УДК 519.716

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОСТИ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПРИНИМАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЯ 0 И 1

П.Б. Тарасов

Аннотация

Рассмотрено соотношение между глубиной и сложностью реализации функций многозначной логики формулами над конечными базисами. Система функций A называется квазиравномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции f из замкнутого класса, порожденного данной системой, выполнено неравенство $D_A(f) \le c \log_2^2 L_A(f) + d$, где $D_A(f)$ и $L_A(f)$ – соответственно глубина и сложность реализации функции f формулами над A. Представлены нетривиальные условия квазиравномерности конечных систем функций k-значной логики, принимающих значения 0 и 1 и монотонных относительно частичного порядка на множестве $\{0, \dots, k-1\}$, в котором $1 > 0$, а остальные элементы несравнимы.

Ключевые слова: многозначная логика, глубина, сложность, равномерность, распараллеливание.

1. История вопроса и основные определения

В работе рассматривается задача о реализации функций k-значной логики из замкнутых классов формулами в конечных базисах, состоящих из функций, принадлежащих этим же классам. Все необходимые определения можно найти в работах [1–3].

Обозначим через P_k множество всех функций k-значной логики, а через $P_{k,s}$ – множество всех функции k-значной логики, принимающих значения из множества $E_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$, $k \ge s \ge 2$. Пусть A – конечная система функций из P_k. Через $[A]$ обозначим замкнутый класс, порожденный системой A. Пусть Φ – формула над A. Обозначим через $L(\Phi)$ (сложность формулы Φ) число символов переменных, входящих в Φ, а через $D(\Phi)$ – глубину формулы Φ. Пусть $f \in [A]$. Положим $D_A(f) = \min D(\Phi)$, $L_A(f) = \min L(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над A, реализующим f. Конечную систему функций A будем называть равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство[1]

$$D_A(f) \le c \log L_A(f) + d.$$

В работах [4, 5] доказана равномерность всех конечных полных систем булевых функций (см. также [6]). В [7] установлена равномерность всех конечных систем, порождающих класс M всех монотонных булевых функций. В работах [3, 9] доказана равномерность всех конечных систем булевых функций (см. также [8]).

Ряд публикаций посвящен задаче о соотношении глубины и сложности формул над конечными системами функций многозначной логики [10, 11].

[1] Здесь и далее логарифмы берутся по основанию 2.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1,\dots,x_n)$ – функция из P_s, причем для любого $\widetilde{\alpha}\in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha})=g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f на множество P_s и обозначать через $\mathrm{pr_s}f$. Для произвольной системы $A\subseteq P_{k,s}$ положим $\mathrm{pr_s}A=\{\mathrm{pr_s}f|f\in A\}$. $\mathrm{pr_s}A$ называется проекцией системы A на P_s. В работе [12] доказана равномерность всех конечных систем функций из $P_{k,2}$, проекции которых на P_2 порождают класс M.

Определим некоторые классы булевых функций. Следуя работе [14], через K, D, M и L будем обозначать классы конъюнкций, дизъюнкций, монотонных и линейных булевых функций соответственно. Положим $M_{01}=M\setminus\{0,1\}$. Будем говорить, что булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ обладает свойством $\langle 0^\infty\rangle$ (свойством $\langle 1^\infty\rangle$), если существует такое i, $1\le i\le n$, что для любого набора $\widetilde{\alpha}$, для которого $f(\widetilde{\alpha})=0$ ($f(\widetilde{\alpha})=1$), выполнено равенство $\alpha_i=0$ ($\alpha_i=1$). Класс всех функций, обладающих свойством $\langle 0^\infty\rangle$, будем обозначать через O^∞, а класс всех функций, обладающих свойством $\langle 1^\infty\rangle$, – через I^∞.

Функция $f(x_1,\dots,x_n)\in P_s$ называется мажоритарной, если для любых α, $\beta\in E_s$ выполнены равенства

$$f(\beta,\alpha,\dots,\alpha)=f(\alpha,\beta,\alpha,\dots,\alpha)=\dots=f(\alpha,\dots,\alpha,\beta)=\alpha.$$

В [13] доказано, что любая конечная система A функций из $P_{k,s}$ такая, что множество $[\mathrm{pr_s}A]$ содержит мажоритарную функцию, равномерна. Из этого утверждения в качестве следствия получено, что все конечные системы функций из $P_{k,2}$, проекции которых на P_2 не содержатся целиком ни в одном из множеств K, D, L, O^∞, I^∞, равномерны.

Введем на множестве E_k частичный порядок следующим образом: $1>0$, а остальные элементы несравнимы. Далее под монотонными функциями будем понимать функции, монотонные относительно данного частичного порядка. Заметим, что если $f\in P_{k,2}$ – монотонная функция, то $\mathrm{pr}_2 f\in M$, где M – класс монотонных булевых функций.

Дадим рекурсивное определение подформулы произвольной формулы Φ. Если Φ – тривиальная формула, то есть формула, состоящая из одного символа переменной, то Φ является своей подформулой. Подформулами формулы Φ вида $f(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$ будем называть саму формулу Φ и подформулы формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$. В таком случае формулы $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ будем называть главными подформулами формулы Φ. Подформулы, являющиеся тривиальными формулами, будем называть тривиальными подформулами.

Внешней формулой будем называть формулу, в которой выделены некоторые переменные, называемые внешними переменными, при этом каждая внешняя переменная встречается в формуле ровно один раз. Внешнюю формулу Φ с множеством $\{y_1,\dots,y_t\}$ внешних переменных будем обозначать через $\Phi[y_1,\dots,y_t]$. Сложность внешней формулы определим как число всех (в том числе и внешних) символов переменных, входящих в данную формулу. Для удобства любую обычную формулу будем рассматривать как частный случай внешней формулы с пустым множеством внешних переменных.

Пусть $\Phi[y_1,\dots,y_t]$, $\Psi_1[y_1^1,\dots,y_{n_1}^1],\dots,\Psi_m[y_1^m,\dots,y_{n_m}^m]$ – внешние формулы такие, что все переменные $y_1^1,\dots,y_{n_1}^1,\dots,y_1^m,\dots,y_{n_m}^m$ являются различными. Тогда через

$$\Phi[\Psi_1[y_1^1,\dots,y_{n_1}^1],\dots,\Psi_m[y_1^m,\dots,y_{n_m}^m]]$$

обозначим внешнюю формулу с внешними переменными

$$y_1^1,\dots,y_{n_1}^1,\dots,y_1^m,\dots,y_{n_m}^m,$$

полученную из формулы Φ подстановкой вместо каждой внешней переменной $y_1, \ldots, y_t$ формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ соответственно.

В частности, будем говорить, что формула Φ представляется в виде

$$\Psi_1[\Psi_2[\ldots \Psi_{n-1}[\Psi_n] \ldots]],$$

если $\Psi_1[y], \ldots, \Psi_{n-1}[y], \Psi_n$ являются некоторыми внешними формулами над A такими, что Φ графически равна формуле $\Psi_1[\Psi_2[\ldots, \Psi_{n-1}[\Psi_n]] \ldots]$.

Внешнюю формулу $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ будем называть внешней подформулой формулы Φ, если формула Φ может быть представлена в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ – подформулы Φ.

Формула Φ называется α-формулой, если каждая ее подформула имеет не более одной нетривиальной главной подформулы.

Конечную систему A функций из $P_{k,2}$ будем называть квазиравномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$D_A(f) \leq c \log^2 L_A(f) + d.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in E_k$. Положим[2]

$$M_f^{x_i} = \{\mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) | \ \widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}\},$$

$$V_f^{x_i} = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1} | \ \mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0, 1\},$$

$$f|_{x_i}^{\beta} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Будем говорить, что монотонная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\#$ уровня r по переменной x_i относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}$, если существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in B$ такая, что:

1) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}$;

2) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^{\infty}$;

3) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Множество функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что f обладает свойством $\#$ уровня r по переменной x_i относительно замкнутого класса B и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}$, будем обозначать через $\#_{x_i}^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r)$. Положим[3]

$$\#(B, n, r)_{x_i} = \bigcap_{\widetilde{\alpha} \in E_k^{|n-1|}} \#_{x_i}^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r);$$

$$\#(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} \#_{x_i}(B, n, r).$$

Будем говорить, что система A обладает свойством $\#$, если для некоторого r выполнено соотношение $A \subseteq \#([A], r)$.

2. Необходимые условия квазиравномерности

Лемма 1. *Пусть A – конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, Φ – формула над A, $\Psi[y_1, \ldots, y_t]$ – внешняя подформула формулы Φ. Пусть формулы Φ и $\Psi[y_1, \ldots, y_t]$ реализуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ соответственно. Тогда для любых $m < n$ и $\widetilde{\alpha} \in E_2^m$ таких, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in M_{01}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) \in M_{01}$.*

[2] Здесь под набором $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}$ понимается набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Далее в статье используются аналогичные сокращения.

[3] Без ограничения общности полагаем, что все функции зависят от переменных $x_1, x_2, \ldots$

Доказательство. Предположим противное, пусть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) \notin$ $\notin M_{01}$, то есть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) = c$, где $c = 0, 1$. Пусть Φ имеет вид $\Psi[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, где формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции $h_1(\widetilde{x}), \ldots, h_t(\widetilde{x})$. Тогда

$$f(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1) = \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1, h_1(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1), \ldots, h_t(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1)) = c =$$
$$= \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0, h_1(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0), \ldots, h_t(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0)) = f(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0).$$

Таким образом, получили противоречие. □

Конечную систему функций A из $P_{k,2}$ будем называть псевдоравномерной, если для любого $r \geq 1$ существует $n \geq 1$ такое, что для любой α-формулы Ψ над A такой, что $D(\Psi) \geq n$, существует формула Φ над A, эквивалентная Ψ, для которой выполнено неравенство $D(\Phi) \leq D(\Psi)/r$. Нетрудно убедиться, что если система функций является квазиравномерной, то она является псевдоравномерной.

Теорема 1. *Пусть A – конечная псевдоравномерная система монотонных функций из $P_{k,2}$. Тогда существует такое $r \geq 2$, что $A \subseteq \#([A], r)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных. Необходимо доказать, что для произвольной функции $f \in A$, произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существуют число $r' \geq 3$ и функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'}) \in [A]$ такая, что выполнено:

1) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

2) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольная функция из A. Без ограничения общности будем считать, что $i = n$. Докажем существование функции w, удовлетворяющей условиям 1 и 3, аналогично можно доказать существование функции, удовлетворяющей условиям 2 и 3.

Для любого $q \geq 1$ рассмотрим формулу

$$f(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1, f(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2, \ldots, f(x_1^q, \ldots, x_{n-1}^q, y) \ldots)),$$

обозначим ее через Ψ_q. Согласно определению псевдоравномерности существует такое m и формула Φ над A, эквивалентная Ψ_m, что $D(\Phi) < D(\Psi_m)/n = m/n$. Пусть Φ реализует функцию

$$g(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m, y) = f(\widetilde{x}^1, f(\widetilde{x}^2(\ldots f(\widetilde{x}^{m-1}, f(\widetilde{x}^m, y)) \ldots))),$$

где $\widetilde{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)$, и пусть $\widetilde{\alpha}$ – произвольный набор из множества $V_f^{x_n}$. Обозначим набор $(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{m \text{ раз}})$ через $\widehat{\alpha}$, а через $\widehat{x}$ – набор переменных

$$(\overbrace{x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1}^{\widetilde{x}^1}, \overbrace{x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2}^{\widetilde{x}^2}, \ldots, \overbrace{x_1^m, \ldots x_{n-1}^m}^{\widetilde{x}^m}).$$

Допустим без ограничения общности, что нетривиальная подформула $\widehat{\Phi}$ формулы Φ имеет вид $h(\widetilde{x}', y, y, \ldots, y, \widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u)$, где $\widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u$ – нетривиальные подформулы формулы Φ и $\widetilde{x}' = (x_1', \ldots, x_p')$ – набор (возможно, одинаковых) переменных из $\widehat{x}$. Через $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_p')$ обозначим набор значений переменных из $\widetilde{x}'$, взятых для этих переменных из набора значений $\widehat{\alpha}$, через H_0 – множество всех подформул $\widehat{\Phi}$ таких, что $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}', y, \ldots, y, z_1, \ldots, z_u) = 0$, через H_0' – подмножество формул из H_0, не являющихся подформулами никаких подформул из H_0 кроме их самих.

Заметим, что формулу Φ можно представить в виде $\Phi'[\Phi_1^0,\dots,\Phi_q^0]$, где $\Phi'[z_1,\dots,z_q]$ – внешняя подформула Φ, $\{\Phi_1^0,\dots,\Phi_q^0\} = H_0'$. Через Ξ' обозначим формулу $\Phi'[z_1,\dots,z_q]$.

Заменим в формуле Ξ' все вхождения переменной y на различные переменные $y_1,\dots,y_t$, $t \geq 0$. Полученную формулу обозначим через Ξ. Пусть Ξ реализует функцию $h'(\widehat{x},y_1,\dots,y_t,z_1,\dots,z_q)$. Если $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \leq z_i$, то

$$1 = g(\widehat{\alpha},1) = h'(\widehat{\alpha},\underbrace{1,\dots,1}_{t\text{ раз}},\underbrace{0,\dots,0}_{q\text{ раз}}) = 0,$$

тем самым получаем противоречие. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \not\leq z_i$ для любого $i \in \{1,\dots,q\}$.

Докажем, что для всех j, $j \in \{1,\dots,t\}$, выполнено соотношение $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \not\leq \not\leq y_j$. Допустим противное, пусть существует такое j, $j \in \{1,\dots,t\}$, что $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \leq y_j$. Без ограничения общности будем считать, что $j = 1$.

Нетрудно видеть, что формулу Ξ можно представить в виде $\Xi''[y_1,\Xi_1,\dots,\Xi_u]$ так, что формула $\Xi''[y_1,v_1,\dots,v_u]$ является α-формулой минимальной глубины, содержащей y_1, $u \geq 0$, а $\Xi_1,\dots,\Xi_u$ – некоторые формулы над A. Пусть формула Ξ'' реализует функцию $h''(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{v})$, а формулы $\Xi_1,\dots,\Xi_u$ – функции $h_1(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z}),\dots,h_u(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ соответственно. Заметим, что переменная y_1 входит в формулу Ξ только один раз, следовательно, функции h_i не зависят существенно от переменной y_1.

Докажем, что $pr_2 h_i(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \in M \setminus \{0\}$. Допустим противное, то есть $\mathrm{pr}_2 h_i(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) = 0$. Тогда у формулы Ξ_i существует подформула Ω такая, что Ω реализует[4] функцию, нулевую в проекции, а все подформулы формулы Ω реализуют функции, не нулевые в проекции. Пусть Ω имеет вид $w'(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z},\widehat{\Psi}_1,\dots,\widehat{\Psi}_l)$, где $w'(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z},u_1,\dots,u_l) \in A$. Тогда заметим, что $\mathrm{pr}_2 w'(\widehat{x},\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{u}) = 0$. Поэтому подформула формулы Φ, из которой была получена подформула Ω, принадлежит H_0, что противоречит построению формулы Ξ'. Следовательно,

$$h_i(\widehat{\alpha},1,\dots,1,1,\dots,1) = h_i(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1,1,\dots,1) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 = h'(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1,1,\dots,1) &= \\ = h''(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1,h_1(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1),\dots,h_u(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1)) &= \\ = h''(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h''(\widehat{\alpha},\widetilde{y},\widetilde{z}) \leq y_1$. Заметим, что

$$L(\Xi'') \leq nl(\Phi') < nl(\Phi) \leq m,$$

следовательно, существует такое i, $i \in \{1,\dots,m\}$, что переменные $x_1^i,\dots,x_{n-1}^i$ не входят в формулу Ξ''. Пусть $\widetilde{\beta}$ – набор из E_k^{n-1} такой, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta},y) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 = g(\underbrace{\widetilde{\alpha},\dots,\widetilde{\alpha}}_{i-1\text{ раз}},\widetilde{\beta},\underbrace{\widetilde{\alpha},\dots,\widetilde{\alpha}}_{m-i\text{ раз}},0) \leq h'(\underbrace{\widetilde{\alpha},\dots,\widetilde{\alpha}}_{i-1\text{ раз}},\widetilde{\beta},\underbrace{\widetilde{\alpha},\dots,\widetilde{\alpha}}_{m-i\text{ раз}},0,1,\dots,1,1,\dots,1) &= \\ = h''(\widehat{\alpha},0,1,\dots,1,1,\dots,1) = 0, \end{aligned}$$

то есть получаем противоречие.

[4] Функцию $h \in P_{k,2}$ будем называть нулевой в проекции, если $\mathrm{pr}_2 h = 0$

Так как формула Ξ получается из внешней подформулы формулы Φ заменой переменной y на переменные $y_1, \ldots, y_t$, то для всех $\widetilde{\gamma} \in V_f^{x_n}$ по лемме 1 выполнено соотношение

$$\mathrm{pr}_2 h'(\underbrace{\widetilde{\gamma}, \ldots, \widetilde{\gamma}}_{m \text{ раз}}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in M_{01}. \tag{1}$$

Положим

$$w(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = h'(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}}_{m \text{ раз}}, y_1, \ldots, y_{r'}),$$

где $r' = t + q$. Заметим, что поскольку в силу соотношения (1) выполнено $\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01}$ и, как показано выше,

$$\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq y_i, \quad \mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq z_j$$

для любых $i \in \{1, \ldots, t\}, j \in \{1, \ldots, q\}$, то $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \backslash I^\infty$, то есть функция w удовлетворяет условию 1. В силу соотношения (1) для w выполнено условие 3.

Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, любой переменной $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого набора $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ найдутся число $r' = r'(f, x_i, \widetilde{\alpha})$ и функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'})$, удовлетворяющая условиям 1 и 3. Обозначим эту функцию через w_1. Аналогично найдется число $r'' = r''(f, x_i, \widetilde{\alpha})$, для которого можно построить функцию $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r''})$, удовлетворяющую условиям 2 и 3. Обозначим эту функцию через w_2. Тогда нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'r''}) = w_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'}), \\ w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'+1}, \ldots, y_{2r'}), \ldots, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'r''-r'+1}, \ldots, y_{r'r''})) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям 1–3. Поэтому в качестве числа r можно взять $\max\{r'(f, x_i, \widetilde{\alpha}) r''(f, x_i, \widetilde{\alpha})\}$, где максимум берется по всем функциям f из A, переменным x_i функции f и всем наборам $\widetilde{\alpha}$ из $V_f^{x_i}$. Теорема доказана. □

3. Достаточные условия квазиравномерности

Лемма 2. *Пусть A – конечная система функций из P_k, Φ – нетривиальная формула над A. Тогда Φ можно представить в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, где $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ – α-формула, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ – некоторые подформулы Φ такие, что $L(\Phi_i) \leq L(\Phi)/2$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$.*

Доказательство. Построим рекурсивно следующую цепочку подформул формулы Φ: в качестве Ψ_0 возьмем саму формулу Φ и, если формула Ψ_i является нетривиальной, в качестве формулы Ψ_{i+1} возьмем произвольную главную подформулу формулы Ψ_i максимальной сложности. Пусть получилась последовательность формул $\Psi_0, \ldots, \Psi_u$.

Пусть без ограничения общности для всех i, $i \in \{1, \ldots, u-1\}$, формула Ψ_i имеет вид $f_i(\Psi_{i+1}, \Xi_i^1, \ldots, \Xi_i^{t_i}, x_i^1, \ldots, x_i^{p_i})$, где все формулы $\Xi_i^1, \ldots, \Xi_i^{t_i}$ являются нетривиальными, а формула Ψ_u имеет вид $f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u})$. Через Φ_0' обозначим формулу

$$\begin{aligned} f_1(f_2(\ldots f_{u-1}(f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u}), y_{u-1}^1, \ldots, y_{u-1}^{t_{u-1}}, x_{u-1}^1, \ldots, x_{u-1}^{p_{u-1}}) \ldots), \\ y_1^1, \ldots, y_1^{t_1}, x_1^1, \ldots, x_1^{p_1}). \end{aligned}$$

Тогда формула Φ имеет вид

$$\Phi_0'[\Xi_{u-1}^1, \ldots, \Xi_{u-1}^{t_{u-1}}, \Xi_{u-2}^1, \ldots, \Xi_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, \Xi_1^1, \ldots, \Xi_1^{t_1}].$$

Положим $t = \sum\limits_{i\in\{1,\dots,u-1\}} t_i$. Через Φ_0 обозначим формулу, полученную заменой переменных

$$y_{u-1}^1,\dots,y_{u-1}^{t_{u-1}},y_{u-2}^1,\dots,y_{u-2}^{t_{u-2}},\dots,y_1^1,\dots,y_1^{t_1}$$

на переменные $y_1,\dots,y_t$ соответственно. За $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ обозначим формулы

$$\Xi_{u-1}^1,\dots,\Xi_{u-1}^{t_{u-1}},\Xi_{u-2}^1,\dots,\Xi_{u-2}^{t_{u-2}},\dots,\Xi_1^1,\dots,\Xi_1^{t_1}$$

соответственно. Тогда формула Φ имеет вид $\Phi_0[\Phi_1,\dots,\Phi_t]$.

Заметим, что если у формулы Ψ_i есть главная подформула сложности более чем $L(\Phi)/2$, то это формула Ψ_{i+1}. Следовательно, все формулы $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ имеют сложность не более $L(\Phi)/2$. Утверждение доказано. □

Теорема 2. *Пусть A – конечная система функций из P_k такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квазиравномерна.*

Доказательство. Далее для удобства вместо $L_A(f)$ и $D_A(f)$ будем писать $L(f)$ и $D(f)$. Так как множество α-формул над A равномерно, то существуют такие константы c и d, что для любой α-формулы Φ над A существует формула Ψ над A, эквивалентная Φ, такая, что $D(\Psi)\le c\log L(\Phi)+d$. Положим

$$d_1=\max(\max_{\substack{f\in[A]\\ L(f)\le 4}} D(f),d),\quad c_1=2\max(c,d_1).$$

Докажем, что для любой $f\in[A]$ выполнено неравенство

$$D(f)\le c_1\log^2(L(f))+d. \tag{2}$$

Тем самым мы докажем, что система A квазиравномерна. Проведем доказательство индукцией по сложности реализации f формулами над A. Если $L(f)\le 4$, то неравенство (2) выполнено очевидным образом. Пусть неравенство (2) выполнено для всех функций $f\in[A]$ таких, что $L(f)\le N$, $N\ge 4$. Докажем неравенство (2) для функции $f\in[A]$ такой, что $L(f)=N+1$.

Пусть Φ – формула, реализующая f над A, такая, что $L(\Phi)=L(f)=N+1$. Из леммы 2 следует, что формула Φ представляется в виде $\Phi_0[\Phi_1,\dots,\Phi_t]$, где $t\ge 0$, $\Phi_0[y_1,\dots,y_t]$ – α-формула и $L(\Phi_i)\le L(\Phi)/2$ для всех $i\in\{1,\dots,t\}$. Пусть формулы $\Phi_0,\dots,\Phi_t$ реализуют функции

$$f_0(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_t),f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_t(x_1,\dots,x_n)$$

соответственно. Так как Φ_0 есть α-формула, реализующая функцию f_0, и множество α-формул над системой A равномерно, то $D(f_0)\le c\log L(f_0)+d$. По индуктивному предположению для всех i, $i\in\{1,\dots,t\}$, выполнено неравенство $D(f_i)\le c_1\log^2 L(\Phi_i)+d_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}D(f)\le D(f_0)+\max_{i\in\{1,\dots,t\}}D(f_i)\le c\log L(\Phi_0)+d+c_1\log^2\frac{L(\Phi)}{2}+d_1\le\\ \le c\log L(\Phi)+c_1(\log L(\Phi)-1)^2+2d_1\le\\ \le c_1\log^2 L(\Phi)+c\log L(\Phi)-2c_1\log L(\Phi)+2d_1+c_1\le\\ \le c_1\log^2 L(f)+2d_1+c_1-c_1\log L(\Phi)\le\\ \le c_1\log^2 L(f)+2d_1+c_1-2c_1\le c_1\log^2 L(f)+d_1.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следующее утверждение можно доказать с помощью техники из работы [13] и теоремы 2.

Теорема 3. *Все конечные системы монотонных функций из $P_{k,2}$, обладающие свойством $\#$, квазиравномерны.*

Следствие. *Конечная система A монотонных функций из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда A обладает свойством $\#$.*

Автор благодарен А.Б. Угольникову и Р.М. Колпакову за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Summary

P.B. Tarasov. Several Conditions for Uniformity of a Finite System of Many-Valued Logic.

We consider the relation between depth and complexity of many-valued logic functions over finite functional systems. The functional system A is called quasi-uniform if there exist constants c and d such that for an arbitrary function f from the closure of A the inequality $D_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d$ holds, where $D_A(f)$ and $L_A(f)$ are the depth and the complexity of realization of the function f by formulas over the finite system A. In this paper we provide some conditions for the quasi-uniformity of systems of functions of many-valued logic that take two values 0 and 1 and are monotone on the partially ordered set $\{0, \ldots, k-1\}$, where $1 > 0$ and all other elements are incomparable.

Keywords: many-valued logic, depth, complexity, uniformity, parallelizing.

Литература

1. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2001. – 384 с.
2. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 684 p.
3. *Угольников А.Б.* О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42, Вып. 4. – С. 603–612.
4. *Яблонский С.В., Козырев В.П.* Математические вопросы кибернетики // Информ. материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. – М., 1968. – Вып. 19а. – С. 3–15.
5. *Spira P.M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symp. on System Sciences. – North Hollywood: Western Period. Comp., 1971. – P. 525–527.
6. *Храпченко В.М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. – Вып. 32. – С. 76–94.
7. *Wegener I.* Relating monotone formula size and monotone depth of Boolean functions // Inf. Process. Lett. – 1983. – V. 16, No 1. – P. 41–42.

8. *Угольников А.Б.* О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики // VII Всесоюз. конф. «Проблемы теоретической кибернетики»: Тез. докл. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та. 1985. – Ч. 1. –С. 194–195.

9. *Ragaz M.* Parallelizable algebras // Arch. fur math. Log. und Grundlagenforsch. – 1987. – V. 26, No 1. – P. 77–99.

10. *Сафин Р.Ф.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Матем. вопросы кибернетики. – М.: Физматлит, 2004. – С. 223–278.

11. *Дудакова О.С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины 2 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2008. – № 1. – С. 31–37.

12. *Тарасов П.Б.* О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2013. – № 2. – С. 61–64.

13. *Тарасов П.Б.* О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2013. – № 5. – С. 41–46.

14. *Угольников А.Б.* Классы Поста. – М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ, 2008. – 64 с.

Поступила в редакцию
29.07.14

Тарасов Павел Борисович – аспирант кафедры дискретной математики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *tarsov.p.b@gmail.com*