УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 456–467 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.217+519.713 doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.456-467

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ АВТОНОМНЫХ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.М. Захаров, С.В. Шалагин, Б.Ф. Эминов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Предметом исследования являются методы построения (представления) на автоматных моделях множеств эргодических стохастических матриц и определение оценок мощностей порождаемых множеств. Целью работы является разработка алгоритмов построения множеств эргодических стохастических матриц с рациональными элементами с заданными структурами и с заданным предельным вектором на основе автоматных вероятностных и детерминированных моделей, представляемых автономными автоматами, и оценка мощности множеств получаемых стохастических матриц в зависимости от размерности заданных автоматных моделей. Формируемые множества эргодических стохастических матриц ориентированы на решение задачи классификации автоматных вероятностных моделей по определенным критериям (параметрам) схожести или различия структур эргодических стохастических матриц методами прикладной многомерной математической статистики. Разработанные алгоритмы позволяют формировать разнообразие множеств стохастических матриц за счет изменения в рассматриваемых автоматах функций переходов, функции выходов в автономном детерминированном автомате и случайного входа в вероятностном автомате. Показано, что функция переходов автономного вероятностного автомата позволяет сформировать по предложенному алгоритму функционирования вероятностного автомата различные по мощности и по структуре множества эргодических стохастических матриц на основе реализации перестановок множества состояний с повторениями и изменением распределения вероятностей входной случайной величины. Показано, что, задавая различные функции выходов автономного детерминированного автомата, можно сформировать по разработанному алгоритму различные по мощности множества эргодических стохастических матриц с заданным предельным вектором на основе реализации перестановок множества выходных букв с повторениями. Приведены оценки мощностей множеств эргодических стохастических матриц с рациональными элементами, представляемых автономными вероятностным и детерминированным автоматами при заданных ограничениях. Представленные оценки отражают зависимости величин мощностей формируемых множеств стохастических матриц от размерности заданных автоматных моделей. Предложенные алгоритмы построения множеств эргодических стохастических матриц являются как взаимно дополняющие по решаемым задачам.

Ключевые слова: множество стохастических матриц, структура, предельный вектор, автономные автоматные модели, оценки мощности множеств

Введение

Задача автоматизированного анализа многомерных данных актуальна при моделировании сложных систем (вычислительных и информационных систем, систем защиты информации, марковских систем массового обслуживания и др.) [1–8]. Для описания подобных систем широко используются автоматные вероятностные модели (АВМ) [6–8], задаваемые стохастическими матрицами. Свойства стохастических матриц зависят от их структуры, определяемой как соотношение значений её элементов относительно друг друга. В связи с этим естественно возникающей задачей анализа АВМ является задача классификация стохастических матриц по некоторым критериям (параметрам) схожести или различия их структур [9, 10]. Подход решения этой задачи, рассматриваемый в [9, 10], основан на методах прикладной многомерной математической статистики с применением программных средств вида «Интегрированная система STATISTICA» [11] Для реализации этого подхода необходимо формировать различные заданные множества стохастических матриц (матрицы с заданной структурой – треугольные, блочные, циркулянты с требуемой энтропией и др. [9, 10], матрицы с заданными асимптотическими свойствами – эргодичность, с заданным предельным вектором [12]). В [13] показано, что задача построения множеств стохастических матриц возникает и при построении укрупненных стохастических матриц. В [9, 10] решение данной задачи выполняется на основе разбиения единичного отрезка на заданное число случайных интервалов с помощью генератора псевдослучайных последовательностей и применения нормировки элементов стохастической матрицы. Однако подобный подход не позволяет получать требуемое разнообразие множеств стохастических матриц, обладающих заданными структурами и асимптотическими свойствами.

Целью настоящей работы является разработка алгоритмов синтеза множеств эргодических стохастических матриц с заданными структурами и предельным вектором на основе автоматных вероятностных и детерминированных моделей, представляемых автономными автоматами, и оценка мощности множеств получаемых стохастических матриц в зависимости от размерности заданных автоматных моделей.

1. Построение множества стохастических матриц на основе автономного вероятностного автомата

1.1. Определение автоматной модели. Рассмотрим следующий автономный вероятностный автомат (АВА) [14]

$$\text{АВА} = \left(S,\, \widehat{X},\, \Delta(x,\, s) = s,\, \overline{\pi_0}\right), \tag{1}$$

где $S = \{s_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, – множество состояний; $\widehat{X}$ – дискретная случайная величина (ДСВ), $\widehat{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{l-1} \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{l-1} \end{pmatrix}$, принимающая конечное множество значений $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}\}$ на входе АВА (1) с вероятностями в виде вектора $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$, $\sum\limits_{i=0}^{l-1} p_i = 1$; $\Delta\,(x,\, s)$ – функция переходов АВА (1), ставящая паре элементов $(x,\, s)$ в однозначное соответствие новое состояние $s \in S$; $\overline{\pi_0}$ – начальный стохастический вектор. Функция переходов $\Delta\,(x,\, s)$ задается автоматной таблицей размера $n \times l$. Параметры n и l определяют размерность автоматной модели.

Отметим, что функцию $\Delta\,(x,\, s)$ в виде некоторой автоматной таблицы размера $n{\times}l$ можно задать, в частности, на основе алгоритмов [15, 16] разложения заданной стохастической матрицы (обозначим P_S) размера $n{\times}n$ в стохастическую линейную комбинацию простых матриц. Разложение имеет вид [15]

$$P_s = \sum_{k=0}^{l-1} p_k M(x_k), \tag{2}$$

где p_k, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, – элементы стохастического вектора $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$; $M(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, – простая матрица размера $n \times n$, соответствующая символу x_k; величина l удовлетворяет соотношению [15]

$$l \leq n^2 - n + 1. \tag{3}$$

Множество матриц $M(x_k)$ однозначно задает функцию $\Delta(x,\ s)$ [15].

Замечание 1. Множество автоматных таблиц размера $n \times l$ для задания функций $\Delta(x,\ s)$ можно сформировать на основе реализации различных перестановок элементов множества S с повторениями [17] с помощью генератора n-значных псевдослучайных последовательностей с периодом $L_0 = n^{nl}$.

Последовательность состояний автомата (1) является цепью Маркова [14]. Закон (стохастическую матрицу размера $n \times n$) цепи Маркова, получаемой в автомате (1), можно однозначно вычислить в виде (2) в соответствии с [7] по заданным элементам автомата (1) $\left(\widehat{X},\ \Delta(x,\ s)\right)$, где элементы $\pi_{ij}(x_k)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, матриц $M(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, определяются на основе функции $\Delta(x,\ s)$ по соотношению

$$\pi_{ij}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } \ s_j = \Delta(x_k, s_i), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

1.2. Алгоритм построения стохастической матрицы. Рассмотрим алгоритм (далее – Алгоритм 1) вычисления стохастической матрицы вида P_S на основе соотношений (2)–(4), который включает три шага.

Шаг 1. Определим по заданной функции $\Delta(x,\ s)$ в виде автоматной таблицы, где столбцы помечены буквами x и строки – буквами s, и по соотношению (4) простые матрицы $M(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$ (каждому столбцу заданной автоматной таблицы ставится в соответствие матрица $M(x_k)$).

Шаг 2. Перемножим полученные простые матрицы на соответствующие элементы p_k заданного стохастического вектора $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$.

Шаг 3. Вычислим стохастическую матрицу P_S в соответствии с (2).

Пример 1. Пусть задана ДСВ

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая соотношению (3); множество состояний $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ и функция переходов $\Delta(x,\ s)$ представлены в виде автоматной табл. 1. Матрицы $M(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, $l = 4$, и P_S, полученные по Алгоритму 1, представлены ниже.

Табл. 1

Функция переходов $\Delta(x,\ s)$

	x_0	x_1	x_2	x_3
s_0	s_1	s_2	s_3	s_0
s_1	s_3	s_1	s_2	s_3
s_2	s_0	s_3	s_1	s_2
s_3	s_3	s_2	s_2	s_3

$$p_0\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+p_1\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+$$

$$+p_3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_3&p_0&p_1&p_2\\0&p_1&p_2&p_0+p_3\\p_0&p_2&p_3&p_1\\0&0&p_1+p_2&p_0+p_3\end{pmatrix}=P_S.$$

Рис. 1. Вычисление по Алгоритму 1 стохастической матрицы вида P_S

1.3. Построение множества стохастических матриц. Задав для автомата (1) различные функции $\Delta(x,\, s)$ в виде соответствующих автоматных таблиц при фиксированном стохастическом векторе $\overline{P}=\{p_0,p_1,\ldots,p_{l-1}\}$, можно получить по Алгоритму 1 различные множества (подклассы) стохастических матриц P_S с отличающейся структурой (эргодические, эргодические квазитреугольные, эргодические блочные и др.) [9, 10]). Иллюстрация представления эргодической блочной матрицы дана в примере 2.

Пример 2. Пусть для данных примера 2 автоматная таблица имеет вид

Табл. 2

Функция переходов $\Delta(x,\, s)$

	x_0	x_1	x_2	x_3
s_0	s_1	s_0	s_0	s_0
s_1	s_0	s_0	s_2	s_1
s_2	s_2	s_1	s_3	s_2
s_3	s_3	s_2	s_2	s_3

Соответствующая стохастическая матрица представлена на рис. 2.

$$p_0\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+p_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+$$

$$+p_3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1+p_2+p_3&p_0&0&0\\p_0+p_1&p_3&p_2&0\\0&p_1&p_0+p_3&p_2\\0&0&p_1+p_2&p_0+p_3\end{pmatrix}=P_S.$$

Рис. 2. Вычисление эргодической блочной матрицы вида P_S

В соответствии с замечанием 1 множество автоматных таблиц размера $n\times l$ для задания функций $\Delta(x,\, s)$ можно сформировать на основе реализации перестановок элементов множества S с повторениями. Число различных перестановок множества S с повторениями равно [17]

$$C_k(i_1,\ldots,i_n)=L_1=\frac{K!}{i_1!i_2!\ldots i_n!},\tag{5}$$

где $K=nl$, $i_1,\, i_2,\ldots,i_n$ – такие натуральные числа, что $\sum\limits_{j=1}^{n}i_j=nl$.

Выражение (5) определяет мощность множества получаемых автоматных таблиц для задания функции $\Delta(x,\, s)$ при фиксированном наборе $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и фиксированном стохастическом векторе $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$. Число различных таких наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ можно определить оценкой вида [14]

$$L_2 = C_{n+K-1}^{K-1}. \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) следует

Утверждение 1. *Произведение* $L_1 L_2$ *определяет оценку мощности множества автоматных таблиц для задания автомата* (1) *при фиксированном векторе* $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$.

Изменяя в автомате (1) стохастический вектор $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$ при фиксированной функции $\Delta(x,\, s)$, можно получить множество матриц P_S из заданного подкласса, определяемого видом функции $\Delta(x,\, s)$.

Определим мощность множества стохастических матриц, получаемых изменением вектора при фиксированной функции $\Delta(x,\, s)$. Введем ограничения. Пусть элементы вектора $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$ удовлетворяют условию

$$p_i = a_i/N, \quad \sum_{i=0}^{l-1} a_i = N, \tag{7}$$

где a_i – целые положительные числа и N кратно l (условие кратности вводится с целью достижения возможности получения равновероятного распределения). Тогда данный вектор относится к классу распределений вероятностей (обозначение A_l), мощность которого оценивается величиной [14]

$$L_3 = C_{l+N-1}^{N-1}. \tag{8}$$

Величина (8) определяет оценку мощности множества стохастических матриц, получаемых изменением вектора $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$ при фиксированной функции $\Delta(x,\, s)$ в автомате (1).

Решение задачи построения множества рассматриваемых векторов с мощностью (8) можно выполнить в соответствии с [8, 14] на основе разбиения единичного отрезка на заданное число l случайных интервалов с применением нормировки элементов стохастического вектора.

Оценим общее число возможного разнообразия стохастических матриц, которые можно построить на основе модели (1) по Алгоритму 1 при ограничении (7). Из Алгоритма 1 и соотношений (5), (6), (8) следует

Утверждение 2. *Пусть мощность множества автоматных таблиц для задания функции* $\Delta(x,\, s)$ *в автомате* (1) *определяется величиной* $L_1 L_2$ *и вектор* $\overline{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}\}$ *относится к классу* A_l *распределений вероятностей. Тогда мощность множества стохастических матриц, получаемых на автоматной модели* (1) *по Алгоритму* 1, *определяется верхней оценкой вида* $O(L_1 L_2 L_3)$.

2. Построение множества стохастических матриц на основе автономного детерминированного автомата

2.1. Определение автоматной модели. Рассмотрим следующий автономный детерминированный автомат с выходом [18]

$$DA = (X, S, Y, \delta, \lambda), \tag{9}$$

где X – входной алфавит, состоящий из одной буквы, $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}\}$ – множество состояний; $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}\}$ – выходной алфавит; $\delta : S \to S$ –

функция переходов; $\lambda : S \to Y$ – функция выходов, отображающая S на Y. Траектория переходов автомата образует цикл длины N, охватывающий все состояния. Функцию выхода $\lambda(s)$ определим разбиением множества S на m непересекающихся подмножеств $\{A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}\}$, мощности которых соответственно равны $a_i \geq 1$ и $\sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i = N$. Обозначим данные подмножества соответственно символами множества $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}\}$. Параметры N, m определяют размерность автоматной модели (9). На выходе автомата за время выполнения цикла формируется последовательность выходных букв длины N (длина – количество букв). Данной последовательности поставим в соответствие матрицу относительных частот $P' = \left(p'_{ij}\right) = (a_{ij}/a_i)$ размера $m \times m$, где a_i – число вхождений буквы y_i в последовательности длины N, $a_i \geq 1$, a_{ij} – число вхождений пары стоящих рядом букв $y_i y_j$, $i, j = 0, 1, \ldots, m-1$ (считаем, что за y_N следует y_1). Матрица P' – эргодическая стохастическая, обладающая свойствами [18]:

1) для элементов $p'_{ij} = \left(a_{ij} \Big/ \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_{ij}\right)$

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ji} = a_i \geq 1, \quad \sum_{i=0}^{m-1} a_i = N, \quad i, j = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{10}$$

2) предельный стохастический вектор $\overline{\pi}$ матрицы P' равен

$$\overline{\pi} = (a_0/N; a_1/N; \ldots; a_{m-1}/N). \tag{11}$$

2.2. Представление множества стохастических матриц на модели DA. На выходе автомата (9) получаемая последовательность является по своей структуре реализацией перестановки элементов множества Y с повторениями. Задавая в автомате (9) различные функции переходов, реализующие различные циклические отображения при фиксированной функции выходов (и соответственно при фиксированном векторе $\overline{\pi}$), можно получить на выходе автомата (9) множество таких перестановок с мощностью, определяемой по аналогии с (5) соотношением [17]

$$C_N(i_1, \ldots, i_m) = L_4 = \frac{N!}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!}, \tag{12}$$

где $i_1, \ldots, i_m$ – набор натуральных чисел таких, что $N = \sum\limits_{j=1}^{m} i_j$. Из свойств (10), (11) и соотношения (12) следует

Утверждение 3. *Мощность множества стохастических матриц P', представляемых на автоматной модели (9) и имеющих один и тот же заданный предельный вектор, определяется величиной L_4.*

Число различных наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ можно определить оценкой вида [14]

$$L_5 = C_{m+N-1}^{N-1}. \tag{13}$$

Из свойств (10), (11) и соотношений (12), (13) следует

Утверждение 4. *Оценка мощности множества эргодических стохастических матриц, удовлетворяющих свойствам (10) и (11) и получаемых на автоматной модели (9) при ограничениях (12), (13), определяется верхней оценкой вида $O(L_4 L_5)$.*

2.3. Алгоритмическая реализация модели DA. Рассмотрим алгоритмическую иллюстрацию решения задачи построения множеств матриц P' на модели (9). Предварительно представим решение на основе модели (9) следующей задачи.

Заданы автомат (9) и стохастический вектор $\overline{\pi}$ (11), соответствующий заданной функции выходов $\lambda : S \to Y$. Требуется построить алгоритм получения на основе автомата (9) эргодической стохастической матрицы $P' = \left(p'_{ij}\right) = (a_{ij}/a_i)$, имеющей предельный стохастический вектор, равный заданному вектору $\overline{\pi}$.

Пусть в автомате (9) функция переходов $\delta : S \to S$ реализуется линейным регистром сдвига (ЛРС) с характеристическим примитивным полиномом $F(x)$ степени n [19]. Полином $F(x)$ задает функцию линейной обратной связи ЛРС, генерирующего M-последовательность [20] с периодом $2^n - 1$. Функция выходов $\lambda : S \to Y$ реализуется табличным способом: в оперативной памяти выделяется объем памяти размером $N = 2^n - 1$ ячеек, в которые записываются значения букв $y \in Y$ в соответствии с заданным разбиением множества S на m подмножеств $\{A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}\}$. Содержимое ячеек (буквы $y \in Y$) считываются по адресам-значениям $s \in S$ в отдельный блок (блок статистики), где вычисляются значения элементов $p'_{ij} = a_{ij}/a_i$. На каждом шаге цикла длины $N = 2^n - 1$, образованного траекторией переходов автомата (9), алгоритм (далее – Алгоритм 2) построения стохастической матрицы P' выполняет три следующие процедуры.

1. Функция переходов реализует переход в новое состояние $s \in S$.

2. Функция выходов по полученному значению s выдает соответствующее значение $y \in Y$.

3. Полученное значение y заносится в блок статистики, в котором вычисляется промежуточное значение соответствующего элемента $p'_{ij} = a_{ij}/a_i$.

После выполнения цикла длины N вычисленные элементы $p'_{ij} = a_{ij}/a_i$ матрицы P' содержатся в блоке статистики. Предельный стохастический вектор данной матрицы равен заданному вектору $\overline{\pi}$ (что следует из свойств (10), (11)).

Пример 3. Построение множества эргодических стохастических матриц путем задания в (9) различных функций выходов.

Пусть в автомате (9) $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{15}\}$, $N = 15$. Функция переходов реализуется линейным регистром сдвига с характеристическим примитивным полиномом $F(x) = x^4 + x + 1$. ЛРС (с начальным двоичным состоянием 1000) генерирует M-последовательность с периодом $N = 2^4 - 1 = 15$. Множество $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Вектор $\overline{\pi} = (6/15,\ 5/15,\ 4/15)$. Функция выхода представлена в оперативной памяти размером $N = 15$ ячеек соответственно заданному вектору в виде массива $y_1^6\, y_2^5\, y_3^4$ ($y_i,\ i = 1, 2, 3$, повторяются последовательно 6, 5 и 4 раза). На выходе автомата за время выполнения цикла по адресам-значениям $s \in S$, формируемым ЛРС, из ОЗУ считывается последовательность выходных букв вида $y_2 y_1 y_1 y_2 y_3 y_1 y_2 y_1 y_2 y_3 y_3 y_3 y_2 y_1 y_1$, по которой в блоке статистики вычисляется матрица вида

$$\begin{pmatrix} 2/6 & 4/6 & 0 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \\ 1/4 & 1/4 & 2/4 \end{pmatrix},$$

обладающая свойствами (10), (11) и имеющая заданный предельный вектор $\overline{\pi}$.

При данных примера 3, задав другой вектор $\overline{P}_N = (2/15, 9/15, 4/15)$ и соответствующую этому вектору функцию выхода в ОЗУ в виде массива $y_1^2\, y_2^9\, y_3^4$, получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/4 & 2/4 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм 2 позволяет получить при фиксированной функции переходов на основе задания различных векторов $\overline{P}_N = (a_0/N; a_1/N; \ldots; a_{m-1}/N)$ множество соответствующих матриц P' с мощностью, определяемой величиной (13).

Пример 4. Построение на основе Алгоритма 2 множества матриц P' с заданным предельным вектором путем изменения функции переходов.

Задавая в автомате (9) различные функции переходов, реализуемые на основе различных ЛРС (генераторов M-последовательностей с периодом $N = 2^n - 1$) с различными характеристическими примитивными полиномами $F(x)$ степени n при фиксированной функции выхода (при фиксированном стохастическом векторе $\overline{\pi}$) можно получить число циклов длины $N = 2^n - 1$, определяемое величиной $Q_1 = (\varphi(2^n - 1))/n$ [21](φ – функция Эйлера). Полученные по Алгоритму 2 матрицы P' имеют один и тот же заданный предельный стохастический вектор $\overline{\pi}$. Для данного примера мощность множества стохастических матриц, получаемых на автомате (9), с заданным вектором $\overline{\pi}$ можно оценить величиной $Q_1 L_5$.

Замечание 2. Для всех целых чисел $a \geq 5$, $\varphi(a) \geq a/(6 \ \ln\ln a)$ [22].

Заключение

Разработаны алгоритмы представления множеств стохастических матриц с заданной структурой на основе автономного вероятностного автомата вида (1) и с заданными асимптотическими свойствами на основе автономного детерминированного автомата с выходом (9). Получение разнообразия множеств стохастических матриц достигается за счет изменения в рассматриваемых автоматах функций переходов, функции выходов в автономном детерминированном автомате и случайного входа в вероятностном автомате. Предложенные алгоритмы построения множеств эргодических стохастических матриц с заданными структурами и асимптотическими свойствами являются как взаимно дополняющие по решаемым задачам. Представлены оценки мощности множеств получаемых стохастических матриц в зависимости от размерности заданных автоматных моделей. Для автомата (1) верхняя оценка определяется величиной $O(L_1 L_2 L_3)$, для автомата (9) верхняя оценка – величиной $O(L_4 L_5)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00120).

Литература

1. *Katehakis M., Smit L.* A successive lumping procedure for a class of Markov chains // Probab. Eng. Inf. Sci. – 2012. – V. 26, No 4. – P. 483–508. – doi: 10.1017/S0269964812000150.

2. *Деундяк В.М., Жданова М.А.* Полиномиальное представление скрытой полумарковской модели фергюсоновского типа // Вестн. ВГУ: Системный анализ и информационные технологии. – 2013. – № 2. – С. 71–78.

3. *Погорелов Б.А., Пудовкина М.А.* Об обобщениях марковского подхода при изучении алгоритмов блочного шифрования // Прикл. дискр. матем. Приложение. – 2014. – № 7. – С. 51–52.

4. *Geiger B., Temmel C.* Lumpings of Markov chains, entropy rate preservation, and higher-order lumpability // Adv. Appl. Probab. – 2014. – V. 51, No 4. – P. 1114–1132. – doi: 10.1239/jap/1421763331.

5. *Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V.* Reliable recognition of masked cartographic scenes during transmission over the network // 2016 Int. Sib. Conf. on Control and Communications (SIBCON). – IEEE, 2016. – P. 1–5. – doi: 10.1109/SIBCON.2016.7491657.

6. *Бухараев Р.Г.* Основы теории вероятностных автоматов. – М.: Наука, 1985. – 287 с.

7. *Левин Б.Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.

8. *Глова В.И., Захаров В.М., Песошин В.А., Шалагин С.В.* Моделирование. Вероятностные дискретные модели / Под ред. В.М. Захарова. – Казань: АБАК, 1998. – 52 с.

9. *Захаров В.М., Нурмеев Н.Н., Салимов Ф.И., Шалагин С.В.* Классификация стохастических эргодических матриц методами кластерного и дискриминантного анализа // Исследования по информатике. – Казань: Отечество, 2000. – С. 91–106.

10. *Нурутдинова А.Р., Шалагин С.В.* Многопараметрическая классификация автоматных марковских маделей на основе генерируемых ими последовательностей состояний // Прикл. дискр. матем.. – 2010. – № 4. – С. 41–54.

11. *Боровиков В.П.* Statistica: искусство анализа данных на компьютере. – СПб.: Питер, 2003. – 700 с.

12. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

13. *Zakharov V.M., Eminov B.F., Shalagin S.V.* Representing lumped Markov chains by minimal polynomials over field GF(q) // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – V. 1015. – Art. 032033, P. 1–6. – doi: 10.1088/1742-6596/1015/3/032033.

14. *Бухараев Р.Г., Захаров В.М.* Управляемые генераторы случайных кодов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1978. – 160 с.

15. *Ченцов В.М.* Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата // Кибернетика. – 1968. – № 3. – С. 32–35.

16. *Эминов Б.Ф., Захаров В.М.* Анализ алгоритмов разложения двоично-рациональных стохастических матриц на комбинацию булевых матриц // Информационные технологии. – 2008. – № 3. – С. 54–59.

17. *Бронштейн И.Н, Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

18. *Столов Е.Л.* Об одном классе генераторов псевдомарковских цепей // Исследования по прикл. матем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 8. – С. 66–71.

19. *Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В.* Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.

20. *Сарвате Д.В., Персли М.Б.* Взаимно-корреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей // Труды Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1980. – Т. 68, № 5. – С. 59–90.

21. *Нечаев В.И.* Элементы криптографии. Основы теории защиты информации. – М.: Высш. шк., 1999. – 109 с.

22. *Латыпов Р.Х.* Математические основы кодирования информации и криптографии. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. – 60 с.

Поступила в редакцию
28.05.19

Захаров Вячеслав Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных систем

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *gilvv@mail.ru*

Шалагин Сергей Викторович, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных систем

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *sshalagin@mail.ru*

Эминов Булат Фаридович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных систем

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *bulfami@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 3, pp. 456–467

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.456-467

Representation of the Stochastic Matrix Sets with Given Properties Based on Autonomous Automatic Models

V.M. Zakharov, S.V. Shalagin**, B.F. Eminov****

A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia
E-mail: **gilvv@mail.ru*, ***sshalagin@mail.ru*, ****bulfami@mail.ru*

Received May 28, 2019

Abstract

This paper considers the methods of construction (presentation) of the sets of ergodic stochastic matrices using automaton models and determination of the power estimates of the generated sets. The research aimed at developing algorithms for constructing the sets of ergodic stochastic matrices with rational elements with given structures and limit vector based on the automaton probabilistic and deterministic models represented by autonomous automata, as well as at estimating the power of the obtained sets of stochastic matrices depending on the dimensions of the given automaton models. The constructed sets of ergodic stochastic matrices are focused on solving the problem of classification of automaton probabilistic models according to certain criteria (parameters) of similarities or differences between the structures of ergodic matrices by the methods of applied multidimensional mathematical statistics. The developed algorithms enable to form a variety of sets of stochastic matrices by changing the transition functions in the considered automata, output functions in autonomous deterministic automaton, and random entry of probabilistic automaton. It was shown that the transition function of autonomous probabilistic automaton allows makes it possible to develop, based on the proposed functioning algorithm, a set of ergodic stochastic matrices with different probabilistic automaton powers and structures based on the permutations of a set of states with repetitions and changes in the probability distribution of the input random variable. It was demonstrated that the sets of ergodic stochastic matrices with different power characteristics and a limit vector based on rearrangements in a set of output letters with repetitions can be formed by changing the functions of the the autonomous deterministic automaton with the help of the developed algorithm. The estimates of the powers of the sets of ergodic stochastic matrices with rational elements represented by autonomous probabilistic and deterministic automata for given restrictions were provided. These estimates reflect the dependencies of the values of powers of the generated sets of stochastic matrices on the dimension characteristics of the automaton models. The proposed construction algorithms of the sets of ergodic stochastic matrices are complementary with respect to the solved problems.

Keywords: set of stochastic matrices, structure, limit vector, autonomous automatic models, set power estimates

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00120).

Figure Captions

Fig. 1. Computation based on Algorithm 1 of stochastic matrix P_S.

Fig. 2. Computation of the ergodic partition matrix P_S.

References

1. Katehakis M., Smit L. A successive lumping procedure for a class of Markov chains. *Probab. Eng. Inf. Sci.*, 2012, vol. 26, no. 4, pp. 483–508. doi: 10.1017/S0269964812000150.
2. Deundyak V.M., Zhdanova M.A. Polynomial representation of hidden semi-Markov model of the Ferguson type. *Vestn. VGU: Sist. Anal. Inf. Tekhnol.*, 2013, no. 2, pp. 71–78. (In Russian)
3. Pogorelov B.A., Pudovkina M.A. On generalizations of Markov's approach to research of block ciphers. *Prikl. Diskr. Mat. Prilozh.*, 2014, no. 7, pp. 51–52. (In Russian)
4. Geiger B., Temmel C. Lumpings of Markov chains, entropy rate preservation, and higher-order lumpability. *Adv. Appl. Probab.*, 2014, vol. 51, no. 4, pp. 1114–1132. doi: 10.1239/jap/1421763331.
5. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. Reliable recognition of masked cartographic scenes during transmission over the network. *Proc. 2016 Int. Sib. Conf. on Control and Communications (SIBCON)*. IEEE, 2016, pp. 1–5. doi: 10.1109/SIBCON.2016.7491657.
6. Bukharaev R.G. *Osnovy teorii veroyatnostnykh avtomatov* [Fundamentals of the Theory of Probabilistic Automata]. Moscow, Nauka, 1985. 287 p. (In Russian)
7. Levin B.R., Schwartz V. *Veroyatnostnye modeli i metody v sistemakh svyazi i upravleniya* [Probabilistic Models and Methods in Communication and Management Systems]. Moscow, Radio Svyaz', 1985. 312 p. (In Russian)
8. Glova V.I., Zakharov V.M., Pesoshin V.A., Shalagin S.V. *Modelirovanie. Veroyatnostnye diskretnye modeli* [Modeling. Probabilistic Discrete Models]. Zakharov V.M. (Ed.). Kazan, ABAK, 1998. 52 p. (In Russian)
9. Zakharov V.M., Nurmeev N.N., Salimov F.I., Shalagin S.V. Classification of stochastic ergodic matrices by cluster and discriminant analysis methods. In: *Issledovaniya po informatike* [Computer Science Research]. Kazan, Otechestvo, 2000, pp. 91–106. (In Russian)

10. Nurutdinova A.R., Shalagin S.V. Multi-parametric classification of automaton Markov models based on the sequences they generate. *Prikl. Diskr. Mat.*, 2010, no.4, pp. 41–54. (In Russian)

11. Borovikov V.P. *Statistica: iskusstvo analiza dannykh na komp'yutere* [Statistica: Art of Computer-Aided Data Analysis]. St. Petersburg, Piter, 2003. 700 p. (In Russian)

12. Kemeny J.G., Snell J.L. *Finite Markov Chains*. Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, D. van Nostrand Co. Inc. VIII, 1960. 210 p.

13. Zakharov V.M., Eminov B.F., Shalagin S.V. Representing lumped Markov chains by minimal polynomials over field GF(q). *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 2015, pp. 1–6. doi: 10.1088/1742-6596/1015/3/032033.

14. Bukharaev R.G., Zakharov V.M. *Upravlyaemye generatory sluchainykh kodov* [Managed Random Code Generators]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1978. 160 p. (In Russian)

15. Chentsov V.M. On a method for the synthesis of an autonomous stochastic automaton. *Kibernetika*, 1968, no. 3, pp. 32–35. (In Russian)

16. Eminov B.F., Zakharov V.M. Analysis of decomposition algorithms binary rational stochastic matrices on a combination of Boolean matrices. *Inf. Tekhnol.*, 2008, no. 3, pp. 54–59. (In Russian)

17. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* [A Guide on Mathematics for Engineers and Students of Technical Universities]. Moscow, Nauka, 1986. 544 p. (In Russian)

18. Stolov E.L. A class of generators of pseudo-Markov chains. *Issled. Prikl. Mat.*, 1980, no. 8, pp. 66–71. (In Russian)

19. Alferov A.P., Zubov A.Yu. *Osnovy kriptografii* [Cryptography Basics]. Moscow, Gelios ARV, 2002. 480 p. (In Russian)

20. Carvate D.B., Pursley M.B. Cross-correlation properties of pseudorandom and related sequences. *Zh. Inst. Inzh. Elektrotekh. Radioelektron.*, 1980, vol. 68, no. 5, pp. 59–90. (In Russian)

21. Nechaev V.I. *Elementy kriptografii. Osnovy teorii zashchity informatsii* [Elements of Cryptography. Fundamentals of Information Security Theory]. Moscow, Vyssh. Shk., 1999. 109 p. (In Russian)

22. Latypov R.Kh. *Matematicheskie osnovy kodirovaniya informatsii i kriptografii* [The Mathematical Basis of Information Coding and Cryptography]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 2005. 60 p. (In Russian)

Для цитирования: *Захаров В.М., Шалагин С.В., Эминов Б.Ф.* Представление множеств стохастических матриц с заданными свойствами на основе автономных автоматных моделей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 456–467. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.456-467.

For citation: Zakharov V.M., Shalagin S.V., Eminov B.F. Representation of the stochastic matrix sets with given properties based on autonomous automatic models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 456–467. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.456-467. (In Russian)