

УДК 519.716

## О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ $k$ -ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПРИНИМАЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ ЗНАЧЕНИЙ

*Д.К. Подолько*

### Аннотация

В работе для функций  $k$ -значной логики при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ , рассмотрен оператор  $\beta$ -замыкания, который определен на основе кодирования данных функций в двоичной системе счисления. Построено отображение семейства всех  $\beta$ -замкнутых классов в семейство замкнутых классов булевых функций и для каждого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций исследована мощность множества  $\beta$ -замкнутых классов, которые отображаются в класс  $\mathcal{B}$  и содержат только функции, принимающие не более трех значений.

**Ключевые слова:** многозначная логика, замкнутые классы, оператор замыкания, бета-замыкание, усиление суперпозиции, двоичная суперпозиция.

---

### 1. Основные определения и результаты

Известно [1, 2], что семейство классов функций  $k$ -значной логики, замкнутых относительно операции суперпозиции, является континуальным при  $k \geq 3$ . Для изучения этого семейства используются различные подходы, которые условно можно разделить на два направления: исследование классов, обладающих конкретными свойствами (см., например, [3–6]), и изучение специальных операций, которые являются усилениями операции суперпозиции и позволяют получить семейства замкнутых классов с более обозримой структурой (см., например, [7–9]).

Настоящая работа относится ко второму направлению исследований. В ней изучаются свойства оператора  $\beta$ -замыкания (основные определения приведены ниже, а также в работах [10, 11]). Семейство  $\beta$ -замкнутых классов, содержащих только функции, принимающие не более двух значений, является счетным [10]. В работе [11] показано, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций, принимающих не более трех значений, уже является континуальным. В настоящей работе для каждого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций устанавливается, является ли конечным, счетным или континуальным семейство  $\beta$ -замкнутых классов, которые имеют булево замыкание  $\mathcal{B}$  и содержат только функции, принимающие не более трех значений.

Сформулируем основные определения (подробнее см. [10]). Пусть  $k = 2^m$ , где  $m \geq 2$ . Тогда каждое число  $\alpha$  из множества  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  можно записать в двоичной системе счисления. Это означает, что ему взаимно-однозначно сопоставляется двоичный вектор  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  из  $\{0, 1\}^m$ , который будем обозначать через  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ . Переменной  $x$ , принимающей значения из множества  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , можно поставить в соответствие вектор-переменную  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ , где  $x_1, \dots, x_m$  являются переменными, принимающими значения из множества  $\{0, 1\}$ , таким образом, что каждому значению  $\alpha$  переменной  $x$  ставится в соответствие значение  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$  вектор-переменной  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . Данную вектор-переменную будем обозначать также через  $\hat{x}$ .

Обозначим через  $P_k$  множество всех функций  $k$ -значной логики. При рассматриваемых нами значениях  $k$  можно взаимно-однозначно сопоставить произвольной

$n$ -местной функции  $F(x^1, \dots, x^n)$  из  $P_k$  вектор-функцию  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , где функции  $f_1, \dots, f_m$  являются булевыми и каждая из них зависит от всех булевых переменных  $x_1^j, \dots, x_m^j$ ,  $j = 1, \dots, n$  (здесь  $\hat{x}^j = \langle x_1^j, \dots, x_m^j \rangle$ ). Данную вектор-функцию будем также обозначать через  $\hat{F}(\langle x_1^1, \dots, x_m^1 \rangle, \dots, \langle x_1^n, \dots, x_m^n \rangle)$  или  $\hat{F}$ .

Описанные представления будем называть *двоичным представлением числа  $\alpha$ , переменной  $x$  и функции  $F$*  соответственно.

Пусть  $F \in P_k$  и  $\hat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Каждую из функций  $f_1, \dots, f_m$  будем называть *компонентой функции  $F$* . Компоненту функции  $F$ , расположенную на  $i$ -м месте, будем обозначать через  $b_i(F)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а множество всех компонент – через  $b(F)$ . Обозначим также через  $D(F)$  множество значений функции  $F$ .

Пусть  $\mathcal{A} \subseteq P_k$ . Класс булевых функций, совпадающий с замыканием множества  $\bigcup_{F \in \mathcal{A}} b(F)$  относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть *булевым замыканием множества  $\mathcal{A}$*  и обозначать через  $B(\mathcal{A})$ .

Будем говорить, что функция  $H$  из  $P_k$  получена из функций множества  $\mathcal{A}$  при помощи *операции двоичной суперпозиции*, если найдутся функция  $F$  из множества  $\mathcal{A}$  и функции  $g_1, \dots, g_{mn}$  из множества  $B(\mathcal{A})$  (здесь  $n$  – число переменных функции  $F$ ) такие, что выполняется следующее равенство:

$$\hat{H} = \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle).$$

Множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы  $\mathcal{A}$  при помощи операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть  *$\beta$ -замыканием множества  $\mathcal{A}$*  и обозначать через  $[\mathcal{A}]_\beta$ . В работе [10] установлено, что введенный таким образом оператор удовлетворяет всем необходимым свойствам оператора замыкания. Множество  $\mathcal{A}$  назовем  *$\beta$ -замкнутым*, если выполняется равенство  $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ .

Для каждого  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , через  $P_{k|r}$  обозначим множество всех функций из  $P_k$ , принимающих не более  $r$  значений. Обозначим также через  $\mathcal{C}(k, r)$  множество всех замкнутых классов  $\mathcal{B}$  булевых функций, для которых семейство различных  $\beta$ -замкнутых классов  $\mathcal{A}$  функций из  $P_{k|r}$ , удовлетворяющих условию  $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ , является конечным, а через  $\mathcal{Q}(k, r)$  – множество всех классов булевых функций, для которых такое семейство  $\beta$ -замкнутых классов является континуальным.

Из результатов работы [10] следует, что для каждого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций семейство всех  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  является конечным (и непустым), то есть выполняется соотношение  $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(k, 2)$  для всех  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ . Тем самым устанавливается счетность семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$ . В работе [11] показано, что если класс  $\mathcal{B}$  содержится хотя бы в одном из классов  $M$ ,  $T_{01}$ ,  $L$  или  $S$  (обозначения для классов взяты из [12]), то  $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(k, 3)$ . В [11] также доказано, что классы  $O^\infty$  и  $I^\infty$  содержатся во множестве  $\mathcal{Q}(k, 3)$ , где через  $O^\infty$  обозначается класс булевых функций, мажорирующих хотя бы одну из своих переменных, а через  $I^\infty$  – класс, двойственный к  $O^\infty$ . Поэтому для всех  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ , имеют место соотношения

$$\{O^\infty, I^\infty\} \subseteq \mathcal{Q}(k, 3) \subseteq \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 2\} \cup \{P_2, T_0, T_1\}.$$

Здесь для каждого  $\mu \geq 2$  через  $O^\mu$  обозначен класс булевых функций, содержащий все функции  $f$  такие, что у любых  $\mu$  наборов, на которых функция  $f$  равна 0, имеется общая нулевая компонента, а через  $I^\mu$  – двойственный ему класс. Основным результатом настоящей работы является доказательство следующих равенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k, 3) &= \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 2\}, \\ \mathcal{C}(k, 3) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin \mathcal{Q}(k, 3)\}. \end{aligned}$$

## 2. Классы с булевым замыканием $O^\mu$ , $\mu \geq 3$

Для класса  $O^\mu$  булевых функций, где  $\mu \geq 3$ , примером базиса является множество  $\{\bar{x}_1 \vee x_2, \bigvee_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_i \& x_j\}$  (см., например, [12]). Для каждого  $\mu \geq 3$  определим функции  $S(x^1, x^2)$  и  $S^\mu(x^1, \dots, x^{\mu+1})$  из  $P_k$  через их двоичное представление:

$$b_t(S) = \bar{x}_1^t \vee x_1^t, \quad t = 1, \dots, m;$$

$$b_t(S^\mu) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_1^i \& x_1^j, \quad t = 1, \dots, m.$$

Поскольку все компоненты данных функций равны между собой, то выполняется соотношение  $D(S) = D(S^\mu) = \{0, k-1\}$ . Верно также равенство  $B(\{S, S^\mu\}) = O^\mu$ .

Для каждой пары чисел  $n$  и  $a$ , удовлетворяющих неравенствам  $n \geq a \geq 1$ , определим  $n$ -местную булеву функцию  $\omega_n^a$ :

$$\omega_n^a(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если среди компонент } \tilde{\alpha} \text{ меньше } a \text{ единиц;} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для каждого числа  $n$ ,  $n \geq 3$ , определим функцию  $W_n$  из  $P_k$ , зависящую от переменных  $x^1, \dots, x^{2n+2}$ , через ее компоненты:

$$b_1(W_n) = \omega_{2n+2}^3(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}, x_1^{2n+2});$$

$$b_i(W_n) = x_1^{2n+2} \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}) \vee \bar{b}_1(W_n), \quad i = 2, \dots, m.$$

Будем обозначать  $b_1(W_n)$  через  $u_n$ , а  $b_i(W_n)$ ,  $i = 2, \dots, m$ , — через  $v_n$ . Поскольку компоненты функции  $W_n$  существенно зависят только от булевых переменных  $x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}$  и  $x_1^{2n+2}$ , то будем обозначать эти переменные через  $x_1, \dots, x_{2n+1}$  и  $y$  соответственно. Тогда компоненты функции  $W_n$  принимают вид:

$$u_n = \omega_{2n+2}^3(x_1, \dots, x_{2n+1}, y);$$

$$v_n = y \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}) \vee \bar{u}_n.$$

Докажем некоторые свойства функций  $W_n$ .

**Свойство 1.** Для любого  $n \geq 3$  справедливо включение  $u_n \in MO_0^n$ , где через  $MO_0^n$  обозначен класс  $M \cap T_0 \cap O^n$  булевых функций.

**Доказательство.** Функция  $u_n$  является монотонной и на нулевом наборе принимает значение 0. Поэтому  $u_n \in M_0$ . Покажем, что  $u_n \in O^n$ . Для этого рассмотрим произвольные  $n$  наборов из  $E_2^{m(2n+2)}$ , на которых функция  $u_n$  равна 0. Каждый из таких наборов содержит не более 2 единиц среди компонент под номерами  $1, m+1, \dots, 2mn+1, m(2n+1)+1$  (данным компонентам соответствуют переменные  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}, y$  соответственно), а значит, общее число единиц среди рассматриваемых компонент не превышает  $2n$ . Поэтому в этих наборах как минимум две из рассматриваемых компонент будут равны 0. Следовательно,  $u_n \in MO_0^n$ . Несложно также показать, что  $u_n \notin MO_0^{n+1}$ .  $\square$

**Свойство 2.** Для любого  $n \geq 3$  справедливо включение  $v_n \in O^\infty$ .

**Доказательство.** Функция  $v_n$  мажорирует переменную  $y$ , а значит, принадлежит классу  $O^\infty$ .  $\square$

**Свойство 3.** Для любого  $n \geq 3$  функция  $W_n$  принимает три значения.

**Доказательство.** Так как  $b_2(W_n) = \dots = b_m(W_n)$ , то двоичное представление функции  $W_n$  может принимать только значения из множества

$$\{\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle, \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle\}.$$

Поскольку верно равенство  $u_n \vee v_n = 1$ , то  $\widehat{W}_n$  не может принимать значения  $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . Несложно показать, что  $\widehat{W}_n$  принимает остальные три значения, рассмотрев набор из  $E_2^{m(2n+2)}$ , содержащий ровно три единицы среди его компонент с номерами  $1, m+1, \dots, 2m+1$ , а все остальные компоненты которого равны 0, а также нулевой и единичный наборы.  $\square$

**Лемма 1.** Для любого  $n \geq 3$  верно соотношение

$$W_n \notin \left[ \{S\} \cup \{S^\mu \mid \mu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\} \right]_\beta.$$

**Доказательство.** Множество  $\{S\} \cup \{S^\mu \mid \mu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\}$  обозначим через  $\mathcal{A}$ . Из свойств функций  $S$  и  $S^\mu$ ,  $\mu \geq 3$ , и  $W_i$ ,  $i \geq 3$ , вытекает, что  $B(\mathcal{A}) = O^3$ .

Предположим, что  $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$ . Тогда найдутся функция  $H$  из множества  $\mathcal{A}$  и функции  $q_1, \dots, q_{ml}$  из множества  $B(\mathcal{A})$  (здесь  $l$  – число переменных функции  $H$ ) такие, что выполняется следующее равенство:

$$\widehat{W}_n = \widehat{H}(\langle q_1, \dots, q_m \rangle, \dots, \langle q_{m(l-1)+1}, \dots, q_{ml} \rangle). \quad (1)$$

Так как  $|D(W_n)| = 3$ , то функция  $H$  должна принимать как минимум три значения. Поэтому  $H \neq S$  и  $H \neq S^\mu$  для всех  $\mu \geq 3$ . Значит,  $H$  равна  $W_p$  для некоторого числа  $p$ ,  $p \geq 3$ ,  $p \neq n$ , а следовательно,  $l = 2p + 2$ .

Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2p + 1$ , булеву функцию  $q_{m(i-1)+1}$  обозначим через  $g_i$ , а функцию  $q_{m(2p+1)+1}$  – через  $h$ . Каждая из данных функций принадлежит классу  $O^3$ , и без ограничения общности можно считать, что переменными данных функций являются только существенные переменные для компонент  $W_n$  (если есть несущественные, то их можно заменить на произвольную существенную переменную, и при этом нужное равенство сохранится). Поэтому функции  $g_1, \dots, g_{2p+1}, h$  зависят только от переменных из множества  $\{x_1, \dots, x_{2n+1}, y\}$ . В новых обозначениях равенство (1) можно записать следующим образом:

$$u_n = \omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h); \quad (2)$$

$$v_n = h \vee \omega_{2p+1}^{p+1}(g_1, \dots, g_{2p+1}) \vee \overline{\omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h)}. \quad (3)$$

Покажем сначала, что функция  $h$  мажорирует функцию  $x_i \& y$  для любого  $i = 1, \dots, 2n + 1$ . Для этого рассмотрим наборы  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$  и  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$  из  $E_2^{2n+2}$ , указанные в табл. 1.

Табл. 1

Наборы  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$  и  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ 

	1	...	$n$	$n+1$	...	$2n$	$2n+1$	$2n+2$
$\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$	1	...	1	0	...	0	0	0
$\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$	0	...	0	1	...	1	0	0
$\tilde{\gamma}_{2n+1}$	0	...	0	0	...	0	1	1

На наборах  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$  функция  $v_n$  равна 0, так как компонента  $\gamma_{2n+2}$ , соответствующая переменной  $y$ , равна 0, а среди остальных компонент ровно  $n$

единиц. Поскольку  $v_n \geq h$ , то  $h(\tilde{\gamma}_{2n+1,1}) = h(\tilde{\gamma}_{2n+1,2}) = 0$ . Если функция  $h$  равна 0 на каком-нибудь наборе  $\tilde{\gamma}'$ , большем или равном  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ , то у наборов  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ ,  $\tilde{\gamma}'$  не будет общих нулевых компонент, а следовательно,  $h \notin O^3$ , что неверно. Поэтому  $h \geq x_{2n+1} \& y$ . Аналогичным образом можно установить, что функция  $h$  мажорирует функцию  $x_i \& y$  для любого  $i = 1, \dots, 2n$ .

Покажем теперь, что для каждого числа  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2n+1$ , найдется число  $j_i$ ,  $1 \leq j_i \leq 2p+1$  такое, что  $g_{j_i} \geq x_i \& y$ . Для этого снова рассмотрим наборы  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$  и  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ . На наборах  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$  и  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$  функция  $v_n$  равна 0, а значит, среди значений  $g_1(\tilde{\gamma}_{2n+1,c}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{\gamma}_{2n+1,c})$  должно быть не более  $p$  единиц,  $c = 1, 2$ . Так как число функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  равно  $2p+1$ , то среди них найдется функция, равная 0 на наборах  $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$  и  $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ . Допустим, что это функция  $g_{j_{2n+1}}$ , где  $1 \leq j_{2n+1} \leq 2p+1$ . Поскольку  $g_{j_{2n+1}} \in O^3$ , то данная функция равна 1 на любом наборе, большем или равном набору  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ . Значит,  $g_{j_{2n+1}} \geq x_{2n+1} \& y$ . Аналогичные утверждения можно получить и для  $i = 1, \dots, 2n$ .

Предположим, что среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  найдутся как минимум две функции, равные 1 на наборе  $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ . На данном наборе функция  $h$  равна 1, а значит,  $\omega_{2p+2}^3(g_1(\tilde{\gamma}_{2n+1}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{\gamma}_{2n+1}), h(\tilde{\gamma}_{2n+1})) = 1$ . Но  $u_n(\tilde{\gamma}_{2n+1}) = 0$ , следовательно,  $u_n \neq \omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h)$ . Пришли к противоречию. Поэтому среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  не может существовать двух функций, мажорирующих функцию  $x_{2n+1} \& y$ . Таким образом, для каждого числа  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2n+1$ , найдется ровно одно число  $j_i$ ,  $1 \leq j_i \leq 2p+1$  такое, что выполняется неравенство  $g_{j_i} \geq x_i \& y$ .

Предположим, что среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  найдется функция, которая не мажорирует функцию  $x_i \& y$  для всех  $i = 1, \dots, 2n+1$ . Обозначим данную функцию через  $g$ . Покажем, что в этом случае не выполняется как минимум одно из равенств (2) или (3).

Обозначим через  $M(n)$  семейство всех подмножеств множества  $\{1, \dots, 2n+1\}$  мощности  $n$ . Каждому множеству  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  из  $M(n)$  сопоставим набор из  $E_2^{2n+2}$ , у которого компоненты с номерами  $a_1, \dots, a_n$  равны 1, а остальные компоненты равны 0. Такой набор будем обозначать через  $\tilde{A}$ . Отметим, что у данного набора компонента с номером  $2n+2$ , соответствующая переменной  $y$ , равна 0.

Рассмотрим множества  $A, B \in M(n)$ . Предположим сначала  $A \cap B = \emptyset$ . Через  $r$  обозначим число из множества  $\{1, \dots, 2n+1\}$ , которое не входит в  $A \cup B$ . Рассмотрим наборы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ , а также набор  $\tilde{\gamma}_r$ , у которого только компоненты с номерами  $r$  и  $2n+2$  равны 1. Если  $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 0$ , то справедливо соотношение  $g \geq x_r \& y$  (доказательство аналогично доказательству соотношения  $h \geq x_{2n+1} \& y$ ), что неверно в силу выбора функции  $g$ .

Предположим, что  $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$ . Так как  $v_n(\tilde{A}) = v_n(\tilde{B}) = 0$ , то среди значений  $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$  содержится не более  $p$  единиц, как и среди значений  $g_1(\tilde{B}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{B})$ . Так как  $g = g_j$  для некоторого  $j$ ,  $1 \leq j \leq 2p+1$ , и  $g(\tilde{A}) = 1$ , то среди значений  $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{j-1}(\tilde{A}), g_{j+1}(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$  содержится не более  $p-1$  единиц. Аналогично и для набора  $\tilde{B}$ . Значит, как минимум две функции среди  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  равны 0 на наборах  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ . Но тогда обе эти функции должны мажорировать функцию  $x_r \& y$ , что неверно в силу доказанных выше утверждений. Таким образом, для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $M(n)$ , удовлетворяющих условию  $A \cap B = \emptyset$ , выполняется соотношение  $g(\tilde{A}) \neq g(\tilde{B})$ .

Ровно на одном из множеств  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{n+1, \dots, 2n\}$  функция  $g$  равна 1. Аналогично для множеств  $\{2, \dots, n+1\}$ ,  $\{n+2, \dots, 2n+1\}$ . Поэтому существуют два различных множества  $A$  и  $B$  из  $M(n)$ , для которых справедливы равенства  $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$ . По доказанному выше данные множества пересекаются. Построим на их основе два множества  $A'$  и  $B'$  из  $M(n)$ , для которых  $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$  и чье пересечение равно одному числу.

Пусть  $A \cap B = \{c_1, \dots, c_q\}$  для некоторого  $q \geq 1$ . Тогда верны равенства  $A = \{c_1, \dots, c_q, a_1, \dots, a_{n-q}\}$  и  $B = \{c_1, \dots, c_q, b_1, \dots, b_{n-q}\}$ , где множества  $\{a_1, \dots, a_{n-q}\}$  и  $\{b_1, \dots, b_{n-q}\}$  не пересекаются. Через  $r_1, \dots, r_{q+1}$  обозначим все числа от 1 до  $2n+1$ , не входящие в  $A \cup B$  (их количество равно  $2n+1-n-(n-q)$ , то есть  $q+1$ ).

Доказательство будем вести индукцией по значению числа  $q$ . Если  $q = 1$ , то  $A$  и  $B$  и есть искомые множества. Предположим, что мы построили искомые множества для всех чисел  $s$ ,  $1 \leq s < q$ . Построим их и для числа  $q$ . Для этого рассмотрим множества  $A_1 = \{c_1, \dots, c_{q-1}, a_1, \dots, a_{n-q}, r_1\}$  и  $B_1 = \{c_q, b_1, \dots, b_{n-q}, r_2, \dots, r_q\}$ . Так как  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ , то ровно на одном из наборов  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{B}_1$  значение функции  $g$  равно 1. Если  $g(\tilde{B}_1) = 1$ , то  $A \cap B_1 = \{c_q\}$ , и  $A$  и  $B_1$  – искомые множества. Если  $g(\tilde{A}_1) = 1$ , то  $A_1 \cap B = \{c_1, \dots, c_{q-1}\}$ , и по предположению индукции из множеств  $A_1$  и  $B$  можно получить множества  $A'$  и  $B'$ , для которых  $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$  и чье пересечение равно одному числу.

Рассмотрим теперь множества  $A'$  и  $B'$  из  $M(n)$ , для которых верны равенства  $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$  и  $A' \cap B' = \{c\}$  для некоторого  $c$  из множества  $\{1, \dots, 2n+1\}$ . Тогда  $A' = \{c, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ,  $B' = \{c, b_1, \dots, b_{n-1}\}$  и  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cap \{b_1, \dots, b_{n-1}\} = \emptyset$ . Через  $r_1, r_2$  обозначим числа от 1 до  $2n+1$ , не входящие в  $A' \cup B'$ . Положим  $A'' = \{a_1, \dots, a_{n-1}, r_1\}$ ,  $B'' = \{b_1, \dots, b_{n-1}, r_2\}$ .

Так как  $A'' \cap B'' = \emptyset$ , то ровно на одном из наборов  $\tilde{A}''$  и  $\tilde{B}''$  значение функции  $g$  равно 1. Без ограничения общности будем считать, что  $g(\tilde{A}'') = 1$ . Для множеств  $A''$  и  $B'$  справедливы соотношения  $A'' \cap B' = \emptyset$  и  $g(\tilde{A}'') = g(\tilde{B}') = 1$ . Но это неверно в силу свойств функции  $g$ . Значит, такой функции  $g$  не существует. Поэтому среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  нет функций, которые не мажорируют хотя бы одну из функций  $x_1 \& y, \dots, x_{2n+1} \& y$ .

Предположим, что  $p > n$ . Так как каждая из функций  $g_j$ ,  $1 \leq j \leq 2p+1$ , мажорирует функцию  $x_{i_j} \& y$  для некоторого  $i_j$ ,  $1 \leq i_j \leq 2n+1$ , то найдется такое число  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2n+1$ , что функцию  $x_i \& y$  мажорируют несколько функций из множества  $g_1, \dots, g_{2p+1}$ . Но это неверно по доказанным свойствам для этих функций, и, следовательно,  $p < n$ .

В силу неравенства  $p < n$  среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  найдется функция, которая мажорирует хотя бы две функции из множества  $\{x_i \& y \mid i = 1, \dots, 2n+1\}$ . Обозначим эту функцию через  $g'$ , а мажорируемые ей функции из заданного множества через  $x_{s_1} \& y, \dots, x_{s_d} \& y$ ,  $2 \leq d \leq 2n+1$ . Так как функции  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  мажорируют различные функции из рассматриваемого множества, то  $d \leq 2n+1 - 2p < 2n$ .

Пусть  $A, B \in M(n)$ ,  $A \cap B = \emptyset$  и  $s_1 \notin A \cup B$ . Рассмотрим наборы  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , а также набор  $\tilde{\gamma}_{s_1}$ . Предположим, что  $g'(\tilde{A}) = 1$  или  $g'(\tilde{B}) = 1$ . Так как  $v_n(\tilde{A}) = v_n(\tilde{B}) = 0$ , среди значений  $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$  содержится не более  $p$  единиц, как и среди значений  $g_1(\tilde{B}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{B})$ . Тогда среди функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  найдется функция, которая равна 0 на наборах  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , следовательно, эта функция мажорирует функцию  $x_{s_1} \& y$ . Но функцию  $x_{s_1} \& y$  может мажорировать только одна из функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$ , которой уже является функция  $g'$ . Значит,  $g'(\tilde{A}) = g'(\tilde{B}) = 0$ . Обобщая данное утверждение, получим, что для любого множества  $A$  из  $M(n)$ , которое удовлетворяет условию  $t \notin A$ , где  $t \in \{s_1, \dots, s_d\}$ , справедливо равенство  $g'(\tilde{A}) = 0$ .

Так как  $d < 2n$ , то найдется число  $e$ ,  $1 \leq e \leq 2n+1$ , такое, что  $g'$  не мажорирует функцию  $x_e \& y$ . Без ограничения общности будем считать, что  $e = 2n+1$ . Рассмотрим подмножества  $A$  и  $B$  из  $M(n)$ , которые не содержат числа  $2n+1$  и не пересекаются. Тогда  $g'(\tilde{A}) \neq g'(\tilde{B})$ . Это утверждение доказывается аналогично



соответствующему утверждению для рассмотренной выше функции  $g$ .

Как и в случае с функцией  $g$ , найдутся два различных пересекающихся подмножества  $A$  и  $B$  множества  $\{1, \dots, 2n\}$ , для которых  $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$ . На основе данных множеств можно построить два множества  $A'$  и  $B'$ , удовлетворяющих условию  $g'(\tilde{A}') = g'(\tilde{B}') = 1$  и чье пересечение состоит из одного числа. Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для функции  $g$ , но с одним отличием – при доказательстве шага индукции в качестве числа  $r_{q+1}$  необходимо взять число  $2n + 1$ .

Рассмотрим теперь подмножества  $A'$  и  $B'$  из  $M(n)$ , которые не содержат число  $2n + 1$  и удовлетворяют равенствам  $g'(\tilde{A}') = g'(\tilde{B}') = 1$  и  $|A' \cap B'| = 1$ . Тогда верно хотя бы одно из соотношений:  $\{s_1, s_2\} \not\subseteq A'$ ,  $\{s_1, s_2\} \not\subseteq B'$ . Пусть, без ограничения общности,  $s_1 \notin A'$ . Тогда  $A' \in M(n)$  и  $s_1 \notin A'$ , и в силу свойств функции  $g'$  выполняется равенство  $g'(\tilde{A}') = 0$ . Пришли к противоречию, а значит, каждая из функций  $g_1, \dots, g_{2p+1}$  мажорирует ровно одну функцию из множества  $\{x_i \& y \mid i = 1, \dots, 2n + 1\}$  и  $p$  должно равняться  $n$ . Поэтому не может выполняться соотношение (1) и функция  $W_n$  не содержится во множестве  $[A]_\beta$ .  $\square$

**Теорема 1.** Пусть  $k = 2^m$ , где  $m \geq 2$ . Тогда для каждого  $\mu \geq 3$  справедливо соотношение  $\{O^\mu, I^\mu\} \subseteq Q(k, 3)$ .

**Доказательство.** Определим  $\beta$ -замкнутый класс функций  $k$ -значной логики  $\mathcal{W}^\mu(T)$  для каждого подмножества  $T$  множества  $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$ :

$$\mathcal{W}^\mu(T) = \left[ \{S\} \cup \{S^\nu \mid \nu \geq \mu\} \cup \{W_i \mid i \in T\} \right]_\beta.$$

В силу свойств функций  $S$  и  $S^\nu$ ,  $\nu \geq 3$ , верно соотношение  $B(\{S, S^\nu\}) = O^\nu$ , а в силу свойств функций  $W_i$ ,  $i \geq 3$ , – соотношение  $B(\{W_i\}) \subseteq O^i$ . Поэтому для всех подмножеств  $T$  множества  $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$  верно равенство  $B(\mathcal{W}^\mu(T)) = O^\mu$ . Очевидно также, что  $\mathcal{W}^\mu(T) \subset P_{k|3}$ .

Рассмотрим различные подмножества  $R$  и  $Q$  множества  $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$ . Найдется число  $n$  такое, что  $n \in R \setminus Q$  или  $n \in Q \setminus R$ . Пусть, без ограничения общности,  $n \in R \setminus Q$ . Тогда  $W_n \in \mathcal{W}^\mu(R)$ . Покажем, что  $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$ .

По определению множеств  $\mathcal{W}^\mu(T)$  справедливо соотношение  $\mathcal{W}^\mu(Q) \subseteq \mathcal{W}[n]$ , где  $\mathcal{W}[n] = \left[ \{S\} \cup \{S^\nu \mid \nu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\} \right]$ . Согласно лемме 1 функция  $W_n$  не содержится во множестве  $\mathcal{W}[n]$ , а значит,  $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$ . Таким образом, для различных подмножеств  $R$  и  $Q$  множества  $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$  различны и  $\beta$ -замкнутые классы функций  $\mathcal{W}^\mu(R)$  и  $\mathcal{W}^\mu(Q)$ . Так как семейство различных подмножеств множества  $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$  континуально, семейство различных  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|3}$  с булевым замыканием  $O^\mu$  тоже континуально.

Поскольку класс  $I^\mu$  является двойственным к классу  $O^\mu$ , для  $I^\mu$  имеет место аналогичное утверждение.  $\square$

### 3. Классы с булевым замыканием $P_2$ , $T_0$ , $T_1$ , $O^2$ , $I^2$

Пусть  $f, f_1, \dots, f_p$  – булевы функции, зависящие от одного и того же множества переменных. Функцию  $f$  будем называть *функционально зависимой от функций*  $f_1, \dots, f_p$ , если существует  $p$ -местная булева функция  $g$  такая, что  $f = g(f_1, \dots, f_p)$ . В противном случае функцию  $f$  будем называть *функционально независимой от функций*  $f_1, \dots, f_p$ . Функции, реализующие константы 0 и 1, будем считать функционально зависимыми от пустого множества функций. Если для всех чисел  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , функции  $f_j$  являются функционально независимыми

от функций  $f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_p$ , то множество функций  $\{f_1, \dots, f_p\}$  назовем *функционально независимым*.

Пусть  $F \in P_k$  и  $\hat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Множество компонент  $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$  будем называть *базой функции  $F$* , если данное множество является функционально независимым, а остальные компоненты функции  $F$  являются функционально зависимыми от функций  $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ . В [11] показано, что если  $|D(F)| = r$  и  $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$  – база функции  $F$ , то выполняются соотношения  $\lceil \log_2 r \rceil \leq p \leq r - 1$ .

**Лемма 2.** Пусть  $R \subseteq P_k$ ,  $B(R) = O^2$ ,  $F \in P_{k|3}$  и  $b(F) \subset O^2$ . Тогда существует функция  $G$  из множества  $\{F\}_\beta$ , которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что  $F \in \{G\} \cup R|_\beta$ .

**Доказательство.** Двоичное представление функции  $F$  обозначим через  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , а переменные, от которых зависят компоненты функции  $F$ , – через  $x_1, \dots, x_{mn}$  (здесь  $n$  – число переменных функции  $F$ ).

Если  $p$  – число функций в базе функции  $F$ , то из результатов, полученных в [11], следуют неравенства  $\lceil \log_2 |D(F)| \rceil \leq p \leq |D(F)| - 1$ , а значит,  $p = 2$ . Без ограничения общности будем считать, что функции  $f_1$  и  $f_2$  образуют базу функции  $F$ . В этом случае вектор-функция  $\langle f_1, f_2 \rangle$  принимает три значения, а поскольку все компоненты функции  $F$  принадлежат классу  $O^2$ , то на наборе  $\tilde{\alpha}_{11} = (1, \dots, 1)$  из  $E_2^{mn}$  значения функций  $f_1$  и  $f_2$  равны 1.

Выберем для функции  $F$  специальные наборы  $\tilde{\alpha}_{00}$ ,  $\tilde{\alpha}_{01}$ ,  $\tilde{\alpha}_{10}$  из  $E_2^{mn}$ . Для этого рассмотрим три случая.

А. Пусть ни на каком наборе  $\tilde{\alpha}$  из  $E_2^{mn}$  одновременно не выполняются равенства  $f_1(\tilde{\alpha}) = 0$  и  $f_2(\tilde{\alpha}) = 0$ . Так как вектор-функция  $\langle f_1, f_2 \rangle$  принимает три значения, существуют наборы  $\tilde{\alpha}_{01}$ ,  $\tilde{\alpha}_{10}$ , указанные в табл. 2.

Табл. 2

Наборы  $\tilde{\alpha}_{01}$  и  $\tilde{\alpha}_{10}$ 

	$x_1$	$\dots$	$x_{mn}$	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
–	–	$\dots$	–	0	0
$\tilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\dots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\dots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

Если  $f_1 \& f_2 \in O^2$ , то выберем для дальнейшего доказательства найденные нами наборы  $\tilde{\alpha}_{01}$ ,  $\tilde{\alpha}_{10}$ . Если  $f_1 \& f_2 \notin O^2$ , то существуют наборы  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  из  $E_2^{mn}$  такие, что у них нет общих нулевых компонент, но при этом  $f_1(\tilde{\gamma}_1) \& f_2(\tilde{\gamma}_1) = f_1(\tilde{\gamma}_2) \& f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$ .

Без ограничения общности будем считать, что  $f_1(\tilde{\gamma}_1) = 0$ . Если  $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 0$ , то для функции  $f_1$  найдены два набора, на которых функция равна 0, но которые не содержат общих нулевых компонент, а следовательно,  $f_1 \notin O^2$ , что неверно по условиям леммы. Поэтому  $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 1$  и  $f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$ . Для функции  $f_2$  аналогичным образом доказывается равенство  $f_2(\tilde{\gamma}_1) = 1$ .

Так как  $f_1(\tilde{\gamma}_1) = f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$  и  $f_1(\tilde{\gamma}_2) = f_2(\tilde{\gamma}_1) = 1$ , в качестве рассмотренных выше наборов  $\tilde{\alpha}_{01}$  и  $\tilde{\alpha}_{10}$  выберем наборы  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$ , у которых нет общих нулевых компонент.

В качестве набора  $\tilde{\alpha}_{00}$  из  $E_2^{mn}$  будем рассматривать набор  $(1, \dots, 1)$  (он равен набору  $\tilde{\alpha}_{11}$ , но, как будет видно из дальнейшего доказательства, это допустимо).

В. Пусть ни на каком наборе  $\tilde{\alpha}$  из  $E_2^{mn}$  одновременно не выполняются равенства  $f_1(\tilde{\alpha}) = 0$  и  $f_2(\tilde{\alpha}) = 1$ . Тогда существуют наборы  $\tilde{\alpha}_{00}$ ,  $\tilde{\alpha}_{10}$ , указанные в



Табл. 3

Наборы  $\tilde{\alpha}_{00}$  и  $\tilde{\alpha}_{10}$ 

	$x_1$	$\dots$	$x_{mn}$	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\dots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
—	—	$\dots$	—	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\dots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

табл. 3. В этом случае выберем найденные наборы  $\tilde{\alpha}_{00}$ ,  $\tilde{\alpha}_{10}$ , а в качестве набора  $\tilde{\alpha}_{01}$  выберем набор  $(1, \dots, 1)$ .

С. Случай, когда ни на каком наборе  $\tilde{\alpha}$  из  $E_2^{mn}$  одновременно не выполняются равенства  $f_1(\tilde{\alpha}) = 1$  и  $f_2(\tilde{\alpha}) = 0$ , рассматривается аналогично предыдущему.

Далее, для каждого числа  $i$ ,  $1 \leq i \leq mn$ , определим булеву функцию  $u_i(x_1, x_2)$ :

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab,i}.$$

Так как все функции из множества  $\{u_i(x_1, x_2), i = 1, \dots, mn\}$  зависят только от двух переменных, число различных функций этого множества не превосходит 16. Обозначим всевозможные такие функции через  $v_1(x_1, x_2), \dots, v_s(x_1, x_2)$ , где  $s \leq 16$ , а для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq mn$ , через  $r(i)$  обозначим число, определяемое из условия  $u_i(x_1, x_2) = v_{r(i)}(x_1, x_2)$ .

Для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq s$ , положим

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), f_2(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции  $w_1, \dots, w_s$  содержатся в классе  $O^2$ . Поскольку каждая из функций  $w_j$  — это одна из функций множества  $\{u_i(f_1, f_2), i = 1, \dots, mn\}$ , достаточно доказать, что для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq mn$ , функция  $u_i(f_1, f_2)$  принадлежит классу  $O^2$ . Отдельно рассмотрим три разных случая.

А. Вектор-функция  $\langle f_1, f_2 \rangle$  не принимает значения  $\langle 0, 0 \rangle$ . Если  $f_1 \& f_2 \in O^2$ , то по определению функции  $u_i$  выполняется неравенство  $u_i(x_1, x_2) \geq x_1 \& x_2$ . Поэтому  $u_i(f_1, f_2) \geq f_1 \& f_2$ , а значит, в силу свойств функций из класса  $O^2$  функция  $u_i(f_1, f_2)$  тоже принадлежит классу  $O^2$ .

Если  $f_1 \& f_2 \notin O^2$ , то у наборов  $\tilde{\alpha}_{01}$  и  $\tilde{\alpha}_{10}$  нет общих нулевых компонент по построению. Поэтому для функции  $u_i$  выполняется хотя бы одно из соотношений  $u_i(0, 1) = 1$  и  $u_i(1, 0) = 1$ . Но тогда  $u_i \geq x_1$  или  $u_i \geq x_2$ , а значит,  $u_i(f_1, f_2)$  мажорирует либо функцию  $f_1$ , либо  $f_2$ , которые содержатся в классе  $O^2$ . Поэтому  $u_i(f_1, f_2) \in O^2$ .

В. Вектор-функций  $\langle f_1, f_2 \rangle$  не принимает значения  $\langle 0, 1 \rangle$ . Тогда верно равенство  $\tilde{\alpha}_{01} = \tilde{\alpha}_{11} = (1, \dots, 1)$ , и имеет место соотношение  $u_i(x_1, x_2) \geq x_2$ . Поэтому  $u_i(f_1, f_2) \geq f_2$  и  $u_i(f_1, f_2) \in O^2$ .

С. Случай, когда вектор-функций  $\langle f_1, f_2 \rangle$  не принимает значения  $\langle 1, 0 \rangle$ , рассматривается аналогично предыдущему.

Рассмотрим теперь функцию  $G$  из  $P_k$ , имеющую следующее двоичное представление:

$$\hat{G} = \hat{F}(y_{r(1)}, \dots, y_{r(mn)}).$$

По построению компоненты функции  $G$  существенно зависят от переменных из множества  $\{y_1, \dots, y_s\}$  (в дальнейшем мы будем рассматривать только эти переменные), поэтому функция  $G$  тоже существенно зависит не более чем от  $s$

переменных, где  $s \leq 16$ . Отметим также, что поскольку базой функции  $F$  является множество  $\{f_1, f_2\}$ , то у функции  $G$  найдется база, которая содержится во множестве  $\{g_1, g_2\}$ .

Покажем, что функция  $G$  является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_s(x_1, \dots, x_{mn})) = \widehat{F}(x_1, \dots, x_{mn}).$$

Так как у функции  $F$  базой является множество  $\{f_1, f_2\}$ , а у функции  $G$  найдется база во множестве  $\{g_1, g_2\}$ , то достаточно доказать равенства

$$g_j(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_s(x_1, \dots, x_{mn})) = f_j(x_1, \dots, x_{mn}), \quad j = 1, 2.$$

Для этого рассмотрим произвольный набор  $\tilde{\alpha}$  из  $E_2^{mn}$ . Пусть на этом наборе значение функции  $f_1$  равно  $a$ , а значение функции  $f_2$  —  $b$ . Тогда

$$\begin{aligned} g_1(w_1(\tilde{\alpha}), \dots, w_s(\tilde{\alpha})) &= g_1(v_1(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha})), \dots, v_s(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}))) = \\ &= g_1(v_1(a, b), \dots, v_s(a, b)) = f_1(v_{r(1)}(a, b), \dots, v_{r(mn)}(a, b)) = \\ &= f_1(u_1(a, b), \dots, u_{mn}(a, b)) = f_1(\alpha_{ab,1}, \dots, \alpha_{ab,mn}) = f_1(\tilde{\alpha}_{ab}) = a, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается и соотношение для функции  $f_2$ .

Значит,  $\widehat{F}(\tilde{x}) = \widehat{G}(w_1(\tilde{x}), \dots, w_s(\tilde{x}))$ , а так как каждая из функций  $w_1, \dots, w_s$  содержится в классе  $O^2$ , который равен  $B(\{G\} \cup R)$ , то  $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\mathcal{B}$  — один из классов  $P_2, T_0, T_1$  булевых функций,  $R \subseteq P_k$ ,  $B(R) = \mathcal{B}$ ,  $F \in P_{k|3}$  и  $b(F) \subset \mathcal{B}$ . Тогда существует функция  $G$  из множества  $[\{F\}]_\beta$ , которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что  $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$ .

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 2. Сначала выбираются наборы, на которых функция принимает каждое из своих значений. Затем на основе данных наборов задаются функции из исходного класса  $\mathcal{B}$  и с их помощью строится искомая функция  $G$ .

**Теорема 2.** Пусть  $k = 2^m$ , где  $m \geq 2$ . Тогда  $\{P_2, T_0, T_1, O^2, I^2\} \subseteq C(k, 3)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\beta$ -замкнутый класс с булевым замыканием  $\mathcal{B}$ . Тогда в нем есть функция  $F$ , которая принимает более одного значения. Поэтому по лемме 5 из работы [11] в классе  $[\{F\}]_\beta$  содержится функция  $H(x^1)$  такая, что среди ее компонент есть селекторная функция.

Известно, что у класса  $\mathcal{B}$  существует конечный базис (см., например, [12]). Пусть он состоит из функций  $g_1, \dots, g_s$ . Обозначим переменные, от которых зависят эти функции, через  $x_1^1, \dots, x_1^r$ , где  $r$  является максимальным числом переменных у данных функций. Для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq s$ , определим функцию  $G_j$  из  $P_k$  через ее двоичное представление:  $\widehat{G}_j = \widehat{H}(\langle g_j, \dots, g_j \rangle)$ . Тогда функция  $G_j$  зависит не более чем от  $r$  переменных, а так как  $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq \mathcal{B} = B(\mathcal{A})$  и класс  $\mathcal{A}$  является  $\beta$ -замкнутым, то  $G_j \in \mathcal{A}$ .

Поскольку множество компонент функции  $H$  содержит селекторную функцию, то  $g_j \in b(G_j)$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Поэтому верно равенство  $B(\{G_1, \dots, G_s\}) = \mathcal{B}$ , и по лемме 2 (в случае, когда класс  $\mathcal{B}$  равен  $O^2$  или двойственному ему классу  $I^2$ ) или лемме 3 (в случае классов  $P_2, T_0, T_1$ ) для любой функции  $F \in \mathcal{A}$  можно выбрать функцию  $H_F \in \mathcal{A}$ , которая зависит не более чем от 16 переменных, и такую, что  $F \in [\{G_1, \dots, G_s, H_F\}]_\beta$ . Тогда имеет место включение

$\mathcal{A} \subseteq [\{G_1, \dots, G_s\} \cup \{H_F | F \in \mathcal{A}\}]_\beta$ . Но поскольку все функции из множеств  $\{G_1, \dots, G_s\}$  и  $\{H_F | F \in \mathcal{A}\}$  содержатся в  $\mathcal{A}$ , верно и обратное включение. Поэтому  $\mathcal{A} = [\{G_1, \dots, G_s\} \cup \{H_F | F \in \mathcal{A}\}]_\beta$ .

Число функций из  $\mathcal{A}$ , зависящих не более чем от 16 переменных, конечно. Значит, конечно и множество  $\{H_F | F \in \mathcal{A}\}$ . Следовательно, у класса  $\mathcal{A}$  имеется конечный базис, все функции которого зависят не более чем от  $\max(16, r)$  переменных.

Так как число функций из  $P_{k|3}$ , зависящих не более чем от  $\max(16, r)$  фиксированных переменных, является конечным, конечно и число их подмножеств. Поэтому для каждого из рассматриваемых классов  $\mathcal{B}$  число различных  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|3}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  является конечным.  $\square$

В качестве следствия из теорем 1 и 2, а также из результатов работы [11], которые приведены в конце разд. 1 настоящей работы, получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $k = 2^m$ , где  $m \geq 2$ . Тогда верны равенства

$$Q(k, 3) = \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\},$$

$$C(k, 3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}.$$

**Замечание.** Для функций  $k$ -значной логики, принимающих не более 4 значений, можно получить аналогичную классификацию по мощности семейств  $\beta$ -замкнутых классов таких функций в соответствии с их булевым замыканием. Так, множество  $Q(4, 4)$  содержит все замкнутые классы булевых функций из множества  $\{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\} \cup \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}$ , двойственные им классы, и только такие классы. Если  $k = 2^m$ , где  $m \geq 3$ , то имеет место равенство

$$Q(k, 4) = \{O^2, I^2\} \cup Q(4, 4).$$

При этом для всех  $k = 2^m$ , где  $m \geq 2$ , и всех замкнутых классов  $\mathcal{B}$  булевых функций таких, что  $\mathcal{B} \notin Q(k, 4)$ , справедливо включение  $\mathcal{B} \in C(k, 4)$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

### Summary

*D.K. Podolko.* On the Closed Classes of  $k$ -Valued Logic Functions Taking No More than Three Values.

The paper considers  $k$ -valued logic functions where  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ . A  $\beta$ -closure operator is defined based on their encoding in the binary numeral system. A special mapping of all  $\beta$ -closed classes to a set of closed classes of Boolean functions is denoted. The cardinality of a set of  $\beta$ -closed classes which are mapped to a class  $\mathcal{B}$  and contain only functions taking no more than three values is studied in this paper for each class  $\mathcal{B}$  of Boolean functions.

**Keywords:** multi-valued logic, closed classes, closure operator,  $\beta$ -closure, superposition strengthening, binary superposition.

## Литература

1. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2001. – 384 с.
3. Яблонский С.В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 95, № 6. – С. 1152–1156.
4. *Stupecki J.* Kriterion pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. – 1939. – V. 32. – P. 102–109.
5. *Rosenberg I.G.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. – 1965. – V. 260. – P. 3817–3819.
6. *Rosenberg I.G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přív. Věd., Praha. – 1970. – V. 80. – P. 3–93.
7. Марченков С.С.  $S$ -классификация функций многозначной логики // Дискретная матем. – 1997. – Т. 9, № 3. – С. 125–152.
8. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов  $k$ -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 3. – С. 16–19.
9. Тарасова О.С. Классы функций  $k$ -значной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Матем. вопросы кибернетики. – М.: Физматлит, 2004. – Вып. 13. – С. 59–112.
10. Подолько Д.К. О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2013. – № 6. – С. 54–57.
11. Подолько Д.К. Об одном континуальном семействе  $\beta$ -замкнутых классов функций многозначной логики // Прикл. дискретная матем. – 2014. – № 2(24). – С. 12–20.
12. Угольников А.Б. Классы Поста. – М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. фак. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. – 64 с.

Поступила в редакцию  
28.07.14

---

**Подолько Дмитрий Константинович** – аспирант кафедры дискретной математики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: [podolko\\_dk@mail.ru](mailto:podolko_dk@mail.ru)