(1-2S)\tau}{m}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Передний фронт подойдет к нижней границе $Z = Z_2$ области D_2 в момент времени $\tau_2 = \tau_1 + m(Z_2 - Z_1)/A_2$, и на ней возникнет неподвижный скачок переменной амплитуды, определяемой значениями S_2^- и S_2^+ в областях D_2 и D_3 соответственно. Значение S_2^+ определяется из условия сопряжения по величине S_2^- :

$$S_2^+ = 0.5 \left[1 \pm \sqrt{1 - 4S_2^-(1 - S_2^-)A_2/A_3} \right]. \quad (2.21)$$

Так как $A_3 > A_2$, то подкоренное выражение в (2.21) положительно при любых значениях S_2^- . Следует отметить, что $S < 0.5$ в области D_2 до тех пор, пока в нее не придет отраженный скачок из "слоя" D_3 .

Из решения (2.20) нетрудно найти момент $\tau_{2,S}^-$ подхода значения S к нижней границе области D_2 :

$$\tau_{2,S}^- = \tau_{1,S}^+ + (m/A_2)(Z_2 - Z_1)/(1 - 2S), \quad (2.22)$$

где $\tau_{1,S}^+$ определяется соотношением (2.19). Очевидно, это значение должно быть меньше времени подхода скачка насыщенности, отраженного от непроницаемой границы H .

3. Рассмотрим теперь решение задачи в "слое" D_3 . В отличие от предыдущего слоя "граничное" значение насыщенности в точке $Z=Z_2$ в области D_3 зависит от времени в течение всего процесса фильтрации рассола, на-

чиная с момента τ_2 прихода в нее переднего фронта. Момент времени $\tau_{2,S}^+$ появления "граничного" значения S в точке $Z=Z_2$ определяется из условия сопряжения $V_1^- = V_1^+$ при

$$S_2^- = 0.5 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4S(1-S)A_3}{A_2}} \right]$$

и решения (2.20):

$$\tau_{2,S}^+ = \tau_{1,S}^- + (m/A_2)(Z_2 - Z_1)/(1 - 2S_2^-). \quad (2.23)$$

Выразив S_1^- через S :

$$S_1^- = 0.5 \left[1 - \sqrt{1 - 4S_2^- (1 - S_2^-) \frac{A_2}{A_1}} \right] = 0.5 \left[1 - \sqrt{1 - 4S(1-S) \frac{A_3}{A_1}} \right]$$

и использовав формулу (2.19), получим выражение для вычисления времени $\tau_{1,S}^-$:

$$\tau_{1,S}^- = (m/A_1)Z_1/\sqrt{1 - 4S(1-S)A_3/A_1}. \quad (2.24)$$

Непрерывное решение в "слое" D_3 запишется в виде

$$Z(S, \tau) = Z_2 + \frac{A_3(1-2S)(\tau - \tau_{2,S}^+)}{m} = Z_2 + \frac{A_3(1-2S)\tau}{m} - \frac{A_3(1-2S)}{A_2} \left[\frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{1 - 4S(1-S)A_3/A_2}} + \frac{A_2 Z_1}{A_1 \sqrt{1 - 4S(1-S)A_3/A_1}} \right]. \quad (2.25)$$

Казалось бы, формула (2.25) может быть использована до того момента, в который значение S достигнет нижней границы $Z = H$. Однако это не так. На непроницаемой границе насыщенность может принимать значения либо 0, либо 1, что следует из условия $V_1|_{Z=H} = 0$. Таким образом, как только передний фронт насыщенности достигнет границы $Z = H$, функция S мгновенно изменится от 0 до 1, и здесь возникнет отраженный скачок. Момент его появления определяется соотношением $\tau_3 = \tau_2 + m(H - Z_2)/A_3$. Бóльшее значение скачка $S_{r,3}^+ = 1$, а его меньшее значение $S_{r,3}^-$, как обычно, найдем из балансовых соотношений и решения (2.25).

На рис. 2.5, в сплошной жирной линией схематично показан фрагмент решения (2.25) в окрестности интересующей нас части области D_3 . Прирав-

няв площади заштрихованных на рисунке криволинейного треугольника и прямоугольника, будем иметь

$$\int_0^{S_{r,3}^-} [Z(S) - Z_{r,3}] dS = (H - Z_{r,3}) \cdot 1.$$

С учетом выражения (2.25) после интегрирования и несложных преобразований получим

$$(1 - S_{r,3}^-) Z_{r,3} = H - (S_{r,3}^- - S_2^-) Z_2 - (S_2^- - S_1^-) Z_1 - S_{r,3}^- (1 - S_{r,3}^-) A_3 \tau / m. \quad (2.26)$$

Уравнения (2.25) и (2.26) при $S = S_{r,3}^-$ образуют систему двух уравнений для определения неизвестных величин $S_{r,3}^-$ и $Z_{r,3}$ при заданном времени τ . С другой стороны, эта система позволяет найти момент времени $\bar{\tau}_S$, до которого справедливо использование решения (2.25), и координату $Z_{r,3}$ скачка при заданном значении $S_{r,3}^-$:

$$\bar{\tau}_S = \tau_{2,S}^- + (m/A_3)(Z_{r,3} - Z_2)/(1 - 2S_{r,3}^-),$$

$$Z_{r,3} = [H - (S_{r,3}^- - S_2^-) Z_2 - (S_2^- - S_1^-) Z_1] \frac{1 - 2S_{r,3}^-}{(1 - S_{r,3}^-)^2} + [Z_2 - A_3 (1 - S_{r,3}^-) \tau_{2,S}^- / m] \frac{S_{r,3}^-}{1 - S_{r,3}^-}. \quad (2.27)$$

Заметим, что если координата $Z_{r,3}$, найденная с помощью (2.27), окажется меньше Z_2 , то это означает, что рассматриваемое значение $S_{r,3}^-$ не сможет попасть в область D_3 , так как скачок, отраженный от непроницаемой границы, уже прошел всю область D_3 и находится в "слое" D_2 . Тогда эти величины определяются из соотношений

$$\bar{\tau}_S = \tau_{1,S}^- + (m/A_2)(Z_{r,2} - Z_1)/(1 - 2S_{r,3}^-), \quad (2.28)$$

$$Z_{r,3} = [H - (S_{r,3}^- - S_1^-) Z_1] \frac{1 - 2S_{r,3}^-}{(1 - S_{r,3}^-)^2} + \left[Z_1 - \frac{A_2(1 - S_{r,3}^-)\tau_{1,S}^-}{m} \right] \frac{S_{r,3}^-}{1 - S_{r,3}^-},$$

вывод которых аналогичен выводу полученных выше формул (2.27). Очевидно, процесс завершится, когда отраженный от непроницаемой границы

скачок встретится с задним фронтом насыщенности, координата которого в "слое" D_2 находится по формуле

$$Z_f = Z_1 - A_2(1 - S)\tau/m - [0.25A_2\tau/m + Z_1(\bar{S}_{1,1} - S_1^-)].$$

Приведем пример решения одномерной задачи в "трехслойной" вертикальной трубке тока при $k_1 = 1 \text{ мкм}^2$, $k_2 = 0.5 \text{ мкм}^2$, $k_3 = 0.75 \text{ мкм}^2$ ($A_1 = 0.050 \text{ м/сут}$, $A_2 = 0.025 \text{ м/сут}$, $A_3 = 0.0375 \text{ м/сут}$); $Q = 6 \text{ м}^3$; $Z_1 = 20 \text{ м}$, $Z_2 = 40 \text{ м}$, $H = 50 \text{ м}$; $m = 0.2$, которая в начальный момент $\tau = 0$ не содержит рассола. На рис. 2.6 представлены кривые, построенные по формулам (2.1) – (2.28), на три момента времени.

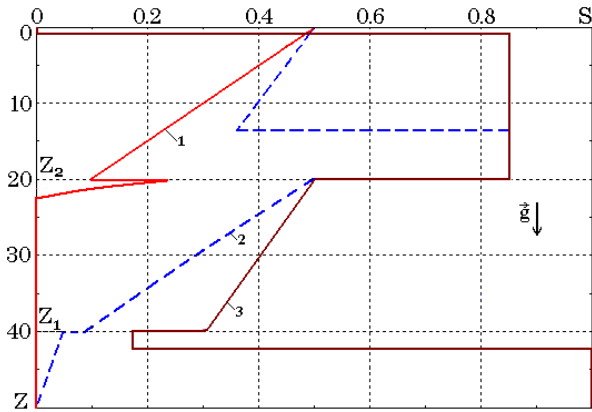


Рис. 2.6. Графики насыщенности $S(Z)$ пористой среды рассолом на моменты времени $\tau = 100$; 280 ; 510 сут (линии 1 – 3)

ний фронт достигает границ Z_2 и H .

При $\tau_{r,1} = 113 \text{ сут}$ в точке Z_1 возникает отраженный скачок, когда насыщенность мгновенно изменяется от значения $\bar{S}_{1,1} = 0.146$ до $\bar{S}_{1,2} = 0.854$. Этот скачок поднимается вверх. На рисунке показано решение при $\tau = 280 \text{ сут}$ (линия 2), у которого в "слое" D_1 существует отраженный скачок с параметрами: $\bar{S}_{r,1}^+ = \bar{S}_{1,2}$, $\bar{S}_{r,1}^- = 0.357$, $Z_{r,1} = 13.4 \text{ м}$, в точке Z_2 – неподвижный скачок с амплитудой $S_2^- = 0.087$ и $S_2^+ = 0.041$, а в области D_3 передний фронт еще не достиг непроницаемой границы $Z = H$.

При достижении ($\tau_{1,0} = 453 \text{ сут}$) подвижным скачком границы $Z = 0$ граничное значение насыщенности мгновенно изменяется от 0.5 до 0.854, а

При $\tau > 0$ рассол начинает поступать в трубку тока с интенсивностью $q = 0.0125 \text{ м}^3/\text{сут}$. Передний фронт достигает границы Z_1 при $\tau_1 = 80 \text{ сут}$, и в этот момент здесь зарождается неподвижный скачок с переменной амплитудой. Так, при $\tau = 100 \text{ сут}$ $S_1^- = 0.1$, $S_1^+ = 0.235$ соответственно со стороны первого и второго слоев (см. линия 1). В моменты времени $\tau_2 = 240 \text{ сут}$ и $\tau_3 = 293 \text{ сут}$ перед-

интенсивность q притока рассола в трубку тока падает в два раза. Именно с такой интенсивностью будет происходить внедрение рассола вплоть до момента $\bar{\tau} = 507$ сут, когда весь заданный объем Q окажется в трубке тока. После этого появляется задний фронт с постоянной амплитудой, который будет двигаться вниз. В это же время скачок насыщенности, отраженный от границы $Z = H$, поднимается вверх.

Данную ситуацию иллюстрирует линия 3, на которой задний фронт находится в точке $Z_f = 0.1$ м, а отраженный скачок, имеющий амплитуду со значениями $S_{r,3}^- = 0.166$, $S_{r,3}^+ = 1$, – в точке $Z_{r,3} = 42.2$ м. Неподвижный скачок в точке Z_2 определяется параметрами: $S_2^- = 0.170$, $S_2^+ = 0.303$. Задний фронт и отраженный скачок встретятся в момент времени $T_1 = 1054$ сут в точке $Z = Z_1$. В этот же момент завершается процесс фильтрации рассола в трубке тока.

В дальнейшем построенные в параграфе 2 аналитические решения одномерного уравнения переноса рассола, отражающие основные специфические особенности искомой функции S , учитываются при построении численной модели и алгоритма расчета насыщенности рассола.

3. Численная модель миграции рассола

3.1. Разностная схема

Поставленные в параграфах 1.1, 1.3 задачи фильтрационного переноса рассола существенно нелинейны и могут быть решены численными методами с использованием априорной информации об особенностях и свойствах решения системы (1.4) – (1.8), изученных в параграфе 1.2. Перейдем к построению численной модели фильтрации рассолов.

Пусть N_x – число узлов сетки по направлению x . Введем сеточное разбиение Ω_h исходной области Ω с равномерным шагом $h_x = L/N_x$ по переменной x и с неравномерным шагом \bar{h}_l по z . При этом в каждом l -м слое шаг по z возьмем равномерным: $h_l = H_l/N_l$, $l = \overline{1, N}$, где N_l – количество узлов в l -м слое, H_l – его толщина, N – общее число слоев пласта.

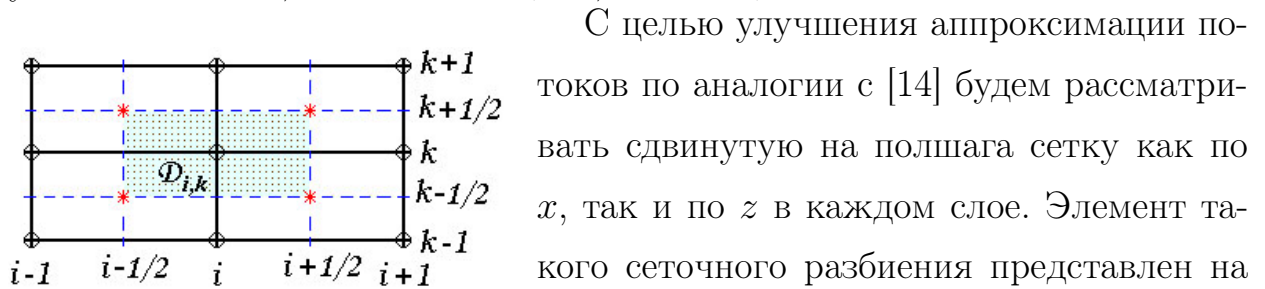


Рис. 3.1. Элемент $D_{i,k}$ сетки D_h

С целью улучшения аппроксимации потоков по аналогии с [14] будем рассматривать сдвинутую на полшага сетку как по x , так и по z в каждом слое. Элемент такого сеточного разбиения представлен на рис. 3.1. Тогда на границах области Ω и слоев γ_p будут располагаться не узлы сетки Ω_h , а границы элементарных ячеек $D_{i,k}$. Всего сетка будет содержать $N_x N_z$ внутренних узлов, где $N_z = \sum_{l=1}^N N_l$, а зависимость шага по z от индекса k можно представить в виде $\bar{h}_k = h_l$, $k = \overline{N_{l-1}, N_l}$, $l = \overline{1, N}$, где $N_0 = 0$.

Обозначим через h_τ временной шаг и запишем в области Ω_h консервативные разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (1.4), (1.8) при $i = \overline{1, N_x}$, $k = \overline{1, N_z}$:

$$h_x \hbar_k L[V]_{i,k} = V_{i+1/2,k} - V_{i-1/2,k} + V_{i,k+1/2} - V_{i,k-1/2} = 0, \quad (3.1)$$

$$h_x \hbar_k L[V_1]_{i,k} - m_k \frac{h_x \hbar_k}{\tau} \left(J_{i,k}^{\tau+h_\tau} - J_{i,k}^\tau \right) = 0, \quad J_{i,k} = \frac{1}{h_x \hbar_k} \int_{D_{i,k}} S dx dy, \quad (3.2)$$

$$V_{i+1/2,k} = \hbar_k / h_x (KK^*)_{i+1/2,k} (P_{i+1,k} - P_{i,k} - \rho_{i+1/2,k} g \sin \alpha), \quad (3.3)$$

$$V_{i,k+1/2} = h_x / \hbar_k (KK^*)_{i,k+1/2} (P_{i,k+1} - P_{i,k} - \rho_{i,k+1/2} g \cos \alpha), \quad (3.4)$$

$$V_{1,i+1/2,k} = (-fV + K \rho_{1-2} \Psi g \sin \alpha)_{i+1/2,k}, \quad (3.5)$$

$$V_{1,i,k+1/2} = (-fV + K \rho_{1-2} \Psi g \cos \alpha)_{i,k+1/2}. \quad (3.6)$$

При вычислении относительных подвижностей $K_{i+1/2,k}^*$ и $K_{i+1/2,k}^*$ суммарного потока в соответствующих сеточных узлах используются значения насыщенности $S_{i+1/2,k}$ и $S_{i,k+1/2}$:

$$K_{i,k+1/2}^* = K^*(S_{i,k+1/2}), \quad K_{i+1/2,k}^* = K^*(S_{i+1/2,k}), \quad (3.7)$$

$$S_{i,k+1/2} = 0.5 (J_{i,k} + J_{i,k+1}), \quad S_{i+1/2,k} = 0.5 (J_{i+1,k} + J_{i,k}). \quad (3.8)$$

Существенной особенностью рассматриваемой задачи является наличие линий разрыва абсолютной проницаемости $K(x, z)$ не только в вертикальном направлении на границах раздела слоев γ_l , но и по горизонтали (например, при наличии в некотором слое включений, проницаемость которых существенно отличается от проницаемости данного слоя и соседних с ним слоев). С учетом наличия таких разрывов в полуузлах с номерами i и $(k + 1/2)$ возьмем для значений проницаемости $K_{i+1/2,k}$ и $K_{i+1/2,k}$ ее среднегеометрическую аппроксимацию [11]:

$$K_{i,k+1/2} = 2K_{i,k+1}K_{i,k}/(K_{i,k+1} + (\hbar_{k+1}/\hbar_k) K_{i,k}), \quad (3.9)$$

$$K_{i+1/2,k} = 2K_{i+1,k}K_{i,k}/(K_{i+1,k} + K_{i,k}). \quad (3.10)$$

Система (3.1) разностных уравнений суммарного потока и соотношения (3.3), (3.4) используются для определения давления $P_{i,k}$, и ее решение при заданных значениях $J_{i,k}$ может быть найдено итерационными методами.

При этом необходимо учитывать нелинейную специфику уравнений (3.1), (3.3), (3.4), обусловленную сложным строением слоисто-неоднородных пластов. Во-первых, функция $K(x, z)$ может существенно изменяться по z и по x . Во-вторых, в "тонких" пластах, у которых толщина H значительно меньше его длины L , шаги \hbar_k могут быть в десятки раз меньше h_x .

Поскольку расчет нестационарного поля давления в пласте должен осуществляться на каждом временном слое достаточно быстро, необходимость проведения многовариантных расчетов в режиме реального времени предопределяет при наличии указанных особенностей разработку нового двухшагового итерационного метода решения системы (3.1), (3.3), (3.4) с высокой скоростью сходимости.

3.2. Итерационный метод расчета давления

Рассмотрим пару уравнений (3.1)

$$L[V]_{1,k} = 0, \quad L[V]_{2,k} = 0$$

при $k = \overline{1, N_z - 1}$. Введя обозначение $\sigma = KK^*$, с учетом соотношений (3.3), (3.4) запишем:

$$L[V]_{1,k} = \frac{\hbar_k}{h_x} \sigma_{3/2,k} (P_{2,k} - P_{1,k}) - \frac{\hbar_k}{h_x} \sigma_{1/2,k} (P_{1,k} - P_{0,k}) + \quad (3.11)$$

$$+ \frac{h_x}{\hbar_k} \sigma_{1,k+1/2} (P_{1,k+1} - P_{1,k}) - \frac{h_x}{\hbar_k} \sigma_{1,k-1/2} (P_{1,k} - P_{1,k-1}) = 0,$$

$$L[V]_{2,k} = \frac{\hbar_k}{h_x} \sigma_{5/2,k} (P_{3,k} - P_{2,k}) - \frac{\hbar_k}{h_x} \sigma_{1/2,k} (P_{2,k} - P_{1,k}) + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{h_x}{\hbar_k} \sigma_{2,k+1/2} (P_{2,k+1} - P_{2,k}) - \frac{h_x}{\hbar_k} \sigma_{2,k-1/2} (P_{2,k} - P_{2,k-1}) = 0.$$

Из граничных условий на непроницаемых границах γ_0 и γ_N следует, что $V_{i,1/2} = V_{i,N_z+1/2} = 0$. Эти соотношения дают еще четыре уравнения, дополняющие систему (3.11), (3.12):

$$V_{1,1/2} = V_{1,N_z+1/2} = V_{2,1/2} = V_{2,N_z+1/2} = 0. \quad (3.13)$$

В уравнениях (3.11) и (3.12) значения $P_{0,k}$ для всех $k = \overline{1, N_z - 1}$ известны из граничных условий, $P_{3,k}$ отнесем к $(n - 1)$ -й итерации, а значения

$P_{1,k}$ и $P_{2,k}$ – к n -й. В результате, перейдя к одномерной нумерации и введя обозначения $U_{2k+1} = P_{1,k}^{(n)}$ и $U_{2k} = P_{2,k}^{(n)}$, получим систему уравнений с пятидиагональной матрицей, $m = \overline{3, 2N_z}$:

$$-c_1 U_1 + a_3 U_3 = 0, \quad -c_2 U_2 + a_4 U_4 = 0; \quad (3.14)$$

$$a_m U_{m-2} + b_m U_{m-1} - c_m U_m + b_{m+1} U_{m+1} + a_{m+2} U_{m+2} = -\varphi_m, \quad (3.15)$$

$$a_{2N_z+1} U_{2N_z+1} - c_{2N_z+1} U_{2N_z-1} = 0, \quad a_{2N_z} U_{2N_z} - c_{2N_z+2} U_{2N_z+2} = 0, \quad (3.16)$$

$$a_{2k+1} = \sigma_{1,k-1/2} h_x / \hbar_k, \quad a_{2k+2} = \sigma_{2,k-1/2} h_x / \hbar_k, \quad b_{2k+1} = 0, \quad (k = \overline{1, N_z});$$

$$b_2 = 0; \quad b_{2N_z+2} = 0; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{2N_z+1} = \varphi_{2N_z+2} = 0; \quad c_1 = \sigma_{1,1/2} h_x / \hbar_k,$$

$$c_2 = \sigma_{2,1/2} h_x / \hbar_k; \quad c_{2N_z+1} = \sigma_{1,N_z+1/2} h_x / \hbar_k, \quad c_{2N_z+2} = \sigma_{2,N_z+1/2} h_x / \hbar_k;$$

$$b_{2k+2} = \sigma_{3/2,k} \hbar_k / h_x; \quad \varphi_{2k+2} = \sigma_{5/2,k} P_{3,k} \hbar_k / h_x, \quad \varphi_{2k+1} = \sigma_{1/2,k} P_{0,k} \hbar_k / h_x,$$

$$c_{2k+1} = (\sigma_{3/2,k} + \sigma_{1/2,k}) \hbar_k / h_x + (\sigma_{1,k+1/2} + \sigma_{1,k-1/2}) h_x / \hbar_k,$$

$$c_{2k+2} = (\sigma_{5/2,k} + \sigma_{3/2,k}) \hbar_k / h_x + (\sigma_{2,k+1/2} + \sigma_{2,k-1/2}) h_x / \hbar_k, \quad (k = \overline{1, N_z - 1}).$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.15) легко решается методом прогонки. Сеточные функции U_m вычисляются по общей рекуррентной формуле $U_m = \alpha_m U_{m+1} + \beta_m U_{m+2} + \gamma_m$, в которой прогоночные коэффициенты определяются соотношениями

$$\alpha_m = (b_{m+1} + \beta_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2})) / R_m, \quad \beta_m = a_m / R_m,$$

$$\gamma_m = (\varphi_m + \gamma_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2}) + a_m \gamma_{m-2}) / R_m, \quad (3.17)$$

$$R_m = c_m - \alpha_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2}) - a_m \beta_{m-2}, \quad m = \overline{3, 2N_z}.$$

Отсюда $\alpha_1 = b_2 / c_1$, $\beta_1 = a_3 / c_1$, $\gamma_1 = \varphi_1 / c_1$; $\alpha_2 = \beta_1 b_2 / (c_2 - \alpha_1 b_2)$, $\beta_2 = a_4 / (c_2 - \alpha_1 b_2)$, $\gamma_2 = (\varphi_2 + \gamma_1 b_2) / (c_2 - \alpha_1 b_2)$. Эти коэффициенты определяются из граничных условий (1.21) на кровле и подошве пласта с учетом соотношений (3.14), (3.16).

Можно показать, что $c_m > a_m + b_m + a_{m+2} + b_{m+1}$, $m = \overline{1, 2N_z}$, и, следовательно, условие устойчивости метода выполнено.

Решив систему (3.14) – (3.16) для $i = 1$ и $i = 2$, аналогичным образом представим следующую ”пару” уравнений $L[V]_{3,k} = 0$ и $L[V]_{4,k} = 0$, $k = \overline{1, N_z - 1}$, и т. д. Из построения следует, что в итерационном методе число N_x должно быть четным. Таким образом, на первом шаге после решения $N_x/2$ систем вида (3.14) – (3.16) найдем все значения давления $P_{i,k}^{(n)}$ на n -й итерации, $i = \overline{1, N_x}$, $k = \overline{1, N_z}$, которые обозначим через $\bar{P}_{i,k}^{(n)}$.

Построение второго шага итерационного процесса основано на интегральном соотношении

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H V_x dz = 0,$$

которое получается в результате интегрирования первого уравнения системы (1.8) по z в пределах от 0 до H с учетом условий (1.21) непроницаемости кровли и подошвы пласта. Отсюда следует, что в каждый момент времени τ величина $\int_0^H V_x dz$ в любом сечении x постоянна, т. е. количество воды, закачанной в нагнетательную галерею, совпадает с количеством жидкости, добытой из пласта.

Нетрудно показать, что соответствующий сеточный аналог выражает собой условие независимости суммы $\sum_{k=1}^{N_z} V_{i+1/2,k}$ от номера индекса i . Используем это свойство на втором шаге итерационного процесса для уточнения вычисленных значений $\bar{P}_{i,k}^{(n)}$. Пусть

$$P_{i,k}^{(n)} = \bar{P}_{i,k} + \delta_i, \quad i = \overline{0, N_x + 1}, \quad k = \overline{1, N_z}. \quad (3.18)$$

Тогда из уравнений (3.1), (3.3), (3.4) после несложных преобразований будем иметь

$$V_{i+1/2,k}^{(n)} = \bar{V}_{i+1/2,k} + \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} (\delta_{i+1} - \delta_i), \quad V_{i,k+1/2}^{(n)} = \bar{V}_{i,k+1/2},$$

$$A_{i-1} \delta_{i-1} - (A_{i-1} + A_i) \delta_i + A_i \delta_{i+1} = \Phi_i, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad (3.19)$$

$$A_i = \sum_{k=1}^{N_z} \frac{\bar{h}_k}{\bar{h}_x} \sigma_{i+1/2,k}, \quad \Phi_i = \sum_{k=1}^{N_z} (\bar{V}_{i-1/2,k} - \bar{V}_{i+1/2,k}), \quad B_0 = 0, \quad B_{N_z+1} = 0.$$

Полученная система (3.19) линейных уравнений с трехдиагональной матрицей решается методом прогонки. Таким образом, вычислив значения δ_i , подставим их в (3.18) и получим окончательно значения давления $P_{i,k}^{(n)}$ на n -й итерации, $i = \overline{0, N_x + 1}$, $k = \overline{1, N_z}$.

Многочисленные вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый метод вычисления давления имеет высокую скорость сходимости итераций (как правило, 2 – 3 итерации) и практически не зависит от разброса параметров пласта и числа сеточных узлов.

3.3. Метод вычисления насыщенности

Уравнение переноса (3.2) будем использовать для определения насыщенности $S_{i,k}$. Основным моментом разработки разностной схемы является определение сеточных функций $f_{i+1/2,k}$, $f_{i,k+1/2}$ и $\Psi_{i+1/2,k}$, $\Psi_{i,k+1/2}$ по вычисленным среднеинтегральным значениям $J_{i,k}$.

Как известно [4], [9], [11], при численном решении уравнений переноса для конвективных членов необходимо использовать аппроксимацию ”вверх по потоку” (при двухфазной фильтрации разностную схему этого метода часто называют схемой ”уголок” [7]). Однако в рассматриваемых задачах потоки фаз могут иметь противоположные направления, и для вычисления потоков $V_{1,i+1/2,k}$, $V_{1,i,k+1/2}$ через границы элементарных ячеек обычный метод аппроксимации ”против потока” не может быть использован. Для этой цели должен быть построен специальный алгоритм, отражающий характерные особенности решения задачи, в том числе, априорную информацию о свойствах решения на линиях разрыва абсолютной проницаемости K . Продемонстрируем все это на примере решения задачи фильтрации в вертикальной трубке тока единичного сечения.

1. Фильтрация в однородной пористой среде. Пусть ось ξ направлена вниз вдоль трубки тока. Тогда скорость V_1 фильтрации первой фазы может быть записана в виде

$$V_1 = S(V + A(1 - S)), \quad A = (K/\mu_2)\rho_{1-2}g, \quad (3.20)$$

где $A > 0$, а суммарный поток V будет положительным, если он направлен в ту же сторону, что и вектор силы тяжести.

Как отмечалось в параграфе 1.2, скорость V_1 принимает максимальное значение при $S = \bar{S}$ (см. рис. 3.2, а), которое определяется из соотношения

$$\bar{S} = \begin{cases} 0 & , \quad V \leq -A, \\ 0.5(1 + V/A) & , \quad |V| < A, \\ 1 & , \quad V \geq A. \end{cases}$$

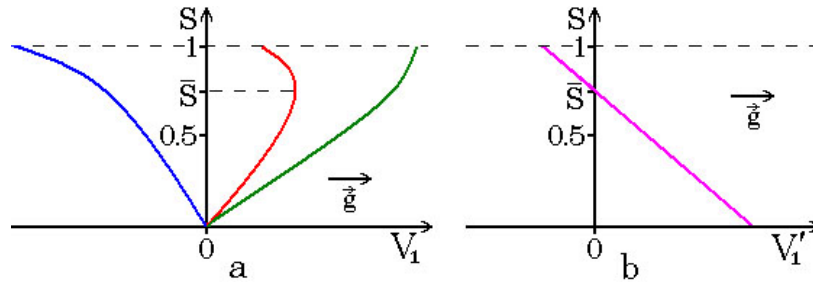


Рис. 3.2

Перепишем уравнение переноса насыщенности (1.8) в виде

$$m \frac{\partial S}{\partial \tau} + V_1' \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0,$$

где коэффициент $V_1' = \partial V_1 / \partial S = V + A(1 - 2S)$ характеризует скорость распространения насыщенности и является знакопеременной функцией, обращающейся в нуль при $S = \bar{S}$, рис. 3.2, б. Отметим, что именно это обстоятельство осложняет разработку численных методов решения задач переноса.

Рассматриваемое одномерное уравнение переноса может быть решено методом характеристик. Пусть $\xi(S, 0)$ – начальное распределение насыщенности в начальный момент времени $\tau = 0$. Тогда

$$\xi = \xi(S, 0) + V_1'(S) \tau / m. \quad (3.21)$$

Из решения (3.21) следует, что при $S < \bar{S}$ значения насыщенности будут двигаться по оси ξ в положительном направлении, при $S > \bar{S}$ – в отрица-

тельном по отношению к начальному их расположению, а значение $S = \bar{S}$ останется неподвижным. Если уравнение (3.21) приводит к многозначному решению, то вводят скачок насыщенности, определяемый из балансовых соотношений.

Теперь рассмотрим задачу о распаде начального разрыва при $|V| < A$. Пусть в некоторой точке $\bar{\xi}$ имеется скачок насыщенности, и нужно определить величину потока V_1 в этой точке при $\tau > 0$.

Обозначим через D^- и D^+ некоторые окрестности слева и справа от точки $\xi = \bar{\xi}$, S^- и S^+ – постоянные (в начальный момент времени $\tau = 0$) значения насыщенности в областях D^- и D^+ соответственно. Это значит, что S^- и S^+ являются значениями насыщенности слева (при $\xi < \bar{\xi}$) и справа (при $\xi > \bar{\xi}$) на скачке в точке $\bar{\xi}$. Вектор силы тяжести направлен из области D^- в область D^+ .

Покажем, что решение задачи (значит, и скорость $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$) существенно зависит от соотношения величин S^- , S^+ и \bar{S} , и построим алгоритм вычисления $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$.

1.1. Для значений S^- и S^+ , меньших \bar{S} , производная $V_1'(S) > 0$, и, следовательно, они будут двигаться только в области D^+ в положительном направлении. В этом случае возможны два типа решения, показанные на рис. 3.3. Одно из них (рис. 3.3, а) соответствует случаю распада начального разрыва и находится из уравнения (3.21), другое (рис. 3.3, б) – случаю сохранения начального скачка насыщенности, т. к. уравнение (3.21) в данном случае приводит к многозначному решению, показанному на рис. 3.3, б сплошной тонкой линией. При этом площади заштрихованных треугольников одинаковы.

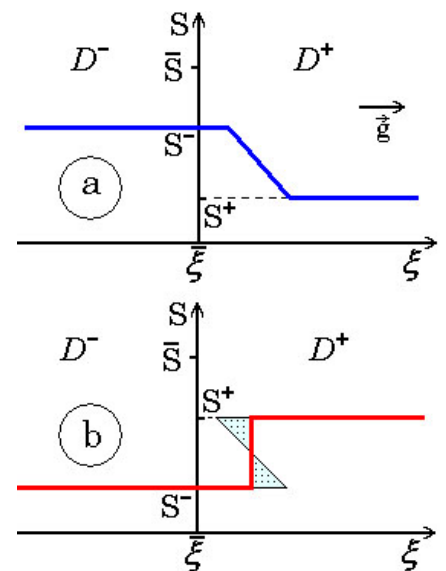


Рис. 3.3

Из этих рисунков видно, что поток V_1 в точке $\bar{\xi}$ в течение всего времени τ определяется значением S^- , т. е. $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^-) = V_1^-$.

1.2. Для значений S^- и S^+ , больших \bar{S} , производная $V_1'(S) < 0$, и, следовательно, они будут двигаться только в области D^- в направлении убывания координаты ξ . Обратим внимание, что при этом потоки V и V_1 могут быть противоположно направленными (например, при $V \in (0, A)$). Здесь, как и в предыдущем случае 1.1, возможны два типа решения: или с распадом начального разрыва (рис. 3.4, а), или с сохранением скачка насыщенности (рис. 3.4, б). В точке $\xi = \bar{\xi}$ при $\tau > 0$ сохраняется значение S^+ , так что $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^+) = V_1^+$.

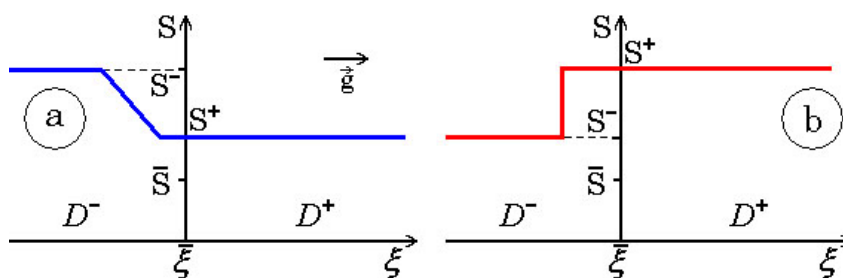


Рис. 3.4

1.3. Пусть $S^- > \bar{S}$, а $S^+ < \bar{S}$. Так как $V_1'(S) < 0$ при $S \in (S^-, \bar{S})$, $V_1'(S) > 0$ при $S \in (S^+, \bar{S})$ и $V_1'(\bar{S}) = 0$, то при $\tau > 0$ значение \bar{S} останется неподвижным в точке $\xi = \bar{\xi}$, а значения S^- и S^+ будут двигаться в противоположных направлениях (каждое – в своей области), удаляясь от границы $\xi = \bar{\xi}$, см. рис. 3.5. Таким образом, в данной ситуации происходит распад начального разрыва с образованием неподвижной точки \bar{S} при $\xi = \bar{\xi}$, т. е. при $\tau > 0$ имеем $S|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{S}$, $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(\bar{S}) = \bar{V}_1$.

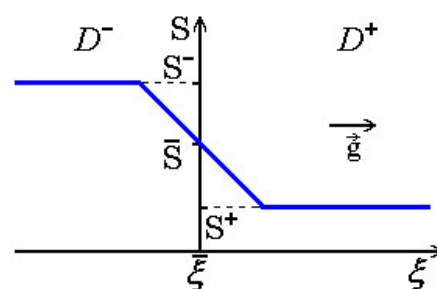


Рис. 3.5

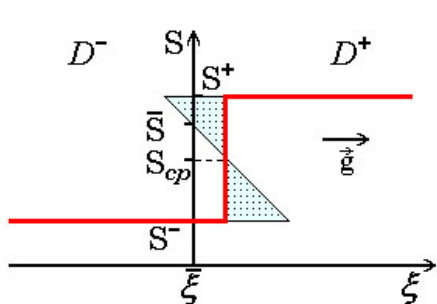


Рис. 3.6

1.4. При $S^- < \bar{S}$ и $S^+ > \bar{S}$ начальный разрыв насыщенности сохраняется, и скачок будет двигаться от точки $\bar{\xi}$ или в область D^- , или в область D^+ . Из балансовых соотношений и линейной зависимости $V_1'(S)$ следует, что если среднее значение насыщенности $S_{cp} = (S^+ + S^-)/2 < \bar{S}$, то при $\tau > 0$ скачок будет двигаться в области D^+ и $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$, см. рис. 3.6. Если же $S_{cp} > \bar{S}$, то движение происходит в об-

ласти D^- и $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$. Нетрудно также убедиться в том, что $V_1^- < V_1^+$ при $S_{cp} < \bar{S}$ и $V_1^- > V_1^+$ при $S_{cp} > \bar{S}$, так что $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^+; V_1^-\}$.

2. Фильтрация в неоднородном пласте. Теперь рассмотрим более сложный случай, когда точка $\xi = \bar{\xi}$ является точкой разрыва абсолютной проницаемости K . Как было показано выше, в такой точке имеет место разрыв функции S . Кроме того, здесь может зарождаться отраженный скачок насыщенности. Так как суммарный поток V на линии разрыва K остается непрерывным, то скорость фильтрации первой фазы в областях D^- и D^+ в зависимости от параметра A будет определяться соотношениями $V_1 = S [V + A^- (1 - S)]$ и $V_1 = S [V + A^+ (1 - S)]$.

Важную роль при решении задачи играет величина \bar{S} , при которой скорость V_1 в области с меньшей проницаемостью принимает наибольшее значение. Введем обозначения:

$$\bar{A} = \min \{A^+; A^-\}, \quad \bar{S} = \max \{0; \min \{0.5 (1 + V/\bar{A}); 1\}\},$$

$$\bar{V}_1 = \bar{S} [V + \bar{A}(1 - \bar{S})].$$

На рис. 3.7 показаны характерные графики зависимостей $V_1^-, V_1^+, V_1'^-, V_1'^+$ от насыщенности S при $\bar{S} \in (0, 1)$, т. е. при $|V| < \bar{A}$.

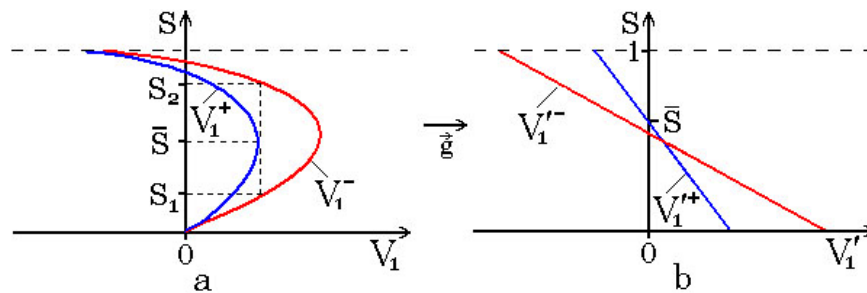


Рис. 3.7. Зависимости $V_1^-, V_1^+, V_1'^-, V_1'^+$ от насыщенности S при $A^- > A^+$.

Обратим еще раз внимание на важное свойство решения: в процессе фильтрации в области с бóльшей проницаемостью при $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ насыщенность не может принимать значения из интервала (S_1, S_2) , см. рис. 3.7, а, что следует из условия сопряжения $V_1^- = V_1^+$ при $\xi = \bar{\xi}$.

Перейдем теперь к задаче о распаде начального скачка насыщенности, расположенного в точке $\bar{\xi}$, в которой происходит разрыв абсолютной проницаемости K , и определим величину потока $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ при $\tau > 0$.

2.1. Пусть значения S^- и S^+ меньше \bar{S} . Здесь необходимо учесть все характерные особенности поведения решения на линии разрыва абсолютной проницаемости K , которые проявляются при определенных соотношениях между величинами S^- , S^+ и S_1 .

Вначале рассмотрим решение при $S^- \in (0, S_1)$. Так как значение S^- будет распространяться в положительном направлении, то при $\xi = \bar{\xi}$ возникает скачок насыщенности от S^- до \tilde{S} , значение которого определяется из условия сопряжения $V_1^- = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S})A^+]$. При $\tau > 0$ этот скачок в точке $\xi = \bar{\xi}$ сохраняется неподвижным. В области D^+ судьба скачка, мгновенно образовавшегося за счет изменения насыщенности от \tilde{S} до S^+ , зависит от знака разности $\tilde{S} - S^+$. Если $\tilde{S} > S^+$, то происходит распад разрыва, и насыщенность вычисляется из уравнения (3.21) при $A = A^+$ и будет изменяться непрерывно от \tilde{S} до S^+ (рис. 3.8, а). Если $\tilde{S} < S^+$, то этот скачок при $\tau > 0$ сохраняется и движется в области D^+ (рис. 3.8, б). Таким образом, начальный скачок распадается на два скачка: неподвижный – от S^- до \tilde{S} , и подвижный – от \tilde{S} до S^+ . В обоих вариантах $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$.

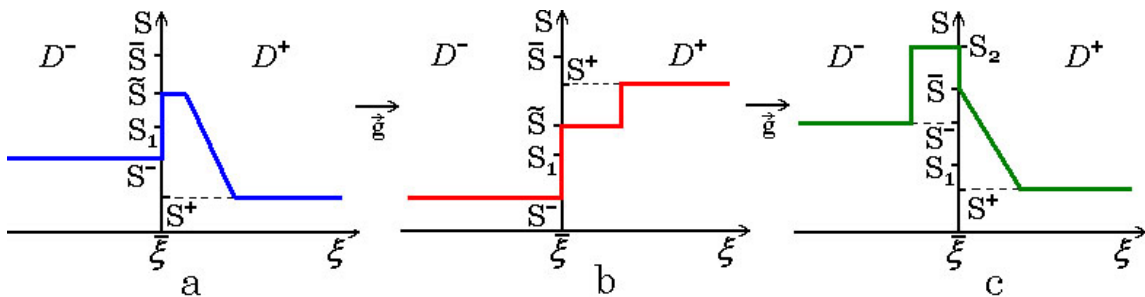


Рис. 3.8

Существенно иное решение получается при $S^- \in (S_1, \bar{S})$. Так как при $\tau > 0$ в области D^- при $\xi = \bar{\xi}$ насыщенность не может принимать значения из рассматриваемого интервала, то на линии разрыва абсолютной проницаемости мгновенно устанавливается скачок насыщенности со значением \bar{S} со стороны области D^+ и значением S_2 со стороны области D^- . В результате в области D^- при $\xi = \bar{\xi}$ появляется отраженный скачок от S^- до S_2 , а в D^+ в силу условия $V_1^{+'}(S^+) > V_1^{+'}(\bar{S}) = 0$ насыщенность будет непрерывно убывать от \bar{S} до S^+ (рис. 3.8, в). Таким образом, при $\tau > 0$ в точке разрыва $\xi = \bar{\xi}$ насыщенность имеет постоянный скачок от \bar{S} до S_2 , при

этом поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{V}_1$. Учитывая соотношение $V_1^- > \bar{V}_1$, выполняющееся при $S^- \in (S_1, \bar{S})$, можем записать: $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-; \bar{V}_1\}$.

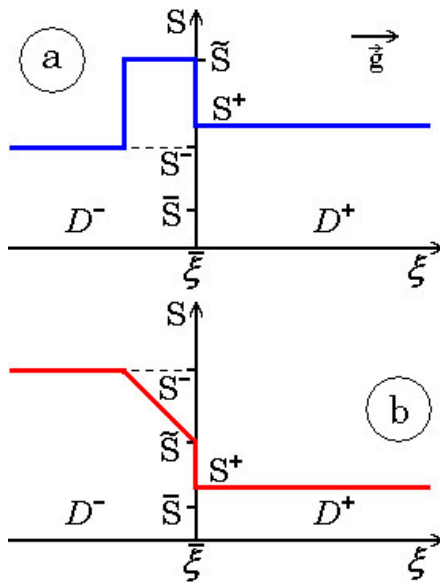


Рис. 3.9

2.2. При значениях S^- и S^+ , бóльших \bar{S} , возможны два типа решения задачи, показанные на рис. 3.9.

Так как $S^+ \in (\bar{S}, 1)$, то $V_1^+(S^+) < 0$ (см. рис. 3.7, б), и при $\tau > 0$ значение насыщенности S^+ будет двигаться в сторону убывания координаты ξ . Поэтому при $\xi = \bar{\xi}$ мгновенно появляется скачок от S^+ до \tilde{S} , определяемый из условия сопряжения $V_1^+ = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S})A^-]$.

В области D^- при $S^- \in (\bar{S}, \tilde{S})$ мгновенно появится скачок насыщенности, движущийся

в сторону убывания ξ (рис. 3.9, а), а при $S^- \in (\tilde{S}, 1)$ насыщенность определяется из уравнения (3.21) при $A = A^+$ и изменяется непрерывно от S^- до \tilde{S} (рис. 3.9, б). В области D^+ при $\tau > 0$ насыщенность равна S^+ и остается постоянной вплоть до границы $\xi = \bar{\xi}$.

Таким образом, из решения следует, что при $\tau > 0$ поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ определяется значением S^+ независимо от типа решения, т. е. $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$.

2.3. Если $S^- > \bar{S}$, а $S^+ < \bar{S}$, то аналогично предыдущему случаю возможны два варианта решения задачи. При этом характер поведения решения изменяется только в области D^+ , где насыщенность S определяется из уравнения (3.21) при $A = A^+$ и будет изменяться от значения \bar{S} , расположенного в точке $\xi = \bar{\xi}$, до значения S^+ (рис. 3.10).

На линии разрыва $\xi = \bar{\xi}$ мгновенно образуется неизменяющийся при $\tau > 0$ скачок насыщенности от \bar{S} до S_2 . В области D^- появляется отраженный скачок (рис. 3.10, а), если $S^- \in (\bar{S}, S_2)$, т. к. при $\tau > 0$ насы-

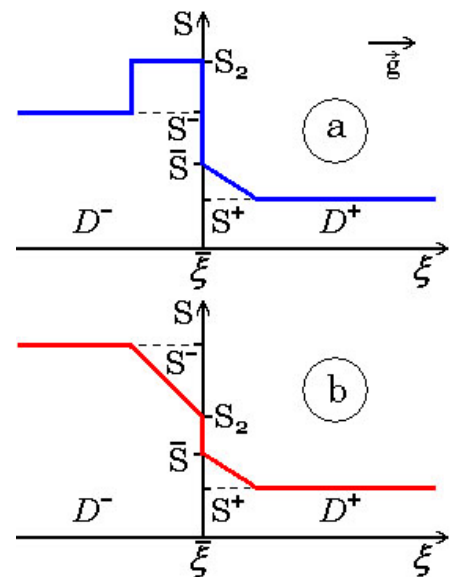


Рис. 3.10

ценность не может принимать значения из этого интервала при $\xi = \bar{\xi}$, и ее значение мгновенно становится равным S_2 . Если $S^- \in (0, 1)$, то функция S изменяется непрерывно от S^- до S_2 (рис. 3.10, b). Из решения следует, что независимо от типа решения $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{V}_1$ при $\tau > 0$.

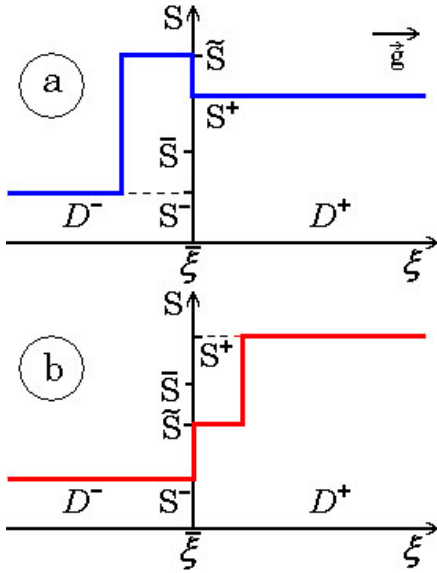


Рис. 3.11

2.4. Когда $S^+ > \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$, более легкая жидкость находится над тяжелой, и, следовательно, фронт насыщенности будет устойчивым, т. е. распада начального разрыва не произойдет. Действительно, насыщенность будет иметь подвижный скачок, т. к. $V_1'^+(S^+) > 0$, а $V_1'^-(S^-) < 0$. То, в какой области будет двигаться скачок, зависит от соотношения величин V_1^+ и V_1^- . Если $V_1^+ < V_1^-$, то скачок будет двигаться в области D^- в направлении убывания координаты ξ , а в области D^+ насыщенность изменяться не будет (рис. 3.11, а).

Следовательно, при $\tau > 0$ будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$. Второе значение \tilde{S} скачка насыщенности при $\xi = \bar{\xi}$ определяется из условия сопряжения $V_1^+ = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S})A^-]$. Это же значение определяет величину скачка (от S^- до \tilde{S}) в области D^- .

Если $V_1^+ > V_1^-$, то скачок от \tilde{S} до S^+ будет двигаться в области D^+ в сторону возрастания координаты ξ (рис. 3.11, b); $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$ и величина \tilde{S} вычисляется из соотношения $V_1^- = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S})A^+]$. Таким образом, при $S^+ \in (\bar{S}, 1)$ и $S^- \in (0, \bar{S})$ будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-; V_1^+\}$.

Рисунки 3.3 – 3.6 и 3.8 – 3.10 наглядно демонстрируют тот факт, что решения задачи о распаде начального разрыва в окрестности точки $\bar{\xi}$ при $K^+ = K^-$ и при $K^+ < K^-$ могут существенно различаться. В то же время формулы для определения потока $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ отличаются только при $S^+ < \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$. Однако, если учесть, что $V_1^- = \min \{V_1^-; \bar{V}_1\}$ при $K^+ = K^-$ (\bar{V}_1 обозначает минимальное значение потока V_1), то определение величины потока соотношением $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-; \bar{V}_1\}$ при $S^+ < \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$ имеет место как для кусочно-постоянной, так и для постоянной абсолютной проницаемости пористой среды.

Аналогично можно рассмотреть решение задачи о распаде начального разрыва при $K^+ > K^-$. В этом случае различие в определении $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ будет только при $S^+ > \bar{S}$ и $S^- > \bar{S}$, а именно: вместо соотношения $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$ должно быть $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^+, \bar{V}_1\}$. Нетрудно убедиться в том, что такое определение справедливо как при $K^+ = K^-$, так и при $K^+ < K^-$.

Итак, как следует из аналитического решения, поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ в точке $\bar{\xi}$ расположения начального скачка насыщенности S определяется при $\tau > 0$ в зависимости от соотношения величин S^+ , S^- и \bar{S} независимо от наличия или отсутствия в этой точке скачка абсолютной проницаемости:

$$V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \begin{cases} \min \{V_1^-; \bar{V}_1\} , & S^+ < \bar{S}, \quad S^- < \bar{S}, \\ \min \{V_1^+; \bar{V}_1\} , & S^+ > \bar{S}, \quad S^- > \bar{S}, \\ \bar{V}_1 & , \quad S^+ < \bar{S}, \quad S^- > \bar{S}, \\ \min \{V_1^-; V_1^+\} , & S^+ > \bar{S}, \quad S^- < \bar{S}, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\bar{S} = \max \{0; \min \{0.5 (1 + V/\bar{A}) ; 1\} \},$$

$$\bar{V}_1 = \bar{S} [V + (1 - \bar{S})\bar{A}] , \quad \bar{A} = \min \{A^+; A^-\} . \quad (3.23)$$

Очевидно, что при $\bar{S} = 0$ или при $\bar{S} = 1$ в соотношении (3.22) реализуется только одно из условий.

Как известно, при численном решении задач фильтрации в каждой элементарной ячейке сетки определяется среднеинтегральная величина насыщенности, так что $S(\xi)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию. Таким образом, на каждом временном слое и на каждой границе ячейки необходимо решать задачу о распаде начального разрыва функции S .

Принципиальным моментом расчета является правильный выбор значений S , при которых следует вычислять поток V_1 через границы элементарных ячеек на следующем временном слое. Метод аппроксимации "против потока" предписывает брать значения насыщенности из той ячейки, из которой вытекает рассматриваемый поток. Однако здесь не только возникает неопределенность в выборе значения насыщенности на границе ячейки, когда V_1 имеет разные знаки при значениях S в соседних ячейках

(такая ситуация может возникнуть, если значения суммарного потока V принадлежат диапазону $(-A, 0)$), но и само определение потока V_1 является неверным (ошибочным).

Покажем, что этот факт имеет место, на примере, в котором $V \in (0, A)$, а скорость V_1 тоже положительна при любых значениях S .

Пусть вектор силы тяжести направлен через границу $\xi = \bar{\xi}$ элементарных ячеек D^- и D^+ из области D^- в область D^+ . Обозначим соответствующие значения насыщенности в этих ячейках через S^- и S^+ . Так как $V \in (0, A)$, то $V_1(S) > 0$ при $S \in (0, 1)$, и, следовательно, при любых значениях насыщенности S поток направлен из ячейки D^- в ячейку D^+ . Тогда в соответствии с методом "против потока" будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^-) = V_1^-$ при любых $S^- \in (0, 1)$ и $S^+ \in (0, 1)$. Однако, как показывает аналитическое решение задачи о распаде начального разрыва насыщенности, такое определение потока V_1 верно лишь в некоторых частных случаях (см. первую и четвертую строки формулы (3.22)).

В общем случае поток V^- должен определяться не только значением S^- , но и значениями S^+ или \bar{S} . Поэтому для корректного вычисления потока V_1 следует использовать соотношение (3.22), которое справедливо при любых значениях V и A , и не приводит к неопределенности ни при каких значениях этих величин.

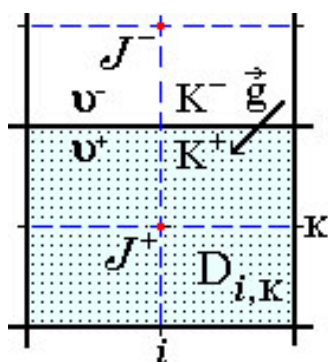


Рис. 3.12. К расчету насыщенности S

Обобщим полученные выше результаты на двумерный случай. Для упрощения дальнейшего изложения поток загрязнения $V_{1,i+1/2,k}$ (или $V_{1,i,k+1/2}$) в полуузлах на границах элементарных ячеек обозначим через v . Знаками $+$ и $-$ будем обозначать значения всех величин с разных сторон границы ячейки $D_{i,k}$, см. рис. 3.12. При этом знаки выбираются так, чтобы действие силы тяжести было направлено из области со знаком $-$ в область со знаком $+$. Тогда окончательный результат запишем в виде:

$$v = \begin{cases} \min \{v^-; \bar{v}\} , & J^+ < \bar{S}, \quad J^- < \bar{S}; \\ \min \{v^+; \bar{v}\} , & J^+ > \bar{S}, \quad J^- > \bar{S}; \\ \bar{v} & , \quad J^+ < \bar{S}, \quad J^- > \bar{S}; \\ \min \{v^-; v^+\} , & J^+ > \bar{S}, \quad J^- < \bar{S}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Формулы (3.24) позволяет конкретизировать функции $f_{i+1/2,k}$, $f_{i,k+1/2}$, $\Psi_{i+1/2,k}$, $\Psi_{i,k+1/2}$ и записать консервативное разностное уравнение переноса (3.3), обладающее свойством транспортности [9]. Учитывая конечную скорость распространения рассола при отсутствии диффузии, будем вычислять насыщенность по явной схеме, временной шаг h_τ которой вычисляется по критерию Куранта на первом временном слое после расчета давления и суммарных потоков через границы элементарных ячеек.

Алгоритм вычислений. Расчет на временном слое $\tau + h_\tau$ (по известным значениям P и S на предыдущем слое τ) начинается с определения значений KK^* в полуузлах сетки Ω_h по формулам (3.9), (3.10). После этого на основе уравнений (3.1), (3.3), (3.4) итерационным методом вычисляется давление. По найденным значениям $P_{i,k}$ определяются суммарные потоки жидкости через границы элементарных ячеек $D_{i,k}$. Затем на этих границах последовательно вычисляются потоки загрязнения с помощью соотношений (3.23), (3.24) и среднеинтегральные значения $J_{i,k}$. На каждом временном слое по балансовым соотношениям производится контроль вычислений за шаг h_τ и за весь период $[0, \tau + h_\tau]$.

Следует отметить, что использование схем сквозного при линейных фазовых проницаемостях приводит к сильному "размазыванию" переднего фронта насыщенности. Поэтому применяется прием "отслеживания" положения фронта с точностью до шага сетки на основе оценки времени τ_e подхода насыщенности к границе элементарной ячейки.

При нисходящем перемещении загрязнения, когда образуются языки рассола, наибольшая скорость движение насыщенности происходит при

$S = 0$. В этом случае время, за которое фронт насыщенности проходит ячейку от ее входа до выхода, вычисляется из соотношения

$$\tau_e = e_{i,k}/v'_S(0),$$

где $e_{i,k}$ – объем элементарной ячейки $D_{i,k}$, а v'_S – производная от скорости рассола при $S = 0$ на границе втекания в рассматриваемую ячейку.

При восходящем движении рассола не происходит распада начального разрыва насыщенности, и она движется скачком. Время прохождения ячейки фронтом насыщенности определяется по формуле

$$\tau_e = e_{i,k}S^+/v(S^+).$$

В алгоритме учитывается также то, что загрязнение занимает лишь область, ограниченную фронтом, так что вычисление потоков загрязнения проводится только в этой области. Все это позволяет значительно сократить время расчета и повысить эффективность описанных выше алгоритмов для проведения многовариантных вычислительных экспериментов.

Литература

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 278 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
3. Волчинская М.И., Гольден В.Я., Калиткин Н.Н., Самарский А.А. Сравнение разностных схем на тестах. – Препринт № 44 ИПМ, М., 1972. – 20 с.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиз, 1977. – 352 с.
5. Коныхов В.М., Храмченков М.Г., Чекалин А.Н. Фильтрационно-диффузионная модель миграции рассолов в неоднородных водоносных пластах // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 2. – С. 140 – 151.
6. Коныхов В. М., Чекалин А. Н., Храмченков М. Г. Миграция разноточностных жидкостей в водоносных пластах сложной структуры. – Казань: Изд-во Казанского математ. общества, 2005. – 160 с.
7. Максимов М.М., Рыбицкая Л.П. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений. – М.: Физматгиз, 1976. – 264 с.
8. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. – М.: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 1996. – 519 с.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
10. Румынин В.Г., Коносавский П.К. Миграция техногенных рассолов от поверхности бассейнов / В кн.: Экологическая геология и рациональное недропользование. – Изд-во СПГУ, 1999. – С. 72 – 87.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

12. Чекалин А.Н. Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. – 208 с.
13. Чекалин А.Н. Разрешимость задачи с интегральными граничными условиями для дифференциального уравнения параболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 21. – С. 348 – 352.
14. Чекалин А.Н., Кудрявцев Г.В., Михайлов В.В. Исследование двух- и трехкомпонентной фильтрации в нефтяных пластах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 148 с.
15. Chekalin A.N., Khramchenkov M.G., Konyukhov V.M., Kosterin A.V. Two-phase Model of Filtration of Heavy Liquid Contamination in Layered Aquifer // Int. Center For Heat and Mass Transfer. Int. Symp. on Multiphase Flow and Transport Phenomena (Antalya, Turkey, November 5 –10, 2000). Begel house, inc. New York, Wallingford (UK). – P. 454 – 461.
16. Pringle S.E., Glass M.B., Cooper C.A. Double-Diffusive Finger Convection in a Hele – Shaw Cell: An Experiment Exploring the Evolution of Concentration Fields, Length Scales and Mass Transfer // Transport in Porous Media. – May 2002. – V. 47. – No 2. – P. 195 – 214.
17. Schotting R.J. Mathematical Aspects of Salt Transport in Porous Media. – Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1998. – 187 p.
18. Watson S.J, Barry D.A., Schotting R.J., Hassanizadeh S.M. On the Validity of Darcy’s Law for Stable High-Concentration Displacements in Granular Porous Media // Transport in Porous Media. – May 2002. – V. 47. – No 2. – P. 149 – 167.