5 класс

1. Две лестницы имеют одинаковую высоту, но разное число ступеней: у первой — 30 ступеней, у второй — 40 ступеней. У каждой лестницы ступеньки одинаковой высоты, но у первой лестницы каждая ступенька на 5 *см* выше каждой ступеньки второй лестницы. Найдите высоту лестниц.

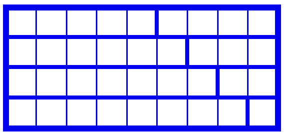
Ответ: 6 *метров*.
Решение. 30 ступенек первой лестницы выше 30 ступенек второй на $30 \cdot 5 = 150$ *см*. Поскольку высота лестниц одна и та же, остальные 10 ступенек второй лестницы должны иметь высоту 150 *см*, и значит, высота каждой ступеньки второй лестницы $150 : 10 = 15$ *см*. Отсюда высота лестниц $40 \cdot 15 = 600$ *см*.
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

2. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 24 * 25 * 26 * 27$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 25, 27 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 24 + 25 - 26 + 27 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

3. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 4×9 по клеточкам на 8 прямоугольников *различной* площади? В ответе укажите все возможные значения этих площадей.

Ответ: *можно* (*см. рисунок*).
Решение. В квадрате $4 \times 9 = 36$ клеток. Сумма 8 различных *наименьших* чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 8$ равна 36, поэтому разрезать можно *только* на прямоугольники с такими площадями.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 4 балла.



4. Вася записал трёхзначное число. Петя прибавил к первой слева цифре этого числа 2, ко второй цифре — 3, к третьей — 4, а затем перемножил полученные суммы. У Пети получилось число 429. Какое число могло быть записано Васей? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 189 *или* 909.
Решение. Разложим 429 в произведение простых чисел: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$. Наибольший сомножитель 13 можно получить только из 9 после операция добавления 4, значит, цифра единиц числа Васи равна 9. Сомножитель 3 можно получить только в двух случаях: 1 + 2 или 0 + 3. И значит, у Васи было число 189 или 909.
Критерии. За каждый правильный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что последняя цифра только 9 — ещё 1 балл. Полное объяснение с упущенным вариантом — 5 баллов.

5. У Миши есть 17 гирек с массами 1, 2, 3, … , 17, и он хочет разложить их на несколько кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь. Сможет ли Миша разложить все гирьки *а*) на 3 кучки? *б*) на 4 кучки?

Ответ: *а*) *сможет*; *б*) *не сможет*.

Решение. *а*) Это можно сделать, например, так. Составим первую кучку из 8 гирек с общей массой $1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 48$, вторую кучку — из 5 гирек с общей массой $2 + 11 + 12 + 13 + 14 = 52$, и, наконец, третью кучку — из 4 гирь с общей массой $5 + 15 + 16 + 17 = 53$.

б) Предположим, что можно разложить гирьки требуемым образом. Общая масса всех гирек равна $1 + 2 + \ldots + 17 = 153$. Значит, масса самой тяжёлой кучки будет больше $153 : 4 > 38$, то есть не менее 39. Масса двух самых тяжёлых гирек $16 + 17 < 39$, поэтому в тяжёлой кучке не меньше трёх гирек. Тогда в следующей, более лёгкой, кучке не меньше 4 гирек, в следующей — не меньше 5 гирек, и так далее. Тогда общее количество гирек не меньше $3 + 4 + 5 + 6 > 17$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 2 балла. В пункте *б*) отмечено, что масса самой тяжёлой кучки не меньше 39, — 2 балла. Доказано, что в самой тяжёлой кучке не менее трёх гирек, — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

6 класс

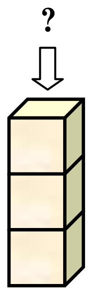
1. В записи $3 * 4 * 5 * 6 * 17 * 18 * 19 * 20$ на месте каждой звездочки поставили знак + или – (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

Ответ: 2.
Решение. Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 3, 5, 17, 19 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность *двух* нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Таким образом, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и значит, не может быть равна 1, поэтому $S \geq 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(3 - 4 - 5 + 6) - 17 + 18 - 19 + 20 = 2$.
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов, только пример — 3 балла.

2. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 90 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 25? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 19, 21 *или* 23.
Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 90$, и значит, m и k — делители числа 90, причём $m + k \leq 25$. Выпишем все разложения числа 90 на два множителя: $10 \cdot 9 = 15 \cdot 6 = 18 \cdot 5 = 30 \cdot 3 = 45 \cdot 2 = 90 \cdot 1$, и оставим из них первые три, для которых сумма делителей не более 25. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 9 = 19$, $15 + 6 = 21$ или $18 + 5 = 23$.
Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

3. У Пети есть несколько одинаковых игральных кубиков, у каждого кубика на каждой грани записано натуральное число, сумма чисел на противоположных гранях равна 10. Петя хочет склеить из них башню (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел на каждой паре *склеенных* граней равнялась 8. Какой высоты башня у него может получиться? В ответе запишите количество кубиков в самой высокой башне и объясните, почему нельзя склеить более высокую башню.



Ответ: 5 *кубиков*.
Решение. Пусть x — число на нижней грани нижнего кубика. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $10 - x$. Сумма чисел на склеенных гранях равна 8, поэтому число на нижней грани второго снизу кубика равно $x - 2$. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $12 - x$. Рассуждая таким образом, получим следующее распределение чисел на нижних и верхних гранях кубиков, считая от основания башни:

$$(x;\ 10 - x),\ (x - 2,\ 12 - x),\ (x - 4,\ 14 - x),\ (x - 6,\ 16 - x),\ (x - 8,\ 18 - x),\ \ldots .$$

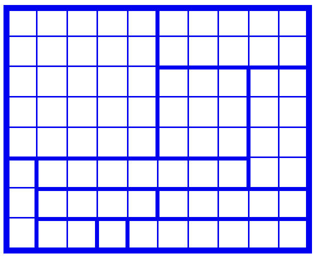
Все выписанные числа положительны, поэтому $10 - x \geq 1$ и $x - 8 \geq 1$, то есть $x = 9$. Если в башне есть ещё 6-й кубик, то на его нижней грани будет число $x - 10 \leq 0$, противоречие. Для самой высокой башни из 5 кубиков получаем: (9; 1), (7, 3), (5, 5), (3, 7), (1, 9).
Критерии. Ответ без объяснений и примера — 0 баллов. Пример башни из 5 кубиков — 3 балла. Доказано, что в башне не может быть больше, чем 5 кубиков, — ещё 4 балла.

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого нет семёрок и нулей и которое делится на трёхзначное число, полученное стиранием его первой слева цифры.

Ответ: 9225.
Решение. Если четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на $\overline{bcd}$, полученное стиранием первой цифры a, то на $\overline{bcd}$ делится и число $\overline{abcd}-\overline{bcd} = 1000a$. Ясно, что исходное число будет наибольшим, если его первая цифра равна $a = 9$. Значит, число $\overline{bcd}$ следует искать среди трёхзначных делителей числа $1000a = 9 \cdot 2^3 \cdot 5^3$. Если $\overline{bcd}$ не содержит пятёрок в своём разложении, то $\overline{bcd} \leq 9 \cdot 2^3$, что невозможно. Если же в его разложении есть пятёрки, то не должно быть двоек; иначе $\overline{bcd}$ делится на 10, и значит, в записи числа $\overline{abcd}$ есть нули. Итак, $\overline{bcd}$ — наибольший трёхзначный делитель числа $9 \cdot 5^3$, не содержащий семёрок, то есть $\overline{bcd} = 225$.
Критерии. Примеры чисел, удовлетворяющих условию — 0 баллов. Доказано, что искомые числа обязательно будут делителями числа 9000, но неверно указан ответ — 3 балла. Правильный ответ без обоснования — 3 балла. Доказано, что это число наибольшее — 4 балла.

5. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 8×10 по клеточкам на 11 прямоугольников *различной* площади? А на 12 таких прямоугольников?

Ответ: *на* 11 *можно* (*см. рисунок*); *на* 12 *нельзя*.



Решение. На рисунке приведён пример разрезания прямоугольника 8×10 на 11 прямоугольников с площадями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 25. Докажем, что такое разрезание на 12 прямоугольников невозможно. Отметим, что в разрезании не могут участвовать прямоугольники площади 11 и 13. В первом случае такой прямоугольник должен иметь размеры 1 и 11, во втором — 1 и 13, что невозможно в прямоугольнике 8×10.
Рассмотрим сумму 12 различных *наименьших* натуральных слагаемых, среди которых нет слагаемых 11 и 13: $1 + 2 + \ldots + 10 + 12 + 14 = 81$. Это больше площади прямоугольника 8×10, поэтому разрезать на 10 частей не удастся.
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример для 11 прямоугольников — 3 балла.

7 класс

1. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 90 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 30? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 19, 21 *или* 23.

Решение. Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 90$, и значит, m и k — делители числа 90, причём $m + k \leq 30$. Выпишем все разложения числа 90 на два множителя: $10 \cdot 9 = 15 \cdot 6 = 18 \cdot 5 = 30 \cdot 3 = 45 \cdot 2 = 90 \cdot 1$, и оставим из них первые три, для которых сумма делителей не более 30. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 9 = 19$, $15 + 6 = 21$ или $18 + 5 = 23$.

Критерии. Приведены (без объяснений) все варианты — 4 балла. Доказано, что других вариантов нет — ещё 3 балла.

2. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 6×6 по клеточкам на шесть прямоугольников, площади которых выражаются различными *нечётными* числами?

Ответ: *нельзя*.

Решение. Если разрезание возможно, общая площадь всех шести прямоугольников равна $6 \times 6 = 36$ и не меньше суммы первых шести нечётных чисел $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Значит, эти площади равны 1, 3, 5, 7, 9, 11. Среди них есть прямоугольник площади 11, стороны которого могут выражаться *только* целыми числами 1 и 11. Сторона длины 11 больше стороны исходного квадрата, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площади выражаются шестью нечётными числами от 1 до 11, — 3 балла.

3. В таблице 8×9 расставлены натуральные числа так, что числа в *соседних* клетках (имеющих общую сторону или общую вершину) различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 172.

Решение. (*Оценка.*) В каждом квадрате 2×2 стоят *различные* натуральные числа, поэтому сумма чисел в квадрате 2×2 не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. В таблице 8×8 есть 16 таких квадратов 2×2. Значит, сумма чисел в таблице 8×8 не меньше $16 \cdot 10 = 160$. Оставшиеся 8 клеток прямоугольника 1×8 можно разбить на 4 прямоугольника 1×2 («доминошки»), в каждом из них сумма чисел не меньше, чем $1 + 2 = 3$, поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше $160 + 4 \cdot 3 = 172$.

На рисунке приведён *пример* таблицы, в которой сумма чисел равна 172.

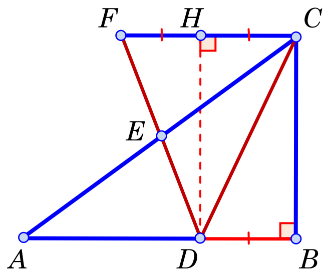
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

Критерии. Приведён правильный пример без объяснений — 3 балла. Доказано, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел не меньше 10, — 2 балла. Баллы не снижаются, если отмечено без объяснений, что в оставшиеся клетки надо расставить чередующиеся пары чисел 1 и 2.

4. Малыш и Карлсон обожают конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел свои конфеты за 8 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 88 *или* 288.
Решение. Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — $(x + 1)$ конфет. Во второй день они съели $x + 1$ и $x + 3$ конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на $1 + 2 = 3$ конфеты больше, чем Малыш. Рассуждая таким образом, получим, что за 8 дней Карлсон съел на $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ конфет больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 36 конфет, причём за 9-ый день он съедает $x + 8 \geq 9$ конфет, за 10-ый день — не менее 10 конфет, и так далее. Число 36 можно представить в виде суммы последовательных слагаемых (из которых первое не меньше 9) только двумя способами: 11 + 12 + 13 и 36. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 11 или 9 дней. В первом случае, $x + 8 = 11$, $x = 3$, и он всего съел $3 + 4 + \ldots + 11 + 12 + 13 = 88$ конфет. Во втором случае, $x + 8 = 36$, $x = 28$, и значит, он съел $28 + 29 + \ldots + 36 = 288$ конфет.
Критерии. За правильный пример без объяснений — 3 балла. Указаны все примеры без объяснения, что других вариантов нет, — 5 баллов.

5. В треугольнике ABC угол ABC равен 90°, точка E — середина гипотенузы AC. На стороне AB отмечена точка D так, что $CD = 2DE$. Известно, что $BD = 1$. Найдите AD.



Ответ: 2.
Решение. Продолжим отрезок DE за точку E и отложим отрезок $EF = DE$. Треугольник CDF — равнобедренный, так как $DF = 2DE = CD$. Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AD = CF$. В треугольнике CDF проведём высоту DH, и, поскольку DH будет и медианой, $FC = 2CH$. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, то есть $CBDH$ — прямоугольник, и значит, $CH = BD = 1$, поэтому $FC = 2$.
Критерии. Указано правильное дополнительное построение (продолжить отрезок DE или DB) — 2 балла.