УДК 517.95

О МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин, В.С. Кугураков

Аннотация

Проведено близкое к оптимальному уточнение полученных ранее оценок скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме для сумм функций от траекторий эндоморфизмов s-мерного евклидова пространства. Этого удалось достичь за счет использования асимптотических разложений для сумм независимых случайных величин.

Ключевые слова: эндоморфизм, тор, предельная теорема, скорость сходимости.

Пусть Ω_s – s-мерный тор. Его удобно представить как единичный куб K_s – s-мерного евклидова пространства:

$$K_s = \{\overline{x} : \overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s),\ 0 \le x_1 \le 1, \dots 0 \le x_s \le 1\}.$$

Преобразование $T : \Omega_s \to \Omega_s$, определяемое по правилу $T\overline{x} = \{\overline{x}W\}$ задает эргодический эндоморфизм Ω_s. Здесь $\{\cdot\}$ – знак дробной доли, W – невырожденная квадратная матрица, не имеющая среди характеристических чисел корней из единицы. Обозначим через $\mathrm{mes}\{\cdot\}$ инвариантную меру на Ω_s, которую можно отождествить с мерой Лебега на K_s.

Рассмотрим на K_s векторы

$$\overline{f}(\overline{x}W^k) = (f_1(\overline{x}W^k), f_2(\overline{x}W^k), \dots, f_m(\overline{x}W^k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $f_i(\overline{x})$ – вещественнозначные периодические по каждому аргументу $x_1,\ x_2, \dots,$ x_s функции, заданные на K_s.

Предполагается выполнение следующих условий:

1) существует такая постоянная $A > 0$, что

$$|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{y})| \le A\|\overline{x} - \overline{y}\|, \quad \overline{x}, \overline{y} \in K_s, \quad \|\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{s} x_i^2\right)^{1/2};$$

2) $f_i(\overline{x})$ интегрируемы по Лебегу на K_s и

$$\int\limits_{K_s} f_i(\overline{x})\, d\,\overline{x} = 0 \quad \text{для всех} \ \ i = 1, 2, \dots, m.$$

3) матрица R с элементами $\rho_{ij} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \int\limits_{K_s} \sum\limits_{k=1}^{n} f_i(\overline{x}\,W^k) \sum\limits_{k=1}^{n} f_j(\overline{x}\,W^k)\, d\,\overline{x}$ является единичной;

4) матрица W такова, что

$$\sup_{\|\overline{x}\|<1} \|\overline{x}\, W^{-1}\| < 1, \quad |\det W| > 1.$$

При выполнении этих условий в [1] при $m=1$ была доказана центральная предельная теорема для сумм $S_n = n^{-1/2}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\overline{x}\, W^k)$ без оценки остаточного члена. В работе [2] была получена оценка остаточного члена порядка $O(\ln^{3/4} n/n^{1/4})$, а в [3] для одномерного случая и в [4] для многомерного случая была получена оценка $O(n^{-1/2+\varepsilon})$. В настоящей работе указанные оценки улучшены при выполнении следующего дополнительного условия:

5)

$$\lim_{\|\overline{t}\|\to\infty} \sup_n \Big|\int\limits_{K_s} \exp\Big(\frac{i}{\sqrt{n}}\big(\overline{t}, \sum_{k=1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\, W^k)\big)\Big)\, d\,\overline{x}\Big| < 1,$$

где $(\overline{t}, \overline{f}(\overline{x}\, W^k)) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i f_i(\overline{x}\, W^k)$, $\overline{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)–5). *Тогда*

$$\sup_M \Big|\mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_s,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\, W^k) \in M\} - \Phi(M)\Big| = O\Big(\ln^{m/4+3} n/\sqrt{n}\Big),$$

где M – выпуклые измеримые множества в R^m, Φ – стандартное m-мерное нормальное распределение.

Доказательство. Приведем оценки, которые понадобятся в ходе доказательства теоремы.

Введем величины $\tau_j = \big(\overline{t}/\|\overline{t}\|, \overline{f}(\overline{x}\, W^j)\big)$. Обозначим через $\chi_\nu(n)$ семиинвариант ν-го порядка суммы $\sum\limits_{j=1}^{n}\tau_j$, то есть $\chi_\nu(n) = \dfrac{d^\nu}{dz^\nu} \ln \displaystyle\int\limits_{K_s} \exp\Big(z\sum_{j=1}^{n}\tau_j\Big) d\,\overline{x}\Big|_{z=0}$.

Лемма 1. *Существует такая постоянная H, не зависящая от ν, что справедлива оценка*

$$|\chi_\nu(n)| < H^\nu (\nu!)^2 n.$$

Доказательство. Имеет место соотношение (см. (1.4) из [1])

$$\chi_\nu(n) = \sum_{l_1,\ldots,l_\nu=1}^{n} S^{(\nu)}(l_1,\ldots,l_\nu),$$

где

$$S^\nu(\overline{l}) = \frac{\partial^\nu}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_\nu} \ln \int\limits_{K_s} \exp\Big(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \tau_{l_i}\Big)\, d\,\overline{x}\Big|_{\alpha_1=\ldots\alpha_\nu=0}.$$

Обозначим

$$J(\overline{\alpha}) = \int\limits_{K_s} \exp\Big(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \tau_{l_i}\Big)\, d\,\overline{x}.$$

Функция $J(\overline{\alpha})$ является аналитической в окрестности $u=\{\overline{\alpha},|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_\nu|\le\varepsilon_0\}$, где ε_0 достаточно мало. Поэтому она разлагается в сходящийся ν-кратный ряд Тейлора

$$J(\overline{\alpha})=\sum_{k_1,\ldots,k_\nu=0}\frac{\alpha_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu^{k_\nu}}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_\nu!}\int\limits_{K_s}\prod_{i=1}^{\nu}\tau_{l_i}^{k_i}\,d\,\overline{x}.$$

Всюду далее через C (с индексами) будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n, p, Q, N, ν.

Набор $\bar{l}=(l_1,\ldots,l_\nu)$, $1\le l_j\le n$ натуральных чисел назовем d-набором, если в его записи в виде вариационного ряда $l_1^*\le l_2^*\le\ldots\le l_\nu^*$ имеет место неравенство $2d<\max\limits_k(l_{k+1}^*-l_k^*)\le 2(d+1)$. Пусть числа $l_1,\ldots,l_\nu$ образуют d-набор и пусть $l_{r+1}-l_r>2d$. Тогда из леммы 2 работы [5] следует неравенство

$$\left|\int\limits_{K_s}\prod_{i=1}^{\nu}\tau_{l_i}^{k_i}\,d\,\overline{x}-\int\limits_{K_s}\prod_{i=1}^{r}\tau_{l_i}^{k_i}\,d\,\overline{x}\cdot\int\limits_{K_s}\prod_{i=r+1}^{\nu}\tau_{l_i}^{k_i}\,d\,\overline{x}\right|\le C_1^\nu\Theta^d,$$

где $0<\Theta<1$.

Далее, повторяя доказательство леммы 1 из [3], получим, что при любом d-наборе $(l_1,l_2,\ldots,l_\nu)$

$$\left|S^{(\nu)}(l_1,l_2,\ldots,_\nu)\right|\le C_1^\nu\Theta^d\nu!\,.$$

Можно проверить, что различных d-наборов не более чем $\nu!n(2(d+1))^{\nu-1}$. Учитывая эти оценки и разбивая в равенстве $\chi_\nu(n)=\sum\limits_{\bar{l}=1}^{n}S^{(\nu)}(\bar{l})$ суммирование по d-наборам, получим оценку

$$|\,\chi_\nu(n)|\le n\nu!\,C_1^\nu\sum_{d=0}^{n-1}(2(d+1))^{\nu-1}\Theta^d\le H^\nu(\nu!)^2n.$$

□

Лемма 2. *Если* $\nu\le C_2\sqrt{l/\ln l}$, *то*

$$\int\limits_{K_s}\left\|\sum_{k=1}^{l}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)\right\|^{2\nu}d\overline{x}\le C_3^{2\nu}(\ln l)^\nu l^\nu(2\nu)!\,.$$

Лемма доказывается аналогично лемме 1 из [6].

Приступим к доказательству теоремы. Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, $p=[n/(Q+N)]$, где $[\cdot]$ – обозначение целой части числа. Сумму $\sqrt{n}\,S_n$ запишем в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)=\sqrt{Q}\sum_{k=1}^{p}\overline{y}_k(\overline{x})+\sqrt{Q}\sum_{k=1}^{p}\overline{y}_k^{\,0}(\overline{x}),$$

где

$$\overline{y}_k(\overline{x})=\frac{1}{\sqrt{Q}}\sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N}\overline{f}(\overline{x}\,W^r),\quad 1\le k\le p,$$

$$\overline{y}_k^{\,0}(\overline{x})=\frac{1}{\sqrt{Q}}\sum_{r=kQ+(k-1)N+1}^{K(Q+N)}\overline{f}(\overline{x}\,W^r),\quad 1\le k\le p.$$

Обозначим

$$\overline{y}_{p+1}^{0}(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=p(Q+N)+1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\,W^r),$$

$$\overline{z}_p(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{p} \overline{y}_k(\overline{x}), \quad \overline{z}_p^{\,0}(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{p+1} \overline{y}_k^{\,0}(\overline{x}).$$

Основную роль в распределении суммы S_n будет играть $\overline{z}_p(\overline{x})$. Поэтому займемся оценкой распределения $\overline{z}_p(\overline{x})$. Введем в употребление векторы $\hat{\overline{y}}_k(\overline{x})$ со следующими свойствами:

1) $\mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_s,\ \hat{\overline{y}}_k(\overline{x}) \in M\} = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_s,\ \overline{y}_k(\overline{x}) \in M\}$, где M – измеримые множества из R^m;

2) $\displaystyle\int\limits_{K_s} \exp\Big(i\big(\overline{t}, \hat{\overline{z}}_p(x)/\sqrt{p}\big)\Big)\, d\,\overline{x} = \prod_{k=1}^{p} \int\limits_{K_s} \exp\Big(i\big(\overline{t}, \hat{\overline{y}}_k(\overline{x})/\sqrt{p}\big)\Big)\, d\,\overline{x}, \ \ \hat{\overline{z}}_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \hat{\overline{y}}_k(\overline{x})$.

Обозначим через Λ матрицу ковариаций вектора $\overline{y}_1(\overline{x})$. В [4] (формула (3)) показано, что элементы Λ отличаются от элементов единичной матрицы на величину $O(1/Q)$. Далее, через A обозначим такую матрицу, что $A^T \cdot A = \Lambda^{-1}$. Очевидно, что вектор $A\hat{\overline{z}}_p(\overline{x})/\sqrt{p}$ имеет единичную матрицу ковариаций.

Положим

$$G_p(M) = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_s,\ \overline{z}_p(\overline{x})/\sqrt{p} \in M\},$$
$$G_p^A(M) = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_s,\ A\overline{z}_p(\overline{x})/\sqrt{p} \in M\},$$

$$f_p(\overline{t}) = \int\limits_{K_s} \exp(i(\overline{t}, A\overline{z}_p(\overline{x})/\sqrt{p}))\, d\,\overline{x},$$

$$\hat{f}_p(\overline{t}) = \int\limits_{K_s} \exp(i(\overline{t}, A\hat{\overline{z}}_p(x)/\sqrt{p}))\, d\,\overline{x},$$

$$f(\overline{t}) = \int\limits_{K_s} \exp(i(\overline{t}, \overline{y}_1(\overline{x})))\, d\,\overline{x}.$$

Из леммы 3 работы [2] следует, что

$$|f_p(\overline{t}) - \hat{f}_p(\overline{t})| \le C_4 \sqrt{p/Q}\, \exp(-C_5\, N). \tag{1}$$

Далее, пусть

$$g_{\nu p}(\overline{t}) = \exp(-\|\overline{t}\|^2/2) \left(1 + \sum_{r=1}^{\nu} P_r\left(i\overline{t}\,\right) \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^r\right),$$

где

$$\begin{aligned} P_r(i\overline{t}) = {} & \frac{\chi_{r+2}(i\overline{t})}{(r+2)!} + \\ & + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j_l=l}^{r-1} \sum_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\cdots(j_2-j_1)}{r j_l j_{l-1}\cdots j_2 j_1} \times \\ & \times \frac{\chi_{r-j_l+2}(i\overline{t})\chi_{j_l-j_{l-1}+2}(i\overline{t})\cdots\chi_{j_2-j_1+2}(i\overline{t})\chi_{j_1+2}(i\overline{t})}{(r-j_l+2)!(j_l-j_{l-1}+2)!\cdots(j_2-j_1+2)!(j_1+2)!}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\chi_j(i\overline{t})$ – семиинвариант j-го порядка величины $(i\overline{t}, A\overline{y}_1(\overline{x}))$.

По теореме 1 из [7] при

$$\|\bar{t}\| \le \frac{\sqrt{p}}{8(h_{\nu+1}(Q))^{1/(\nu+1)}} = T_{\nu p}, \quad h_{\nu+1}(Q) = \int\limits_{K_s} \|Az_1(\overline{x})\|^{\nu+1}\, d\,\overline{x},$$

имеет место неравенство

$$|\hat{f}_p(\bar{t}) - g_{\nu p}(\bar{t})| \le 3^{\nu+2} \frac{\|\bar{t}\|^{\nu+2} \exp(-\|\bar{t}\|^2/4)}{T_{\nu p}^{\nu+1}}. \tag{3}$$

Ниже будем предполагать, что $\nu = O(\ln n)$.

Теперь для оценки отклонения $\sup\limits_M \bigl|G_p(M) - \Phi(M)\bigr|$ воспользуемся неравенством С.М. Садиковой [8]:

$$|G_p(M) - \Phi(M)| \le C_* r^{(m-1)/2}\left[I_1 + 2\sqrt{2} I_2 + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\, I_3\right] + \\ + 3\omega_\eta(\sigma) + 2P\{\|\eta\| \ge r\} + 4P\{\|\xi\| > \sigma\}, \tag{4}$$

где η – нормальный случайный вектор с распределением Φ, ξ – вектор с характеристической функцией $h(\bar{t}) = \exp(-\sigma^2\|t\|^2/2)$ и плотностью $(2\pi\sigma^2)^{-k/2}\times$ $\times \exp(-\|x\|^2/2\sigma^2)$;

$$I_1^2 = \int\limits_{\|\bar{t}\|<1} \|t\|^{-2} |f_p(t) - e^{-\|t\|^2/2}|^2\, d\bar{t}; \quad I_2^2 = \int\limits_{1<\|\bar{t}\|\le T} |f_p(\bar{t}) - e^{-\|\bar{t}\|^2/2}|^2\, d\bar{t};$$

$$I_3^2 = \int\limits_{\|\bar{t}\|>T} |h(\bar{t})|^2\, dt; \quad C_* = (2\pi)^{-m} \sqrt{\lambda_m S(O_1)}; \quad \lambda_m = (2\pi)^{m+2}\left(4\int\limits_0^\pi \sin^m\alpha\, d\alpha\right)^{-1};$$

O_1 – шар единичного радиуса с центром в начале координат; $S(O_1)$ – величина поверхности шара O_1; $\omega_\eta(\delta)$ – точная верхняя грань по всем выпуклым множествам M вероятности попадания случайного вектора η в δ – окрестность множества M.

Выберем

$$T = C_6\sqrt{Q}T_{\nu p},\ r = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{m}\sqrt{\ln T},\ \sigma = \sqrt{m(m+1)}\ \frac{\sqrt{\ln T}}{T}\ ,\ \delta = \sigma r.$$

Поскольку из леммы 2 следует, что

$$m^{(\nu+3)/2} \le \int\limits_{K_s} \|A\overline{y}_1(x)\|^{\nu+3}\, d\,\overline{x} \le C_7^{\nu+3}(\nu+3)!(\ln Q)^{(\nu+3)/2},$$

то

$$C_8 \frac{\sqrt{p}}{\nu \ln Q} < T_{\nu p} < C_9\sqrt{p}, \quad C_{10}\frac{\sqrt{p\,Q}}{\nu\ln Q} < T < C_{11}\sqrt{p\,Q}. \tag{5}$$

В работе [9] оценены некоторые члены неравенства [4]:

$$I_3 = O\left(\frac{1}{T}\right), \quad C_m r^{(m-1)/2} = O((\ln T)^{(m-1)/4}), \quad \omega_\eta(\delta) = O\left(\frac{\ln T}{T}\right).$$

$$P(\|\eta\| \ge r) = P\{\|\xi\| \ge \sigma\} = O\left(\frac{1}{T}\right), \tag{6}$$

Приступим к оценке других членов этого неравенства.

По неравенству Минковского, имеем

$$I_1 \le I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)},$$

где

$$I_1^{(1)} = \Big(\int\limits_{\|t\|\le 1} \|t\|^{-2} |f_p(\bar t) - \hat f_p(\bar t)|^2 d\bar t \Big)^{1/2},$$

$$I_1^{(2)} = \Big(\int\limits_{\|t\|\le 1} \|t\|^{-2} |\hat f_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)|^2 d\bar t \Big)^{1/2},$$

$$I_1^{(3)} = \Big(\int\limits_{\|t\|\le 1} \|t\|^{-2} |g_{\nu p}(\bar t) - e^{-\|\bar t\|^2/2}|^2 d\bar t \Big)^{1/2}.$$

При оценке $I_1^{(1)}$ используем тот же прием, что и в [4]. Для этого в неравенстве (1) положим $N = [\omega_1 \ln n]$, тогда $I_1^{(1)} = O(n^{-\omega_2}\sqrt{p/Q})$. Здесь и всюду ниже через ω обозначены достаточно большие положительные постоянные.

Согласно неравенству (3) и соотношениям (5)

$$I_1^{(2)} = O\bigg(\frac{3^{\nu+2}}{T_{\nu p}^{\nu+1}} \bigg) = O\bigg(\frac{3^{\nu+2}\nu^\nu \ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} \bigg).$$

Далее из леммы 1 следует, что

$$|\chi_r(it)| = O\bigg(\frac{(r!)^2 H^r \|\bar t\|^r}{Q^{(r-2)/2}} \bigg), \quad r = 3, 4, \ldots$$

Поэтому

$$|P_r(i\bar t)| = O\bigg(\sum_{l=1}^{r} \frac{H^{r+2l} r^{2l+2r} \|\bar t\|^{r+2l}}{Q^{(l+r-1)/2}} \bigg)$$

и

$$I_1^{(3)} = O\bigg(\int\limits_{\|\bar t\|<1} \bigg(\sum_{r=1}^{\nu} \frac{H^r r^{2r}}{(p\,Q)^{r/2}} \bigg)^2 d\bar t \bigg)^{1/2} = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{p\,Q}} \bigg).$$

Окончательно,

$$I_1 = O\bigg(n^{-\omega_2}\sqrt{\frac{p}{Q}} + \frac{3^{\nu+2}\nu^\nu \ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}} \bigg). \tag{7}$$

Далее,

$$I_2 \le I_2^{(1)} + I_2^{(2)} + I_2^{(3)},$$

где подынтегральные выражения в $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, $I_2^{(3)}$ такие же, как в $I_1^{(1)}$, $I_1^{(2)}$, $I_1^{(3)}$, за исключением $\|\bar t\|^{-2}$.

Оценки для $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(3)}$ получаются аналогично оценкам для $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(3)}$:

$$I_2^{(1)} = O\bigg(\frac{p\,T^m}{n^{\omega_3}} \sqrt{\frac{p}{Q}} \bigg), \quad I_2^{(3)} = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{p\,Q}} \bigg).$$

Для оценки $I_2^{(2)}$ запишем

$$I_2^{(2)} = \Bigg(\int\limits_{1<\|\bar t\|\le T} |\hat f_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)|^2\, d\bar t \Bigg)^{1/2} \le I_2^{(21)} + I_2^{(22)},$$

где в силу неравенства (3)

$$I_2^{(21)} = \int\limits_{1<\|\bar t\|\le T_{\nu p}} |\hat f_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)|^2\, d\bar t = O\bigg(\frac{C_{12}^{\nu+2}}{T_{\nu p}^{\nu+1}} \bigg) = O\bigg(\frac{C_{12}^{\nu+2}\nu!\ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} \bigg).$$

$$I_2^{(22)} = \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|<T} |\hat f_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} \le$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} |\hat f_p(\bar t)|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} |g_{\nu p}(\bar t)|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} = I_1' + I_2'.$$

Имеем

$$I_1' = \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} \bigg| f^p\bigg(\frac{A^T\bar t}{\sqrt p} \bigg) \bigg|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} = \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}/\sqrt p<\|\bar t\|\le T/\sqrt p} p^m \Big| f\big(A^T\bar t\big) \Big|^{2p} d\bar t \Bigg)^{1/2}.$$

Согласно условию 5) существует такая положительная константа C_{13}, что

$$|f(A^T\bar t)| \le e^{-C_{13}}.$$

Поэтому

$$I_1' = O\Big((pQ)^{m/2} e^{-C_{13}p} \Big).$$

Так же, как при оценке $I_1^{(3)}$, с учетом (5) получим, что

$$I_2' = \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} \bigg| e^{-\|t\|^2/2} \Big(1 + O\big(\sum_{r=1}^{\nu} \frac{H^r r^{2r}\|\bar t\|^{2r}}{(p\,Q)^{r/2}} \big) \Big) \bigg|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} =$$

$$= O(e^{-T_{\nu p}/4}) = O(e^{-C_{14}\sqrt p/(\nu\ln Q)}).$$

Таким образом,

$$I_2 = O\Bigg(\frac{pT^m}{n^{\omega_3}} \sqrt{\frac{p}{Q}} + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}} + \frac{C_{15}^{\nu+2}\nu!\ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} + (p\,Q)^{m/2} e^{-C_{13}p} + e^{-C_{14}\sqrt p/(\nu\ln Q)} \Bigg). \quad (8)$$

Из (4)–(8) получим

$$\sup_M |G_p^A(M) - \Phi(M)| = O\Bigg(\ln^{(m-1)/4}(p\,Q) \bigg(\frac{(pQ)^{(m+1)/2}}{n^{\omega_4}} + \frac{p^{(m+3)/2}Q^{(m-1)/2}}{n^{\omega_3}} +$$

$$+ \frac{C_{15}^{\nu+2}\nu^\nu\ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} + (p\,Q)^{m/2}e^{-C_{13}p} + e^{-C_{14}\sqrt p/(\nu\ln Q)} + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}} \bigg) + \frac{\nu\ln(p\,Q)\ln Q}{\sqrt{p\,Q}} \Bigg). \quad (9)$$

Полученная оценка справедлива и для $\sup\limits_M |G_p(M)-\Phi_\Lambda(M)|$, где $\Phi_\Lambda(M)$ – нормальное распределение с матрицей ковариаций Λ и нулевым вектором математических ожиданий. Поскольку элементы Λ отличаются от элементов единичной матрицы на величину $O(1/Q)$, то

$$\sup_M |G_p(M)-\Phi(M)| = \sup_M |G_p(M)-\Phi_\Lambda(M)| + O(1/Q). \qquad (10)$$

Теперь для оценки распределения вектора

$$\frac{\overline{z}_p(\overline{x})+z_p^0(\overline{x})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)$$

используем прием, описанный в [6]. Имеем

$$\operatorname{mes}\{\overline{x}: \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}\,W^k)\in M\} = \Phi(M)+\Theta_1\Phi(M_0)+$$
$$+\,\Theta_2\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_s,\ ||\overline{z}_p^0(\overline{x})/\sqrt{p}||>\varepsilon\} + O(\sup_M |G_p(M)-\Phi(M)),$$
$$|\Theta_1|\le 1,\quad |\Theta_2|\le 1, \qquad (11)$$

где M_0 – ε-окрестность границы выпуклого множества M.

Выберем $\varepsilon=\omega_5\sqrt{N\ln n/Q}$. Тогда, используя лемму 6 из [6], получим

$$\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_s,\ \|z_p^0(\overline{x})/\sqrt{p}\ \|>\varepsilon\}\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{m}\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_s,\ |z_{ip}^0(\overline{x})/\sqrt{p}|>\varepsilon/\sqrt{m}\} = O\left(\frac{1}{n^{\omega_5}}+\sqrt{p/Q}e^{-C_{16}Q}\right). \qquad (12)$$

Здесь $\overline{z}_{ip}^0(\overline{x})$ – компоненты вектора $\overline{z}_p(\overline{x})$.

Далее, из оценки $\Phi(M_0)=O(2^m\varepsilon)$ (формула (4.8) из [9]) и оценки (12), вытекает, что

$$\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_s, \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}\,W^k)\in M\} =$$
$$=\Phi(M)+O\left(\frac{\sqrt{N\ln n}}{Q}+\frac{1}{n^{\omega_4}}+\sqrt{p/Q}e^{-C_{16}Q}+\sup|G_p(M)-\Phi(M)|\right). \qquad (13)$$

Выберем теперь $p=[\omega_6\ln^5 n]$, $\nu=[\ln n]$, а Q из условия

$$|n-p(Q+N)|<p. \qquad (14)$$

Из (9), (10), (13) имеем

$$\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_s,\ \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\ \sum_{k=1}^{p}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)\in M\} = \Phi(M)+O\left(\frac{\ln^{m/4+3} n}{\sqrt{n}}\right). \qquad (15)$$

При получении (15) использовали следующие соотношения:

$$Q=O(n/\ln^5 n),\quad N=[\omega_1\ln n],\quad pQ=O(n),$$

$$\frac{C_{15}^{\nu+2}\nu^\nu \ln^\nu Q}{p^{(\nu+1)/2}} = O\left(\frac{C_{15}^{\ln n}\ln n^{2\ln n}}{(\ln^5 n)^{\ln n/2}}\right) = O\left(\frac{C_{15}^{\ln n}}{\ln n^{\ln n/2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\omega_7}}\right),$$

$$\sqrt{\frac{N\ln n}{Q}} = O\left(\frac{\ln^{5/2} n}{\sqrt{n}}\right), \quad (p\,Q)^{m/2}e^{-C_{13}p} = O\left(n^{m/2}n^{-C_{13}\ln^4 n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\omega_8}}\right),$$

$$\frac{\nu\ln(p\,Q)\ln Q}{\sqrt{p\,Q}} = O\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right).$$

Для замены $1/\sqrt{p\,Q}$ на $1/\sqrt{n}$ в соотношении (15) используем неравенство (10), из которого следует

$$\sqrt{\frac{n}{p\,Q}} = 1 + O\left(\frac{N}{Q}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k) = \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k) + C_{17}\,\frac{N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}\,(\overline{x}\,W^k).$$

Используя неравенство Маркова и лемму 2, получим

$$\operatorname{mes}\left\{\overline{x} : \left\|\frac{C_{17}N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)\right\| > \frac{N+1}{\sqrt{Q}}\right\} \le \frac{C_{18}^{2\nu}(\ln n)^\nu(2\nu)!n^\nu}{Q^{2\nu}p^\nu},$$

где $\nu = [\ln n]$.

Это позволяет аналогично использованию (11) оценить погрешность при замене распределения вектора $\dfrac{1}{\sqrt{p\,Q}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)$ на распределение $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)$. Эта погрешность имеет вид

$$O\biggl(\frac{N+1}{\sqrt{Q}} + \frac{C_{18}^{2\nu}(\ln n)^\nu(2\nu)!\,n^\nu}{Q^{2\nu}p^\nu}\biggr) = O\biggl(\frac{\ln^{7/2} n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\omega_7}}\biggr). \tag{16}$$

Оценки (15) и (16) приводят нас к окончательному результату.

Теорема доказана.

Так как расстояние между распределениями векторов инвариантно по отношению к невырожденным линейным преобразованиям этих векторов, то наша теорема справедлива и в случае, когда матрица R не является единичной. Дальнейшие уточнения оценок скорости сходимости в нашей теореме возможны выбором в качестве выпуклых множеств M m-мерных шаров с центром в начале координат, как в работе [10].

Summary

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin, V.S. Kugurakov. On the Multidimensional Limit Theorem for Endomorphisms of the Euclidean Space.

Nearly optimal refinement of the earlier estimates of the convergence rate in the multidimensional central limit theorem for sums of functions of the trajectories of endomorphisms of the s-dimensional Euclidean space was performed. This was achieved through the use of asymptotic expansions for sums of independent random variables.

Keywords: endomorphism, torus, limit theorem, convergence rate.

Литература

1. *Леонов В.П.* Некоторые приложения старших семиинвариантов в теории случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 69 с.
2. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань. Казан. гос. ун-т, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
3. *Дубровин В.Т.* Большие уклонения в центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 195–210.
4. *Габбасов Ф.Г., Дубровин В.Т.* Оценка скорости сходимости в многомерной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 55–66.
5. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Т. XXIV, № 3. – С. 553–563.
6. *Дубровин В.Т.* Большие уклонения в центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 195–210.
7. *Бикялис А.* О многомерных характеристических функциях // Лит. матем. сб. – 1968. – Т. VIII, № 1. – С. 21–40.
8. *Садикова С.М.* Расстояния между распределениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 787–789
9. *Садикова С.М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятности и её применения. – Казань: Казан. гос. ун-т. – 1968. – Т. XIII, № 1. – С. 164–170.
10. *Габбасов Ф.Г.* О многомерной предельной теореме для сумм $\sum f(t2^k)$ // Изв. вузов. Матем. – 1987. – № 9. – С. 26–35.

Поступила в редакцию
19.01.15

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Габбасов Фарит Гаязович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.
E-mail: *gabbasov@kgasu.ru*

Кугураков Владимир Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической кибернетики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.