ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 09 ноября 2022 г.

Аннотация: *Отделимые и вычислимо отделимые топологии. T_4-отделимость вычислимо отделимых пространств. Топологические нумерованные алгебры и эффективно невырожденные нумерации. Совпадение вычислимых и перечислимых топологий для негативных эквивалентностей. Компактные расширения эквивалентностей. Негативность T_2-отделимых трансляционно предполных алгебр. Пример подпрямо неразложимой эффективно отделимой алгебры, не являющейся негативной. Примеры структур, всякие T_1-отделимые представления которых вычислимы.*

Для нумерованной алгебры (A, ν) семейство всех перечислимых (вычислимых) ν-замкнутых множеств образует базу естественной топологии на $\omega/ker(\nu)$, которое назовем эффективной (соответственно – вычислимой) ν-топологией и обозначим через $\tau(\nu)$ (соответственно через $\tau_{comp}(\nu)$). Если η – эквивалентность на ω, то для всякой η-алгебры также можно определить соответствующие топологические пространства: $\tau(\eta)$-пространство и $\tau_{comp}(\eta)$-пространство, порожденные η-замкнутыми перечислимыми и вычислимыми множествами соответственно. Эти подходы равносильны, т.к. $ker(\nu)$ однозначно определяется нумерацией, а эквивалентность η задает естественную (проектирующую) нумерацию ν: $\nu(x) = \{x\}/\eta$.
Замечательным свойством этих топологий для любой нумерованной алгебры (A, ν) (не обязательно эффективной сигнатуры!) является факт непрерывности всех операций алгебры A как в $\tau(\nu)$-топологии, так и в $\tau_{comp}(\nu)$-топологии, т.к. каждая операция алгебры поддерживается подходящей вычислимой функцией, представляющей данную операцию в нумерации ν.

Нормальность вычислимо отделимых пространств

Теорема о T_4-отделимости вычислимо отделимых пространств

Для произвольной эквивалентности η следующие условия равносильны:
1) η – вычислимо отделима;
2) ω/η-пространство, порожденное семейством R_η η-замкнутых вычислимых множеств совершенно нормально и вполне несвязно.

Доказательство. 1 => 2. Пусть η – вычислимо отделимая эквивалентность и R_η – семейство всех η-замкнутых вычислимых множеств. Если $\alpha \in R_\eta$, то $\omega \setminus \alpha \in R_\eta$, поэтому множества из R_η являются открыто-замкнутыми в R_η-порожденной топологии. Следовательно, ω/η-вычислимое пространство вполне несвязно. Далее, если α замкнуто в R_η-топологии, то лля всякого $x \in (\omega \setminus \alpha)$x найдется такое $\beta_x \in R_\eta$, что $x \in \beta_x$ и $\alpha \cap \beta_x = \emptyset$, а значит α является пересечением счетного числа открытых множеств, т. е. α — G_δ-множество.

Нормальность вычислимо отделимых пространств

Пусть α, β — непересекающиеся множества, замкнутые в R_η-топологии. Зафиксируем некоторые пересчеты $\{a_0, a_1, \dots\}$, $\{b_0, b_1, \dots\}$ множеств α и β соответственно. Построим два семейства открыто-замкнутых множеств $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ и $\beta_0, \beta_1 \dots$ по шагам.
В качестве α_0 выбираем любую базовую окрестность смежного класса числа a_0, не пересекающуюся с β. Такое α_0 существует в силу замкнутости β. Поскольку $\alpha \cup \alpha_0$ замкнуто, что вытекает из замкнутости α, то существует подходящая окрестность β_0 точки b_0, не пересекающаяся с $\alpha \cup \alpha_0$.
Пусть определены такие открыто-замкнутые множества $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ и $\beta_0, \dots, \beta_n$, что

$$1. a_i \in \alpha_i, b_i \in \beta_i (i \leqslant n);$$

$$2. (\alpha \cup \bigcup_{i \leqslant n} \alpha_i) \cap (\beta \cup \bigcup_{i \leqslant n} \beta_i) = \emptyset.$$

В качестве α_{n+1} выбираем подходящую базовую окрестность точки a_{n+1}, не пересекающуюся с замкнутым множеством $\beta \cup \beta_0 \cup \cdots \cup \beta_n$. В качестве β_{n+1} выбираем подходящую базовую окрестность точки b_{n+1}, не пересекающуюся с замкнутым множеством $\alpha \cup \alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_n$. Пусть

$$A = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n, B = \bigcup_{n \in \omega} \beta_n.$$

По построению имеем $\alpha \subseteq A, \beta \subseteq B, A \bigcap B = \emptyset$ и A, B – открытые множества. 2 => 1. Очевидно. *Теорема доказана.*

Следствие

Если η — вычислимо отделимая эквивалентность, то пространство, порожденное семейством R_η вычислимых η-замкнутых множеств является T_i-пространством для всякого $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Определение 1

Нумерация ν универсальной алгебры A называется эффективно невырожденной, если пространство $\tau(\nu)$ нетривиально (т.е. $\tau(\nu)$-топология содержит хотя бы один элемент кроме $\emptyset$ и $\omega/ker(\nu)$).

Нумерацию не являющуюся эффективно невырожденной будем называть эффективно вырожденной. Иначе говоря, эффективная вырожденность нумерации универсальной алгебры равносильна отсутствию нетривиальных перечислимых окрестностей ее элементов. Формулировке следующего результата предпошлем важное замечание, касающееся эффективности сигнатуры. Большинство результатов общей теории нумерованных алгебр предполагает эффективность сигнатуры (т.е. наличие равномерно эффективной процедуры, "выдающей" алгоритм вычисления соответствующей представляющей операцию функции по ее сигнатурному имени), т.к. семейство всех трансляций должно быть перечислимым.

Однако, многие принципиальные факты справедливы для произвольных счетных сигнатур. Выше уже упоминалось, что свойство непрерывности операций не зависит от эффективности сигнатуры. Таковым же является и один из следующих "отрицательных" (с точки зрения возможности эффективного различения элементов) универсальных результатов для нумерованных алгебр.

Теорема о существовании вырожденных нумераций

Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры имеет эффективно вырожденную нумерацию.

Доказательство. Пусть $\langle A; \Sigma \rangle$ – универсальная алгебра счетной сигнатуры Σ. Рассмотрим "универсальную" сигнатуру Σ^*, определенную следующим образом. В Σ^* содержится бесконечное вычислимое множество константных символов, бесконечное вычислимое множество унарных функциональных символов, бинарных и т.д.

Очевидно, что Σ^* – вычислимая сигнатура, в то время как алгоритмическая сложность Σ может быть какой угодно. Таким образом, Σ^* является обогащением Σ для любого счетного Σ. Интерпретируем произвольным образом на алгебре A все символы из $\Sigma^* \setminus \Sigma$ и через A^* обозначим полученное Σ^*-обогащение алгебры A. Если мы построим некоторую нумерацию для алгебры A^*, то, тем самым, эта же нумерация будет и представлением для $\langle A; \Sigma \rangle$, т .к. A является Σ-обеднением алгебры A^* сигнатуры Σ^*.
Пусть $T_{\Sigma^*}(X)$ – абсолютно свободная Σ^*-алгебра от свободного вычислимого бесконечного множества порождающих $X = \{x_0, x_1, \dots\}$. Зафиксируем произвольную вычислимую геделевскую нумерацию γ алгебры $T_{\Sigma^*}(X)$ (удобно считать сами Σ^*-термы (слова) от порождающего множества X их же γ-номерами, т.к. они вполне могут играть роль "натуральных чисел").

Выберем сжатое (т.е. бесконечное не отделимое на две бесконечные части никаким перечислимым множеством) множество $\alpha \subseteq \omega$ и рассмотрим следующее подмножество Y множества порождающих X: $Y = \{x_i | i \in \alpha\}$. Разобьем множество Y на бесконечное число бесконечных непересекающихся подмножеств $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ и, затем, расширим Y_0 множеством $X \setminus Y$.

Построим сюрьективное отображение $\mu : X \to A$ так, чтобы $\mu x = \mu y \Leftrightarrow \exists n \in \omega(x \in Y_n \wedge y \in Y_n)$. Отображение μ абсолютно свободных порождающих X единственным образом продолжается до гомоморфизма $\mu^* \supseteq \mu$ алгебры $T_{\Sigma^*}(X)$ на $\langle A^*; \Sigma^*\rangle$. Искомая нумерация ν является композицией γ и μ^*, т.е. $\nu = \mu^*\gamma$ (очевидно, что все операции исходной алгебры представлены вычислимыми функциями в нумерации ν, т.к. результат "вычисления" Σ^*-операции f на наборе элементов $\langle t_1(\overline{x}), \ldots, t_n(\overline{x}\rangle)$ есть слово $f(t_1(\overline{x}), \ldots, t_n(\overline{x})))$.

Покажем, что нумерованная алгебра (A^*, ν) не имеет собственного подмножества, ν-прообраз которого перечислим (т.е. $\tau(\nu)$-пространство тривиально).
Допустим противное. Пусть B – собственное подмножество A и $\beta = \nu^{-1}(B)$ – перечислимое подмножество ω. Тогда существуют такие $m \neq n$, что $\{i | x_i \in Y_m\} \subseteq \beta$ и $\{i | x_i \in Y_n\} \subseteq (\omega \setminus \beta)$. Но тогда перечислимое множество β разделяет сжатое множество α на две бесконечные части. Противоречие. *Теорема доказана.*

Следствие

Всякая не более чем счетная универсальная алгебра счетной сигнатуры представима над некоторой эквивалентностью.

Таким образом, эффективно невырожденные нумерованные алгебры образуют достаточно узкий класс (в категории нумерованных алгебр с морфизмами), в рамках которого мы будем формулировать наши утверждения.

Отметим, что как позитивные, так и негативные алгебры являются отделимыми (более того, даже эффективно отделимыми, см. [1]). Мы уже знаем, что всякая нумерованная алгебра эффективной сигнатуры вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (аппроксимации понимаются как морфизмы, т.е. эффективные на номерах гомоморфизмы). Для позитивных алгебр вычислимые и перечислимые топологии могут максимально различаться. Например, пусть η – совершенная эквивалентность (т.е. бесконечная позитивная эквивалентность, которая не имеет собственных η-замкнутых вычислимых подмножеств). Тогда η-пространство является дискретным, а η_{comp}-пространство – тривиальным. Оказывается, что в случае негативных алгебр вычислимые и перечислимые топологии совпадают.

[1] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

Приведем это утверждение в наиболее общей формулировке.

Теорема о совпадении вычислимых и перечислимых топологий

Если (A, ν) – негативно нумерованное множество, то $\tau(\nu)$-топология и $\tau(\nu)_{comp}$-топология совпадают.

Доказательство. В одну сторону это очевидно, т.к. всякое вычислимое множество перечислимо.

Пусть α – ν-замкнутое подмножество ω, открытое в $\tau(\nu)$-топологии. Не ограничивая общности можно считать, что α – базовая (т.е. перечислимая) окрестность. Пусть $a \in \alpha$.

Для доказательства теоремы достаточно построить разбиение ω на ν-замкнутые перечислимые непересекающиеся множества β и δ такие, что $a \in \beta \subseteq \alpha$ и $\beta \cup \delta = \omega$. Мы построим их с помощью пошаговой конструкции. Конечные части множеств β и δ, накопленные перед исполнением шага s+1, будем обозначать соответственно через β_s и δ_s. Заметим, что случай $\omega \setminus \alpha = \emptyset$ также учитывается предлагаемой конструкцией.

Шаг 0. Положим $\beta_0 = \{a\}$, $\delta_0 = \emptyset$.
Шаг s+1. Пусть z – наименьшее натуральное число из $\omega \setminus (\beta_s \cup \delta_s)$.
Одновременно перечисляя множества $\omega^2 \setminus ker(\nu)$ и α ждем, пока не подтвердится выполнение хотя бы одного из следующих условий (далее будет показано, что это обязательно случится):
(a) (z отвергается множеством δ_s) $\wedge$ $(z \in \alpha)$;
(b) z отвергается множеством β_s.
Если выполнено (a), то добавляем z к перечислению β, иначе – к перечислению δ.

Лемма

Справедливы следующие утверждения:
1. $\beta \subseteq \alpha$;
2. $\beta \cap \delta = \emptyset$;
3. любой элемент из β *отвергается всеми элементами из* δ *и наоборот;*
4. $\beta \cup \delta = \omega$.

Доказательство. Пп. 1 и 2 очевидны. П. 3 следует из того, что, как нетрудно убедиться индукцией по шагам построения, каждый элемент из β_s отвергается всеми элементами из δ_s и наоборот.
Пусть не выполнено условие (b), т.е z не отвергается множеством β_s. Это означает, что z является ν-эквивалентным элементу из β_s, а поскольку в силу уже доказанного п.1 мы имеем $\beta_s \subseteq \beta \subseteq \alpha$ и α по условию ν-замкнуто, то получим $z \in \alpha$. Далее, поскольку z ν-эквивалентно некоторому элементу из β_s, то, в силу уже доказанного п. 3, получаем, что z отвергается множеством δ_s.
Для доказательства П. 4 достаточно показать, что на каждом шаге s одно из условий (a), (b) в описании конструкции обязательно выполнится и, в результате, очередное z попадет либо в β, либо в δ.

Пусть не выполнено условие (b), т.е. z не отвергается множеством β_s. Это означает, что z является ν-эквивалентным некоторому элементу из β_s, а поскольку в силу уже доказанного п. 1 мы имеем $\beta_s \subseteq \beta \subseteq \alpha$ и α по условию ν-замкнуто, то получим $z \in \alpha$.
Далее, т.к. z ν-эквивалентно некоторому элементу из β_s, то, в силу уже доказанного п. 3, имеем факт отвержения z множеством δ_s.
Таким образом, в случае невыполнения условия (b) будет выполнено условие (a). *Лемма доказана.*
Замкнутость множеств β и δ относительно ядра нумерации легко следует из п. 3 доказанной Леммы. *Теорема доказана.*

Компактные расширения

Теорема о компактных расширениях

Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, эффективное (вычислимое) фактор-пространство по модулю которого является компактным.

Доказательство будет основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма

Пусть Σ – счетное семейство η-замкнутых множеств, дополнения которых η-бесконечны. Тогда существует такое бесконечное расширение η^* эквивалентности η, что никакое η^*-замкнутое надмножество α_0 (где α_0 – смежный η-класс, содержащий число 0), не является Σ-множеством (т.е. множеством из Σ).

Компактные расширения

Согласно этой Лемме, например, для семейства всех η-перечислимых кобесконечных множеств можно построить такое бесконечное расширение η^* для η, что все η-перечислимые расширения некоторого η^*-класса β будут η^*-коконечны, т.е. ω/η^*-пространство будет компактным.
При этом, все η-замкнутые перечислимые кандидаты на окрестности β с бесконечными дополнениями нами ликвидированы, а новым η^*-замкнутым множествам взяться неоткуда, т.к. всякое η^*-замкнутое множество является одновременно и η-замкнутым. Таким образом, фактор-пространство ω/η^* компактно относительно топологии, порожденной эффективными множествами.
Для вычислимо порожденных топологий ситуация аналогичная.
Теорема доказана.

Напомним следующую важную теорему

Теорема о негативности хаусдорфовых трансляционно предполных алгебр

Всякая T_2–отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.

Доказательство По условию имеются два элемента a, b алгебры, в которую трансляционно отображается любая другая пара различных элементов. Если μ – T_2-отделимая нумерация, то

$$\mu x \neq \mu y \Leftrightarrow \exists t \in T(z)[t(x) \in \mu^{-1}(a) \wedge t(y) \in \mu^{-1}(b)].$$

Теорема доказана.

Следствие

Всякая позитивная нумерация трансляционно предполной алгебры является разрешимой.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Теорема 1

Существует T_1-отделимо нумерованная подпрямо неразложимая алгебра не являющаяся негативной.

Доказательство. Мы будем использовать стандартные обозначения для клиниевской нумерации перечислимых множеств: W_m юъбудет обозначать m-ое перечислимое множество, а W_m^s будет обозначать его конечную часть, перечисленную за s шагов. В выражениях типа $\langle a, b \rangle \in W_m^s$ мы отождествляем пары натуральных чисел с их кодами в некоторой фиксированной вычислимой нумерации.
Сначала мы опишем эффективную процедуру одновременного построения некоторой вычислимой перестановки p множества ω, а также разбиения множества ω на бесконечные классы M_i^*, $i \in \mathbb{Z}$ (которые уже не обязаны быть вычислимыми).

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Легко построить пример отделимой нумерации алгебры предшествования, не являющейся негативной. Вопрос о существовании T_1-отделимой, но не негативной нумерации этой алгебры был открытым до 2021 года. Сложность построения контрпримера, связана с построением T_1-отделимой нехаусдорфовой нумерации, что само по себе сопряжено с определенными трудностями. Отметим, что далеко не всякая негативная нумерация алгебры предшествования является позитивной (а значит – и вычислимой).

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Мы будем визуализировать построение с помощью бесконечной таблицы. На каждом шаге построения в некоторых ячейках будут содержаться натуральные числа, а часть ячеек будет не заполнена. Тем не менее, в конце-концов в каждой ячейке будет содержаться некоторое число, причем это число не будет изменяться после некоторого шага. Столбцы этой таблицы будут соответствовать классам нумерационной эквивалентности η, согласованным с отображением p, откуда мы получим некоторую алгебру, которая уже легко будет трансформирована в требуемую по условию. Нумерация нашей алгебры будет определяться естественным образом: $\nu(n) = n/\eta$. Зафиксируем разбиение множества ω на два бесконечных вычислимых множества α и β. Множество α, в свою очередь, разобьем на бесконечные вычислимые множества A_m, B_m, $m < \omega$, причем так, чтобы бинарные отношения $x \in A_m$ и $x \in B_m$ были вычислимы.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Упорядочим эти множества в порядке возрастания:
$A_m = \{a_{0,m} < a_{1,m} < a_{2,m} < \cdots\}$, $B_m = \{b_{0,m} < b_{1,m} < b_{2,m} < \cdots\}$.
Очевидно, что отображения $\langle i, m\rangle \mapsto a_{i,m}$ и $\langle i, m\rangle \mapsto b_{i,m}$, а также множество $\{a_{0,i}, b_{0,i} \mid i < \omega\}$ вычислимы. В дальнейшем мы будем называть множество β *кучей*. Мы будем последовательно забирать из него новые элементы, в соответствии с естественным порядком, и использовать их в нашем построении. Подчеркнем, что элементы, которые мы забираем из кучи, после этого в куче уже не содержатся.
Построение начинается с того, что мы располагаем все элементы множества α в виде бесконечной частично заполненной (начальной) таблицы, столбцы которой помечены при помощи M_i, $i \in \mathbb{Z}$, задав стрелками действие функции p (пока что не всюду определенной к данному моменту времени) так, как это изображено на рисунке:

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\dots & M_{-1}: & M_0: & & M_1: & & M_2: & & \dots
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & * & a_{0,0} & \longleftarrow & a_{1,0} & \longleftarrow & a_{2,0} & \longleftarrow & \cdots \\
\cdots & * & b_{0,0} & \longleftarrow & b_{1,0} & \longleftarrow & b_{2,0} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}\right\}\text{блок0}
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & * & a_{0,1} & \longleftarrow & a_{1,1} & \longleftarrow & a_{2,1} & \longleftarrow & \cdots \\
\cdots & * & b_{0,1} & \longleftarrow & b_{1,1} & \longleftarrow & b_{2,1} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}\right\}\text{блок1}
$$

$$
\dots
$$

Знак $*$ в ячейке означает, что ячейка не заполнена. На рисунке также отмечены пары строк, называемых *блоками* (блок 0, блок 1 и т.д.). В ходе построерия некоторые строки могут целиком сдвигаться на конечное число позиций вправо, но, при этом, каждая строка может сдвинуться не более одного раза.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Как уже было отмечено, классами нумерационной эквивалентности η будут в точности множества чисел, соответственно находящихся в столбцах предельной таблицы, помеченные с помощью M_i, $i \in \mathbb{Z}$. Чтобы обеспечить не–негативность эквивалентности η, мы будем стремиться одновременно удовлетворить все требования R_m, где

$$R_m \ : \ W_m \neq \omega^2 \setminus \eta.$$

Опишем стратегию выполнения этих требований. Для каждого m мы будем удовлетворять требование R_m, изменяя таблицу только внутри m–го блока, при этом, выделенные жирным шрифтом элементы $a_{0,m}$ и $b_{1,m}$ будут играть особую роль в построении. Очевидно, что в самом начале построения эти элементы находятся в разных столбцах M_0 и M_1, и, если в ходе построения, мы не изменим позиции этих элементов внутри m–го блока, то в пределе они окажутся не η–эквивалентными.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Если на шаге s, $m < s$ обнаружится, что $\langle a_{0,m}, b_{1,m} \rangle \in W_m^s$, то мы добавим слева к строкам, содержащим эти элементы, необходимое количество новых элементов, забрав их из кучи в порядке возрастания, и сдвинем эти строки на несколько позиций вправо так, чтобы элементы $a_{0,m}$ и $b_{1,m}$ оказались один под другим, т.е. стали η-эквивалентными. После этого строки в m–ом блоке сдвигаться уже никогда не будут и, тем самым, требование R_m будет удовлетворено. Чтобы запомнить, что мы уже произвели действия для удовлетворения требования R_m, с этого момента мы будем считать число m *отмеченным*. Если же $\langle a_{0,m}, b_{1,m} \rangle \notin W_m$, то W_m не совпадает с дополнением отношения η, то мы не будем ничего менять в m–ом, в результате будет выполнено $\langle a_{0,m}, b_{1,m} \rangle \notin \eta$ и, следовательно, требование R_m будет удовлетворено и в этом случае.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Перейдем к формальному описанию построения.

Описание построения.

Шаг 0. Создаем начальную таблицу.

Шаг $s > 0$ состоит из двух подшагов:

Подшаг 1 (добавляем новые элементы).
Последовательно для всех $m < s$ в порядке возрастания забираем из кучи (множества β) очередные различные между собой ущу не задействованные в построении числа a_1 и b_1 и дополняем нашу таблицу фрагментами $a_1 \longleftarrow a$ и $b_1 \longleftarrow b$, где a и b — самые левые определенные к данному моменту времени элементы соответственно в первой и второй строках блока m.

Подшаг 2 (удовлетворяем требование).
Если найдется наименьшее $m < s$ такое, что $\langle a_{0,m}, b_{1,m} \rangle \in W_m^s$, и m не является отмеченным, то мы будем говорить, что на шаге s *произошло m–событие.*

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Далее мы проделываем следующее:

1. Последовательно забираем из кучи еще не задействованные к данному моменту числа $c_0 < c_1 < d$ и дополняем таблицу фрагментами $c_0 \longleftarrow c_1 \longleftarrow e$ и $d \longleftarrow f$, где e и f — соответственно самые левые определенные к данному моменту элементы первой и второй строки блока m.
2. сдвигаем в таблице все имеющиеся к этому моменту элементы первой и второй строки m–го блока вправо так, чтобы самые левые определенные к данному моменту элементы этих строк (а именно c_0 и d) оказались в столбце M_0. Число m переводим в разряд отмеченных.

Описание построения закончено.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Заметим, что на каждом ненулевом шаге в конструкцию добавляется ненулевое конечное число элементов из кучи. Поэтому в конце каждого шага в куче будет оставаться бесконечное число элементов, но всякий элемент кучи рано или поздно будет использован в построении. По индукции доказывается следующая

Лемма 1

1. *все элементы столбца M_0 определены;*
2. *самые левые определенные к данному моменту времени элементы одного и того же блока находятся в одном и том же столбце.*

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Непосредственно из построения вытекает

Лемма 2

1. *элеметы каждого блока в процессе построения сдвигаются не более одного раза;*
2. *для каждой ячейки существует шаг, после которого в ней содержится число, которое впоследствии уже никогда не изменяется.*

Таким образом, содержимое каждого столбца M_i, $i < \omega$ стремится к некоторому пределу, который обозначим как M_i^*. Будем также использовать обозначение M_i^* для множества элементов этого столбца.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Очевидно, что справедлива следующая

Лемма 3

Отображение p вычислимо и представляет собой перестановку на ω, состоящую из бесконечного числа бесконечных циклов. При этом $p(M^*_{i+1}) = M^*_i$, для всех $i < \omega$.

Определим η как отношение эквивалентности, классами которой являются множества M^*_i, $i \in \mathbb{Z}$.
Имеет место

Лемма 4

Множество M^*_0 коперечислимо, но не перечислимо.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Доказательство. Множество M_0^* образуется из вычислимого множества $\{a_{0,i}, b_{0,i} \mid i < \omega\}$ следующим образом: время от времени в некотором блоке (скажем, m–ом) происходит замена элементов $a_{0,m}, b_{0,m}$ на элементы c_0, d из кучи, т.е. множество M_0^* получается из M_0 выбрасыванием таких $a_{0,m}, b_{0,m}$ и добавлением очередных c_1 и d из кучи. С учетом того, что куча и множество α не имеют общих элементов, M_0^* можно представить как

$$M_0^* = (M_0 \cup C) \setminus D, \tag{1}$$

где C — множество, состоящее из всех добавляемых в этот столбец элементов из кучи, а D — множество всех удаляемых оттуда элементов, причем $C \cap D = \varnothing$. Теперь остается заметить, что множество D перечислимо, а C вычислимо, поскольку прослеживая построение, мы можем эффективно перечислить его в порядке возрастания. Теперь коперечислимость M_0^* непосредственно следует из представления (1).

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Множество M_0^* не перечислимо, в противном случае η было бы вычислимым. Действительно, в таком случае можно предложить следующий алгоритм для вычисления истинности утверждения $x\eta y$: одновременно перечисляем множество M_0^* и всевозможные значения $p^n(x), p^m(y), m, n \in \mathbb{Z}$ до тех пор, пока не встретятся m и y такие, что $p^n(x), p^m(y) \in M_0^*$. Далее остается воспользоваться очевидной эквивалентностью $x\eta y \Leftrightarrow m = n$. *Лемма доказана.*
Из этой леммы следует, что все множества M_i^*, $i \in \mathbb{Z}$ коперечислимы, но не перечислимы, поскольку p является вычислимой перестановкой на ω и $M_i^* = p^i(M_0^*)$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Лемма 5

Отношение η не является негативным

Доказательство. Предположим противное, т.е. дополнение отношения η совпадает с перечислимым множеством W_m. Тогда на некотором шаге s для некоторого m впервые обнаружится, что $\langle a_{0,m}, b_{1,m}\rangle \in W^s_m$, и в ходе построения в m–ом блоке произойдет сдвиг строк. Проследим в деталях, что происходит в этом случае в m–ом блоке. В самом начале мы имеем следующую картину:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \cdots & & M_0: & & \cdots & & \\
* & e & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathrm{a}_{0,\mathrm{m}} & \longleftarrow & a_{1,m} & \longleftarrow & \cdots \\
* & f & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & b_{0,m} & \longleftarrow & \mathrm{b}_{1,\mathrm{m}} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}
$$

Напомним, что по доказанному ранее элементы e и f расположены в одном и том же столбце.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

После добавления фрагментов $c_0 \longleftarrow c_1 \longleftarrow e$ и $d \longleftarrow f$ получим уже вот такую картину:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \cdots & & M_0 & & \cdots & & \\
c_0 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & e & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & a_{0,m} & \longleftarrow & a_{1,m} & \longleftarrow & \cdots \\
* & & d & \longleftarrow & f & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & b_{0,m} & \longleftarrow & b_{1,m} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}
$$

После сдвига вправо на необходимое количество позиций получим следующую картину:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
M_0 & & \cdots & & & & & & & & & & \\
c_0 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & e & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & a_{0,m} & \longleftarrow & a_{1,m} & \longleftarrow & \cdots \\
d & \longleftarrow & f & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & b_{0,m} & \longleftarrow & b_{1,m} & \longleftarrow & \cdots & &
\end{array}
$$

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Из последней картины видно, что $a_{0,m}$ и $b_{1,m}$ теперь расположены в одном и том же столбце. Поскольку после этих действий число m станет выделенным, то в m–ом блоке новых сдвигов уже никогда не будет. Это означает, что $\langle a_{0,m}, b_{1,m}\rangle \in \eta$. Таким образом, дополнение η не совпадает с W_m. *Лемма доказана.*

Для дальнейшего заметим, что для любого $m < \omega$ справедлива эквивалентность

$$\langle a_{0,m}, b_{1,m}\rangle \in \eta \Leftrightarrow \langle a_{0,m}, b_{1,m}\rangle \in W_m, \tag{2}$$

т.е. дополнение η и W_m всегда отличаются на элементе $\langle a_{0,m} b_{1,m}\rangle$.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Определим теперь η^* как эквивалентность, получающуюся из η склеиванием всех классов M_i^* для $i < 0$. Эта эквивалентность является конгруэнцией на алгебре $\langle \omega; p \rangle$, причем фактор по этой конгруэнции изоморфен ранее описанной алгебре предшествования P. Докажем, что нумерованная алгебра $\langle \langle \omega; p \rangle / \eta^*, \nu \rangle$, где $\nu(n) = n/\eta^*$, удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, она не является негативной: в силу (2), вычислимо перечислимое множество W_m всегда отличается от η на элементе $\langle a_{0,m}, b_{1,m} \rangle$. Подпрямая неразложимость алгебры P уже была отмечена ранее. Осталось понять, что η^* T_1-отделима. Пусть A и B – произвольные классы этой эквивалентности. Если они имеют вид M_i^* и M_j^*, $i > j > 0$, то в качестве отделяющих множеств годятся дополнения этих множеств, которые перечислимы по лемме 4.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Если одно из этих множеств есть M_k^*, $k > 0$, а другое равно $M^* = \bigcup_{i<0} M_i^*$, то, как нетрудно видеть из построения, η^*-замкнутое множество $\bigcup_{i\geqslant 0} M_i^*$ вычислимо перечислимо (оно состоит из всех элементов множества α и тех элементов из кучи, которые попали в него в результате сдвигов), содержит M_k^* и не пересекается с M^*. С другой стороны, дополнение M_k^* вычислимо перечислимо, не пересекается с M_k^* и содержит M^*. *Теорема доказана.*

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Отметим также следующие свойства эквивалентностей η и η^*.

Предложение

Не существует двух непустых непересекающихся вычислимо перечислимых η–замкнутых множеств. Таким же свойством обладает и эквивалентность η^*.

Доказательство. Сначала заметим, что множество M_0^* не перечислимо. Поскольку для любого $i \in \mathbb{Z}$ выполнено $M_i^* = p^{-i} M_0^*$, перечислимость этого множества означала бы вычислимость отношения η, которое даже не негативно.

Утверждение для η^* очевидно следует из утверждения для эквивалентности η. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для эквивалентности η.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Расстоянием между непустыми непересекающимися η–замкнутыми множествами α и β назовем наименьшее k такое, что $p^k(\alpha) \cap \beta \neq \varnothing$ или $p^{-k}(\alpha) \cap \beta \neq \varnothing$. Обозначим его через $d(\alpha, \beta)$. Нам достаточно установить индукцией по k, что не существует таких α и β, что $d(\alpha, \beta) = k$.

Докажем базу индукции. Предположим, что расстояние между α и β равно 1. Тогда найдется $j \in \mathbb{Z}$ такое, что множества M_j^* и M_{j+1}^* являются подмножествами различных множеств α и β. Без ограничения общности можно считать, что $M_j^* \subseteq \alpha$ и $M_{j+1}^* \subseteq \beta$. Положим $\alpha_1 = p^j(\alpha)$, $\beta_1 = p^j(\beta)$. Тогда множества α_1 и β_1 не пересекаются, вычислимо перечислимы и η-замкнуты, причем $M_0^* \subseteq \alpha_1$ и $M_1^* \subseteq \beta_1$.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Предположим, что мы доказали эквивалентность

$$m\text{–}\textit{событие не наступает} \Leftrightarrow a_{0,m} \in \alpha_1 \text{и} b_{1,m} \in \beta_1. \tag{3}$$

Тогда, учитывая, что множество таких m, для которых наступает m–событие вычислимо перечислимо, мы получаем, что это множество также и вычислимо, откуда уже легко следует вычислимость множества M_0^*, что, как известно, не так.
Докажем (3). Импликация слева направо очевидна.Докажем обратную импликацию. Предположим, $a_{0,m} \in \alpha_1$ и $b_{1,m} \in \beta_1$, но тем не менее m–событие наступило. Тогда, поскольку в нашем построении при этом происходит сдвиг строк, оба элемента $a_{0,m}$ и $b_{1,m}$ окажутся в одном из множеств M_i, $i > 0$. При этом, поскольку α_1 и β_1 η-замкнуты и не пересекаются, одновременное выполнение условий $a_{0,m} \in \alpha_1$ и $b_{1,m} \in \beta_1$ невозможно. Противоречие.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

Предположим, что $k \geqslant 1$, расстояние между α и β равно $k+1$, и наше утверждение уже доказано для k. Тогда $\alpha \cap p(\beta) = \varnothing$, $p(\alpha) \cap \beta = \varnothing$, $p(\alpha)$ и $p(\beta)$ η-замкнуты, и хотя бы одно из расстояний $d(\alpha, p(\beta))$, $d(p(\alpha), \beta)$ равно k, чего по предположению индукции быть не может. *Предложение доказано.*

Из доказанного предложения следует, что ни η, ни η^* не обладают свойством T_2-отделимости.
Заметим, что мы можем также рассмотреть эквивалентность η^{**}, которая получается включением в один класс всех η-классов, находящихся правее η-класса M_0^*. Обозначим этот класс через M^{**}. Пусть q – обратная к p перестановка. Тогда q согласована с η^{**} и поэтому корректно определена нумерованная фактор-алгебра $\langle \omega/\eta^{**}; q \rangle$, которая также изоморфна P.
Эквивалентность η^{**} не будет негативной, поскольку, в силу определения, свойство (2) справедливо и для η^{**}.

T_1-отделимые нехаусдорфовы эффективно отделимые алгебры

В этом случае q-неподвижный элемент M^{**} вычислимо перечислим, и нумерация, индуцированная η^{**} отделима, но не T_1-отделима. В самом деле, допустим, что она T_1-отделима. Возьмем произвольное $k \geqslant 0$ и предположим, что $M_{-k}, k \geq 0$ отделяется от M^{**} своей перечислимой базовой окрестностью. Но множество M^{**} вычислимо перечислимо и мы получаем два непустых вычислимо перечислимых η-замкнутых множества. Противоречие.

Следствие 1

Существует подпрямо неразложимая алгебра алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

Следствие 2

Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

Покажем возможность наличия тесных связей между отделимостью и негативностью на двух естественных примерах алгебр, всякие T_2-отделимые (T_1-отделимые) нумерации которых негативны. Согласно теореме об отделимости (или теореме о нумерациях с условием минимальности) для простейшей подпрямо неразложимой бесконечной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций – алгебры предшествования $(\omega; p)$, где ω – множество натуральных чисел, $p(x+1) = x$, $p(0) = 0$, всякая ее отделимая нумерация эффективно отделима.

Предложение об алгебре предшествования

Всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования является негативной.

Доказательство. Пусть ν – T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования $P = (\omega; p)$, η – нумерационная эквивалентность нумерации ν.

Аксиомы отделимости

На самом деле, доказательство можно провести при гораздо более слабых предположениях T_2-отделимости элементов 0 и 1 алгебры P (т.е. $p(0) = 0$, $p(1) = 0$). Пусть α, β – такие η-замкнутые непересекающиеся вычислимо перечислимые множества, что $0 \in \nu\alpha$ и $1 \in \nu\beta$. Тогда $x \neq y \ (mod\ \eta) \leftrightarrow \exists n \in \omega[(p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \beta) \vee (p^n(y) \in \alpha \wedge p^n(x) \in \beta)]$, где $p^0(z) = z$. *Предложение доказано.* Заметим, что в доказательстве этого предложения не используются ни T_2-отделимость нумерации ν (достаточно предположить T_2-отделимость неподвижной точки и ее непосредственного последователя), ни теорема об отделимости, ни теорема об отделимых нумерациях с условием минимальности, что дает повод для предположения возможности наблюдения аналогичных эффектов негативности в достаточно широких классах T_2-отделимых нумерованных алгебр.

Алгеброй Мальцева назовем алгебру, удовлетворяющую тождествам $\varphi(x,x,z)=z$, $\varphi(x,z,z)=x$, где φ – термальный многочлен в сигнатуре исходной алгебры (алгебра из конгруэнц-перестановочного многообразия).

Рассмотрим следующую алгебру $M=(\omega;F)$, где $F(x,y,z)=z$, при $x=y$ и $F(x,y,z)=x$, при $x\neq y$. Очевидно, что M – алгебра Мальцева.

Пример алгебры, всякое T_1-отделимое представление которой вычислимо

Всякая T_1-отделимая нумерация алгебры M является вычислимой.

Доказательство. Пусть ν – T_1-отделимая нумерация алгебры M, η – нумерационная эквивалентность нумерации ν. Так же, как и в случае с предыдущим примером, доказательство можно провести при более слабых предположениях. Допустим, что имеется пара таких различных элементов a,b, что для подходящих η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств α,β имеем $a\in\nu\alpha\wedge b\notin\nu\alpha$ и $b\in\nu\beta\wedge a\notin\nu\beta$.

Аксиомы отделимости

Докажем, что элемент a вполне вычислим. В самом деле, пусть $\nu m = a$ и $\nu n = b$, тогда $x = m \ (mod \ \eta) \leftrightarrow f(m, x, n) \in \beta$, где f обозначает рекурсивную функцию, представляющую операцию F в нумерации ν.
Заметим, что область значений одноместной вычислимой функции $\lambda x.f(m, x, n)$ с параметрами m, n есть подмножество $m/\eta \cup n/\eta$ и потому не пересекается с множеством $\alpha \cap \beta$. Если $x \neq m \ (mod \ \eta)$, то $f(m, x, n) \in \alpha$, следовательно, приведенная процедура определения принадлежности классу m/η успешно и корректно завершается для каждого $x \in \omega$, т.е. $\nu^{-1}(a)$ вычислимо. Положим $\gamma = \nu^{-1}(a)$.
Покажем, что алгебра M простая. В самом деле, пусть $a \neq b$, θ – ненулевая конгруэнция алгебры M, "склеивающая" пару элементов a, b, а z – произвольный элемент этой алгебры. Тогда $a = f(a, b, z) = f(a, a, z) = z \ (mod \ \theta)$, откуда следует, что θ "склеивает" любые два элемента. Поскольку M простая, то, согласно теореме о негативной аппроксимируемости, нумерация ν негативна.

Легко заметить, что
$x = y \ (mod\ \eta) \leftrightarrow \exists z[x \neq z \ (mod\ \eta) \wedge f(x, y, z) \neq x \ (mod\ \eta)]$.
В силу негативности η правая часть вышеуказанной равносильности вычислимо перечислима, т.е. η позитивна, а значит и вычислима.
Предложение доказано.
Таким образом, в некоторых важных частных случаях, для известных типов алгебр, существование T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций может являться достаточным условием их негативности.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!