НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

И.И. Батыршин

ОБРАТНАЯ МАТЕМАТИКА
(REVERSE MATHEMATICS)

Учебно-методическое пособие

Казань — 2024

УДК 510.2
ББК 22.12
ГРНТИ 27.03.02
MSC 03B30

Батыршин И. И.
Обратная математика (reverse mathematics). Учебно-методическое пособие / И. И. Батыршин. — Казань: Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, 2024. — 35 с.

Целью учебно-методического пособия является показать глубокие внутренние связи между различными разделами математики (математическим и функциональным анализом, топологией, алгеброй, дифференциальными управнениями, комбинаторикой, математической логикой и др.), которые были установлены в результате исследований в рамках обратной математики - программы, направленной на поиск аксиом, необходимых для доказательства математических теорем.

В пособии описывается место обратной математики в основаниях математики, исторические примеры исследований, лежащих в русле обратной математики, ее основные идеи и принципы. Также в пособии описывается арифметика второго порядка и её подсистемы, которые используются в исследованиях по обратной математике, и приводятся наиболее известные результаты этой дисциплины.

Пособие предполагает знакомство с математической логикой в пределах стандартного университетского курса и может быть использовано как при чтении специальных курсов и проведения занятий в высших учебных заведениях, входящих в состав Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, так и для самостоятельного изучения, а также в целях повышения привлекательности математики как области знаний, повышения мотивации к её изучению, активизации научной и образовательной деятельности в области математических наук.

Содержание

1. Введение

Основания математики - это система взглядов на общие для различных разделов математики базовые понятия и объекты (точка, прямая, плоскость, число, множество, функция, морфизм, категория и др.), отношения между ними (равенство, между, меньше, принадлежность, композиция и др.) и методы (формализация, аксиоматизация, правила логического вывода, построение моделей и др.), используемые для определения и конструирования математических понятий, объектов и структур, и изучения их свойств.

Первая известная работа по основаниям математики - «Начала» Евклида (см. [1]) - была написана около 300 г. до н.э. и посвящена геометрии. В этой работе были определены базовые объекты геометрии и отношения между ними, и впервые реализован аксиоматический метод построения математики: сформулировано пять постулатов, из которых дедуктивным путем выводились все известные математические теоремы. Кроме этого, в «Началах» были заложены основы теории чисел, которые интерпретировались как геометрические величины - длины отрезков.

Второй масштабной работой по основаниям математики можно назвать изданную в 1637 году «Геометрию» Декарта (см. [2]), в которой понятие числа было отделено от геометрии и стало рассматриваться как исходный самостоятельный объект. Более того, Декартом был создан новый мощный метод - метод координат, благодаря которому геометрические задачи были сведены к арифметике и алгебре, что положило начало формированию аналитической геометрии. Кроме этого, в «Геометрии» начало формироваться одно из ключевых понятий современной математики - понятие функции как зависимости между числами.

Следующий крупный вклад в основания математики был внесён Лейбницем, который в 1684 году сформулировал понятие бесконечно малых величин в своей работе «Новый метод максимумов и минимумов» [3] и положил начало математическому анализу, дифференциальному и интегральному исчислениям. Впоследствии в работах Больцано [4], Коши [5] и Вейерштрасса [6] было сформулировано понятие предела функции, и бесконечно малые величины Лейбница были формализованы в терминах убывающих последовательностей, которые сходятся к нулю.

Расцвет в развитии оснований математики пришёлся на вторую половину девятнадцатого века. Дедекинд [7] ввёл определение вещественных чисел как сечений множества рациональных чисел. Паш [8] заложил основы аксиоматического метода и оснований геометрии. На основе его подхода Гильберт [9] аксиоматизировал элементарную геометрию. Дедекинд [10] и Пеано [11] предложили системы аксиом для натуральных чисел и формализовали арифметику. Фреге [12] выдвинул программу изучения математики средствами логики и создал исчисление предикатов. Кантор (см. [13]) сформулировал понятия кардинальных и порядковых чисел (ординалов), разработал метод трансфинитной индукции и создал теорию множеств, которая легла в основу всех разделов математики.

Начало двадцатого века принято характеризовать как «кризис оснований математики» в связи с обнаружением парадоксов в теории множеств, которые поставили под сомнение безупречность понятий математики, убедительность ее методов и правомерность построения ее объектов. В целях преодоления этого кризиса были сформированы три подхода к пересмотру оснований математики: логицизм (Фреге, Рассел, Уайтхед, Рамсей, Чёрч), интуиционизм (Кронекер, Брауэр, Г.Вейль, Гейтинг) и формализм (Гильберт, Аккерман, Бернайс, фон Нейман).

Гильберт выдвинул программу преодоления этого кризиса, которая состояла из двух пунктов: построить аксиоматическую теорию множеств и доказать непротиворечивость этой теории с помощью «финитных» методов (т.е. допускающих только конечные действия над конечным числом объектов). Первый пункт этой программы был выполнен - теория множеств была аксиоматизирована в трудах Цермело [14], Френкеля [15] и других математиков. Принципиальная невозможность выполнения второго пункта была показана в знаменитых теоремах Гёделя о неполноте [16]. Первая теорема Гёделя показывает, что в любой непротиворечивой теории, содержащей арифметику, существует предложение, не доказуемое и не опровержимое в рамках этой теории. Вторая теорема Гёделя показывает, что в качестве такого предложения можно взять утверждение о непротиворечивости самой этой теории. Тем самым он показал невозможность доказательства финитными методами не только непротиворечивости теории множеств, но даже непротиворечивости арифметики. Впоследствии Генцен [17] доказал непротиворечивость арифметики с помощью трансфинитной индукции.

Тем не менее значительная часть бесконечной математики, включая многие теоремы с неконструктивными доказательствами, может быть сведена к конечной математике. Это является одним из побочных результатов, полученных в рамках «обратной математики» - новой программы в основаниях математики, зародившейся в работах Харви Фридмана в конце 1960-х гг. - начале 1970-х гг. и получившей чёткую форму усилиями Симпсона и его учеников.

С точки зрения аксиоматического подхода, математика заключается в выводе теорем из аксиом. Обратная математика заключается в обратном процессе - в поиске аксиом, которые позволяют доказать известные математические теоремы. Основной вопрос обратной математики можно сформулировать следующим образом: какие аксиомы действительно необходимы для доказательства той или иной теоремы?

В рамках обратной математики была исследована логическая сила многих классических теорем и доказано, что теоремы из различных разделов математики оказываются эквивалентными друг другу и выстраиваются в очень красивую иерархию по своей логической силе.

В следующем разделе описываются два исторических примера подобных исследований, которые появились до оформления обратной математики как самостоятельной дисциплины, и на этих примерах объясняются её основные идеи и принципы.

В третьем разделе приводится краткая история возникновения обратной математики и приводится формальная система арифметики второго порядка, в рамках которой проводятся исследования по обратной математике.

Четвертый раздел посвящён так называемой «большой пятерке» подсистем арифметики второго порядка, каждая из которых оказывается эквивалентной многим классическим математическим теоремам.

В последнем разделе описывается, как благодаря обратной математике была частично реализована программа Гильберта, рассматривается «большая пятёрка» подсистем арифметики второго порядка с точки зрения философии математики и с точки зрения теории вычислимости, рассказывается о «зоопарке обратной математики», новых направлениях исследований, а также приводится список книг для более глубокого погружения в захватывающий мир обратной математики.

2. Исторические примеры обратной математики

2.1 Аксиома параллельности

В «Началах» Евклида были сформулированы пять аксиом, которые на протяжении двух тысячелетий лежали в основаниях геометрии. Четыре из этих аксиом были наглядными и очевидными и полностью принимались всеми математиками. Совокупность всех теорем, которые могут быть доказаны с помощью этих четырех аксиом, впоследствии была названа абсолютной геометрией [18]. По поводу же пятой аксиомы - аксиомы параллельности - постоянно возникали сомнения, насколько она необходима, и не является ли она следствием из первых четырех аксиом.

Попытки вывести аксиому параллельности из других аксиом предпринимали известный астроном, математик и механик Птолемей, философ и математик Прокл (см. [19]), многие греческие и арабские математики, в том числе поэт и математик Омар Хайям, а впоследствии - многие европейские математики. Наиболее известной является следующая формулировка этой аксиомы, предложенная в 1795 году шотландским математиком Плейфером [20]:

Аксиома параллельности. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Попытки доказать аксиому параллельности часто строились по следующей схеме: выбиралось некоторое кажущееся довольно очевидным математическое утверждение, и затем с помощью этого утверждения и четырех аксиом абсолютной геометрии доказывалась аксиома параллельности. Например, персидский математик Насир ад-Дин Туси, живший в XIII веке, доказал (см. [21]), что из так называемого постулата треугольника - сумма углов любого треугольника равна двум прямым углам (т.е. 180°) - следует аксиома параллельности.

Н.И. Лобачевский выбрал прямо противоположный подход. Он заменил аксиому параллельности на ее отрицание - на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной, - и создал на основе этой аксиомы новую богатую геометрическую теорию. Работа Лобачевского «О началах геометрии», описывающая созданную им геометрическую теорию, была опубликована в 1829-1830 годах в серии из пяти статей в журнале «Казанский вестник» [22].

Одна из теорем в геометрии Лобачевского утверждает, что сумма углов любого треугольника меньше двух прямых углов. Это, в частности, означает, что из аксиом абсолютной геометрии без аксиомы параллельности невозможно доказать постулат треугольника - если бы это было возможно, то геометрия Лобачевского была бы противоречивой.

При этом ещё Евклид в «Началах» привёл доказательство постулата треугольника с использованием аксиомы параллельности. Эти результаты Евклида и Лобачевского вместе и означают, что аксиома параллельности является действительно необходимой для доказательства постулата треугольника.

Запишем эти рассуждения на современном языке математической логики. Для этого обозначим через **AG** четыре аксиомы абсолютной геометрии, через **AP** - аксиому параллельности, через **TP** - постулат треугольника:

$\mathbf{AG} \nvdash \mathbf{TP}$ (Лобачевский)
$\mathbf{AG}+\mathbf{AP} \vdash \mathbf{TP}$ или $\mathbf{AG} \vdash \mathbf{AP}\to\mathbf{TP}$ (Евклид)
$\mathbf{AG}+\mathbf{TP} \vdash \mathbf{AP}$ или $\mathbf{AG} \vdash \mathbf{TP}\to\mathbf{AP}$ (Туси)

Тем самым в абсолютной геометрии аксиома параллельности и постулат треугольника эквивалентны:

$\mathbf{AG} \vdash \mathbf{TP}\leftrightarrow\mathbf{AP}$

Это является наглядной демонстрацией ключевого принципа обратной математики, сформулированного Фридманом в 1975 году [23]:

«Когда теорема доказывается с помощью правильных аксиом, то эти аксиомы могут быть доказаны с помощью этой теоремы».

Таким образом слово «обратная» указывает на главную особенность применяемого подхода: не новая теорема доказывается с помощью аксиом, а аксиома доказывается с помощью уже известной теоремы. В свете результатов Евклида и Лобачевского результат Туси является примером такого обратного доказательства.

Было найдено несколько десятков математических утверждений, которые оказались эквивалентными аксиоме параллельности в системе аксиом абсолютной геометрии. Приведем несколько из них.

Теорема 1. *Если выполняются аксиомы абсолютной геометрии, то следующие теоремы эквивалентны аксиоме параллельности:*

(Прокл [19]) Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, непременно пересечёт и другую.

(Туси [21]) Сумма углов любого треугольника равна 180 градусам.

(Валлис [24]) Существуют подобные, но не равные треугольники.

(Ламберт [25]) Если у четырехугольника три угла прямые, то четвертый угол тоже прямой.

(Лежандр [26]) Через каждую точку внутри острого угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны.

(Лежандр [26]) Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой непременно пересекаются.

(Лежандр [26]) Существует треугольник, сумма углов которого равна 180 градусам.

(Ф.Бойяи [27]) Для всякого невырожденного треугольника существует описанная окружность.

(Остроградский [28]) Две прямые, параллельные третьей, параллельны и друг другу.

(фольклор) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

Все эти результаты были получены задолго до формирования концепции обратной математики, но их можно назвать её первыми историческими примерами.

2.1 Аксиома выбора

Другие исторические примеры обратной математики связаны с системой аксиом Цермело-Френкеля для теории множеств. Как и в случае с аксиомами Евклида, одна из аксиом в этой системе имеет особый статус - это аксиома выбора:

Аксиома выбора. Для всякого семейства X непустых множеств существует функция, которая каждому множеству семейства X сопоставляет один из элементов этого множества.

Так же, как и аксиома параллельности, аксиома выбора вызывала многие вопросы и сомнения, в частности, потому что доказательства, использующие аксиому выбора, являются неконструктивными, позволяя утверждать о существовании объектов без их описания.

Гёдель [29] показал, что отрицание аксиомы выбора не является теоремой в системе аксиом Цермело-Френкеля ZF, Коэн [30] показал, что сама аксиома также не является теоремой в ZF. И точно так же были найдены математические утверждения в разных разделах математики - теории множеств, алгебре, функциональном анализе, общей топологии, математической логике и алгебраической топологии, - которые оказались эквивалентными аксиоме выбора в ZF. Подробный обзор этих математических утверждений содержится в монографии [31], несколько наиболее ярких и известных утверждений приведены ниже.

Теорема 2. *В системе аксиом Цермело-Френкеля следующие теоремы эквивалентны аксиоме выбора:*

(Лемма Цорна [32]) Частично упорядоченное множество, в котором любая цепь имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.

(Теорема Цермело [33]) На любом множестве можно ввести такое отношение порядка, что множество будет вполне упорядоченным.

(Теорема Тарского [34]) Для любого бесконечного множества A существует биекция между A и $A \times A$.

(Теорема Тихонова [35]) Тихоновское произведение компактных пространств компактно.

(Бласс [36]) Любое векторное пространство имеет базис.

(Белл и Фремлин [37]) Замкнутый единичный шар сопряженного нормированного пространства над вещественными числами имеет крайнюю точку.

(Теорема Крулля [38]) Каждое ненулевое кольцо с единицей имеет максимальный идеал.

(фольклор, см. [39]) Любой связный граф имеет остовное дерево (связный ациклический граф с тем же числом вершин).

Приведенные в этом разделе исторические примеры позволяют сформулировать общий подход к исследованиям в рамках обратной математики:

1. Выбирается некоторая система аксиом (которую в обратной математике принято называть «базовой теорией»).

2. Выбирается еще одна дополнительная аксиома, которая не противоречит базовой теории и не является в ней теоремой.

3. Выбирается известная теорема из алгебры, анализа, геометрии или какого-нибудь другого раздела математики.

4. Показывается, что эта теорема не доказуема в базовой теории, но доказуема, если к базовой теории добавить дополнительную аксиому.

5. Показывается, что в рамках базовой теории с помощью этой теоремы можно доказать выбранную дополнительную аксиому.

6. Тем самым устанавливается эквивалентность этой теоремы и этой аксиомы в выбранной системе аксиом.

3. Арифметика второго порядка

3.1 Возникновение обратной математики

Идея систематического изучения логической силы математических теорем с помощью описанного в предыдущем разделе подхода в различных системах аксиом принадлежит Харви Фридману [40]. Этот замысел был реализован сначала в его диссертации в 1967 году и в ряде ранних статей для различных подсистем и расширений системы аксиом Цермело-Френкеля с аксиомой выбора ZFC. Однако эти системы являются настолько мощными, что позволяют доказывать большинство обычных математических теорем, поэтому находить эквивалентные утверждения в этих системах можно лишь для очень ограниченного круга теорем, существенно опирающихся на методы абстрактной теории множеств. В связи с этим Фридман стал последовательно изучать более слабые системы, в которых накладывались различные ограничения на аксиомы существования множеств и на принцип математической индукции, и теоремы, которые могут быть доказаны в этих системах. Результаты своих исследований он представил в лекции, прочитанной на Международном конгрессе математиков в 1974 году, и впоследствии опубликовал в трудах этого конгресса [23]. Эту статью принято считать началом программы исследований по обратной математике.

В ней был сформулирован основной вопрос обратной математики («какие аксиомы действительно необходимы для доказательства теорем обычной математики?») и ее ключевой принцип («когда теорема доказывается с помощью правильных аксиом, то эти аксиомы могут быть доказаны с помощью этой теоремы»), и описана «базовая теория» обратной математики, в которой изучаются логическая сила других аксиом и теорем.

Сам термин «обратная математика» появился позже: он был использован Фридманом в своем выступлении на специальной сессии Американского математического сообщества примерно в 1981 году [40] и далее впервые употреблен в статье Фридмана, Симпсона и Смита [41].

Решающую роль в развитии обратной математики как оформленной самостоятельной дисциплины сыграл Симпсон, который со своими учениками провел детальнейшие исследования логической силы многих классических теорем, и подготовил первую книгу, систематически излагающую идеи и результаты обратной математики (“Subsystems of Second Order Arithmetic”) и выдержавшую два издания [42].

3.2 Арифметика второго порядка Z_2

В качестве формальной системы, подходящей для реализации программы обратной математики, Фридманом была выбрана арифметика второго порядка Z_2, которая впервые была описана во втором томе фундаментального труда Гильберта и Бернайса по основаниям математики [43]. Эта формальная система является более слабой, чем ZFC, однако она достаточна для доказательства большинства теорем «обычной математики» (геометрия, теория чисел, математический анализ, дифференциальные уравнения, вещественный и комплексный анализ, счётная алгебра, топология полных сепарабельных метрических пространств, математическая логика), в то время как ZFC нужна для «теоретико-множественной математики» (общая топология, функциональный анализ, несчётная алгебра, теория множеств).

Язык L_2 арифметики второго порядка является двухсортным языком, т.е. в нём существуют два разных сорта переменных. Переменные первого сорта называются числовыми переменными и обозначаются маленькими латинскими буквами $i, j, k, m, n, ...$, переменные второго сорта называются множественными переменными и обозначаются заглавными латинскими буквами $X, Y, Z, ...$. Сигнатура языка L_2 состоит из символов $\langle 0, 1, +, \cdot, <, =, \in \rangle$.

Числовыми термами языка L_2 являются числовые переменные, константные символы 0 и 1, а также выражения $t_1 + t_2$ и $t_1 \cdot t_2$ для всех числовых термов t_1 и t_2. Подразумеваемой интерпретацией числовых термов являются натуральные числа, константы 0 и 1, а также операции сложения и умножения натуральных чисел. Множественными термами являются только множественные переменные, подразумеваемой интерпретацией которых являются подмножества множества всех натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$.

Атомарными формулами языка L_2 являются формулы вида $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ и $t_1 \in X$ для всех числовых термов t_1 и t_2 и множественных термов X. Подразумеваемыми смыслами соответствующих атомарных формул является то, что число t_1 равно числу t_2, число t_1 меньше числа t_2 и что число t_1 принадлежит множеству X. Формулы строятся из атомарных формул путем применения пропозициональных связок $\&, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$, числовых кванторов $\exists n, \forall n$ и множественных кванторов $\exists X, \forall X$.

Моделью для L_2 является семерка $M = (|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$, где $|M|$ - это некоторое множество, в котором принимают значения числовые переменные, $\mathcal{S}_M$ - это некоторое множество подмножеств $|M|$, в котором принимают значения множественные переменные, $+_M$ и $\cdot_M$ - это бинарные операции на множестве $|M|$, 0_M и 1_M - это некоторые выделенные элементы множества $|M|$, и $<_M$ - это бинарное отношение на множестве $|M|$. Стандартной моделью для L_2 является семерка $(\omega, P(\omega), +, \cdot, 0, 1, <)$, где ω - это множество натуральных чисел, $P(\omega)$ - это множество всех подмножеств ω, а $+$, $\cdot$, 0, 1 и $<$ являются обычными операциями сложения и умножения, константами 0 и 1 и отношением «меньше» на ω. Структуры вида $(\omega, S, +, \cdot, 0, 1, <)$, где $\emptyset \neq S \subseteq P(\omega)$ называются ω-моделями L_2.

Определение 1. *Арифметика второго порядка Z_2 состоит из следующих аксиом и всех формул языка L_2, которые выводимы из этих аксиом с помощью обычных логических аксиом и правил вывода:*

(i) базовые аксиомы:

$$n + 1 \neq 0$$
$$m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$$
$$m + 0 = m$$
$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$
$$m \cdot 0 = 0$$
$$m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$$
$$\neg m < 0$$
$$m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

(ii) аксиома индукции:

$$(0 \in X \& \forall n(n \in X \leftrightarrow n + 1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X))$$

(iii) схема аксиом выделения (существования множеств):

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)),$$

где $\varphi(n)$ - любая формула в L_2, в которой X не является свободной переменной.

Схема аксиом выделения постулирует существование всех множеств, элементы которых могут быть определены с помощью формул в языке L_2. Например, поскольку в языке L_2 существует формула $(\exists m)(m \cdot m = n)$, то в ω-моделях Z_2 существуют множества всех квадратов натуральных чисел. При этом формула φ кроме n может содержать свободные переменные - как числовые, так и множественные. Поэтому если применить аксиому выделения, например, к формуле $n \notin Y$, то получится формула $\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow n \notin Y)$, утверждающая существование множества X, являющегося дополнением множества Y, и, применяя к полученной формуле логическое правило обобщения, можно получить формулу $\forall Y \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow n \notin Y)$, что означает, что в рамках Z_2 доказуемо, что у любого множества существует его дополнение.

Приведенные примеры показывают, существование каких множеств может быть доказано в формальной системе Z_2, и, как говорилось ранее, в действительности в Z_2 можно формализовать очень многие разделы математики. Однако для обратной математики сила формальной системы является не достоинством, а недостатком, поскольку если некоторые математические утверждения могут быть доказаны в какой-то формальной системе, то эта формальная система не позволяет находить эквивалентные им утверждения.

Поэтому для целей обратной математики были выделены пять подсистем Z_2, в которых накладывались дополнительные ограничения на аксиому индукции и схему аксиом выделения, и тем самым - на множества, существование которых может быть доказано в рамках этих подсистем.

Самыми естественными ограничениями являются ограничения на формулы, которые могут быть использованы в этих аксиомах.

Формула в L_2 называется арифметической, если она не содержит множественных кванторов $\exists X, \forall X$. Отметим, что при этом она может содержать свободные множественные переменные, которые для краткости будут называться параметрами.

Ограниченными кванторами называются кванторы вида $\forall n < t$ или $\exists n < t$, где t является термом, не содержащим n. Выражение $\forall n < t\varphi$ будем использовать как сокращение для формулы $\forall n(n < t \to \varphi)$, а выражение $\exists n < t\varphi$ - как сокращение для формулы $\exists n(n < t \to \varphi)$.

Формулой с ограниченными кванторами называется арифметическая формула, в которой все кванторы ограничены. Σ_1^0-формулами и Π_1^0-формулами называются формулы вида $\exists n\psi$ и $\forall n\psi$ соответственно, где ψ - формула с ограниченными кванторами.

Отметим, что в ω-моделях Ł$_2$ формулы с ограниченными кванторами без свободных множественных переменных определяют вычислимые отношения, поскольку они задают конечный набор высказываний о том, что некоторые суммы и произведения натуральных чисел меньше других сумм и произведений, что может быть эффективно проверено. С помощью стандартных рассуждений можно также показать, что в этих моделях Σ_1^0-формулы без свободных множественных переменных определяют вычислимо-перечислимые множества. Аналогично, для этих моделей верно, что множество X вычислимо перечислимо относительно множества Y тогда и только тогда, когда X определимо с помощью Σ_1^0-формулы с параметром Y.

4. «Большая пятерка» подсистем арифметики второго порядка

4.1 Система RCA_0

Самой важной подсистемой Z_2 в обратной математике является система RCA_0 (что является сокращением выражения “recursive comprehension axiom”, т.е. «аксиома рекурсивного выделения»).

Определение 2. *Система RCA_0 состоит из следующих аксиом и всех формул языка L_2, которые выводимы из этих аксиом с помощью обычных логических аксиом и правил вывода:*

(i) базовые аксиомы:

$$n + 1 \neq 0$$
$$m + 1 = n + 1 \to m = n$$
$$m + 0 = m$$
$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$
$$m \cdot 0 = 0$$
$$m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$$
$$\neg m < 0$$
$$m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

(ii) аксиома Σ^0_1-индукции:

$$(\varphi(0)\&\forall n(\varphi(n) \to \varphi(n + 1)) \to \forall n(\varphi(n))),$$

где $\varphi(n)$ - любая Σ^0_1-формула в L_2.

(iii) схема аксиом Δ^0_1-выделения (существования Δ^0_1-множеств):

$$\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)),$$

где $\varphi(n)$ - Σ^0_1-формула, не содержащая X в качестве параметра, $\psi(n)$ - Π^0_1-формула.

Если рассматривать формулы без свободных множественных переменных, то аксиома Δ^0_1-выделения утверждает существование множеств, которые одновременно определимы с помощью некоторой Σ^0_1-формулы и некоторой Π^0_1-формулы, т.е. вычислимых множеств. Более того, можно показать, что совокупность $REC = \{X \subseteq \omega | X \text{ вычислимо}\}$ является минимальной ω-моделью RCA_0 ([42]). Что касается ω-моделей этой системы в целом, то они обладают следующим свойством.

Лемма 1. *(см. [42]) Совокупность $\mathcal{S}$ подмножеств ω является ω-моделью RCA_0 тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) $\mathcal{S}$ не пусто

(ii) если $X, Y \in \mathcal{S}$, то $X \oplus Y \in \mathcal{S}$, где $X \oplus Y = \{2m | m \in X\} \cup \{2m+1 | m \in Y\}$

(iii) если $X \leq_T Y$ и $Y \in \mathcal{S}$, то $X \in \mathcal{S}$, где $\leq_T$ - сводимость по Тьюрингу.

Для формального доказательства (ii) достаточно показать, что множество $X \oplus Y$ можно определить с помощью формулы с ограниченными кванторами с параметрами X и Y, а следовательно - с помощью Σ_1^0 и Π_1^0-формул с параметрами X и Y и с фиктивными кванторами, а затем применить аксиому Δ_1^0-выделения. Аналогично, для доказательства (iii) достаточно показать, что X и $\overline{X}$ определимы с помощью Σ_1^0-формулы с параметром Y, а это, как уже отмечалось выше, легко сделать, используя тот факт, что X и $\overline{X}$ вычислимо перечислимы относительно Y.

Отметим, что совокупности $\mathcal{S} \subseteq P(\omega)$, обладающие свойствами (i)-(iii) являются идеалами в тьюринговых степенях.

В рамках RCA_0 можно формализовать всю так называемую «вычислимую» или «конструктивную» (в интерпретации Бишопа [48]) математику.

В частности, в рамках RCA_0 можно доказать все базовые свойства сложения и умножения натуральных чисел, определить взаимно-однозначную функцию пары натуральных чисел и доказать все её стандартные свойства, затем определить целые числа как упорядоченные пары натуральных чисел, задать на них отношение $\leq$ и операции сложения и умножения, доказать, что они образуют Евклидово кольцо, и что выполняются другие свойства целых чисел. Далее в рамках RCA_0 можно определить рациональные числа как упорядоченные пары целых чисел и доказать, что они образуют упорядоченное поле, а также определить последовательности рациональных чисел как функции, действующие из множества натуральных чисел в множество рациональных чисел. После этого в RCA_0 можно определить действительные числа как последовательности рациональных чисел $\langle q_k | k \in \mathbb{N} \rangle$, удовлетворяющие условию $\forall k \forall i (|q_k - q_{k+i}| \leq 2^{-k})$, и задать на них отношение равенства следующим образом: два действительных числа $\langle q_k | k \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle q'_k | k \in \mathbb{N} \rangle$ равны, если $\forall k (|q_k - q'_k| \leq 2^{-k+1})$. На заданных таким образом действительных числах можно естественным образом задать операции сложения и умножения и отношение $\leq$ и доказать, что получившаяся структура является архимедовым упорядоченным полем. Также в RCA_0 можно ввести определения последовательностей действительных чисел и сходящихся последовательностей, и доказать, что множество действительных чисел несчётно.

Кроме этого, в RCA_0 можно задать полные сепарабельные метрические пространства, определить открытые множества и непрерывные функции в этих пространствах. Также можно закодировать любой счётный язык путем отождествления термов и формул этого языка с их гёделевскими номерами для какой-нибудь фиксированной гёделевской нумерации, доказать существование множеств с гёделевскими номерами всех термов, формул, предложений и аксиом, закодировать понятие доказательства в этом языке, понятие непротиворечивости множества предложений этого языка, понятие счётной модели и доказать ряд классических теорем математической логики для этих понятий. Кроме этого, в RCA_0 можно ввести определения счётного поля и сепарабельного банахова пространства.

При этом система RCA_0 является достаточно сильной, чтобы доказать ряд классических теорем из разных разделов математики.

Теорема 3. *(см. [42]) Следующие теоремы доказуемы в RCA_0:*

(Теорема Бэра) В полном сепарабельном метрическом пространстве пересечение всюду плотных открытых множеств является всюду плотным.

(Теорема о промежуточном значении) Если функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$, и $f(0) < 0 < f(1)$, то существует такой x, что $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$.

(Лемма Урысона) В полном сепарабельном метрическом пространстве X для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существует такая непрерывная функцию $f : X \to [0,1]$, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$, и $f(x) = 1$ для всех $x \in B$.

(Теорема Титце о продолжении) В полном сепарабельном метрическом пространстве X для любого замкнутого множества C и любой непрерывной функции $f : C \to [-1,1]$ существует такая непрерывная функция $g : X \to [-1,1]$, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in C$.

(Теорема о существовании модели) В счётном языке любое непротиворечивое и полное множество предложений имеет счётную модель.

(Теорема о непротиворечивости) В счётном языке если множество предложений имеет счётную модель, тогда это множество непротиворечиво.

(Теорема об алгебраическом замыкании) У любого счётного поля существует алгебраическое замыкание.

(Принцип равномерной ограниченности или теорема Банаха-Штейнгауза) Пусть A и B - сепарабельные банаховы пространства, и $\langle F_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ - такая последовательность ограниченных линейных операторов $F_n : A \to B$, что для всех $x \in A$ существует такое M, что $\|F_n(x)\| < M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то существует такое α, что для всех $x \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, $\|F_n(x)\| \leq \alpha \cdot \|x\|$.

Вместе с тем многие хорошо известные классических теоремы не могут быть доказаны в RCA_0.

Одним из наиболее ярких примеров является теорема о наименьшей верхней грани, утверждающая, что любая ограниченная последовательность действительных чисел имеет наименьшую верхнюю грань.

Приведём доказательство этого факта.

Теорема 4. *(см. [42]) Теорема о наименьшей верхней грани недоказуема в* RCA_0.

Доказательство. Пусть $\{k_0, k_1, ...\}$ - некоторое вычислимое перечисление без повторений креативного множества $K = \{n | \varphi_n(n) \downarrow\}$. Рассмотрим ограниченную возрастающую последовательность действительных чисел, заданную следующей формулой

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-k_i}.$$

В двоичной записи любого члена этой последовательности единицы находятся в позициях $k_0, k_1, ..., k_n$, а нули - во всех остальных позициях.

$a_0 = 0{,}0......1$ единица находится в позиции k_0
$a_1 = 0{,}0..1..1$ единицы находятся в позициях k_0 и k_1
$a_2 = 0{,}0..1..1..1$ единицы находятся в позициях k_0, k_1 и k_2
...

Наименьшей верхней гранью этой последовательности является действительное число, в двоичной записи которого единицы находятся в позициях k_i для всех $k_i \in K$, а нули во всех остальных позициях, поэтому такая двоичная запись этой наименьшей верхней грани кодирует характеристическую функцию множества K.

Последовательность $\{a_n\}_{n \in \omega}$ является вычислимой, поскольку каждый член этой последовательности может быть эффективно вычислен. Поэтому эта последовательность есть в модели $REC = \{X \subseteq \omega | X \text{ вычислимо}\}$. При этом наименьшая верхняя грань этой последовательности является невычислимой и, значит, отсутствует в REC. Из этого следует, что теорема о наименьшей верхней грани не выполняется в модели REC, а, значит, недоказуема в RCA_0. □

4.2 Система ACA_0

Как было показано в предыдущем разделе, система RCA_0 является достаточно слабой, недостаточной для доказательства даже такой простой теоремы, как теорема о наименьшей верхней грани. Кроме этого, она не позволяет напрямую естественным образом определить многие математические объекты, в связи с чем приходится кодировать их с помощью натуральных чисел. Однако слабость формальной системы, как уже говорилось ранее, является преимуществом для обратной математики, а не недостатком. Система RCA_0 имеет основополагающее значение для обратной математики, потому что чаще всего именно она выступает в качестве «базовой теории» - в рамках которой проводятся доказательства эквивалентности различных математических теорем и аксиом друг другу.

Следующая подсистема арифметики второго порядка является более сильной, поскольку позволяет постулировать существование более широкого класса множеств.

Определение 3. *Система ACA_0 состоит из следующих аксиом и всех формул языка L_2, которые выводимы из этих аксиом с помощью обычных логических аксиом и правил вывода:*

(i) базовые аксиомы:

$n + 1 \neq 0$

$m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$

$m + 0 = m$

$m + (n + 1) = (m + n) + 1$

$m \cdot 0 = 0$

$m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$

$\neg m < 0$

$m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$

(ii) аксиома индукции:

$(0 \in X \& \forall n(n \in X \leftrightarrow n + 1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X))$

(iii) схема аксиом существования арифметических множеств:

$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$,

где $\varphi(n)$ - любая арифметическая формула, в которой X не является свободной переменной.

Минимальной ω-моделью ACA_0 является совокупность всех арифметических множеств $ARITH = \{X \in \omega | \exists n(X \leq_T \emptyset^n)\}$, и все ω-модели этой системы замкнуты относительно операций взятия точной верхней грани и тьюрингова скачка.

Лемма 2. *(см. [42]) Совокупность $\mathcal{S}$ подмножеств ω является ω-моделью ACA_0 тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) $\mathcal{S}$ не пусто

(ii) если $X, Y \in \mathcal{S}$, то $X \oplus Y \in \mathcal{S}$, где $X \oplus Y = \{2m | m \in X\} \cup \{2m+1 | m \in Y\}$

(iii) если $X \leq_T Y$ и $Y \in \mathcal{S}$, то $X \in \mathcal{S}$, где $\leq_T$ - сводимость по Тьюрингу.

(iv) если $X \in \mathcal{S}$, то $A' \in \mathcal{S}$, где A' - это скачок множества A.

Ещё одно замечательное свойство системы ACA_0 заключается в том, что она является консервативным расширением арифметики Пеано (арифметики первого порядка) PA, т.е. любая теорема ACA_0, сформулированная в языке первого порядка, является теоремой PA.

Следующая теорема показывает, что целый ряд классических теорем из анализа и алгебры оказываются эквивалентны ACA_0

Теорема 5. *(см. [42]) В системе аксиом RCA_0 следующие теоремы эквивалентны ACA_0:*

(Теорема о наименьшей верхней грани) Любая ограниченная последовательность действительных чисел имеет наименьшую верхнюю грань.

(Теорема Больцано-Вейерштрасса) Любая ограниченная последовательность действительных чисел (или любая последовательность точек в компактном метрическом пространстве) имеет сходящуюся подпоследовательность.

(Лемма Асколи) Любая равностепенно непрерывная последовательность функций, действующих из одного компактного метрического пространства в другое, имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность.

(Теорема о максимальном идеале) Любое счётное коммутативное кольцо имеет максимальный идеал.

(Теорема о базисе) Любое счётное векторное пространство над полем рациональных чисел (или над любым счётным полем) имеет базис.

(Теорема о базисе трансцендентности) У любого счётного поля (характеристики 0) существует базис трансцендентности.

(Теорема о делимом замыкании) Любая счётная абелева группа имеет единственное делимое замыкание.

(Лемма Кёнига) Любое бесконечное, конечно ветвящееся дерево имеет бесконечный путь.

(Теорема Рамсея для $[\mathbb{N}]^k$, $k \geq 3$) Для всех $l \in \mathbb{N}$ и $f : [\mathbb{N}]^k \to \{0, 1, ..., l-1\}$ существуют такие $i < l$ и бесконечное множество $X \in \mathbb{N}$, что $f(m_1, ..., m_k) = i$ для всех $\langle m_1, ..., m_k \rangle \in [X]^k$.

(Теорема о существовании тьюрингова скачка) $\forall X \exists Y (Y = X')$

4.3 Система Π^1_1-CA_0

Для описания следующей подсистемы Z_2 необходимо наложить ограничения на множественные кванторы. Формула языка L_2 называется Π^1_1-формулой, если она имеет вид $\forall X\theta$, где X - это множественная переменная, а θ - арифметическая формула.

Определение 4. *Система Π^1_1-CA_0 состоит из следующих аксиом и всех формул языка L_2, которые выводимы из этих аксиом с помощью обычных логических аксиом и правил вывода:*

(i) базовые аксиомы:

$$n+1 \neq 0$$
$$m+1 = n+1 \rightarrow m = n$$
$$m+0 = m$$
$$m+(n+1) = (m+n)+1$$
$$m \cdot 0 = 0$$
$$m \cdot (n+1) = (m \cdot n) + m$$
$$\neg m < 0$$
$$m < n+1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

(ii) аксиома индукции:

$$(0 \in X \& \forall n(n \in X \leftrightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X))$$

(iii) схема аксиом Π^1_1-выделения (существования Π^1_1-множеств множеств):

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)),$$

где $\varphi(n)$ - любая Π^1_1-формула, в которой X не является свободной переменной.

Основное отличие арифметики второго порядка Z_2 и её подсистем RCA_0, ACA_0 и Π^1_1-CA_0 заключается в аксиомах выделения, которые утверждают существование множеств, определяемых различными формулами языка L_2: Z_2 постулирует существование множеств, определяемых любыми формулами, Π^1_1-CA_0 - только множеств, определяемых Π^1_1-формулами, ACA_0 - только множеств, определяемых арифметическими формулами, RCA_0 - только множеств, определяемых одновременно Σ^0_1 и Π^0_1 формулами.

Таким образом, система Π^1_1-CA_0 является более сильной, чем RCA_0 и ACA_0, позволяя доказывать более широкий класс теорем, при этом многие из них оказываются ей эквивалентными.

Теорема 6. *(см. [42]) В системе аксиом RCA_0 следующие теоремы эквивалентны системе Π^1_1-CA_0:*

(Теорема о совершенных деревьях) Любое дерево имеет наибольшее совершенное поддерево.

(Теорема Кантора-Бендиксона) Любое замкнутое подмножество множества действительных чисел или любого полного сепарабельного метрического пространства, является объединением совершенного множества и счётного множества.

(Теорема о представлении абелевой группы) Любая счетная абелева группа является прямой суммой делимой группы и редуцированной группы.

(Теорема о разности открытых множеств) В пространстве Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *можно определить разность любых двух открытых множеств.*

(Теорема о свойстве Рамсея для $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$*) Любое множество* G_δ *в* $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ *обладает свойством Рамсея.*

(Теорема Сильвера) Для любого борелевского (или коаналитического, или F_σ*) отношения эквивалентности с несчётным количеством классов эквивалентности существует непустое совершенное множество попарно неэквивалентных элементов.*

4.4 Системы WKL_0 и ATR_0

Следующие две важные подсистемы Z_2 задаются с помощью добавления дополнительных аксиом существования множеств.

Определение 5. *Система WKL_0 состоит из аксиом $(i)-(iii)$ системы RCA_0 и дополнительной аксиомы, известной как слабая лемма Кёнига:*

(iv) каждое бесконечное бинарное дерево имеет бесконечную ветвь.

Эта система эквивалентна следующим теоремам.

Теорема 7. *(см. [42]) В системе аксиом RCA_0 следующие теоремы эквивалентны WKL_0:*

(Лемма Гейне-Бореля) Из любого счётного покрытия открытыми интервалами замкнутого интервала $[0,1]$ (или любого компактного метрического пространства) можно выбрать конечное подпокрытие.

(Теорема об ограниченности) Любая непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $[0,1]$ или на любом компактном метрическом пространстве, является ограниченной.

(Теорема о равномерной непрерывности) Любая непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $[0,1]$ или на любом компактном метрическом пространстве, является равномерно непрерывной.

(Теорема об интегрируемости по Риману) Любая непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $[0,1]$, является интегрируемой по Риману.

(Принцип максимума) Любая непрерывная вещественная функция, определенная на $[0,1]$ или на любом компактном метрическом пространстве, достигает свою точную верхнюю грань.

(Теорема Пеано) Теорема о существовании локального решения обыкновенного дифференциального уравнения.

(Теорема полноты Гёделя) Любое счётное множество предложений в исчислении предикатов имеет счётную модель.

(Теорема о простом идеале) Любое счётное коммутативное кольцо имеет простой идеал.

(Теорема об алгебраическом замыкании) Любое счётное поле (характеристики 0) имеет единственное с точностью до изоморфизма алгебраическое замыкание.

(Теорема об упорядочении формально вещественных полей) Любое счётное формально вещественное поле может быть упорядочено.

(Теорема о замыкании формально вещественных полей) Любое счётное формально вещественное поле имеет вещественно замкнутое алгебраическое расширение.

(Теорема Брауэра о неподвижной точке) Любая равномерно непрерывная функция $\varphi : [0,1]^n \to [0,1]^n$ имеет неподвижную точку.

(Теорема Хана-Банаха) Для любого линейного функционала f, заданного на подпространстве сепарабельного банахово пространства, такого, что $||f|| \leq 1$, существует такое его продолжение $\overline{f}$ на всё пространство, что $||\overline{f}|| \leq 1$.

Для определения последней системы из «большой пятерки» необходимо следующее определение.

Определение 6. *(арифметическая трансфинитная рекурсия) Пусть $\theta(n, X)$ - арифметическая формула со свободной числовой переменной n и свободной множественной переменной X (которая также может содержать дополнительные числовые и множественные переменные в качестве параметров). Можно рассматривать θ как «арифметический оператор» $\Theta : P(\omega) \to P(\omega)$, определенный следующим образом: $\Theta(X) = \{n \in \omega | \theta(n, X)\}$. Пусть $(A, \leq_A)$ - счётное вполне упорядоченное множество с наименьшим элементом 0_A.*

Множество Y определено с помощью арифметической трансфинитной рекурсии путем применения оператора Θ к множеству X вдоль $\leq_A$ (обозначается $Y = \Theta^{[A]}(X)$), если выполняются следующие условия:

1. $Y^{[0_A]} = X$.

2. Если $x \in A$ является последователем $y \in A$ в $\leq_A$, то $Y^{[x]} = \Theta(Y^{[y]})$.

3. Если $x \in A$ является предельным элементом в $\leq_A$, то $Y^{[x]} = \{\langle y, n\rangle | y <_A x \& n \in Y^{[y]}\}$.

Определение 7. *Система ATR_0 состоит из аксиом $(i) - (iii)$ системы ACA_0 и дополнительной аксиомы арифметической трансфинитной рекурсии:*

(iv) для любой арифметической формулы $\theta(n, X)$, для любого счётного вполне упорядоченного множества $(A, \leq_A)$ и любого множества X существует множество Y, определенное с помощью арифметической трансфинитной рекурсии путем применения оператора Θ к X вдоль $\leq_A$.

Принцип арифметической трансфинитной рекурсии был выбран не случайно, поскольку, как оказалось, он также является эквивалентным целой группе теорем.

Теорема 8. *(см. [42]) В системе аксиом RCA_0 следующие теоремы эквивалентны ATR_0:*

(Теорема о вполне упорядоченных множествах) Любые два счётных вполне упорядоченных множеств являются сравнимыми.

(Теорема Ульма) Любые две счётные редуцированные абелевы p-группы, которые имеют одинаковые инварианты Ульма, являются изоморфными.

(Теорема о совершенном множестве) Любое несчётное замкнутое множество (или аналитическое множество) имеет совершенное подмножество.

(Принцип отделимости Лузина) Для любых двух непересекающихся аналитических множеств существует борелевское множество, отделяющее одно от другого.

Системы RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 (расположенные в этом порядке от самой слабой к самой сильной) образуют так называемую «большую пятерку» подсистем Z_2.

Одним из наиболее красивых результатов обратной математики является то, что значительное количество классических математических теорем оказываются эквивалентными одной из подсистем «большой пятерки». Тем самым теоремы из различных разделов математики выстраиваются в строгую математическую иерархию в соответствии с их внутренней логической силой. При этом система RCA_0 выступает в качестве «базовой теории», в рамках которой доказываются эти эквивалентности.

5. Исследования в рамках обратной математики

Помимо красивой и стройной иерархии, описанной в предыдущем разделе и связывающей воедино далёкие друг от друга разделы математики, одним из побочных результатов обратной математики была демонстрация того, что программа Гильберта может быть частично реализована. В своей работе Тейт [49] показал, что «финитная» математика в том смысле, как её подразумевал Гильберт, охватывается формальной системой PRA (примитивно рекурсивной арифметикой). Харви Фридман (см. [42]) показал, что WKL_0 является консервативным расширением PRA для всех Π^0_2-формул, т.е. любая теорема, сформулированная в языке первого порядка и доказуемая в WKL_0, является теоремой PRA. В частности, это относится ко всем результатам, описанным в Теореме 7, что показывает возможность доказательства с помощью «финитных» методов многих теорем алгебры, анализа, топологии и других разделов математики. Таким образом, хотя Гёдель и показал невозможность реализации программы Гильберта в полном объёме, но тем не менее значительная часть классической математики покоится на прочном «финитном» фундаменте.

Еще одним интересным наблюдением, полученным в рамках обратной математики, является то, что каждая подсистема арифметики второго порядка из «большой пятерки» соответствует одному из хорошо известных философских подходов к основаниям математики: RCA_0 - конструктивизму Бишопа, WKL_0 - финитному редукционизму Гильберта, ACA_0 - предикативизму Вейля и Фефермана, ATR_0 - предикативному редукционизму Фридмана и Симпсона, Π^1_1-CA - непредикативности Фефермана. Также эти подсистемы соответствует классическим принципам теории вычислимости: RCA_0 - существованию вычислимых множеств и замкнутости относительно $\leq_T$ и $\oplus$, WKL_0 - теореме Джокуша-Соара о низком базисе, ACA_0 - замкнутости относительно Тьюрингова скачка, ATR_0 - замкнутости относительно гиперарифметической сводимости, Π^1_1-CA - замкнутости относительно гиперскачка (см. [50]).

Впоследствии было доказано, что многие математические утверждения всё-таки не эквивалентны ни одной из подсистем «большой пятёрки». В частности очень многие комбинаторные принципы из теории Рамсея оказались не эквивалентными ни этим подсистемам, ни друг другу. Такие утверждения были также найдены в других разделах математики, в частности, теорема, что любой бесконечный частичный порядок содержит бесконечную цепь или бесконечную антицепь, теорема, что для любого множества A существует функция f, которая является диагонально невычислимой относительно A, т.е. $\forall n(f(n) \neq \Phi^A_n(n))$, и множество других теорем. Совокупность всех таких утверждений и запутанная система связей между ними была названа «зоопарком обратной математики», ознакомиться с которым можно на обновляемом по мере появления новых доказательств сайте [51].

Кроме этого, формируются новые направления исследований - обратная математика высшего порядка (в которой кроме числовых переменных и множественных переменных используется третий сорт переменных, подразумеваемой интерпретацией которых являются множества множеств), конструктивная обратная математика (основанная на интуиционистской логике), а также строгая обратная математика (в которой не допускаются логические аксиомы, а используются только строго математические аксиомы).

Исследования по «классической» обратной математике в настоящее время интенсивно продолжаются, ознакомиться с ними можно в книгах [52], [53], [54], [55]. Кроме этого, разделы, посвященные обратной математике, были включены в учебники для студентов по теории вычислимости [56] и по математической логике [57].

Список литературы

[1] Евклид, *Начала. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского, Т. 1-3*, М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1949-1950.

https://archive.org/details/1-6_euclid_elements

https://archive.org/details/7-10_euclid_elements

https://archive.org/details/11-15_euclid_elements

[2] Р. Декарт, *Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта*, М.-Л.: Гостехиздат, 1938.

http://gpntb.dlibrary.org/ru/nodes/4068-dekart-r-geometriya-m-1938

[3] G. W. Leibniz, *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, Acta Eruditorum, (1684), 467–473.

https://www.maa.org/book/export/html/641727

[4] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*, Prague: 1817 (*Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения, пер. Э. Кольмана*, в кн. Э. Кольман, *Бернард Больцано*, М.: Издательство АН СССР, 1955).

https://doi.org/10.1016/0315-0860(80)90036-1

[5] A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique; I.re Partie. Analyse algebrique*, Vol. 1. L'Imprimerie Royale, Debure freres, Libraires du Roi et de la Bibliotheque du Roi, 1821.

https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog

[6] C. Weierstrass, *Zur Theorie der Abelschen Functionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **47** (1854), 289–306.

https://eudml.org/doc/147563

[7] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Vieweg, 1872 (Р. Дедекинд, *Непрерывность и иррациональные числа: Пер. с нем. С. О. Шатуновский*, Одесса: 1906).

https://archive.org/details/stetigkeitundir00dedegoog

https://archive.org/details/i00rded

[8] M. Pasch, *Vorlesungen uber neuere Geometrie*, Leipzig: 1882.

https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.153742/page/n5

[9] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Verlag von B.G. Teubner, 1899 (Д. Гильберт, *Основания геометрии*, Петроград.: Книгоиздательство “Сеятель” Е. В. Высоцкого, 1923).

https://archive.org/details/grundlagendergeo00hilb

https://archive.org/details/libgen_00151717

[10] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Vieweg, 1888 (Р. Дедекинд, *Что такое числа и для чего они служат?*, Казань: 1905).

https://archive.org/details/WasSindUndWasSollenDieZahlen

[11] G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Romae, Florentiae: Fratres Bocca, 1889.

https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog

[12] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle an der Saale: Verlag von Louis Nebert, 1879.

https://archive.org/details/begriffsschriftu0000freg/

[13] Г. Кантор, *Труды по теории множеств*, М.: Наука, 1985.

http://lib.ysu.am/disciplines_bk/8f1521d0584db053ac6bc75178ee5dac.pdf

[14] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen, **65** (1908), 261—281.

https://doi.org/10.1007/BF01449999

[15] A. Fraenkel, *Zu den Grundlage der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Mathematische Annalen, **86**, 3-4 (1922), 230—237.

https://doi.org/10.1007/BF01457986

[16] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **38** (1931), 173–198.

https://doi.org/10.1007/BF01700692

[17] G. Gentzen, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen, **112** (1936), 493–565. (Г. Генцен, *Непротиворечивость чистой теории чисел*, в: А. В. Идельсон, Г. Е. Минц (ред.), Математическая теория логического вывода, М.: Наука, (1967), 77–153).

https://doi.org/10.1007/BF01565428

[18] J. Bolyai, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda)*, Maros Vásárhelyini: 1832.

https://archive.org/details/tentamenjuventut01boly/page/502/mode/2up

[19] Прокл Диадох, *Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Пер. А. И. Щетникова*, М.: Русский фонд содействия образованию и науке, 2013.

https://archive.org/details/2013_20210601/

[20] J. Playfair, *Elements of geometry*, New York: W. E. Dean, Printer & Publisher, 1846.

https://archive.org/details/elementsgeometr05playgoog/page/n6

[21] N. D. Tusi, *The Recension of Euclid's "Elements"*, Rome: Typographia Medicaea, 1594.

https://hdl.loc.gov/loc.wdl/wdl.10666

[22] Н. И. Лобачевский, *О началах геометрии*, Казанский вестник, **25, 26, 27, 28** (1829-1830).

[23] H. M. Friedman, *Some systems of second order arithmetic and their use*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver 1974, Canadian Mathematical Congress, **1** (1975), 235–242.

https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1974.1/ICM1974.1.ocr.pdf

[24] J. Wallis, *Opera mathematica, vol.2 (De Postulato Quinto; et Definitione Quinta; Lib. 6. Euclidis; disputatio geometrica, 665–678)*, Oxford, 1693.

https://archive.org/details/bub_gb_39szm1zaXXAC/page/664

[25] J. H. Lambert, *Theorie der Parallellinien*, Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, Band I, (1786), 137–164.

https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN598943390_1786?tify=%7B%22pages%22%3A%5B151%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D

[26] A. M. Legendre, *Éléments de géométrie*, Paris: Firmin Didot, 1823.

https://archive.org/details/lmentsdegomtrie10legegoog/page/n6

[27] F. Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Maros Vásárhelyini: 1832.

https://archive.org/details/tentamenjuventut02boly

[28] М. В. Остроградский, *Руководство начальной геометрии*, СПб.: 1855.

http://e-heritage.ru/Catalog/ShowPub/2405

[29] K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of Americ,a **24**, 12 (1938), 556—557.

https://doi.org/10.1073/pnas.24.12.556

[30] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **50**, 6 (1963), 1143–1148.

https://doi.org/10.1073/pnas.51.1.105

[31] H. Rubin, J. E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice, II*, Studies in logic and the foundations of mathematics, **116**, North-Holland, Amsterdam, New York, and Oxford, 1985. https://www.elsevier.com/books/equivalents-of-the-axiom-of-choice-ii/rubin/978-0-444-87708-6

[32] M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society, **41**, 10 (1935), 667—670.

https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1935-06166-X

[33] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Mathematische Annalen, **59** (1904), 514—516.

https://doi.org/10.1007/BF01445300

[34] A. Tarski, *Sur quelques theorems qui equivalent a l'axiome du choix*, Fundamenta Mathematicae, **5** (1924), 147—154.

https://eudml.org/doc/213923

[35] A. Tychonoff, *Über einen Funktionenraum*, Mathematische Annalen, **111** (1935), 762—766.

https://doi.org/10.1007/BF01472255

[36] A. Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Contemporary Mathematics, **31** (1984), 31—33.

https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=763890

[37] J. L. Bell, D. H. Fremlin, *A geometric form of the axiom of choice*, Fundamenta Mathematcae, **77**, 2 (1972), 167–170.

https://eudml.org/doc/214484

[38] W. Hodges, *Krull implies Zorn*, Journal of the London Mathematical Society, **s2-19**, 2 (1979), 285–287.

https://doi.org/10.1112/jlms/s2-19.2.285

[39] L. Soukup, *Infinite combinatorics: from finite to infinite*, in: E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász (eds), Horizons of Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, **17**, Springer, Berlin, Heidelberg, (2008), 189—213.

https://doi.org/10.1007/978-3-540-77200-2_10

[40] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, First edition, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

https://link.springer.com/book/9783642599729

[41] H. M. Friedman, S. G. Simpson, R. L. Smith, *Countable algebra and set existence axioms*, Annals of Pure and Applied Logic, **25** (1983), 141–181.

https://doi.org/10.1016/0168-0072(83)90012-X

[42] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Second edition, Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge and Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, 2009.

https://doi.org/10.1017/CBO9780511581007

[43] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik, II*, Berlin: J. Springer, 1939 (Д. Гильберт, П. Бернайс, *Основания математики. Теория доказательств*, М.: Наука, 1982).

https://doi.org/10.1007/978-3-642-86896-2

[44] H. M. Friedman, *Systems of second order arithmetics with restricted induction, I,II (abstracts)*, J. Symb. Logic, **41**, 2 (1976), 557–559.

https://doi.org/10.2307/2272259

[45] H. M. Friedman, *The inevitability of logical strength: strict reverse mathematics*, in: Logic Colloquium 2006, Lect. Notes Log., Assoc. Symbol. Logic, Chicago, IL, (2009), 135–183.

https://doi.org/10.1017/CBO9780511605321.008

[46] H. M. Friedman, *The Emergence of (Strict) Revese Mathematics*, Preprint (2021).

https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/u.osu.edu/dist/1/1952/files/2021/12/RMfoundingETF122921a.pdf

[47] H. M. Friedman, *Strict Reverse Mathematics, lecture notes*, Workshop on reverse mathematics and its philosophy, June 13-17, 2022, Paris, France. Preprint (2022).

https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/u.osu.edu/dist/1/1952/files/2022/06/SRM062822Paris.pdf

[48] E. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, New York: McGraw-Hill, 1967.

https://archive.org/details/foundationsofcon0000bish

[49] W. W. Tait, *Primitive recursive arithmetic and its role in the foundations of arithmetic: Historical and philosophical reflections*, In Epistemology versus Ontology, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol. 27. Springer, Dordrecht, 2012.

https://doi.org/10.1007/978-94-007-4435-6_8

[50] R. A. Shore, *Reverse mathematics: the playground of logic*, Bull. Symbolic Logic, **16**, 3 (2010), 378—402.

https://www.jstor.org/stable/20749621

[51] *Reverse Mathematics Zoo*, Department of Mathematics, University of Connecticut.

https://rmzoo.math.uconn.edu/

[52] D. R. Hirschfeldt, *Slicing the Truth: On the Computable and Reverse Mathematics of Combinatorial Principles*, Lecture Note Series. Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, vol. 28, World Scientific, Singapore, 2014.

https://doi.org/10.1142/9208

[53] J. Stillwell, *Reverse Mathematics: Proofs from the Inside Out*, Princeton: Princeton University Press, 2018.

https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691177175/reverse-mathematics

[54] Д. Стилуэлл, *Обратная математика. Доказательства, вывернутые наизнанку / пер. с англ. А.А. Слинкина*, М.: ДМК Пресс, 2021

https://dmkpress.com/catalog/nauchno-populyarnaya-seriya/978-5-97060-888-3/

[55] D. D. Dzhafarov, C. Mummert, *Reverse Mathematics. Problems, Reductions, and Proofs*, Theory and Applications of Computability, Springer, 2022.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-11367-3

[56] B. Monin, L. Patey, *Calculabilitié*, Calvage et Mounet, 2022.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/10/calculabilite/

[57] J. Avigad, *Mathematical Logic and Computation*, Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
https://doi.org/10.1017/9781108778756