

УДК 531.382

УПРАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫМ ПОВОРОТОМ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ОДНОГО СОСТОЯНИЯ В ДРУГОЕ С ГАШЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ В МОМЕНТ ОКОНЧАНИЯ ОПЕРАЦИИ

Т.В. Гришанина¹, С.В. Русских¹, Ф.Н. Шклярчук²

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

²*Институт прикладной механики РАН, г. Москва, 125040, Россия*

Аннотация

Рассмотрена задача программного управления произвольной упругой системой, совершающей конечный поворот в общем случае с разгоном или торможением относительно некоторой неподвижной оси и малые нестационарные колебания под действием произвольно распределенной нагрузки, пропорциональной неизвестной финитной функции времени. Уравнения движения системы записываются в нормальных координатах, которые задают собой собственные формы колебаний свободной по углу поворота системы. При этом конечный поворот системы как абсолютно твердого тела представлен собственной формой с нулевой частотой. Ставится условие, чтобы в конце поворота системы на заданный угол за заданное время гасились упругие колебания по нескольким низшим собственным формам. Неизвестная управляющая функция (закон управления) ищется на рассматриваемом интервале времени в виде ряда по синусам (а также по косинусам) с неизвестными коэффициентами. На основании точного решения уравнений в нормальных координатах с начальными и конечными (по времени интервала управления) условиями задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. В качестве примера рассмотрен поворот по крену на конечный угол из одного состояния покоя в другое космического аппарата с двумя симметричными многозвенными панелями солнечных батарей. Выполнены расчеты с различным числом подлежащих гашению собственных форм колебаний и проведено сравнение с численными решениями уравнений в обобщенных координатах при найденных управляющих воздействиях. Показано, что для получения практически приемлемой точности достаточно погасить колебания не более двух-трех низших собственных форм колебаний.

Ключевые слова: управление колебаниями, конечный поворот системы, нестационарные колебания, гашение упругих колебаний, решение в рядах, поворот космического аппарата

Введение

Задачи управления составными трансформируемыми системами и системами, совершающими конечные передвижения (перемещения и повороты), с учетом упругости отдельных частей или элементов являются актуальными для быстроходных манипуляционных роботов [1], виброударных механизмов [2], ракет с разделяющимися ступенями [3] и космических конструкций [4–11]. Общие вопросы теории управления большими системами, включая задачи управляемого передвижения системы из одного состояния в другое, рассмотрены в работах [12–17], а задачи и методы управления колебаниями – в работах [18, 19]. В большинстве работ упругие

колебания, которые сопровождают конечные передвижения систем или их частей, считаются малыми и описываются нормальными координатами, которые задают относительные движения по собственным формам колебаний. В этом случае линейные задачи терминального управления с учетом начальных и конечных (по времени интервала управления) условий сводятся к системам интегральных уравнений для нормальных координат (в теории управления они называются уравнениями моментов). Поскольку решение задачи определения закона управления не является единственным, то она часто рассматривается как задача оптимального управления с минимизацией некоторого дополнительного функционала, зависящего от неизвестных параметров движения и управления.

Для решения интегральных уравнений относительно собственных форм колебаний, подлежащих гашению, управляющие функции обычно ищутся в виде кусочно-линейных функций с неизвестными параметрами [1, 18, 19] или в виде рядов заданных функций с неизвестными коэффициентами. В работах [20, 21] для управления поперечными колебаниями балки с грузами на конце в качестве таких функций использовались синусы и косинусы с частотами собственных колебаний системы. Поскольку периоды собственных колебаний значительно меньше заданного времени управления, то весьма малые отклонения по времени управления и по собственным частотам математической модели и реальной системы приводят к большим отклонениям конечных перемещений и скоростей от заданных нулевых значений. В результате колебания в реальной системе под действием найденных таким образом расчетных управляющих воздействий гаситься не будут. Кроме того, искомые управляющие воздействия (например, силы и моменты) должны быть практически реализуемыми и как реакции взаимодействия не должны возбуждать ответные связные колебания в системе управления и в несущей конструкции. Это особенно важно для упругих управляемых космических систем, обладающих плотным спектром низких собственных частот и требующих весьма высокой точности выполнения операций.

В работах [22–25] предложен альтернативный подход для определения силовых или кинематических управляющих воздействий для конечных передвижений упругой системы за заданное время из одного состояния в другое с гашением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в конечный момент времени. Для этого используются «простые» управляющие финитные функции (например, в виде одной волны синуса или полуволны косинуса) при условии, что частоты подлежащих гашению нескольких низших собственных форм колебаний системы находятся в определенных соотношениях с временем управления.

1. Постановка задачи управления упругой системой при конечном повороте

Рассмотрим систему (тело), которая под действием нестационарной нагрузки совершает вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси, сопровождаемое упругими колебаниями (см. рис. 1). Движение упругого тела описывается во вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \dot{\theta}$ относительно оси z системе координат $Oxyz$, угол поворота $\theta(t)$ которой считается конечным (может быть большим), а относительные упругие перемещения считаются малыми. Упругое тело является свободным по углу поворота (вариация $\delta\theta$ произвольна) и по упругим перемещениям. Если система свободна по всем степеням свободы твердого тела, то ось z должна совпадать с одной из главных центральных осей такого тела, а главный вектор и проекции главного момента нагрузки на оси x , y должны равняться нулю.

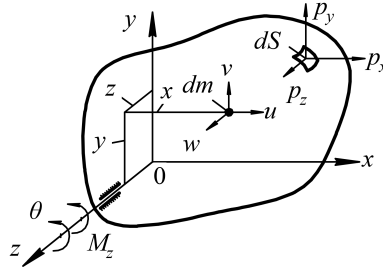


Рис. 1. Рассматриваемая упругая система

Кинетическая энергия вращающейся относительно оси z системы

$$T = \frac{1}{2} \int_V [(-\Omega(y+v) + \dot{u})^2 + (\Omega(x+u) + \dot{v})^2 + \dot{w}^2] dm$$

при малых упругих колебаниях (полагаем $x+u \approx x$, $y+v \approx y$, то есть пренебрегаем нелинейными членами третьего и четвертого порядка, представляющими центробежные и кориолисовы силы при относительном движении) записывается в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_V [\Omega^2(x^2 + y^2) + 2\Omega(x\dot{v} - y\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)] dm, \quad (1)$$

где $dm = \rho dV$; ρ , V – плотность и объем всех элементов системы.

Упругие перемещения системы, имеющей при относительном движении конечное число s степеней свободы, записываются в обобщенных координатах $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, как

$$u = \sum_{i=1}^s q_i U_i, \quad v = \sum_{i=1}^s q_i V_i, \quad w = \sum_{i=1}^s q_i W_i, \quad (2)$$

где $U_i(x, y, z)$, $V_i(x, y, z)$, $W_i(x, y, z)$ – заданные функции, представляющие возможные перемещения системы, то есть удовлетворяющие условиям непрерывности перемещений элементов согласно принятой модели их деформирования и геометрическим условиям их соединения (связям). Система, имеющая распределенные характеристики упругости, приводится к системе с конечным числом степеней свободы с помощью метода Ритца или метода конечных элементов.

Угол поворота системы θ является циклической обобщенной координатой, от которой потенциальная энергия не зависит; будем обозначать его как $\theta = q_0(t)$. Кинетическую энергию (1) с учетом (2) и равенства $\Omega = \dot{q}_0$ запишем в обобщенных координатах

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3)$$

где

$$m_{00} = J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm, \quad m_{0i} = m_{i0} = \int_V (xV_i - yU_i) dm,$$

$$m_{ij} = \int_V (U_i U_j + V_i V_j + W_i W_j) dm, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Малые упругие деформации элементов системы линейно зависят от их перемещений и, следовательно, от обобщенных координат. В результате потенциальная энергия деформации системы записывается в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s k_{ij} q_i q_j, \quad (4)$$

где $k_{ij} = k_{ji}$ – коэффициенты жесткости; $k_{00} = 0$, $k_{0i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. Потенциальной энергией гравитации, зависящей от угла поворота θ и упругих перемещений системы, будем пренебрегать.

Вариация работы действующих на систему поверхностных нагрузок $p_x(x, y, z, t)$, $p_y(x, y, z, t)$, $p_z(x, y, z, t)$ при допущениях $x + u \approx x$, $y + v \approx y$ записывается в виде

$$\delta A_p = \int_S [p_x(-y\delta\theta + \delta u) + p_y(x\delta\theta + \delta v) + p_z\delta w] dS = \sum_{i=0}^s Q_i \delta q_i, \quad (5)$$

где

$$Q_0 = M_z = \int_S (p_y x - p_x y) dS, \quad Q_i = \int_S (p_x U_i + p_y V_i + p_z W_i) dS, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Уравнения движения системы в обобщенных координатах

$$\sum_{j=0}^s [m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j] = Q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (6)$$

запишем в матричном виде

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (7)$$

где $\mathbf{q} = \{q_i\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$, $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ – векторы и матрицы порядка $s + 1$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, s$.

Преобразуем уравнения (6) к нормальным координатам. Положим $\mathbf{Q} \equiv 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{X} \sin \omega t$ и решим задачу о собственных колебаниях свободной по углу θ упругой системы

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} = 0 \rightarrow \omega_n, \quad \mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \leq s.$$

Вектор \mathbf{q} представляется в виде разложения по собственным формам колебаний

$$\mathbf{q} = \sum_{n=0}^{\leq s} f_n \mathbf{X}_n. \quad (8)$$

С учетом условий ортогональности собственных векторов $\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = 0$, $\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = 0$ при $m \neq n$ получаем уравнения для нормальных координат $f_n(t)$

$$m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) = F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \leq s, \quad (9)$$

где

$$m_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n, \quad m_n \omega_n^2 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n, \quad F_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{Q}.$$

При $n = 0$ имеем $\omega_0 = 0$, $\mathbf{X}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, $m_0 = J_z$, $f_0 = \theta$, $F_0 = M_z$. Уравнение (9) при $n = 0$ представляет собой уравнение вращательного движения системы как абсолютно твердого тела

$$J_z \ddot{\theta} = M_z(t). \quad (10)$$

Рассмотрим общую задачу управляемого конечного поворота системы по углу $\theta(t)$ при разгоне или торможении и передвижении из одного состояния в другое за заданное время T , который сопровождается ее нестационарными упругими колебаниями.

В общем случае начальные и конечные условия для функции $\theta(t)$ примем в виде

$$\dot{\theta}(0) = \Omega_0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(T) = \Omega_T, \quad \theta(T) = \theta_T, \quad (11)$$

где Ω_0 , Ω_T , θ_T – заданные величины, представляющие начальную и конечную угловые скорости и конечный угол поворота системы соответственно. В частности, в задаче конечного поворота системы на угол θ_T за время T из одного состояния покоя в другое следует считать $\Omega_0 = \Omega_T = 0$.

Уравнения (9) при $n = 1, 2, \dots, \leq s$ описывают относительное движение вращающейся системы по собственным формам колебаний. Считаем, что при $t = 0$ такие колебания отсутствуют ($\dot{f}_n(0) = f_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots, s$), и потребуем, чтобы при $t = T$ они прекратились по $p \leq s$ собственным формам:

$$\dot{f}_n(T) = 0, \quad f_n(T) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p. \quad (12)$$

В дальнейшем при решении обратной задачи динамики пассивного силового управления поворотом системы и ее упругими колебаниями будем считать, что все нагрузки изменяются во времени пропорционально одной безразмерной функции $\alpha_0 + \varphi(t)$, где α_0 – некоторое число, а $\varphi(t)$ – искомая управляющая функция, которая принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T \varphi(t) dt = 0. \quad (13)$$

В этом случае обозначим

$$M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad F_n(t) = F_n^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad n = 1, 2, \dots, \leq s. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (10) с учетом начальных условий (11), найдем

$$\begin{aligned} \Omega = \dot{\theta} &= \frac{M_z^0}{J_z} \left(\alpha_0 t + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right) + \Omega_0, \\ \theta &= \frac{M_z^0}{J_z} \left(\alpha_0 \frac{t^2}{2} + t \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - \int_0^t \varphi(\tau) \tau d\tau \right) + \Omega_0 t. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда с учетом конечных условий (11) при $t = T$, а также условия (13) получим

$$\frac{M_z^0}{J_z} \alpha_0 T = \Omega_T - \Omega_0, \quad \frac{M_z^0}{J_z} \int_0^T \varphi(\tau) \tau d\tau = (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2} - \theta_T; \quad (16)$$

число α_0 определяется из первого соотношения в (16).

При кинематическом управлении системы по углу поворота функция $\theta(t)$ считается заданной, и уравнение (7) в обобщенных координатах при $p_x \equiv 0$, $p_y \equiv 0$, $p_z \equiv 0$ записывается в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_0\ddot{\theta}, \quad (17)$$

где $\mathbf{q} = \{q_i\}$, $\mathbf{M}_0 = [m_{0i}]$, $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ – векторы и матрицы порядка s при $i, j = 1, 2, \dots, s$. В этом случае вектор \mathbf{q} представляется аналогично (8) в виде разложения по собственным формам колебаний \mathbf{X}_n системы, закрепленной по углу θ , то есть при $\theta = 0$, и уравнения в нормальных координатах, представляющих колебания по этим формам, приводятся к виду

$$\begin{aligned} m_n(\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) &= -m_{0n}\ddot{\theta}, \quad n = 1, 2, \dots, \leq s, \\ m_n &= \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n, \quad m_n \omega_n^2 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n, \quad m_{0n} = \mathbf{X}_n^T \mathbf{M}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Функция $\theta(t)$ в данном случае является решением уравнения $\ddot{\theta} = C(\alpha_0 + \varphi(t))$, где C – постоянная, определяемая из (11) и (13). Это решение θ имеет вид (15) с заменой M_z^0/J_z на C . С учетом этой замены записываются также и условия (16).

2. Решение задачи управления колебаниями в рядах

Получим решение сформулированной в предыдущем разделе задачи гашения упругих колебаний системы при конечном повороте с разгоном ($\Omega_T > \Omega_0$) или с торможением ($\Omega_T < \Omega_0$), а также при перемещении из одного состояния покоя в другое ($\Omega_0 = 0$, $\Omega_T = 0$, $\alpha_0 = 0$), используя ряды тригонометрических функций.

Решение в виде ряда синусов. Представим функцию φ в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\sigma t), \quad \sigma = 2\pi/T. \quad (19)$$

Эта функция удовлетворяет условию (13). Угол поворота системы (15) с учетом первого соотношения (16) есть

$$\theta(t) = \Omega_0 t + \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T} \frac{t^2}{2} + \frac{M_z^0}{J_z} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{k\sigma} \left(t - \frac{1}{k\sigma} \sin(k\sigma t) \right). \quad (20)$$

При $t = T$ второе соотношение в (16) записывается в виде

$$\frac{M_z^0}{J_z} \frac{T}{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b_k = \theta_T - (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2}. \quad (21)$$

Решение уравнений (9) с учетом (19) при $n = 1, 2, \dots, \omega_n \neq k\sigma$ и при начальных условиях $\dot{f}_n(0) = 0$, $f_n(0) = 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{F_n^0}{m_n \omega_n^2} \left[\frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n t)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} \left(\sin(k\sigma t) - \frac{k\sigma}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Конечные условия $f_n(T) = 0$, $\dot{f}_n(T) = 0$, $n = 1, 2, \dots, p$, записываются в виде системы уравнений для коэффициентов b_k при $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_n T) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n T)), \\ (1 - \cos(\omega_n T)) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= -\frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} \sin(\omega_n T). \end{aligned} \quad (23)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение (21), в котором суммирование ведется по $k = 1, 2, \dots, 2p+1$. В результате для общего случая (при разгоне или торможении системы) будем иметь $2p+1$ уравнение для определения коэффициентов b_k , $k = 1, 2, \dots, 2p+1$.

В частном случае при повороте системы на конечный угол θ_T из одного состояния покоя ($\Omega_0 = 0$) в другое ($\Omega_T = 0$) уравнения (23) удовлетворяются при условиях

$$\sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad (24)$$

к которым необходимо добавить уравнение (21) при $\Omega_0 = \Omega_T = 0$, в котором суммирование ведется по $k = 1, 2, \dots, p+1$. В этом случае будем иметь $p+1$ уравнение для определения коэффициентов b_k , $k = 1, 2, \dots, p+1$.

Из уравнений (23) следует, что колебания по n -й форме могут быть устранены также при одновременном выполнении условий [25]

$$\sin(\omega_n T) = 0, \quad 1 - \cos(\omega_n T) = 0, \quad \omega_n \neq k\sigma, \quad n = 1, 2, \dots, p.$$

Пусть управляющая функция берется в виде одной волны синуса при $k = 1$, $\varphi(t) = b_1 \sin(\sigma t)$. Тогда указанные выше условия могут быть выполнены путем настройки системы по собственным частотам, так чтобы $\omega_n T = 2\pi\psi_n$, где ψ_n – любое целое, большее 1. Для гашения колебаний одновременно по нескольким собственным формам ($n = 1, 2, \dots, p$) необходимо, чтобы их собственные частоты $\omega_n > \omega_{n-1}$ удовлетворяли условиям $\omega_n T = 2\pi\psi_n$ при $\psi_n > \psi_{n-1}$.

Решение в виде ряда косинусов. Примем, удовлетворяя условие (13),

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\sigma}{2}t\right), \quad \sigma = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (25)$$

Угол поворота на основании (15) с учетом первого соотношения (16) будет равен

$$\theta(t) = \Omega_0 t + \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T} \frac{t^2}{2} + \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k a_k \left(\frac{2}{k\sigma}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{k\sigma}{2}t\right)\right). \quad (26)$$

При $t = T$ с учетом (25) должно выполняться второе соотношение (16)

$$2 \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k a_k \left(\frac{2}{k\sigma}\right)^2 = \theta_T - (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2}. \quad (27)$$

Общее решение уравнений в нормальных координатах (9) при $M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \varphi(t))$ с учетом (25) для $n = 1, 2, \dots, s$ записывается в виде

$$f_n(t) = \frac{F_n^0}{m_n \omega_n^2} \left[\alpha_0 (1 - \cos(\omega_n t)) + \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} \left(\cos\left(\frac{k\sigma}{2}t\right) - \cos(\omega_n t) \right) \right]. \quad (28)$$

Отсюда с учетом значения α_0 из первого соотношения (16) для колебаний по собственным формам, которые подлежат устранению при $t = T$ ($f_n(T) = 0$, $\dot{f}_n(T) = 0$, $n = 1, 2, \dots, p \leq s$), получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов a_k при $k = 1, 3, 5, \dots$ и $n = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{aligned} (1 + \cos(\omega_n T)) \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} &= (1 - \cos(\omega_n T)) \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T}, \\ \sin(\omega_n T) \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} &= -\sin(\omega_n T) \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_T - \Omega_0}{T}. \end{aligned} \quad (29)$$

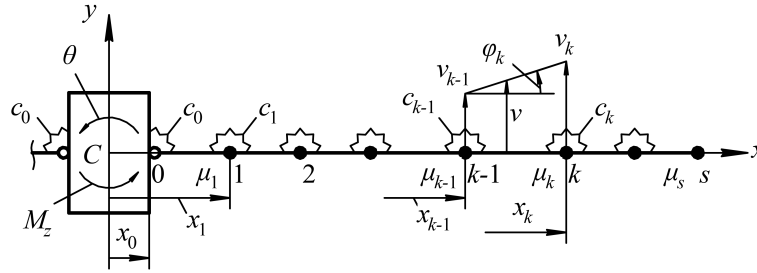


Рис. 2. Космический аппарат с панелями солнечных батарей

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение (27). В результате из полученной системы $2p+1$ уравнения (27) и (29) можно определить $2p+1$ коэффициент a_k при $k = 1, 3, 5, \dots, 4p+1$. В частном случае при конечном повороте системы на угол θ_T за время T из одного состояния покоя ($\Omega_0 = 0$) в другое ($\Omega_T = 0$) на основании (27) и (29) будем иметь систему $p+1$ уравнения при $k = 1, 3, 5, \dots, 2p+1$:

$$\sum_k a_k \left(\frac{2}{k\sigma} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{J_z}{M_z^0} \theta_T, \quad \sum_k \frac{a_k}{1 - (k\sigma/2\omega_n)^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad (30)$$

из которой можно определить $p+1$ неизвестный коэффициент $a_1, a_3, \dots, a_{2p+1}$.

При выборе подходящих для управления колебаниями финитных функций $\varphi(t)$ при $0 \leq t \leq T$ из класса (13) их можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) управляющего момента и по его максимальному модулю:

$$\int_0^T M_z^2 dt = (M_z^0)^2 [\alpha_0 T + \int_0^T \varphi^2(t) dt], \quad \max M_z(t) = M_z^0 (\alpha_0 + \max |\varphi(t)|).$$

Кроме того, желательно, чтобы управляющая функция $\varphi(t)$ была приемлимой и удобной для практической реализации управления (например, чтобы она была достаточно гладкой и не содержала высокочастотных составляющих) и чтобы эта функция приводила к робастному управлению, незначительно зависящему от малых отклонений параметров системы и движения.

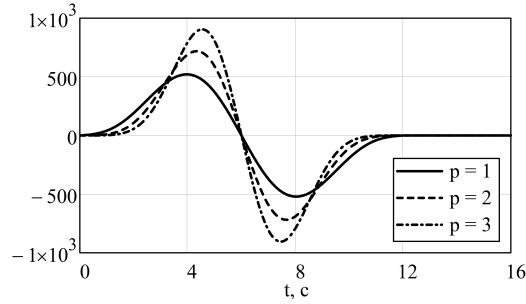
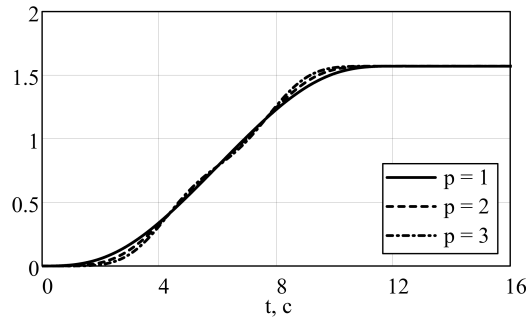
3. Пример расчета

В качестве примера для расчетов рассмотрим плоское движение по крену модели симметричного относительно плоскости $y = 0$ космического аппарата (КА) с двумя одинаковыми плоскими панелями солнечных батарей (СБ), каждая из которых состоит из недеформируемых секций, соединенных между собой и с недеформируемым центральным телом упругими шарнирами (см. рис. 2).

При повороте системы на конечный угол $\theta(t)$ под действием управляющего момента $M_z(t)$ ее центр масс C остается неподвижным. Поперечное перемещение и угол поворота k -й секции правой панели СБ при относительном движении в случае малых колебаниях ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$, $\cos \varphi_k \approx 1$) будут равны

$$v = v_{k-1} + \varphi_k \xi, \quad \varphi_k = \frac{1}{l_k} (v_k - v_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, s, \\ l_k = x_k - x_{k-1}, \quad \xi = x - x_{k-1}, \quad 0 \leq \xi \leq l_k, \quad v_0 = \theta \dot{x}_0, \quad \varphi_0 = \theta.$$

Кинетическая энергия КА с двумя панелями СБ, совершающими при конечном повороте малые антисимметричные колебания, согласно (1) при $\Omega = \dot{\theta}$, $u \approx 0$,

Рис. 3. Управляющий момент $M_z(t)$ для первого случаяРис. 4. Угол поворота космического аппарата $\theta(t)$ для первого случая

$w \approx 0$ записывается в виде

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 + \sum_{k=1}^s \left[\mu_k \dot{v}_k^2 + \frac{m_k l_k}{3} (\dot{v}_{k-1}^2 + \dot{v}_{k-1} \dot{v}_k + \dot{v}_k^2) \right] +$$

$$+ 2\dot{\theta} \sum_{k=1}^s \left[\mu_k x_k \dot{v}_k + \frac{m_k l_k}{3} \left[(x_{k-1} + \frac{1}{2} x_k) \dot{v}_{k-1} + \left(\frac{1}{2} x_{k-1} + x_k \right) \dot{v}_k \right] \right],$$

$$J_z = J_0 + 2 \sum_{k=1}^s \left[\mu_k x_k^2 + \frac{m_k l_k}{3} (x_{k-1}^2 + x_{k-1} x_k + x_k^2) \right],$$

где μ_k – сосредоточенная масса в k -м шарнирном узле; m_k – погонная вдоль оси x масса k -й секции; J_0 – момент инерции центрального тела КА.

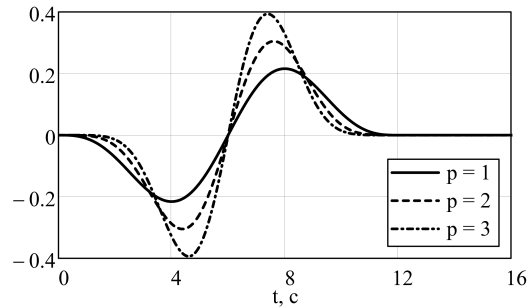
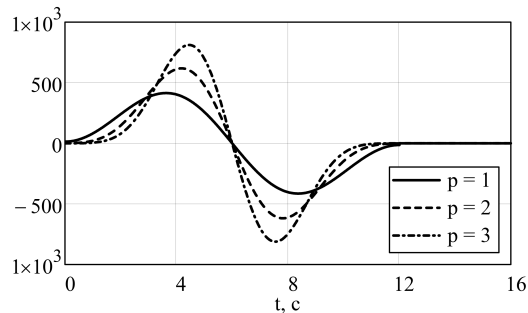
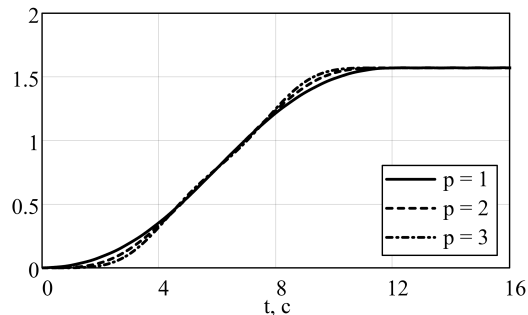
Потенциальная энергия деформации пружин в упругих шарнирных узлах двух панелей СБ и вариация работы управляющего момента равна

$$\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} c_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2, \quad \delta A_p = M_z \delta \theta,$$

где c_k – жесткость пружины по относительному углу поворота в k -м узле.

Уравнения колебаний системы получаются как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах $\theta, v_1, v_2, \dots, v_s$ и записываются в матричном виде (7) для вектора $\mathbf{q} = [\theta \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s]^T$.

Расчеты выполнены для системы со следующими исходными данными: $J_0 = 166.67 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $x_0 = 0.5 \text{ м}$, $s = 4$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2.5 \text{ м}$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5 \text{ кг}$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 3 \text{ кг/м}$, $c_0 = 3000 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 2000 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Рис. 5. Угол поворота $\varphi_4(t)$ секции панели солнечных батарей для первого случаяРис. 6. Управляющий момент $M_z(t)$ для второго случаяРис. 7. Угол поворота космического аппарата $\theta(t)$ для второго случая

Собственные частоты колебаний свободной по углу θ системы равны $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 3.330$ рад/с, $\omega_2 = 7.399$ рад/с, $\omega_3 = 14.165$ рад/с, $\omega_4 = 22.349$ рад/с.

Приведем результаты решения в рядах по синусам (19) задачи управляемого поворота системы на угол $\theta_T = \pi/2$ за время $T = 12$ с из состояния покоя $\Omega_0 = 0$ в конечное состояние покоя $\Omega_T = 0$ с гашением упругих колебаний при $t = T$ одновременно по p низшим собственным формам.

На рис. 3–5 приведены графики изменения во времени при конечном повороте по крену КА с панелями солнечных батарей соответственно: управляющего момента $M_z(t)$; угла поворота $\theta(t)$; угла поворота 4-й секции панели СБ $\varphi_4(t)$.

Получим решения задачи управляемого поворота системы на угол $\theta_T = \pi/2$ за время $T = 12$ с с гашением упругих колебаний при $t = T$ одновременно по p низшим собственным формам в рядах по косинусам (25).

На рис. 6–8 для этого расчетного случая приведены графики соответственно для $M_z(t)$, $\theta(t)$, $\varphi_4(t)$.

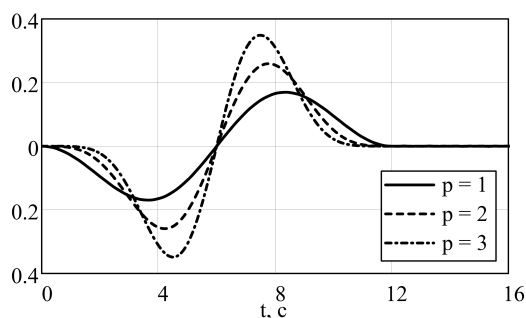


Рис. 8. Угол поворота $\varphi_4(t)$ секции панели солнечных батарей для второго случая

Оценки колебаний при $t > T$ по непогашенным высшим собственным формам ($n > p$) показывают, что в обоих рассмотренных случаях эти «остаточные» колебания пренебрежимо малы (даже при $p = 1$, как видно в масштабе графиков на рис. 3–8). Это объясняется тем, что в рассмотренном примере отношение $T/T_1 = 6,36$, где T_1 – период колебаний системы по первой собственной форме колебаний, является достаточно большим и динамическая реакция системы проявляется в основном вкладом первой формы собственных колебаний.

Если взять более короткое время T , то для данной системы колебания по углу φ_4 могут выйти за пределы применимости линейной теории ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$).

Заключение

Представлен новый метод решения линейной задачи терминального управления конечным поворотом упругой системы, которая в общем случае совершает разгон или торможение, относительно неподвижной оси на заданный угол за заданное время с устранением упругих колебаний в момент окончания операции. Задача решается в нормальных координатах, которые задают движения по собственным формам колебаний системы, свободной по углу поворота. Управляющий момент на интервале времени управления ищется в виде конечного ряда синусов или косинусов с неизвестными коэффициентами. Уравнения в нормальных координатах решаются точно при заданных начальных и конечных (по времени интервала управления) условиях, и в результате получается неоднородная система линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов.

В качестве примера приведены результаты расчета управляемого поворота по крену на конечный угол из одного состояния покоя в другое космического аппарата с двумя симметричными многосекционными панелями солнечных батарей, совершающих антисимметричные упругие колебания. Показано, что для гашения упругих колебаний в момент завершения поворота с достаточно высокой точностью необходимо устранить колебания по одной или двум низшим собственным формам колебаний. Для этого необходимо взять в разложении для управляющего момента, соответственно, две или три гармоники.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-06259а).

Литература

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 363 с.

2. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
3. Колесников К.С., Кожушкин В.В., Борзыл С.В., Панкова Н.В. Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 376 с.
4. Nurte G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I. Dynamics and control of large space structures // J. Guidance, Control and Dynamics. – 1984. – V. 7, No 5. – P. 514–526.
5. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
6. Das S.K., Utku S., Wada B.K. Inverse dynamics of adaptive space cranes with tip point adjustment // 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. – 1990. – Art. AIAA-90-1166-CP, P. 2367–2374.
7. Vainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft // Acta Astronautica. – 1991. – V. 25, No 3. – P. 141–148.
8. Chan J.K., Modi V.J. A Closed-form dynamical analysis of an orbiting flexible manipulator // Acta Astronautica. – 1991. – V. 25, No 2. – P. 67–76.
9. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of flexible spacecraft with time-varying configuration // J. Control, Guidance and Dynamics. – 1992. – V. 15, No 2. – P. 314–324. – doi: 10.2514/3.20839.
10. Miller D.W., Crawley E.F. Theoretical and experimental investigation of space-realizable inertial actuation for passive and active structural control // J. Guidance, Control, and Dynamics. – 1988. – V. 11, No 5. – P. 449–458. – doi: 10.2514/3.20338.
11. Закрежевский А.Е. Об оптимальном развороте упругого космического аппарата // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 106–113.
12. Ротенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396 с.
13. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
14. Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1990. – 480 с.
15. Ганиев Р.Ф., Закрежевский А.Е. Программные движения управляемых деформируемых конструкций. – М.: Наука, 1995. – 213 с.
16. Masters B.P., Crawley E.F. Evolutionary design of controlled structures // J. Aircraft. – 1999. – V. 36, No 1. – P. 209–217. – doi: 10.2514/2.2427.
17. Матюхин В.И. Управление механическими системами. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.
18. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1976. – 383 с.
19. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 326 с.
20. Бербюк В.Б. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наукова думка, 1989. – 187 с.
21. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикл. матем и механика. – 1992. – Т. 56, Вып. 2. – С. 240–249.
22. Гришанина Т.В. Управляемый поворот упругого стержня на конечный угол // Вестн. МАИ. – 2004. – Т. 11, № 1. – С. 64–68.

23. Гришанина Т.В. Устранение колебаний упругой системы после ее быстрого передвижения и поворота // Вестн. МАИ. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 68–75.
24. Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2004. – № 6. – С. 171–186.
25. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

Поступила в редакцию
02.10.17

Гришанина Татьяна Витальевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: grishaninatat@list.ru

Русских Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: sergey.russkih@rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник

Институт прикладной механики РАН
Ленинградский проспект, д. 7, г. Москва, 125040, Россия
E-mail: shklyarchuk@list.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 4, pp. 429–443

Controlling the Finite Rotation of an Elastic System from One State to Another with Vibration Suppression at the Final Moment of Operation

T.V. Grishanina^{a}, S.V. Russkikh^{a**}, F.N. Shklyarchuk^{b***}*

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

^b*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040 Russia*

E-mail: *grishaninatat@list.ru, **sergey.russkih@rambler.ru, ***shklyarchuk@list.ru

Received October 2, 2017

Abstract

The problem of passive control of an arbitrary elastic system that performs a finite rotation in the general case with acceleration or breaking about the unmovable axis and small nonstationary vibration under the impact of an arbitrarily distributed load proportional to some unknown finite function has been considered. The equations of motion of the system have

been written in the normal coordinates which represent the eigenmodes of the free rotating system. In this case, the finite rotation of the system as an absolutely rigid body is represented by the zero mode. It is required that, at the end of the system rotation at the given angle and for the given time, elastic oscillations are eliminated for several lower eigenmodes. An unknown control function (control law) is sought for the considered time interval in the form of a series of sines (and also cosines) with unknown coefficients. On the basis of the exact solution of the equations in normal coordinates with initial and final conditions, the problem reduces to a system of linear algebraic equations for unknown coefficients. As an example, a roll rotation on a finite angle from one state of rest to another of spacecraft with two symmetrical multi-link solar panels has been considered. Calculations have been carried out for various numbers of eigenmodes to be eliminated with comparisons relative to the numerical solutions of the equations in generalized coordinates under the found control actions. It has been shown that in order to obtain a practically acceptable accuracy, it is sufficient to eliminate the vibrations of not more than two or three the lowest eigenmodes.

Keywords: vibration control, final turn of system, unsteady vibrations, suppression of elastic vibrations, solution in series, turn of a vehicle

Acknowledgments. The work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-08-06259a).

Figure Captions

Fig. 1. The elastic system under study.

Fig. 2. The spacecraft with solar panels.

Fig. 3. The control moment $M_z(t)$ for the first case.

Fig. 4. The angle of spacecraft rotation $\theta(t)$ for the first case.

Fig. 5. The angle of solar panel section rotation $\varphi_1(t)$ for the first case.

Fig. 6. The control moment $M_z(t)$ for the second case.

Fig. 7. The angle of spacecraft rotation $\theta(t)$ for the second case.

Fig. 8. The angle of solar panel section rotation $\varphi_1(t)$ for the second case.

References

1. Chernous'ko F.L., Bolotnik N.N., Gradeckij V.G. Manipulation Robots: Dynamics, Control, Optimization. Moscow, Nauka, 1989. 363 p. (In Russian)
2. Kovaleva A.S. Control of Vibratory and Vibro-Impact Systems. Moscow, Nauka, 1990. 256 p. (In Russian)
3. Kolesnikov K.S., Kokushkin V.V., Borzyh S.V., Pankova N.V. Calculation and Design of Rocket Stage Separation Systems. Moscow, Izd. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. Bauman, 2006. 376 p. (In Russian)
4. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I. Dynamics and Control of Large Space Structures. *J. Guid., Control, Dyn.*, 1984, vol. 7, no. 5, pp. 514–526. doi: 10.2514/3.19890.
5. Degtyarev G.L., Sirazetdinov T.K. Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Spacecraft. Moscow, Mashinostroenie, 1986. 216 p. (In Russian)
6. Das S.K., Utku S., Wada B.K. Inverse dynamics of adaptive space cranes with tip point adjustment. *Proc. 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, 1990, art. AIAA-90-1166-CP, pp. 2367–2374.
7. Bainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft. *Acta Astron.*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 141–148. doi: 10.1016/0094-5765(91)90141-Q.
8. Chan J.K., Modi V.J. A closed-form dynamical analysis of an orbiting flexible manipulator. *Acta Astron.*, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 67–76. doi: 10.1016/0094-5765(91)90062-A.

9. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of flexible spacecraft with time-varying configuration. *J. Guid., Control, Dyn.*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 314–324. doi: 10.2514/3.20839.
10. Miller D.W., Crawley E.F. Theoretical and experimental investigation of space-realizable inertial actuation for passive and active structural control. *J. Guid., Control, Dyn.*, 1988, vol. 11, no. 5, pp. 449–458. doi: 10.2514/3.20338.
11. Zakrzhevskii A.E. Optimal slewing of a flexible spacecraft. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 1208–1214. doi: 10.1023/B:INAM.0000010374.09422.49.
12. Rotenberg Ja.N. Automatic Control. Moscow, Nauka, 1971. 396 p. (In Russian)
13. Voronov A.A. Introduction to the Dynamics of Complex Control Systems. Moscow, Nauka, 1985. 352 p. (In Russian)
14. Razygraev A.P. Fundamentals of Flight Control of Spacecraft. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 480 p. (In Russian)
15. Ganiev R.F., Zakrezhevskii A.E. Programmed Motions of Controlled Deformable Structures. Moscow, Nauka, 1995. 213 p. (In Russian)
16. Masters B.P., Crawley E.F. Evolutionary design of controlled structures. *J. Aircr.*, 1999, vol. 36, no. 1, pp. 209–217.
17. Matyukhin V.I. Control of Mechanical Systems. Moscow, Fizmatlit, 2009. 320 p. (In Russian)
18. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Control of Oscillations. Moscow, Nauka, 1976. 383 p. (In Russian)
19. Chernous'ko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A. Methods for Control of Nonlinear Mechanical Systems. Moscow, Fizmatlit, 2006. 326 p. (In Russian)
20. Berbyuk V.B. Dynamics and Optimization of Robotic Systems. Kiev, Naukova Dumka, 1989. 187 p. (In Russian)
21. Kubyshkin E.P. Optimum control of rotation of a rigid body with a flexible rod. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2003, vol. 56, no. 8, pp. 240–249. (In Russian)
22. Grishanina T.V. Controlled turn of an elastic rod at the finite angle. *Vestn. MAI*, 2004, vol. 11, no. 1, pp. 64–68. (In Russian)
23. Grishanina T.V. Elimination of elastic system vibrations after its rapid movement and turn. *Vestn. MAI*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 68–75. (In Russian)
24. Grishanina T.V. Dynamics of controlled motion of elastic systems with finite displacements and turns. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2004, no. 6, pp. 171–186. (In Russian)
25. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. Dynamics of Elastic Controlled Structures. Moscow, Izd. MAI, 2007. 383 p. (In Russian)

Для цитирования: Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 429–443.

For citation: Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Controlling the finite rotation of an elastic system from one state to another with vibration suppression at the final moment of operation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 429–443. (In Russian)