УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 154, кн. 2 Физико-математические науки *2012*

УДК 512

ВЕРБАЛЬНЫЕ КАТЕГОРИИ И ТОЖДЕСТВА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

С.Н. Тронин

Аннотация

Охарактеризованы многообразия универсальных алгебр, рационально эквивалентные многообразиям алгебр над операдами над произвольными вербальными категориями.

Ключевые слова: вербальная категория, операда, многообразие алгебр, рациональная эквивалентность, свободная алгебра, свободная операда.

Введение

Основной целью настоящей работы является полное доказательство одного из двух результатов, анонсированных в [1]. Доказательство другого результата было опубликовано в [2]. Задержка с публикацией была вызвана рядом обстоятельств, в том числе тем, что некоторые пункты доказательства, казавшиеся сначала почти очевидными, потребовали более тщательной проработки, и в конце концов превратились в утверждения, представляющие самостоятельный интерес. Частным случаем основного результата, содержащегося в § 5, можно считать результаты работы [3] и [2, § 1].

Для понимания содержания работы необходимы некоторые сведения из теории операд над вербальными категориями. Их можно найти в работах автора [2–4] (см. также [5]). Основы традиционной теории операд (симметрических операд, или Σ-операд) содержатся в книгах и обзорах [6–12].

Кратко опишем содержание работы. В § 1 приводятся известные сведения о вербальных категориях и доказываются некоторые технические результаты, отсутствующие в упоминавшихся выше работах автора. В § 2 описываются свободные алгебры в многообразиях алгебр над обобщенными операдами – операдами над вербальными категориями. В § 3 показывается, как по произвольной вербальной категории W можно построить W-операду. Использованный способ является далеко идущим обобщением конструкции из работы [13]. В § 4 результат § 3 применяется для построения свободных W-операд. Наконец, в § 5 дается характеризация многообразий алгебр над W-операдами, рассматриваемых с точностью до рациональной эквивалентности, в терминах выделенных операций и тождеств.

Отметим, что все используемые в настоящей работе понятия и полученные результаты обладают многосортными (мультикатегорными) аналогами. Ввиду недостатка места соответствующие формулировки и доказательства не приводятся. Некоторые сведения о многосортных вербальных категориях и многосортных операдах над ними (мультикатегориях) можно найти в [4] и [5].

1. Вербальные категории

Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из работы [3]. Пусть $n \geq 0$ – натуральное число. Всюду в дальнейшем $[n]$ обозначает множество

$\{0,1,\ldots,n\}$. Обозначим через $FSet$ подкатегорию категории множеств с объектами $[n]$, $n \geq 0$, морфизмами которой являются такие отображения $f : [n] \to [m]$, что $f(0) = 0$, и $f^{-1}(0) = \{0\}$. Категория $FSet$ обладает конечными копроизведениями, которые описываются следующим образом. Естественный изоморфизм $[n] \sqcup [m] \to [n+m]$ отображает $i \in [n]$ в $i \in [n+m]$, $j \in [m], j > 0$ – в $n+j \in [n+$ $+m]$. Поэтому если даны $f : [n] \to [m]$, $g : [p] \to [q]$, то $f \sqcup g : [n+p] \to [m+q]$ действует следующим образом: $(f \sqcup g)(i) = f(i)$ при $0 \leq i \leq n$, $(f \sqcup g)(j) = m + g(j)$ при $1 \leq j \leq p$.

Разбиением натурального числа n на m частей в настоящей работе будет называться неубывающее отображение вида $\alpha : [n] \to [m]$, являющееся морфизмом $FSet$. Через P обозначим категорию с объектами $[n]$, и множествами морфизмов $P(n,m) = P([n],[m])$, состоящими из всевозможных разбиений n на m частей. Для $\alpha \in P(n,m)$ и для всех $1 \leq i \leq m$ положим $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. Тогда α можно отождествить с упорядоченной последовательностью $(n_1,\ldots,n_m)$ целых неотрицательных чисел длины m такой, что $n_1 + \ldots + n_m = n$. Этим объясняется выбор термина. Если $\beta \in P(n,m)$, $\alpha \in P(m,k)$, $\alpha = (m_1,\ldots,m_k)$, то β можно записать в виде $(n_{1,1},\ldots,n_{1,m_1},\ldots,n_{k,1},\ldots,n_{k,m_k})$. Теперь композицию $\alpha\beta$ можно описать как последовательность $(\sum\limits_{i=1}^{m_1} n_{1,i},\ldots,\sum\limits_{i=1}^{m_k} n_{k,i})$. Если $\alpha \in P(n,m)$, $\beta \in P(k,l)$,то $\alpha \sqcup \beta \in P(n+k, m+l)$ (хотя $[n+m]$ не есть копроизведение $[n]$ и $[m]$ в P).

В категории $FSet$ существуют также расслоенные произведения. Нам понадобится их явный вид в одном частном случае.

Условимся о следующих терминах и обозначениях. Пусть a и b – натуральные числа. При $a \leq b$ положим $[a,b] = \{a, a+1,\ldots,b\}$, при $a > b$ полагаем $[a,b] = \varnothing$. Множества вида $[a,b]$ будут называться *отрезками*.

Пусть $\alpha \in P(n,m)$, $f : [k] \to [m]$ – морфизм из $FSet$. Рассмотрим расслоенное произведение (декартов квадрат) вида:

$$\begin{tikzcd}
{[n] \times_{[m]} [k]} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & {[k]} \arrow[d, "f"] \\
{[n]} \arrow[r, "\alpha"] & {[m]}
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Лемма 1 [3]. *В категории $FSet$ расслоенное произведение* (1) *устроено следующим образом. Пусть $\alpha = (n_1,\ldots,n_m)$. Полагаем $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \cdots +$ $+ n_{f(k)}]$. При этом π_2 становится неубывающим отображением, которое можно записать как $(n_{f(1)},\ldots,n_{f(k)})$. Проекция π_1 описывается так: ее ограничение на каждый отрезок $[n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j)}]$ есть неубывающая биекция на отрезок $[n_1 + \cdots + n_{f(j)-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{f(j)}]$, и $\pi_1(0) = 0$.*

В случае, когда $n_{f(j)} = 0$, из сформулированного выше соглашения следует, что оба отрезка пусты. В общем случае речь идет о конечных линейно упорядоченных множествах, каждое из которых состоит из $n_{f(j)}$ элементов. При этом выражение $n_{f(1)} + \cdots + n_{f(j)}$ надо понимать как $\sum_{i=1}^{j} n_{f(i)}$, а $n_1 + \cdots + n_{f(j)}$ как $\sum_{i=1}^{f(j)} n_i$. Отметим, что при $j = 1$ имеются в виду отрезки $[1, n_{f(1)}]$ и $[n_1 + \cdots + n_{f(1)-1} +$ $+ 1, n_1 + \cdots + n_{f(1)}]$.

Проекцию $\pi_2 = (n_{f(1)},\ldots,n_{f(k)})$ будем обозначать через αf, а проекцию π_1 – через $f^*\alpha$. Заметим, что $f^*\alpha$ есть не что иное, как подъем α вдоль f (мы следуем здесь терминологии и обозначениям из [14]). Множество $[n_{f(1)} + \cdots + n_{f(k)}]$ можно рассматривать как результат применения функтора замены базы, то есть как $f^*[n]$.

Определение 1. Рассмотрим подкатегорию $W \subseteq FSet$ со всеми теми же объектами $[n]$, морфизмы которой должны удовлетворять следующим условиям:

1) Если $f, g \in \mathrm{Mor}(W)$, то $f \sqcup g \in \mathrm{Mor}(W)$;

2) Если $f : [k] \to [m]$ есть морфизм из W, то для любого $\alpha \in P(n,m)$ имеет место включение $f^*\alpha \in W(f^*[n],[n])$.

Категорию W с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной.*

Укажем несколько очевидных примеров вербальных подкатегорий.

1. Тривиальная категория WId, морфизмы которой – тождественные отображения вида $[n] \to [n]$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Категория Σ, в которой $\Sigma(n,m)$ пусто при $n \neq m$, а $\Sigma(n,n) = \Sigma_n$ – группа подстановок n-й степени. Можно показать, что в Σ не содержится ни одна вербальная категория, за исключением WId.

3. Категория Mon, морфизмами которой являются все мономорфизмы (инъекции) из $FSet$. Можно показать, что Mon не содержится ни в одной вербальной категории, отличной от $FSet$.

4. Категория Epi, морфизмами которой являются все эпиморфизмы (то есть сюръекции) из $FSet$. Можно показать, что и Epi не содержится ни в одной вербальной категории, отличной от $FSet$.

5. Наконец, вся категория $FSet$ также является вербальной.

Лемма 2. *Если $\{W_i | i \in I\}$ – любое семейство вербальных категорий, то вербальной является и категория $\bigcap\limits_{i\in I} W_i$, класс морфизмов которой есть $\bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Mor}(W_i)$. Как следствие этого, множество всех вербальных категорий является полной решеткой с минимальным элементом WId и максимальным элементом $FSet$.*

Доказательство. Очевидно. □

Можно показать, что решетка всех вербальных подкатегорий категории $FSet$ не менее чем счетна.

Так как в категории $FSet$ изоморфные объекты совпадают, то в диаграмме (1) всегда имеет место равенство $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$. С учетом этого дополним лемму 1 следующим образом.

Лемма 3. *Если в диаграмме* (1) *потребовать, чтобы проекция π_2 была неубывающим отображением, а ограничение проекции π_1 на каждый отрезок $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)}, n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)} + n_{f(i)}]$ есть неубывающая инъекция, то $\pi_2 = \alpha f : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \to [k]$, а морфизм π_1 однозначно определяется из этих условий как введенное выше отображение $f^*\alpha$.*

Доказательство. Сразу полагаем $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$. Из определения расслоенного произведения следует, что существует единственное отображение $\varphi : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \to [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ со свойствами: $\pi_1\varphi = f^*\alpha$, $\pi_2\varphi = f\alpha$. Достаточно будет показать, что при сделанных предположениях φ – тождественное отображение. Положим $k_i = n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)}$. Тогда из $\pi_2\varphi = f\alpha$ и условия неубывния π_2 следует $\pi_2^{-1}(i) = [k_i + 1, k_{i+1}]$ для каждого i, $1 \leq i \leq k$, причем $\varphi([k_i + 1, k_{i+1}]) = [k_i + 1, k_{i+1}]$. Теперь из $\pi_1\varphi = f^*\alpha$, условия неубывания ограничения π_1 на $[k_i + 1, k_{i+1}]$, инъективности этого ограничения и из аналогичных свойств $f^*\alpha$ следует, что ограничение φ на $[k_i + 1, k_{i+1}]$ есть тождественное отображение для каждого i. Следовательно, то же самое верно для всего φ. □

Следствие 1. *Справедливы следующие тождества:*

$$(fg)^*\alpha = (f^*\alpha)(g^*(\alpha f)) \quad f^*(\alpha\beta) = (f^*\alpha)^*\beta$$
$$(\alpha\beta)f = (\alpha f)(\beta(f^*\alpha)) \quad \alpha(fg) = (\alpha f)g$$

Доказательство. Внешний контур диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(f^*\alpha)^*[r] \arrow[r, "\beta(f^*\alpha)"] \arrow[d, "(f^*\alpha)^*\beta"'] & f^*[n] \arrow[r, "\alpha f"] \arrow[d, "f^*\alpha"'] & {[k]} \arrow[d, "f"'] \\
{[r]} \arrow[r, "\beta"] & {[n]} \arrow[r, "\alpha"] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

должен совпадать с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
f^*[r] \arrow[r, "(\alpha\beta)f"] \arrow[d, "f^*(\alpha\beta)"'] & {[k]} \arrow[d, "f"'] \\
{[r]} \arrow[r, "\alpha\beta"] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

Это следует, во-первых, из того, что внешний контур диаграммы, каждый квадрат которой есть диаграмма расслоенного произведения, сам является диаграммой расслоенного произведения, а во-вторых, из леммы 3. Аналогично доказываются и другие равенства. □

2. Свободные алгебры над операдами

Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из [2].

Определение 2. Пусть W – вербальная категория. Рассмотрим ***ковариантный*** функтор G из категории W^{op} в категорию множеств. Будем писать $G(n)$ вместо $G([n])$, $[n] \in \mathrm{Ob}(W)$, и fx вместо $G(f)(x)$, где $f \in W^{op}([m],[n]) = W([n],[m])$, $x \in G(n)$. ***Градуированной W-полугруппой*** будем называть функтор, обладающий следующими дополнительными свойствами:

1) для любых $[n],[m] \in \mathrm{Ob}(W)$ определены операции $G(n)\times G(m) \to G(n+m)$, $(x,y) \mapsto x\cdot y$, такие, что $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ для всех возможных $x \in G(n), y \in G(m), z \in G(k)$;

2) если даны $f \in W^{op}([n'],[n])$, $g \in W^{op}([m'],[m])$, то $(fx)\cdot(gy) = (f\times g)(x\cdot y)$ (заметим, что здесь использовано произведение в W^{op}, соответствующее копроизведению в W);

3) если даны $g_j \in G(n_j), j = 1,2,\dots,m$, и $\alpha = (n_1,\dots,n_m)$ – разбиение, то для любого $f \in W^{op}([m],[k])$ имеет место равенство $(f^*\alpha)(g_1\cdot\ldots\cdot g_m) = g_{f(1)}\cdot\ldots\cdot g_{f(k)}$.

Определим также ***гомоморфизм*** $h : G_1 \to G_2$ градуированных W-полугрупп как естественное преобразование функторов (семейство отображений $h_n : G_1(n) \to G_2(n)$) такое, что для всех $x \in G(n)$, $y \in G(m)$ имеет место равенство $h_{n+m}(x\cdot y) = h_n(x)\cdot h_m(y)$.

Пример 1. Зафиксируем множество X. Тогда соответствие $[n] \mapsto X^n$ есть градуированная $FSet$-полугруппа в смысле только что данного определения. Функтор $[n] \mapsto X^n$ как контравариантный функтор на $FSet$ действует следующим образом. Если дано отображение $f : [n] \to [m]$, то отображение $X^f : X^m \to X^n$ сопоставляет строке $\overline{x} = (x_1,\dots,x_m) \in X^m$ строку $\overline{x}f = (x_{f(1)},\dots,x_{f(n)})$. Превращая этот функтор в ковариантный функтор из W^{op}, будем записывать результат рассмотренного только что отображения как $f\overline{x}$. Умножение $X^n \times X^m \to X^{n+m}$ –

это приписывание строк друг к другу. Все свойства из определения градуированной $FSet$-полугруппы проверяются непосредственно. Компоненты градуированной $FSet$-полугруппы, построенной в этом примере, будем обозначать через $T^n(X)$, имея в виду аналогию с тензорными степенями модуля. Таким образом, $T^n(X) = X^n$. Вся градуированная полугруппа обозначается через $T(X)$.

Теорема 1. [2] *Пусть R – некоторая W-операда, G – градуированная W-полугруппа.*

1) *Рассмотрим множество $RG = \coprod_{n=0}^{\infty} R(n) \times G(n)$. На нем естественным образом можно определить структуру алгебры над R как несимметрической операдой (в нашей терминологии – WId-операдой).*

2) *Рассмотрим конгруэнцию Θ в алгебре RG, порожденную всеми эквивалентностями вида $(fx, g) \equiv (x, fg)$, где $f \in W([n], [m])$, $x \in R(n)$, $g \in G(m)$. Тогда факторалгебра $R_W G = RG/\Theta$ обладает естественной структурой алгебры над W-операдой R.*

3) *При этом соответствие $G \mapsto R_W G$ становится функтором из категории градуированных W-полугрупп в категорию $\mathrm{Alg}(R_W)$ алгебр над W-операдой R.*

Замечание 1. Описанная в этой теореме конструкция алгебры $R_W G$ есть не что иное, как тензорное произведение функторов R и G в смысле [15], [16, Chapter VII, § 2]. Мы используем упрощенную запись: RG (или $R_W G$) вместо $R \otimes G$ (или $R \otimes_W G$) ввиду того, что рассматривается достаточно специфический частный случай.

Теорема 2 [2, Теорема 1.4]. *Пусть R – некоторая W-операда, X – множество. Тогда $R_W T(X)$ есть свободная алгебра с базисом X в многообразии $\mathrm{Alg}(R_W)$ алгебр над R.*

В дальнейшем свободную алгебру с базисом X в многообразии $\mathrm{Alg}(R_W)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Fr}_{R,W}(X)$.

Приведем еще некоторые общие факты о тождествах и свободных алгебрах в произвольных Ω-алгебрах. Они потребуются нам в § 4.

Для произвольной $A \in \mathrm{Alg}(\Omega)$ положим $\Theta_A(X) = \{(t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, $h(t_1) = h(t_2)$ для любого гомоморфизма $h : \mathrm{Fr}_\Omega(X) \to A\}$. Это конгруэнция на $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$, то есть Ω-подалгебра алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, являющаяся отношением эквивалентности. Конгруэнция $\Theta_A(X)$ *вполне инвариантна*, то есть если $h : \mathrm{Fr}_\Omega(X) \to \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ – какой угодно эндоморфизм и $(t_1, t_2) \in \Theta_A(X)$, то $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_A(X)$. Более того, если h – гомоморфизм из $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ в $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ и $(t_1, t_2) \in \Theta_A(X)$, то $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_A(Y)$. Элементы $\Theta_A(X)$ естественно назвать *тождествами* A в алфавите X. Обратно, пусть дано некоторое семейство Ξ пар элементов $(z_{1,i}, z_{2,i}) \in \mathrm{Fr}_\Omega(X_i) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X_i)$, $i \in I$. Определим $Var(\Xi)$ как полную подкатегорию категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$, объекты которой – все те алгебры, для которых элементы множества Ξ являются тождествами. Нам будет удобно принять такое определение *многообразия Ω-алгебр*: это непустая полная подкатегория категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$, замкнутая относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов, и произвольных прямых произведений. Непустая полная подкатегория M категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$ является многообразием Ω-алгебр тогда и только тогда, когда $M = Var(\Xi)$ для некоторого Ξ (теорема Биркгофа). Положим $\Theta_M(X) = \bigcap_{A \in M} \Theta_A(X)$. Это вполне инвариантная конгруэнция на свободной алгебре $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Соответствие $X \mapsto \Theta_M(X)$ является функтором, и более того, для каждого гомоморфизма h из $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ в $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ если $(t_1, t_2) \in \Theta_M(X)$, то $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_M(Y)$.

Свободная алгебра $\mathrm{Fr}_M(X)$ многообразия M с базисом X – это факторалгебра $\mathrm{Fr}_\Omega(X)/\Theta_M(X)$. Каждое многообразие можно представить в виде $Var(\Xi)$ для некоторого $\Xi \subseteq \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_{Z,\Omega}(X)$, причем множество X можно выбрать счетным. Для такого X задание $\mathrm{Fr}_M(X)$ (или, соответственно, $\Theta_M(X)$) полностью определяет многообразие M.

3. Операды, строящиеся по вербальным категориям

В этом параграфе будет показано, что по каждой вербальной категории естественным образом можно построить W-операду. Метод построения будет также использован в следующем параграфе для построения свободных W-операд.

Пусть W – произвольная вербальная категория. Для каждого $m \geq 0$ положим

$$OW(m) = \coprod_{k \geq 0} W([k],[m]).$$

Теорема 3. *Семейство $OW = \{OW(n) | n \geq 0\}$ обладает естественной структурой W-операды.*

Доказательство. Опишем, как устроена операдная композиция в OW. Пусть $f \in OW(m)$, $g_i \in OW(n_i)$, $1 \leq i \leq m$. Это означает, что заданы морфизмы категории W вида: $f : [k] \to [m]$, $g_i : [l_i] \to [n_i]$. Положим $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in \in P(n_1 + \cdots + n_m, m)$. Тогда по определению

$$fg_1 \ldots g_m = (f^*\alpha)(g_{f(1)} \sqcup \cdots \sqcup g_{f(k)}). \tag{2}$$

Согласно определению вербальной категории в правой части равенства (2) получается морфизм категории W, имеющий вид $[l_{f(1)} + \cdots + l_{f(k)}] \to [n_1 + \cdots + n_m]$, то есть элемент $OW(n_1 + \cdots + n_m)$. Единица операды OW – это тождественный морфизм из $W([1],[1]) \subseteq OW(1)$.

Структура W-операды задается следующим образом. Пусть $w \in OW(m)$, то есть фактически $w : [k] \to [m]$ – морфизм категории W. Рассмотрим морфизм категории W вида $f : [m] \to [n]$. Тогда суперпозиция $f \cdot w$ будет морфизмом $[k] \to [n]$, то есть элементом $OW(n)$. Однако в соответствии с принятыми в предыдущих работах автора обозначениями (см. [2]) мы должны превратить соответствие $[n] \to OW(n)$ в контравариантный функтор на категории W^{op}, двойственной к категории W. А это значит, что «умножение» f на w должно производиться справа. Таким образом,

$$wf = f \cdot w, \tag{3}$$

причем в левой части этого равенства f понимается как морфизм категории W^{op}.

Доказательство того, что таким образом получается W-операда, использует тождества, сформулированные в следствии 1, и еще ряд подобным им тождеств, которые будут установлены в процессе доказательства теоремы.

Начнем с ассоциативности композиции (2). Пусть даны морфизмы W вида $f : [k] \to [m]$, $g_i : [l_i] \to [n_i]$, $h_{i,j} : [v_{i,j}] \to [u_{i,j}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$. Это означает, что $f \in OW(m)$, $g_i \in OW(n_i)$, $h_{i,j} \in OW(u_{i,j})$. Положим $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in \in P(n_1 + \cdots + n_m, m)$, $\beta_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,n_i}) \in P(u_{i,1} + \cdots + u_{i,n_i}, n_i)$, $\beta = \beta_1 \sqcup \cdots \sqcup \beta_m$, $\overline{h}_i = h_{i,1} \ldots h_{i,n_i}$. Требуется доказать равенство

$$(fg_1 \ldots g_m)\overline{h}_1 \ldots \overline{h}_m = f(g_1\overline{h}_1) \ldots (g_m\overline{h}_m). \tag{4}$$

Вычислим левую и правую части (4). Пусть $r = fg_1 \ldots g_m$. Согласно (2) правая часть равна $(r^*\beta)h$, где явный вид h будет уточнен ниже. Явный вид r таков:

$r = pq$, где $p = f^*\alpha$, $q = g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)}$. Тогда по следствию 1 $(pq)^*\beta = (p^*\beta)(q^*(\beta p))$. Далее, согласно следствию 1 $p^*\beta = (f^*\alpha)^*\beta = f^*(\alpha\beta)$. Пусть $\gamma = \alpha\beta$, это – разбиение, которое можно записать в виде $(\sum_{j=1}^{n_1} u_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} u_{m,j})$. Далее, $\beta p = \beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)}$. Таким образом, $q^*(\beta p) = (g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})^*(\beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)})$. Теперь нам необходимо тождество

$$(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})^*(\beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)}) = ((g_{f(1)})^*\beta_{f(1)}) \sqcup \dots \sqcup ((g_{f(k)})^*\beta_{f(k)}),$$

являющееся следствием того, что в категории множеств копроизведение (то есть несвязное покомпонентное объединение) декартовых квадратов снова является декартовым квадратом, а выражения $(g_{f(i)})^*\beta_{f(i)}$ определяются с помощью декартовых квадратов вида (1), и согласно лемме 3 имеет место единственность проекций при определенных условиях, которые в данном случае выполняются очевидным образом.

Далее, прямым вычислением можно убедиться, что определенное согласно (2) отображение h таково:

$$h = h_{f(1),g_{f(1)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(1),g_{f(1)}(l_{f(1)})} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k),g_{f(k)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k),g_{f(k)}(l_{f(k)})}.$$

Собирая все результаты вычислений вместе, получаем, что левая часть (4) равна

$$(f^*\gamma)(d_1 \sqcup \dots \sqcup d_k). \tag{5}$$

Здесь $d_i = ((g_{f(i)})^*\beta_{f(i)})(h_{f(i),g_{f(i)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(i),g_{f(i)}(l_{f(i)})})$ при всех i, $1 \le i \le k$.

Займемся правой частью (4). По определению (2)

$$c_i = g_i h_{i,1} \dots h_{i,n_i} = ((g_i)^*\beta_i)(h_{i,g_i(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{i,g_i(l_i)}))).$$

Это – отображение из $[v_{i,g_i(1)} + \dots + v_{i,g_i(l_i)}]$ в $[u_{i,1)} + \dots + u_{i,n_i}]$. Поэтому то разбиение, которое возникает вследствие применения (2) к правой части (4), есть $(u_{1,1)} + \dots + u_{1,n_1}, \dots, u_{m,1)} + \dots + u_{m,n_m})$. Это не что иное, как уже появившееся ранее разбиение $\gamma = \alpha\beta$. Отсюда

$$fc_1 \dots c_m = (f^*\gamma)(c_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup c_{f(k)})$$

Вспоминая выписанный выше явный вид c_i, убеждаемся, что получилось то же самое выражение, что и (5). Ассоциативность операдной композиции тем самым доказана. Свойства операдной единицы – тождественного отображения $[1] \to [1]$ – проверяются очень легко.

Перейдем к свойствам, определяющим OW как W-операду. Для удобства различения элементов OW и морфизмов W несколько изменим обозначения. Пусть $\xi : [k] \to [m]$ (морфизм из W) рассматривается как элемент $OW(m)$, и аналогично $\omega_i : [s_i] \to [l_i]$ (также морфизмы W) рассматриваются как элементы $OW(l_i)$, $1 \le i \le m$. Рассмотрим также $f_i : [l_i] \to [n_i]$ – морфизмы W, которые понимаются только как морфизмы W. Обозначим через α разбиение $(n_1, \dots n_m)$ и через β разбиение $(l_1, \dots, l_m)$. Необходимо доказать равенство:

$$\xi(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) = (\xi\omega_1 \dots \omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m). \tag{6}$$

Здесь выражения вида $\omega_i f_i$ понимаются в смысле (3), то есть $\omega_i f_i = f_i \cdot \omega_i$ – суперпозиция отображений $[s_i] \to [l_i] \to [n_i]$. Аналогично надо понимать и правую часть (6). Сделав все замены согласно (3), получим в левой части (6)

$$\begin{aligned} \xi(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) = (\xi^*\alpha)((f_{\xi(1)} \cdot \omega_{\xi(1)}) \sqcup \dots \sqcup (f_{\xi(m)} \cdot \omega_{\xi(m)})) = \\ = (\xi^*\alpha)(f_{\xi(1)} \sqcup \dots \sqcup f_{\xi(m)})(\omega_{\xi(1)}) \sqcup \dots \sqcup \omega_{\xi(m)}). \end{aligned} \tag{7}$$

Второй и третий члены этой цепочки равенств – обычные морфизмы W с обычными суперпозициями (то есть не надо ничего переворачивать). Теперь воспользуемся непосредственно проверяемым тождеством:

$$(\xi^*\alpha)(f_{\xi(1)} \sqcup \cdots \sqcup f_{\xi(m)}) = (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)(\xi^*\beta).$$

С учетом этого тождества (а также (3)) будем иметь следующее продолжение равенства (7):

$$\xi(\omega_1 f_1)\dots(\omega_m f_m) = (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)(\xi^*\beta)(\omega_{\xi(1)} \sqcup \cdots \sqcup \omega_{\xi(m)}) =$$
$$= (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)\cdot(\xi\omega_1\dots\omega_m) = (\xi\omega_1\dots\omega_m)(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m).$$

Таким образом, равенство (6) доказано. Последнее равенство, которое необходимо установить, выглядит так:

$$(\xi f)\omega_1\dots\omega_m = (\xi\omega_{f(1)}\dots\omega_{f(k)})(f^*\alpha).$$

Здесь $\xi : [l] \to [k]$ – элемент $OW(k)$, $f : [k] \to [m]$ – морфизм W, $\omega_i : [s_i] \to [n_i]$ – элементы $OW(n_i)$, $1 \le i \le m$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, выражения вида ξf понимаются как $\xi f = f \cdot \xi$. С учетом сказанного проведем следующие преобразования:

$$(\xi f)\omega_1\dots\omega_m = ((f\cdot\xi)^*\alpha)(\omega_{f(\xi(1))} \sqcup \cdots \sqcup \omega_{f(\xi(l))}) =$$
$$= (f^*\alpha)\cdot(\xi^*(\alpha f))\cdot(\omega_{f(\xi(1))} \sqcup \cdots \sqcup \omega_{f(\xi(l))}) =$$
$$= f^*\alpha)\cdot(\xi\omega_{f(1)}\dots\omega_{f(k)}) = (\xi\omega_{f(1)}\dots\omega_{f(k)})(f^*\alpha).$$

Теорема доказана. □

Замечание 2. Заметим, что если $W = \Sigma$, то получается хорошо известная операда симметрических групп, если $W = WId$, то получается также известная операда, все компоненты которой – одноэлементные множества. В остальных случаях, по-видимому, получаются новые операды.

4. Свободные операды

Пусть $\Omega = \{\Omega_n | n = 0, 1, \dots\}$ – некоторая сигнатура. Будем предполагать известной стандартную конструкцию алгебры Ω-слов с базисом X, то есть свободной алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ в многообразии $\mathrm{Alg}(\Omega)$ всех Ω-алгебр. Будем предполагать также известным следующее свойство Ω-слов. Допустим, что для данного слова $z \in \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ взяты все слова из Ω, входящие в запись z, и из них составлено слово w, порядок следования символов в котором тот же самый, что и их вхождений в слово z. Если это слово окажется пустым, то обозначим его через ε. Допустим также, что аналогичным образом (то есть с сохранением порядка следования) из входящих в запись w символов из множества X составлено слово $\overline{x}$. Тогда по паре слов $(w, \overline{x})$ слово z восстанавливается однозначно. Это легко следует из представления Ω-слов виде помеченных корневых деревьев (набросок такого представления для многосортного случая можно найти в [6, гл. 2]). Символ ω назовем Ω-*компонентой* слова z, а слово $\overline{x}$ – X-*компонентой* z. Таким образом, можно использовать для слова z альтернативный способ записи в виде $w\overline{x}$. Мы будем (явно или неявно) часто пользоваться этой возможностью.

Пусть множество $\mathcal{FO}_\Omega(n)$ состоит из всех элементов $z \in \mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$, в которых после описанной выше процедуры $\overline{x} = x_1 \dots x_n$. В этом случае слово z однозначно восстанавливается по слову w в алфавите Ω. Будем использовать запись вида $z = z(x_1, \dots, x_n) = z(\overline{x})$, чтобы иметь возможность делать подстановки вместо «переменных» $x_1, \dots, x_n$ других Ω-слов. Пусть $a = a(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{FO}_\Omega(m)$, $b_i = b_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in \mathcal{FO}_\Omega(n_i)$, $1 \le i \le n$. Положим

$$ab_1 \dots b_m = ab_1 \dots b_m(x_1, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+n_m}) =$$
$$= a(b_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, b_m(x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+n_m})). \quad (8)$$

Легко заметить, что результат этой операции принадлежит множеству $\mathcal{FO}_\Omega(n_1 + + \dots + n_m)$

Теорема 4. *Определенное выше семейство* $\mathcal{FO}_\Omega = \{\mathcal{FO}_\Omega(m) | m = 0, 1, \dots\}$ *с операцией композиции* (8) *является свободной* WId*-операдой с базисом* Ω.

Доказательство. То, что $\mathcal{FO}_\Omega$ является WId-операдой, легко проверяется с помощью (8). Роль единицы играет элемент $x_1 \in \mathcal{FO}_\Omega(1) \subset \mathrm{Fr}_\Omega(x_1)$. Этот элемент при описанном выше разделении Ω-слов на Ω-компоненты и на X-компоненты можно отождествить с ε. Рассмотрим для каждого n отображение $\xi_n : \Omega_n \to \to \mathcal{FO}_\Omega(n)$, сопоставляющее элементу сигнатуры ω слово $\omega x_1 \dots x_n$. Покажем, что для каждой WId-операды R и любого семейства отображений $\chi_n : \Omega_n \to \to R(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, существует однозначно определенный гомоморфизм операд $\psi : \mathcal{FO}_\Omega \to R$ такой, что $\psi\xi = \chi$ (то есть $\psi_n \chi_n = \xi_n$ для каждого n).

Рассмотрим свободные в $\mathrm{Alg}(R)$ алгебры

$$\mathrm{Fr}_R(x_1, \dots, x_n) = \coprod_{k=0}^{\infty} R(k) \times \{x_1, \dots, x_n\}^k.$$

Элементы $r \in R(n)$ можно отождествлять с элементами

$$rx_1 \dots x_n = (r, x_1 \dots x_n) \in R(n) \times \{x_1, \dots, x_n\}^n \subseteq \mathrm{Fr}_R(x_1, \dots, x_n),$$

так что $R(n) \subset \mathrm{Fr}_R(x_1, \dots, x_n)$. Семейство отображений $\chi_n : \Omega_n \to R(n)$ вместе с отображениями вида

$$\mathrm{Fr}_R(x_1, \dots, x_n) \times A^n \to A, \quad (u(x_1, \dots, x_n), a_1, \dots, a_n) \mapsto u(a_1, \dots, a_n),$$

где A есть R-алгебра, позволяет определить на каждой R-алгебре структуру Ω-алгебры. Используя включения $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots . x_n)$ и $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \subset \mathrm{Fr}_R(x_1, \dots . x_n)$, получаем однозначно определенные гомоморфизмы Ω-алгебр $\mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots . x_n) \to \mathrm{Fr}_R(x_1, \dots . x_n)$. Ограничения этих гомоморфизмов на $\mathcal{FO}_\Omega(n)$ и будут искомыми компонентами ψ_n гомоморфизма операд $\mathcal{FO}_\Omega \to R$, удовлетворяющего требуемым условиям. $\square$

В следующей теореме (и в § 5) будет использоваться понятие *рациональной эквивалентности* многообразий, введенное в [17]. Современное изложение можно найти в [18, гл. 1].

Изветсно, что для любого множества A можно определить операду E_A, полагая компоненту $E_A(n)$ равной множеству всех отображений из A^n в A. Это $FSet$-операда (а значит, ее можно считать операдой над любой вербальной категорией W). Пусть R – некоторая W-операда. Хорошо известно (и легко показывается), что задание на A структуры R-алгебры равносильно заданию гомоморфизма W-операд $R \to E_A$.

Лемма 4. *Многообразия* $\mathrm{Alg}(\mathcal{FO}_\Omega)$ *и* $\mathrm{Alg}(\Omega)$ *рационально эквивалентны. В частности, можно отождествлять свободные* $\mathcal{FO}_\Omega$*-алгебры и свободные* Ω*-алгебры.*

Доказательство. Ясно, что задание на алгебре A структуры Ω-алгебры равносильно заданию для всех $n \geqslant 0$ отображений $\Omega_n \to E_A(n)$. Но по определению свободной WId-операды с базисом Ω это равносильно тому, что задан гомоморфизм W-операд $\mathcal{FO}_\Omega \to E_A$. Таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между алгебрами из $\mathrm{Alg}(\Omega)$ и из $\mathrm{Alg}(\mathcal{FO}_\Omega)$. Проверка того, что это изоморфизм категорий с необходимыми свойствами, не представляет затруднений. Утверждение об отождествлении свободных алгебр следует из [18, теорема 1.2.1, с. 27]. $\square$

Последнее утверждение этой леммы будет играть в дальнейшем важную техническую роль. Оно означает, что вместо свободной алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ мы всегда можем брать алгебру $\mathrm{Fr}_{\mathcal{FO}_\Omega}(X)$, которая, как уже выяснилось в § 2, имеет вид

$$\coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{FO}_\Omega(n) \times X^n.$$

Таким образом, каждый элемент $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ допускает *однозначное* представление в виде $(w,(x_1,\dots,x_k))$, где $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$, $x_1,\dots,x_k \in X$. Обозначая $(x_1,\dots,x_k)$ через $\overline{x}$, будем записывать этот элемент в виде $w\overline{x}$, опуская скобки и запятые.

Построим теперь свободные операды над произвольными вербальными категориями. Начнем с описания одной общей конструкции. Пусть W – некоторая вербальная категория, R – некоторая WId-операда. Определим семейство $RW = \{RW(n) | n = 0,1,2,\dots\}$ следующим образом:

$$RW(n) = \coprod_{m \leqslant 0} R(m) \times W([m],[n]).$$

Операдная композиция определяется так:

$$(w,f)(w_1,g_1)\dots(w_m,g_m) = (ww_{f(1)}\dots w_{f(k)}, (f^*\alpha)(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})).$$

Здесь $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$, $w_i \in \mathcal{FO}_\Omega(k_i)$, $f \in W([k],[m])$, $g_i \in W([k_i],[n_i])$, $1 \le i \le m$, $\alpha = (n_1,\dots,n_m)$. Структура W-операды задается равенством

$$(w,f)g = (w,gf).$$

Здесь $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$, $f \in W([k],[n])$, $g \in W([n],[m])$, gf – суперпозиция в $W \subseteq TSet$.

Для каждого n определено отображение $\eta_n : R(n) \to RW(n)$, сопоставляющее элементу $a \in R(n)$ элемент $(a,id) \in R(n) \times W([n],[n])$. Через $\eta : R \to RW$ обозначим все семейство отображений η_n.

Теорема 5. *Определенное выше семейство RW является W-операдой, а семейство η – гомоморфизмом WId-операд. При этом выполняется следующее универсальное свойство. Для любой W-операды O и произвольного гомоморфизма WId-операд $\xi : R \to O$ существует, притом только один, гомоморфизм W-операд $\rho : RW \to O$ такой, что $\xi = \rho\eta$.*

Доказательство. Проверка свойств операды в значительной степени опирается на доказательство теоремы 3. То, что не следует из этого доказательства, устанавливается легко. Очевидно, что η есть гомомофизм WId-операд. Гомоморфизм ρ строится следующим образом: если $(w,f) \in R(k) \times W([k],[n]) \subseteq RW(n)$, то $\rho_n(w,f) = \xi_k(w)f$. Проверка того, что ρ – гомоморфизм W-операд, опирается на те же тождества, что и в доказательстве теоремы 3. Единственность ρ очевидна. Универсальное свойство также проверяется без затруднений. $\square$

Теорема 6.

1) *Операда* $\mathcal{FO}_\Omega W$ *является свободной* W*-операдой с базисом* Ω.

2) *Для каждого* $n \geq 0$ *отобразим* $\mathcal{FO}_\Omega W(n)$ *в алгебру* $\mathrm{Fr}_\Omega(x_1,\ldots,x_n)$*, сопоставляя элементу* (w,f) *слово* $wx_{f(1)}\ldots x_{f(k)}$*, где* $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$*, и* $f:[k]\to[n]$ *– морфизм из* W*. Если считать множества* $F(n)=\mathrm{Fr}_\Omega(x_1,\ldots,x_n)$ *компонентами* $FSet$*-операды* F*, построенной в* [4] *по семейству всех свободных алгебр многообразия* $\mathrm{Alg}(\Omega)$ *с конечными базисами* $\{x_1,\ldots,x_n\}$*, и рассмотреть эту операду как* W*-операду (что возможно благодаря* $W\subseteq FSet$*), то описанное выше семейство отображений является инъективным гомомрофизмом* W*-операд* $\mathcal{FO}_\Omega W\to F$.

Доказательство. Свободность $\mathcal{FO}_\Omega W$ есть формальное следствие универсального свойства $\mathcal{FO}_\Omega$ в классе WId-операд и предыдущей теоремы.

Отобразим $\mathcal{FO}_\Omega W(n)$ в $F(n)=\mathrm{Fr}_\Omega(x_1,\ldots,x_n)$ описанным в пункте 2) способом:

$$(w,f)\mapsto h(w,f)=wx_{f(1)}\ldots x_{f(k)}=w(x_{f(1)},\ldots,x_{f(k)}).$$

Инъективность этого отображения очевидна. Остается проверить, что все семейство таких отображений является гомоморфизмом W-операд. Это осуществляется непосредственной проверкой, использующей явный вид операдной композиции, описанной в [3]. □

В дальнейшем будем обозначать свободную W-операду $\mathcal{FO}_\Omega W$ через $FO_{\Omega,W}$.

Теорема 7. *Многообразия* $\mathrm{Alg}(FO_{\Omega,W})$ *и* $\mathrm{Alg}(\Omega)$ *рационально эквивалентны. В частности, можно отождествлять свободные* $FO_{\Omega,W}$*-алгебры и свободные* Ω*-алгебры.*

Доказательство. Доказательство почти не отличается от доказательства леммы 4. Операду E_A можно рассматривать как W-операду для произвольной вербальной категории W, и задание структуры R-алгебры над W-операдой R равносильно заданию гомоморфизма W-операд $R\to E_A$. Если $R=FO_{\Omega,W}$, то по определению свободной W-операды с базисом Ω это равносильно тому, что задано отображение $\Omega_n\to E_A(n)$ для всех n. Так устанавливается взаимно-однозначное соответствие между алгебрами из $\mathrm{Alg}(\Omega)$ и из $\mathrm{Alg}(FO_{\Omega,W})$. Легко проверяется, что на самом деле это изоморфизм категорий с необходимыми свойствами. Утверждение об отождествлении свободных алгебр с любыми базисами является следствием факта рациональной эквивалентности [18, теорема 1.2.1, с. 27]. □

Таким образом, свободную Ω-алгебру $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ можно отождествить со свободной $FO_{\Omega,W}$-алгеброй с базисом X, которая устроена следующим образом: это факторалгебра алгебры

$$\coprod_{m\geqslant 0} FO_{\Omega,W}(m)\times X^m$$

по конгруэнции, порожденной всеми парами $((rf,x_1\ldots x_m),(r,x_{f(1)}\ldots x_{f(k)}))$. Здесь предполагается, что $r\in FO_{\Omega,W}(k)$, $f\in W([k],[m])$. Как уже отмечалось в § 2, из этого построения следует, что $\mathrm{Fr}_{FO_{\Omega,W}}(X)$ является тензорным произведением функторов $[n]\mapsto FO_{\Omega,W}(n)$ (контравариантный функтор $W^{op}\to Set$) и $[n]\mapsto X^n$ (ковариантный функтор $W^{op}\to Set$).

Кроме того, из отождествления $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ и $\mathrm{Fr}_{FO_{\Omega,W}}(X)$ следует, что элементы $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ можно представлять в виде $w\overline{x}$ (отождествляя пару $(w,\overline{x})$ со строкой $w\overline{x}$), где $w\in FO_{\Omega,W}(m)$, $\overline{x}=x_1\ldots x_m$, элементы $x_1,\ldots,x_m\in X$ не обязательно различны. Утверждать, что такая запись в случае произвольной категории W единственна, нельзя, но если $w=(\omega,f)$, где $\omega\in\mathcal{FO}_\Omega(k)$, $f\in W(k,m)$ (такое представление по теореме 5 однозначно), то $w\overline{x}=\omega(\overline{x}f)=\omega x_{f(1)}\ldots x_{f(k)}$, и последняя форма записи определена однозначно.

5. *W*-тождества

Теорема 8. *Пусть W-операда R изоморфна фактороператде $FO_{\Omega,W}/V$, где V – конгруэнция операды. Если X – произвольное множество, то*

$$\mathrm{Fr}_R(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)/V(X),$$

где $V(X)$ – вполне инвариантная конгруэнция, которую можно описать как множество пар вида $(u_1\overline{x}, u_2\overline{x})$, где $(u_1, u_2) \in V(k)$ для некоторого k, $\overline{x} = x_1 \dots x_k$, $x_1, \dots, x_k \in X$ (всевозможные комбинации).

Доказательство. Условия теоремы означают, что имеет место диаграмма, определяющая R как коуравнитель:

$$V \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \to R. \tag{9}$$

Все объекты этой диаграммы являются контравариантными функторами из категории W^{op} в категорию множеств, а стрелки – естественными преобразованиями. Напомним, что в § 2 был определен ковариантный функтор $T(X)$ из W^{op} в категорию множеств, действующий по правилу $[n] \mapsto X^n$. Таким образом, мы находимся в ситуации, когда определено тензорное произведение функторов [15], а поскольку тензорное произведение есть функтор, обладающий сопряженным справа функтором (см. [15, теорема 1], [16, Chapter VII, § 2, Theorem 1]), то после тензорного умножения (9) на $T(X)$ снова получается коуравнитель пары морфизмов. При этом, как уже известно, можно считать, что $R \otimes T(X) = \mathrm{Fr}_R(X)$, $FO_{\Omega,W} \otimes T(X) = \mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Что касается стрелок $V \rightrightarrows FO_{\Omega,W}$, то это суперпозиции вложения $V \subseteq FO_{\Omega,W} \times \times FO_{\Omega,W}$ и проекций $FO_{\Omega,W} \times FO_{\Omega,W} \to FO_{\Omega,W}$. После тензорного умножения на $T(X)$ получаются стрелки $V \otimes T(X) \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \otimes T(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, что дает отображение $V \otimes T(X) \to \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Образ этого отображения обозначим через $V(X)$. Легко заметить, что коуравнитель пары стрелок $V \otimes T(X) \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \otimes T(X)$ изоморфен коуравнителю пары стрелок, каждая из которых есть суперпозиция вложения $V(X) \subseteq \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ и одной из проекций на сомножители: $\mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \times \mathrm{Fr}_\Omega(X) \to \mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Это означает, что $\mathrm{Fr}_R(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)/V(X)$.

С другой стороны, вспоминая явный вид тензорного произведения $T(X)$ на стрелки $V \rightrightarrows FO_{\Omega,W}$, а также способ построения изоморфизма $FO_{\Omega,W} \otimes T(X) = = \mathrm{Fr}_{FO_{\Omega,W}}(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, нетрудно убедиться, что $V(X)$ состоит из всех пар вида $(u_1\overline{x}, u_2\overline{x})$, где $(u_1, u_2) \in I(k)$ для некоторого k, и $\overline{x} = x_1 \dots x_k$, причем $x_1, \dots, x_k$ пробегают все возможные комбинации элементов из X.

Покажем, что конгруэнция $V(X)$ вполне инвариантна. Рассмотрим произвольный гомоморфизм Ω-алгебр $h : \mathrm{Fr}_\Omega(X) \to \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, и пусть $h(x_j) = a_j$, $1 \le j \le k$. Элементы a_j можно представить в виде $a_j = v_j\overline{x}_j$, где $v_j \in \in FO_{\Omega,W}(n_j)$, $\overline{x}_j = x_{j,1} \dots x_{j,n_j}$, $x_{j,l} \in X$. Тогда $h(u_i x_1 \dots x_k) = u_i h(x_1) \dots h(x_k) = = (u_i v_1 \dots v_k)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_k$. Ясно, что $(u_1 v_1 \dots v_k, u_2 v_1 \dots v_k) \in V(n_1 + \dots + n_k)$, и поэтому $(h(u_1\overline{x}), h(u_2\overline{x})) \in V(X)$. Более того, точно так же можно показать, что если Y – другое множество, которое рассматривается как базис свободной алгебры, и $h : \mathrm{Fr}_\Omega(X) \to \mathrm{Fr}_\Omega(Y)$ – некоторый гомоморфизм Ω-алгебр, то $(h \times h)(V(X)) \subseteq \subseteq V(Y)$. □

Рассмотрим подробнее пары вида $(u_1\overline{x}, u_2\overline{x})$, где $u_1, u_2 \in FO_{\Omega,W}(n)$, $\overline{x} = = x_1 \dots x_n$. Если $u_i = (w_i, f_i)$, где $w_i \in \mathcal{F}O_\Omega(m_i)$, $f_i \in W([m_i], [n])$. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, каждый элемент $u_i\overline{x}$ преобразуется к виду $w_i(\overline{x}f_i) = w_i x_{f_i(1)} \dots x_{f_i(m_i)}$, $i = 1, 2$.

Определение 3. Элемент из $\mathrm{Fr}_\Omega(X)^2$ будет называться *W-парой*, если он имеет вид $(w_1(\overline{x}f_1), w_2(\overline{x}f_2))$, где $w_i \in \mathcal{F}O_\Omega(m_i)$, $f_i \in W([m_i], [n])$, $i = 1, 2$,

$\overline{x} = x_1 \dots x_n$, и все $x_1, \dots, x_n \in X$ различны. В случае, если W-пара – тождество какой-либо алгебры, или какого-то многообразия, будем называть ее W-*тождеством.*

Теорема 9. *Существует изоморфизм между решеткой конгруэнций свободной W-операды $FO_{\Omega,W}$ и подрешеткой решетки вполне инвариантных конгруэнций свободной Ω-алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ со счетным базисом X, состоящей из конгруэнций, порожденных W-парами.*

Доказательство. Искомый изоморфизм – это соответствие $V \mapsto V(X) = \widetilde{V}$, построенное при доказательстве теоремы 8. Отметим, что $V(X)$ порождается W-парами, поскольку любой элемент $(u_1\overline{x}, u_2\overline{x}) \in V(X)$, где $(u_1, u_2) \in V(k)$, и $\overline{x} = x_{j_1} \dots x_{j_k}$ – произвольная строка из элементов X, можно считать результатом подстановки в W-пару $(u_1x_1 \dots x_k, u_2x_1 \dots x_k)$ элементов x_{j_i} вместо соответствующих x_i. По определению это и означает, что $V(X)$ порождается W-парами как *вполне инвариантная* конгруэнция.

Обратное соответствие будем строить, предполагая, как и в теореме 6, что компоненты $FO_{\Omega,W}(k)$ свободной W-операды можно считать подмножествами $\mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_k)$, которые, в свою очередь, можно считать подалгебрами $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$, где $X = \bigcup_{k\geqslant 0} \{x_1, \dots, x_k\}$.

Итак, пусть дана вполне инвариантная конгруэнция $U \subseteq \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Рассмотрим множество Pw всех W-пар $(\omega(\overline{x}f), \mu(\overline{x}g)) \in U$, где в $\overline{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ все $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ различны, $\omega \in \mathcal{F}O_\Omega(k)$, $\mu \in \mathcal{F}O_\Omega(l)$, $f \in W([k],[n])$, $g \in W([l],[n])$ для некоторого $n = 0, 1, 2, \dots$. Определим семейство множеств $V = \widehat{U}$, $V = \{V(n) \mid n = 0, 1, \dots\}$, полагая $V(n) = \{((\omega, f), (\mu, g)) \in FO_{\Omega,W}(n)^2 \mid (\omega(\overline{x}f), \mu(\overline{x}g)) \in Pw$ для некоторого $\overline{x}\}$. Покажем, что V есть конгруэнция в операде $FO_{\Omega,W}$. Во-первых, заметим, что выбор $\overline{x}$ для пары (ω, μ) произволен, в том смысле, что вместо $\overline{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ можно взять любое другое слово $\overline{x}' = x_{j_1} \dots x_{j_n}$ с условием, что все $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ – различные элементы X. Это следует из инвариантности конгруэнции U: соответствие $x_{i_k} \mapsto x_{j_k}$, $1 \le k \le n$, продолжается до эндоморфизма $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$, а затем до эндоморфизма $\mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, отображающего U в U, а пару $(\omega(\overline{x}f), \mu(\overline{x}g))$ – в пару $(\omega(\overline{x}'f), \mu(\overline{x}'g))$. Очевидно, что все $V(n)$ будут отношениями эквивалентности. Пусть $((\omega, f), (\mu, g)) \in V(m)$, $((\omega_i, h_i), (\mu_i, t_i)) \in V(n_i)$, $1 \le i \le m$. Покажем, что $((\omega\omega_1 \dots \omega_m, fh_1 \dots h_m), (\mu\mu_1 \dots \mu_m, gt_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m)$. Выберем $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m$ – слова в алфавите X так, что $(\omega_i(\overline{x}_ih_i), \mu_i(\overline{x}_it_i)) \in Pw$, $1 \le i \le m$, и в $\overline{x}_i$, $\overline{x}_j$ нет общих символов для всех $i \ne j$. Это можно сделать ввиду счетности X. Поскольку U – подалгебра $FO_{\Omega,W}$-алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$, то для любого $(\omega, f) \in FO_{\Omega,W}(m)$ и любых $(\omega_i\overline{x}_i, \mu_i\overline{x}_i) \in Pw$, $1 \le i \le m$, получим элемент из U:

$$\begin{aligned}
&(\omega f)((\omega_1, h_1)\overline{x}_1, (\mu_1, t_1)\overline{x}_1) \dots ((\omega_m, h_m)\overline{x}_m, (\mu_m, t_m)\overline{x}_m) = \\
&= (((\omega, f)(\omega_1, f_1) \dots (\omega_m, f_m))\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, ((\omega, f)(\mu_1, t_1) \dots (\mu_m, t_m))\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m) = \\
&\qquad = ((\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, (f^*\alpha)(h_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k)}))\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, \\
&\qquad\quad (\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, (f^*\beta)(t_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup t_{f(k)}))\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m) = \\
&= ((\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, fh_1 \dots h_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, (\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m).
\end{aligned}$$

Ввиду выбора $\overline{x}_i$ этот элемент должен принадлежать Pw. Таким образом,

$$((\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, fh_1 \dots h_m), (\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Пусть $\overline{x} = x_{s_1} \dots x_{s_k}$ – слово в алфавите X такое, что все x_{s_j} различны и $\overline{x}$ не имеет общих символов ни с одним из $\overline{x}_i$, $1 \le i \le m$. Тогда $((\omega, f)\overline{x}, (\mu, g)\overline{x}) \in Pw \subset U$. Рассмотрим эндоморфизм $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$, отображающий x_{s_j} в $(\mu_j, t_j)\overline{x}_j$,

$1 \leq j \leq m$. Тогда $((\omega, f)\overline{x}, (\mu, g)\overline{x})$ отображается в элемент U, имеющий вид

$$(\omega, f)((\mu_1, t_1)\overline{x}_1) \dots ((\mu_m, t_m)\overline{x}_m), (\mu, g)((\mu_1, t_1)\overline{x}_1) \dots ((\mu_m, t_m)\overline{x}_m)) = \\ = ((\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m).$$

Так как полученный элемент принадлежит Pw, то имеет место включение

$$((\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m), (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Но поскольку $V(n_1 + \dots + n_m)$ есть отношение эквивалентности, получаем требуемое включение:

$$((\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, fh_1 \dots h_m), (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m)$$

Из инвариантности конгруэнции U следует также, что соответствие $[n] \to V(n)$ есть контравариантный функтор из W^{op} в категорию множеств. Проверим это. Если $((\omega, f), (\mu, g)) \in V(m)$, где $\omega \in \mathcal{F}O_\Omega(k)$, $f \in W([k], [m])$, $\mu \in \mathcal{F}O_\Omega(l)$, $g \in \in W([l], [m])$, то для строки $\overline{x} = x_1 \dots x_m$ элемент

$$((\omega, f)\overline{x}, (\mu, g)\overline{x}) = (\omega x_{f(1)} \dots x_{f(k)}, \mu x_{g(1)} \dots x_{g(k)})$$

принадлежит $Pw \subset U$. Если $h \in W([m], [n])$, то полагаем $((\omega, f), (\mu, g))h = = ((\omega, hf), (\mu, hg))$. Элементы $(\omega, hf)x_1 \dots x_n$ и $(\mu, hg)x_1 \dots x_n$ суть образы элементов $(\omega, f)x_1 \dots x_m$ и $(\mu, g)x_1 \dots x_m$ соответственно при эндоморфизме $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$, отображающем x_j в $x_{h(j)}$, $1 \leq j \leq m$ (остальные иксы отображаются произвольным образом). Следовательно, ввиду полной инвариантности U пара $((\omega, hf)x_1 \dots x_n, (\mu, hg)x_1 \dots x_n)$ принадлежит U. Так как это W-пара, то по определению V получаем включение $((\omega, hf), (\mu, hg)) \in V(n)$. Поэтому $V = \widehat{U}$ есть W-подоперада W-операды $FO_{\Omega,W} \times FO_{\Omega,W}$.

Из построения видно, что соответствие $U \mapsto \widehat{U} = V$ сохраняет включения и произвольные пересечения.

Покажем взаимную обратность соответствий $U \mapsto \widehat{U}$ и $V \to \widetilde{V}$. В одну сторону это очевидно: W-пары из $\widetilde{V}$ приводят вновь к операде V. Проверим, что если $V = \widehat{U}$, то $U = \widetilde{V}$. Очевидно, что $\widetilde{V} \subseteq U$. Чтобы показать обратное включение, используем условие, согласно которому U порождается множеством Pw как вполне инвариантная конгруэнция. Это, в частности, означает, что $U \subseteq \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ есть $FO_{\Omega,W}$-подалгебра, порожденная всеми элементами, являющимися результатами подстановок в элементы из Pw произвольных Ω-слов вместо элементов множества X, причем вместо каждого вхождения в данный элемент Pw одного и того же $x \in X$ подставляется одно и то же слово. Ввиду этого произвольный элемент $(z_1, z_2) \in U$ представляется в виде $(\omega, f)(p'_1, p''_1) \dots (p'_m, p''_m)$, где $\omega \in \mathcal{F}O_\Sigma(k)$, $f \in W([k], [m])$, а каждая пара (p'_i, p''_i) получается из некоторого элемента Pw описанной выше подстановкой. Выполнив эту подстановку, и произведя необходимые преобразования, получаем, что каждый (p'_i, p''_i) есть элемент $((q'_i, h'_i)\overline{x}_i, (q''_i, h''_i)\overline{x}_i)$, где $((q'_i, h'_i), (q''_i, h''_i)) \in V = \widehat{U}$. Следовательно, произвольный элемент U можно записать в виде:

$$(\omega, f)((q'_1, h'_1)\overline{x}_1, (q''_1, h''_1)\overline{x}_1) \dots ((q'_m, h'_m)\overline{x}_m, (q''_m, h''_m)\overline{x}_m) = (t_1, t_2). \tag{10}$$

Здесь

$$t_1 = (\omega q'_{f(1)} \dots q'_{f(m)}, fh'_1 \dots h'_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m,$$
$$t_2 = (\omega q''_{f(1)} \dots q''_{f(m)}, fh''_1 \dots h''_m)\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m.$$

Элемент (t_1, t_2) принадлежит V. Чтобы убедиться в этом, выберем для каждой пары $((q'_i, h'_i), (q''_i, h''_i))$ слово $\overline{y}_i$ в алфавите X таким образом, что $((q'_i, h'_i)\overline{y}_i, (q''_i, h''_i)\overline{y}_i) \in Pw$, причем в $\overline{y}_i$ и $\overline{y}_j$ нет общих символов при всех $i \neq j$. Поскольку U является $FO_{\Omega,W}$-алгеброй, композиция

$$(\omega, f)((q'_1, h'_1)\overline{y}_1, (q''_1, h''_1)\overline{y}_1) \dots ((q'_m, h'_m)\overline{y}_m, (q''_m, h''_m)\overline{y}_m) = \\ = ((\omega q'_{f(1)} \dots q'_{f(m)}, fh'_1 \dots h'_m)\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m, (\omega q''_{f(1)} \dots q''_{f(m)}, fh''_1 \dots h''_m)\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m)$$

принадлежит U и, очевидно, принадлежит также и Pw. Возвращаясь к элементу (10), заключаем, что он принадлежит $\widetilde{V}$. Таким образом, получено включение $U \subseteq \subseteq \widetilde{V}$, откуда следует $U = \widetilde{V} = \widetilde{\widehat{U}}$.

Итак, получено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок, между двумя решетками, причем отображение $U \mapsto \widehat{U}$ сохраняет произвольные пересечения. Но так как точная верхняя грань элементов U_1 и U_2 в рассматриваемых решетках есть пересечение всех U таких, что $U_1, U_2 \subseteq U$, то имеет место изоморфизм решеток. $\square$

Пусть R – некоторая W-операда. Выберем в ней произвольное семейство образующих Ω (предполагая, что $\Omega \cap R(n) = \Omega_n$). Тогда операду R можно считать фактороперадой свободной операды $F = FO_{\Omega,W}$ с базисом Ω по некоторой конгруэнции V.

Теорема 10. *При сделанных выше предположениях многообразие R-алгебр $\mathrm{Alg}(R_W)$ рационально эквивалентно многообразию Ω-алгебр, определяемому семейством тождеств вида $(\omega_1, f_1)\overline{x} = (\omega_2, f_2)\overline{x}$, где $((\omega_1, f_1), (\omega_2, f_2)) \in V(n)$ пробегают некоторое семейство образующих конгруэнции V, а в строке $\overline{x} = x_1 \dots x_n$ все переменные различны.*

Фактически речь идет о вполне инвариантной конгруэнции $\widetilde{V} = V(X)$ из теорем 8 и 9.

Доказательство. Рассмотрим естественную проекцию на фактороперады $\pi : F \to R$, и пусть V – ее ядро. Иными словами, $V = \{V(n) | n \geq 0\}$, $V(n) = \{(z_1, z_2) \in \in F(n) \times F(n) | \pi_n(z_1) = \pi_n(z_2)\}$ для всех n. Эта проекция индуцирует вполне унивалентный функтор $\mathrm{Alg}(R_W) \to \mathrm{Alg}(F_W)$, причем многообразие $\mathrm{Alg}(F_W)$ можно отождествить с $\mathrm{Alg}(\Omega)$. Действие функтора можно описать следующим образом. Структура R_W-алгебры на A определяется гомоморфизмом W-операд $R \to E_A$, а структура соответствующей F-алгебры задается суперпозицией этого гомоморфизма с гомоморфизмом π. Ввиду того, что Ω – это базис F, такой гомоморфизм операд $F \to E_A$ однозначно определяется отображением $\Omega \to E_A$ (а точнее, семейством отображений $\Omega_n \to E_A(n)$ для всех n). Образом этого функтора и является то многообразие, для которого нужно доказать, что оно определяется тождествами из $\widetilde{V}$.

Пусть A – некоторая Ω-алгебра и $\Theta_A(X) \subseteq \mathrm{Fr}_\Omega(X) \times \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ – соответствующая ей вполне инвариантная конгруэнция. Предположим, что X счетно. Тогда ядром соответствующего структуре A гомоморфизма $F \to E_A$ будет (в обозначениях доказательства теоремы 9) конгруэнция $\widehat{\Theta_A(X)}$. Алгебра A будет принадлежать многообразию $\mathrm{Alg}(R)$ (вложенному в $\mathrm{Alg}(\Omega)$ описанным выше образом) тогда и только тогда, если $V \subseteq \widehat{\Theta_A(X)}$.

Завершим доказательство следующим образом. Пусть M – многообразие Ω-алгебр, определяемое вполне инвариантной конгруэнцией $\widetilde{V}$. В обозначениях § 2 будем иметь

$$\Theta_M(X) = \widetilde{V} = \bigcap_{A \in M} \Theta_A(X),$$

откуда согласно теореме 9

$$V = \widehat{\Theta_M(X)} = \bigcap_{A \in M} \widehat{\Theta_A(X)}.$$

Поэтому

$$A \in \mathrm{Alg}_Z(R) \iff V \subseteq \widehat{\Theta_A(X)} \iff A \in M.$$

□

Теорема 11. *Если R есть W-операда, то многообразие* $\mathrm{Alg}(R_W)$ *определяется W-тождествами.*

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из предыдущей теоремы. Если представить R в виде $FO_{\Omega,W}/V$, то $\mathrm{Fr}_R(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)/V(X)$. Если X – счетное множество, то многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ определяется тождествами из $V(X)$, а эта конгруэнция порождается W-парами. □

Теорема 12. *Если многообразие Ω-алгебр M определяется W-тождествами, то оно рационально эквивалентно многообразию вида* $\mathrm{Alg}(R_W)$*, где R есть W-операда.*

Доказательство. Напомним, что M полностью определяется своей свободной алгеброй $\mathrm{Fr}_M(X)$ со счетным базисом X. Поскольку это алгебра из $\mathrm{Alg}(\Omega)$, ее можно представить в виде $\mathrm{Fr}_\Omega(X)/J$, где J – вполне инвариантная конгруэнция. По условию эта конгруэнция порождается W-тождествами, а значит, по теореме 9 она имеет вид $V(X)$, где V есть конгруэнция в свободной W-операде $FO_{\Omega,W}$. Рассмотрим W-операду $R = FO_{\Omega,W}/V$. Вычисляя свободную алгебру $\mathrm{Fr}_R(X)$ многообразия $\mathrm{Alg}(R_W)$ точно так же, как это сделано при доказательстве теоремы 8, получаем $\mathrm{Fr}_R(X) \cong \mathrm{Fr}_\Omega(X)/V(X)$. Таким образом, $\mathrm{Fr}_R(X) \cong \mathrm{Fr}_M(X)$ как Ω-алгебры. Но согласно теореме 1.2.1 из [18] отсюда следует рациональная эквивалентность M и $\mathrm{Alg}(R)$. □

Замечание 3. Полагая $W = FSet$, видим, что $FSet$-тождества – это все возможные тождества в универсальных алгебрах. Таким образом, любое многообразие универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию вида $\mathrm{Alg}(R_{FSet})$, где R – некоторая $FSet$-операда. Ранее этот результат был установлен в многосортном случае в [4]. Как уже отмечалось во введении, многосортные аналоги результатов § 5 также справедливы. В случае $W = \Sigma$ результаты данного параграфа эквивалентны результатам работы [2] для случая Z-алгебр, где Z – тривиальная коммутативная операда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00431а) и гранта для поддержки ведущих научных школ НШ-5383.2012.1.

Summary

S.N. Tronin. Verbal Categories and Identities of Universal Algebras.

We give a characterization of varieties of universal algebras which are rationally equivalent to varieties of algebras over operads over arbitrary verbal categories.

Key words: verbal category, operad, variety of algebras, rational equivalence, free algebra, free operad.

Литература

1. *Тронин С.Н.* О характеризации многообразий алгебр над W-операдами // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Моск. гос. ун-та и 75-летию каф. высш. алгебры: Тез. докл. – М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. – С. 127–128.
2. *Тронин С.Н.* Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 670–694.
3. *Тронин С.Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 924–936.
4. *Тронин С.Н.* Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 1185–1202.
5. *Тронин С.Н.* Естественные мультипреобразования мультифункторов // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 11. – С. 58–71.
6. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах – М.: Мир, 1977. – 408 с.
7. *Мэй Дж.П.* Геометрия итерированных пространств петель // Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. – М.: Мир, 1977. – С. 267–403.
8. *Смирнов В.А.* Операдные и симплициальные методы в алгебраической топологии. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 272 с.
9. *Leinster T.* Higher Operads, Higher Categories. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 448 p.
10. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology and Physics. – Amer. Math. Soc., 2002. – 350 p.
11. *Markl M.* Operads and PROPs // Handbook of Algebra. V. 5. – Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 2008. – P. 87–140.
12. *Loday J.-L., Valette B.* Algebraic Operads. – 2010. – XVIII + 512 p. – URL: http://math.unice.fr/~brunov/Operads.pdf.
13. *Тронин С.Н., Гареева Л.Д.* О некоторых операдах, связанных с операдой симметрических групп. I // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 9. – С. 61–72.
14. *Джонстон П.* Теория топосов. – М.: Наука, 1986. – 440 с.
15. *Кацов Е.Б.* Тензорное произведение функторов // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19, № 2. – С. 318–327.
16. *MacLane S., Moerdijk I.* Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. – N. Y.: Springer, 1992. – 620 p.
17. *Мальцев А.И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 120, № 1. – С. 29–32.
18. *Пинус А.Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 239 с.

Поступила в редакцию
27.01.12

Тронин Сергей Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Serge.Tronin@ksu.ru*