

М.Г. ЮМАГУЛОВ, М.Ф. ФАЗЛЫТДИНОВ

БИФУРКАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Одними из основных в теории локальных бифуркаций и ее приложениях являются вопросы о направленности бифуркаций (суб- или суперкритичность) и об устойчивости решений, возникающих в окрестности негиперболической точки равновесия или цикла динамической системы. Рассматриваются задачи о локальных бифуркациях в динамических системах с дискретным временем. Предлагаются новые признаки, позволяющие определить направленность бифуркаций и свойства устойчивости бифуркационных решений для задач об основных сценариях бифуркаций. Также предлагаются новые алгоритмы построения центральных многообразий соответствующих задач, позволяющие получить новые бифуркационные формулы, в частности, формулы для вычисления ляпуновских величин. Предлагаемые алгоритмы и формулы основаны на общем операторном методе исследования задач о локальных бифуркациях и позволяют в новых условиях проводить эффективный качественный анализ бифуркаций в терминах исходных уравнений.

Ключевые слова: динамическая система, дискретная система, точка равновесия, локальная бифуркация, бифуркационная формула, устойчивость, ляпуновская величина, центральное многообразие, нормальная форма.

УДК: 517.938

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-72-89

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается зависящая от параметра $\mu \in \mathbb{R}^K$ динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n, \mu), \quad x_n \in \mathbb{R}^N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где матрица $A(\mu)$ и функция $a(x, \mu)$ непрерывно дифференцируемы по x и μ ,

$$a(x, \mu) = a_2(x, \mu) + a_3(x, \mu) + \tilde{a}_4(x, \mu), \quad (2)$$

$a_2(x, \mu)$ и $a_3(x, \mu)$ являются соответственно квадратичными и кубическими по x слагаемыми, а $\tilde{a}_4(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению $\|\tilde{a}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$, равномерно по μ .

Система (1) при любых значениях параметра μ имеет точку равновесия $x = 0$. Предполагается, что при некотором $\mu = \mu_0$ эта точка является *негиперболической*, т.е. матрица $A(\mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений, модуль которых равен единице. В этом случае значение μ_0 называют *точкой бифуркации* или *бифуркационным значением*

параметра системы (1). Основными являются следующие случаи негиперболичности, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет

- P1) простое собственное значение 1;
- P2) простое собственное значение -1 ;
- P3) пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и $\theta_0 \neq 1/3, 1/4$.

Во всех этих случаях предполагается, что матрица $A(\mu_0)$ не имеет других собственных значений, модуль которых равен единице.

Коразмерность соответствующих бифуркаций во всех этих случаях равна единице. Поэтому всюду ниже будем предполагать, что параметр μ является скалярным.

Отметим, что случай негиперболичности, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 — одно из чисел $1/3$ или $1/4$, относят к *сильному резонансу* и не рассматривается. В этой связи отметим также, что подслучай случая P3), когда θ_0 рационально, называют *слабым резонансом*.

Случаи P1)–P3) приводят к разным сценариям локальных бифуркаций в системе (1): возникновению в окрестности точки $x = 0$ ненулевых точек равновесия (случай P1)), циклов периода два (случай P2)), инвариантных торов (случай P3)) (например, [1]– [4]). Строго говоря, реализация указанных сценариев требует также выполнения условий трансверсальности в той или иной форме; некоторые из таких условий будут указаны ниже.

Исследованию различных вопросов, связанных с бифуркациями в динамических системах, посвящено огромное число работ (например, [1]–[9]). Здесь важным представляется получение так называемых *бифуркационных формул*, позволяющих получать ответы на важнейшие вопросы о свойствах бифуркации таких как условия трансверсальности, направленность бифуркации (суб- или суперкритичность), устойчивость возникающих решений и т. п. Примером бифуркационных формул являются ляпуновские величины.

В задаче построения бифуркационных формул условно следует выделить два подхода. Первый подход связан с построением таких формул в терминах исходных уравнений. Получаемые при этом формулы, как правило, достаточно сложны (например, [1], с. 209; [2], с. 99; или [4], с. 110). Основным преимуществом этих формул является именно тот факт, что они позволяют проводить анализ бифуркаций непосредственно в терминах исходных уравнений.

Второй подход связан с применением теорем о центральном многообразии [1], [4], [10]–[12] и метода нормальных форм [1], [2], [6], [9], [13]. Получаемые при этом бифуркационные формулы оказываются существенно проще и достаточно эффективными для анализа бифуркации. Однако использование этих формул для исследования конкретных уравнений, как правило, требует предварительного преобразования исходных уравнений, что далеко не всегда является тривиальной задачей.

Вопрос о том, какой из подходов лучше, не имеет однозначного ответа, так как разные классы задач обладают различными свойствами и, следовательно, в одних ситуациях какие-либо методы предпочтительнее других, а в других — наоборот. Следует также помнить, что применяемые различные подходы с необходимостью дают одни и те же окончательные формулы (если, конечно, их правильно сравнивать).

Результаты данной работы относятся к первому подходу. В ней, во-первых, предлагаются новые бифуркационные формулы в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций системы (1) в терминах исходных уравнений. Во-вторых, предлагаются новые алгоритмы построения центральных многообразий соответствующих нелинейных отображений. Предлагаемые формулы и алгоритмы позволяют в новых условиях провести эффективный

качественный анализ основных сценариев бифуркаций и, в частности, получить новые формулы для вычисления ляпуновских величин. Предлагаемые схемы исследования получены на основе общего операторного метода исследования локальных бифуркаций динамических систем [15], [16].

Полученные в работе результаты могут быть перенесены (с естественными модификациями) на исследование локальных бифуркаций в окрестностях негиперболических циклов дискретных систем, а также на исследование аналогичных задач для систем, которые описываются неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями, в частности, уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где матрица $A(t, \mu)$ и нелинейность $a(x, t, \mu)$ являются T -периодическими по t , причем $a(x, t, \mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $x \rightarrow 0$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СЦЕНАРИЕВ БИФУРКАЦИЙ

2.1. Случай P1) (бифуркация положений равновесия).

2.1.1. *Условия бифуркации.* Основным сценарием здесь является бифуркация, связанная с возникновением в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (1) ненулевых точек равновесия. Приведем соответствующие понятия (например, [15], [16]).

Значение μ_0 называют *точкой бифуркации положений равновесия* системы (1), если существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при каждом $\mu = \mu_k$ система (1) имеет ненулевую точку равновесия $x = x_k^*$, при этом $x_k^* \rightarrow 0$. Решения x_k^* системы (1) и соответствующие значения параметра μ_k называют *бифурцирующими* решениями системы (1).

Очевидно, если μ_0 является точкой бифуркации положений равновесия системы (1), то матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 1. Но не всякое μ_0 , для которого матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 1, является точкой бифуркации положений равновесия системы (1).

Приведем один из вариантов достаточного условия бифуркации (например, [15]). При близких к μ_0 значениях μ матрица $A(\mu)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda(\mu)$ так, что функция $\lambda(\mu)$ непрерывно дифференцируема и $\lambda(\mu_0) = 1$. Тогда если

$$\gamma_0 \equiv \lambda'(\mu_0) \neq 0, \quad (3)$$

то μ_0 будет точкой бифуркации положений равновесия системы (1).

2.1.2. *Непрерывные ветви бифурцирующих решений.* Бифурцирующие решения системы (1), как правило, образуют непрерывные ветви в следующем смысле. Существует $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\mu(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon)$ такие, что при $\mu = \mu(\varepsilon)$ система (1) имеет ненулевую (при $\varepsilon \neq 0$) точку равновесия $x = x(\varepsilon)$ так, что $x(0) = 0$ и $\mu(0) = \mu_0$.

Отметим следующее. Область значений функции $\mu(\varepsilon)$ может представлять собой: (S1) интервал $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0 + \delta_0)$, (S2) промежуток $[\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ или $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0]$, (S3) точку $\mu = \mu_0$. Последний случай называют вырожденным; он типичен, например, для линейных или консервативных систем. Первые два случая имеют место при выполнении некоторых условий невырожденности относительно нелинейного слагаемого (2) системы (1). В случае (S1) говорят о *транскритической бифуркации*, в случае (S2) — о *бифуркации типа вилки*, а в случае (S3) — о *взрывной бифуркации*. На рис. 1 непрерывные ветви бифурцирующих решений представлены кривыми, трансверсально пересекающими ось μ в точке μ_0 . Точки на кривых изображают отдельные бифурцирующие решения (точки равновесия) системы

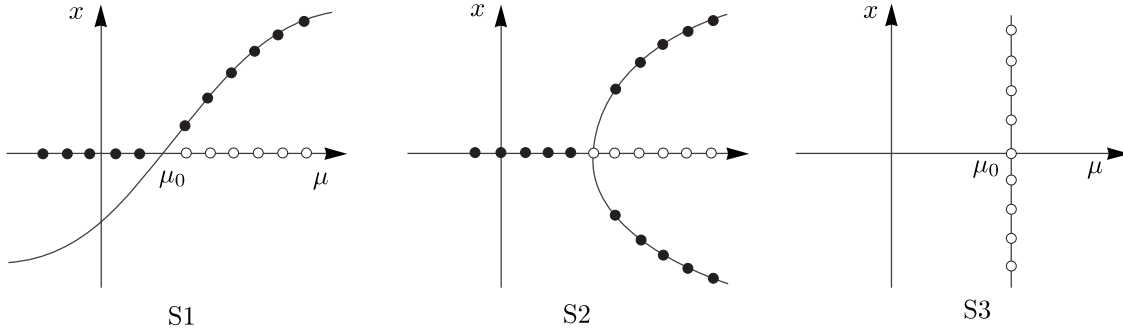


Рис. 1. Непрерывные ветви бифурцирующих решений: (S1) — транскритическая бифуркация, (S2) — бифуркация типа вилки, (S3) — взрывная бифуркация.

(1). Закрашенные точки изображают устойчивые точки равновесия, а незакрашенные — неустойчивые.

Таким образом, при транскритической бифуркации система (1) имеет единственную непрерывную ветвь бифурцирующих решений $x^*(\mu)$, определенную в некотором интервале $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0 + \delta_0)$ так, что $x^*(\mu_0) = 0$ и $x^*(\mu) \neq 0$ при $\mu \neq \mu_0$. При бифуркации типа вилки система (1) имеет две непрерывные ветви бифурцирующих решений $x_1^*(\mu)$ и $x_2^*(\mu)$, определенные в одном из промежутков $[\mu_0, \mu_0 + \delta_0)$ или $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0]$ так, что $x_j^*(\mu_0) = 0$ и $x_j^*(\mu) \neq 0$ ($j = 1, 2$) для $\mu \neq \mu_0$, при этом для значений μ из другого промежутка система (1) не имеет бифурцирующих решений. При взрывной бифуркации для $\mu < \mu_0$ и $\mu > \mu_0$ система (1) не имеет бифурцирующих решений, а при $\mu = \mu_0$ сразу возникает континуум точек равновесия.

2.1.3. *Бифуркационные формулы.* Приведем новые бифуркационные формулы для задачи о бифуркации положений равновесия системы (1), позволяющие получать ответы на вопрос о том, какой из случаев (S1), (S2) или (S3) реализуется (направленность бифуркации), а также на вопрос о свойствах устойчивости возникающих решений. С этой целью через e и g обозначим собственные векторы матрицы $A_0 = A(\mu_0)$ и сопряженной матрицы $A^*(\mu_0)$, соответствующие собственному значению 1. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами

$$\|e\| = 1, \quad (e, g) = 1. \tag{4}$$

Тогда для вычисления числа (3) можно воспользоваться следующей формулой (см. [15], [17]):

$$\gamma_0 = (A'(\mu_0)e, g); \tag{5}$$

здесь $A'(\mu)$ — матрица производных элементов матрицы $A(\mu)$.

Всюду ниже для простоты будет использоваться одно и то же обозначение для квадратной вещественной матрицы и порождаемого ею линейного оператора в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^N .

Обозначим через P_0 и P^0 действующие в \mathbb{R}^N линейные операторы, определенные равенствами

$$P_0x = (x, g)e, \quad P^0 = I - P_0 \tag{6}$$

(если $N = 1$, то $P_0x = x$ и $P^0x = 0$). Положим $B_0 = I - A_0 + P_0$. По построению оператор $B_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ обратим. Наконец, для простоты обозначений положим

$$a_2 = a_2(e, \mu_0), \quad a_3 = a_3(e, \mu_0), \quad a'_2 = a'_2(e, \mu_0); \tag{7}$$

здесь $a'_2(x, \mu)$ — матрица Якоби вектор-функции $a_2(x, \mu)$.

Введем числа

$$l_1 = (a_2, g), \quad l_2 = (a'_2 B_0^{-1} P^0 a_2, g) + (a_3, g). \quad (8)$$

В приводимых ниже утверждениях предполагается, что модули отличных от единицы собственных значений матрицы A_0 меньше единицы.

Теорема 1. Пусть $\gamma_0 l_1 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой транскритической бифуркации системы (1). Если при этом $\gamma_0 < 0$ ($\gamma_0 > 0$), то возникающая непрерывная ветвь бифурцирующих решений $x^*(\mu)$ при $\mu > \mu_0$ состоит из неустойчивых (асимптотически устойчивых) точек равновесия, а при $\mu < \mu_0$ — асимптотически устойчивых (неустойчивых).

Теорема 2. Пусть $l_1 = 0$ и $\gamma_0 l_2 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации типа вилки системы (1). Если при этом $\gamma_0 l_2 > 0$ ($\gamma_0 l_2 < 0$), то непрерывные ветви точек равновесия $x_1^*(\mu)$ и $x_2^*(\mu)$ возникают при $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$). Эти точки равновесия асимптотически устойчивы (неустойчивы), если $l_2 < 0$ ($l_2 > 0$).

Доказательства этих и других основных утверждений работы приводятся в разделе 4.

Замечание 1. Если в условиях теорем 1 и 2 матрица A_0 имеет хотя бы одно собственное значение, модуль которого превосходит единицу, то возникающие непрерывные ветви бифурцирующих решений системы (1) будут состоять только из неустойчивых точек равновесия.

Замечание 2. Числа (8) определяют те же свойства бифуркации, что первая и вторая ляпуновские величины для задачи о бифуркации положений равновесия системы (1) ([2], с. 179). Более того, при доказательстве теорем 1, 2 устанавливается, что числа (8) совпадают с этими ляпуновскими величинами.

Замечание 3. Имеется лишь два варианта выбора нормировки векторов e и g в соответствии с равенствами (4): эти варианты отличаются лишь знаками. Поэтому по сути предлагаются два варианта бифуркационных формул для l_1 и l_2 . В этих вариантах числа l_1 отличаются лишь знаками, а числа l_2 совпадают.

2.1.4. Пример 1. Рассмотрим зависящую от параметра μ двумерную систему

$$x_{n+1} = (1 + \mu)x_n + 2x_n y_n, \quad y_{n+1} = \mu x_n + q y_n + x_n^2 + y_n^2, \quad (9)$$

в которой число q фиксировано, $|q| < 1$. Эта система является системой вида (1) при $N = 2$, $A(\mu) = \begin{bmatrix} 1+\mu & 0 \\ \mu & q \end{bmatrix}$ и с квадратичной нелинейностью $a_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$.

Матрица $A(\mu)$ при $\mu = 0$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = q$. Поэтому следует ожидать, что при переходе параметра μ через значение $\mu = 0$ в окрестности точки равновесия $(0, 0)$ системы (9) возникают ненулевые точки равновесия. Действительно, вычисления по формулам (4)–(8) приводят к равенствам $\gamma_0 = 1$, $l_1 = 0$ и $l_2 = 2/(1 - q)$. Поэтому из теоремы 2 следует, что для системы (9) значение $\mu = 0$ является точкой бифуркации типа вилки. Так как $\gamma_0 > 0$ и $l_2 > 0$, то непрерывные ветви ненулевых точек равновесия системы (9) возникают при $\mu < 0$ и эти точки равновесия неустойчивы.

Проведенный анализ может быть подтвержден и прямыми вычислениями, показывающими, что у системы (9) действительно при $\mu < 0$ возникают две непрерывные ветви ненулевых точек равновесия

$$(x_{1,2}^*(\mu), y_{1,2}^*(\mu)) = \left(\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu(q-1)}}{2}, -\frac{\mu}{2} \right),$$

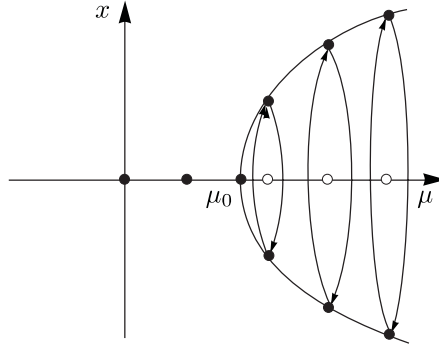


Рис. 2. Непрерывные ветви бифурцирующих решений: бифуркация удвоения периода

которые являются неустойчивыми.

2.2. **Случай P2)** (бифуркация удвоения периода).

2.2.1. *Условия бифуркации.* В данном случае реализуется бифуркация, связанная с возникновением циклов периода два. Приведем соответствующее понятие (например, [15], [16]).

Значение μ_0 называют *точкой бифуркации удвоения периода* системы (1), если существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при каждом $\mu = \mu_k$ система (1) имеет нестационарный цикл $x_k^* = \{x_0^k, x_1^k\}$ периода два, при этом $\max_{0 \leq i \leq 1} \|x_i^k\| \rightarrow 0$.

Очевидно, если μ_0 является точкой бифуркации удвоения периода системы (1), то матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение -1 . Но не всякое μ_0 , для которого матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение -1 , является точкой бифуркации удвоения периода системы (1).

Здесь имеет место аналог достаточного условия (3) бифуркации положений равновесия. А именно, при близких к μ_0 значениях μ матрица $A(\mu)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda(\mu)$ так, что функция $\lambda(\mu)$ непрерывно дифференцируема и $\lambda(\mu_0) = -1$. Тогда если $\gamma_0 = \lambda'(\mu_0) \neq 0$, то μ_0 будет точкой бифуркации удвоения периода системы (1).

Далее, как и в случае P1), здесь также возникают ненулевые ветви бифурцирующих решений. А именно, в случае P2), как правило, система (1) имеет в точности одну непрерывную ветвь циклов периода два $x^*(\mu) = \{x_1(\mu), x_2(\mu)\}$, определенную в одном из промежутков $[\mu_0, \mu_0 + \delta_0]$ или $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0]$ так, что $x^*(\mu_0) = 0$ и $x^*(\mu) \neq 0$ при $\mu \neq \mu_0$. При этом для значений μ из другого промежутка система (1) не имеет бифурцирующих решений.

На рис. 2 схематично изображена непрерывная ветвь бифурцирующих решений $x^*(\mu) = \{x_1(\mu), x_2(\mu)\}$ системы (1) в задаче о бифуркации удвоения периода. Эта ветвь образована двумя непрерывными функциями $x_1(\mu)$ и $x_2(\mu)$. Стрелки соединяют точки, образующие циклы периода два системы (1).

2.2.2. *Бифуркационные формулы.* Приведем новые бифуркационные формулы для задачи о бифуркации удвоения периода системы (1), позволяющие получать ответы на вопросы о направленности бифуркации и о свойствах устойчивости возникающих решений. С этой целью через e и g обозначим собственные векторы матрицы $A(\mu_0)$ и сопряженной матрицы $A^*(\mu_0)$, соответствующие собственному значению -1 . Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами (4). Тогда для вычисления числа $\gamma_0 = \lambda'(\mu_0)$ можно воспользоваться [15] формулой (5).

Обозначим через P_0 и P^0 действующие в \mathbb{R}^N операторы, определенные равенствами (6) применительно к рассматриваемому случаю P2). По построению линейный оператор $I - A_0^2 + P_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ обратим. Положим $\Gamma_0 = (I - A_0^2 + P_0)^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Далее для краткости будем использовать обозначения (7) применительно к рассматриваемому случаю P2).

Положим

$$l_1 = -\frac{(2a_3 + a'_{2x}[I + \Gamma_0(I + A_0)^2]a_2, g)}{2}. \quad (10)$$

В приводимом ниже утверждении дополнительно предполагается, что модули отличных от -1 собственных значений матрицы A_0 меньше единицы.

Теорема 3. Пусть $\gamma_0 l_1 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации удвоения периода системы (1). Если при этом $\gamma_0 l_1 > 0$ ($\gamma_0 l_1 < 0$), то непрерывные ветви $x^*(\mu) = \{x_1(\mu), x_2(\mu)\}$ циклов периода два возникают при $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$). Если $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$), то циклы $x^*(\mu) = \{x_1(\mu), x_2(\mu)\}$ являются асимптотически устойчивыми (неустойчивыми).

Здесь также имеет место аналог замечания 1, а также следующий аналог замечания 2.

Замечание 4. Число (10) определяет те же свойства бифуркации, что и первая ляпуновская величина для задачи о бифуркации удвоения периода системы (1) ([2], с. 193). Более того, при доказательстве теоремы 3 устанавливается, что число (10) совпадает с этой ляпуновской величиной.

Рассмотрим частный случай, когда система (1) является скалярной, т.е. рассмотрим уравнение

$$x_{n+1} = \beta_1(\mu)x_n + \beta_2(\mu)x_n^2 + \beta_3(\mu)x_n^3 + O(x_n^4), \quad x_n \in \mathbb{R}^1,$$

в котором функции $\beta_j(\mu)$ являются гладкими, причем $\beta_1(\mu_0) = -1$. В этом случае формула (10) упрощается:

$$l_1 = -(\beta_2^2 + \beta_3), \quad (11)$$

где $\beta_2 = \beta_2(\mu_0)$ и $\beta_3 = \beta_3(\mu_0)$.

2.2.3. Пример 2 (бифуркация удвоения периода в модели Эно (Hénon map)). Рассмотрим модель Эно (например, [2]):

$$u_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = a - \mu u_n - v_n^2, \quad (12)$$

в которой $0 < a < 3$ и $-1 < \mu < 1$. Ниже значение a будем считать фиксированным, а μ будет рассматриваться как бифуркационный параметр.

Система (12) имеет точку равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$, где

$$u^*(\mu) = v^*(\mu) = \frac{-(1 + \mu) + \sqrt{(1 + \mu)^2 + 4a}}{2}.$$

Произведя в (12) замену $u = x + u^*(\mu)$ и $v = y + v^*(\mu)$, перейдем к системе

$$x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = -\mu x_n - 2u^*(\mu)y_n - y_n^2,$$

т.е. к системе вида (1) при $N = 2$ и

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2u^*(\mu) \end{bmatrix}, \quad a(w, \mu) = a_2(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y^2 \end{bmatrix}; \quad (13)$$

здесь $w = (x, y)$. Матрица $A(\mu)$ при $\mu = \mu_0 = 2\sqrt{a/3} - 1$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -\mu_0$. Поэтому следует ожидать, что при переходе параметра μ через значение $\mu = \mu_0$ в окрестности точки равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$ системы (12) возникают циклы периода два.

Действительно, вычисления по формулам (4)– (7) и (10) приводят к равенствам $\gamma_0 = \frac{3}{2(1-\mu_0)}$ и $l_1 = \frac{1}{2(\mu_0^2-1)}$. Тогда $l_1\gamma_0 < 0$ и $l_1 < 0$. Отсюда и из теоремы 3 получим, что циклы периода два в окрестности точки равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$ системы (12) возникают при $\mu < \mu_0$ и они являются асимптотически устойчивыми.

2.3. Случай P3 (бифуркация Андронова–Хопфа).

2.3.1. *Условия бифуркации.* Для простоты ограничимся изучением ситуации, когда система (1) является двумерной:

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n, \mu), \quad x_n \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{14}$$

причем будем считать

$$A(\mu) = \rho(\mu) \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) & -\sin 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) \\ \sin 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) & \cos 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) \end{bmatrix},$$

где число θ_0 удовлетворяет условиям случая P3), а гладкие функции $\rho(\mu)$ и $\omega(\mu)$ — условиям $\rho(\mu_0) = 1$ и $\omega(\mu_0) = 0$.

Основным сценарием бифуркации в случае P3) является бифуркация Андронова–Хопфа (см. [1]–[3]). А именно, при переходе параметра μ через μ_0 в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (14) обычно возникает замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$, которая ограничивает область притяжения (отталкивания) неподвижной точки $x = 0$ системы (рис. 3). Кривая $\Gamma(\mu)$ гладко зависит от μ и она стягивается к точке $x = 0$ при $\mu \rightarrow \mu_0$. Динами-

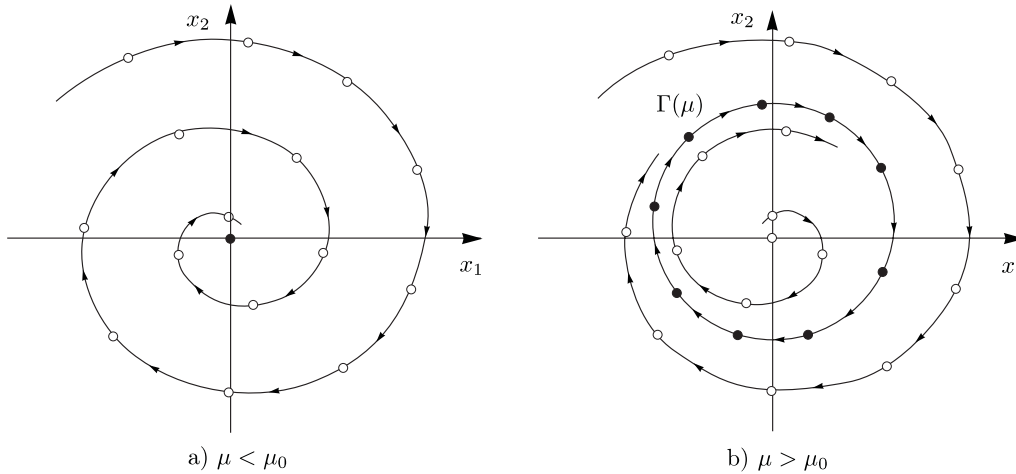


Рис. 3. Бифуркация Андронова–Хопфа

ка системы (14) на кривой $\Gamma(\mu)$ может быть достаточно сложной, содержащей различные семейства квазипериодических и периодических траекторий. В общей ситуации при стремлении μ к μ_0 на кривой $\Gamma(\mu)$ у системы (14) возникают и исчезают длиннопериодические циклы. Указанный эффект (суббифуркация периодических колебаний) был впервые отмечен В.С. Козьякиным [18].

Инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ обычно возникает в одном из трех случаев: (S1) $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$, (S2) $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$ или (S3) $\mu = \mu_0$, где $\delta > 0$. Случай (S3) называют вырожденным, он типичен для линейных и консервативных систем. Случаи (S1) и (S2) требуют выполнения некоторого условия невырожденности нелинейной части системы (14). При этом каждому

значению μ из соответствующего интервала будет соответствовать одна замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$. Отметим также, что инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ может быть аттрактором системы (14) (т. е. притягивать все траектории, стартующие из некоторой окрестности этой кривой); в этом случае кривую $\Gamma(\mu)$ будем называть *асимптотически устойчивой*. Естественным образом будем определять и понятие *неустойчивой* кривой $\Gamma(\mu)$.

2.3.2. Бифуркационные формулы. Приведем новые бифуркационные формулы для задачи о бифуркации Андронова–Хопфа системы (14), позволяющие получать ответы на вопросы о направленности бифуркации и о свойствах устойчивости инвариантной кривой $\Gamma(\mu)$. При этом для простоты ограничимся случаем, когда нелинейность $a(x, \mu)$ в этом уравнении начинается с кубического слагаемого:

$$a(x, \mu) = a_3(x, \mu) + \tilde{a}_4(x, \mu). \quad (15)$$

Положим $\chi(\varphi) = (a_3(e(\varphi), \mu_0), h(\varphi))$, где $e(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$, $h(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + 2\pi\theta_0) \\ \sin(\varphi + 2\pi\theta_0) \end{bmatrix}$, а также $\gamma_0 = \rho'(\mu_0)$ и

$$L_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\varphi) d\varphi. \quad (16)$$

Теорема 4. Пусть $\gamma_0 L_1 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (14). Если при этом $\gamma_0 L_1 < 0$ ($\gamma_0 L_1 > 0$), то замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ возникает при $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$). Эта кривая является асимптотически устойчивой, если $L_1 < 0$; неустойчивой, если $L_1 > 0$.

Замечание 5. Число (16) определяет те же свойства бифуркации, что и первая ляпуновская величина системы (14) в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа ([2], с. 222). Более того, при доказательстве теоремы 4 устанавливается, что (16) совпадает с этой ляпуновской величиной.

2.3.3 Пример 3 (модель Заславского). Рассмотрим зависящую от скалярного параметра μ модель Заславского ([8], с. 74) вида

$$u_{n+1} = u_n + \mu v_n - \mu \sin u_n, \quad v_{n+1} = \mu v_n - 3\mu \sin u_n. \quad (17)$$

Система (17) имеет нулевую точку равновесия $u = v = 0$ при любом μ . Матрица Якоби правой части системы в этой точке имеет вид $A(\mu) = \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu \\ -3\mu & \mu \end{bmatrix}$. При $\mu = \mu_0 = 1/2$ матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $e^{\pm i\pi/3}$, т. е. имеет место случай РЗ) при $\theta_0 = 1/6$. Поэтому следует ожидать, что при переходе μ через μ_0 в окрестности нулевой точки равновесия системы (17) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа. Изучим этот вопрос.

Система (17) при $\mu = \mu_0$ в жордановом базисе матрицы $A(\mu_0)$ имеет вид

$$w_{n+1} = B_0 w_n + a_3(w_n) + O(|w_n|^4),$$

где $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $a_3(w) = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} x^3 \\ -\sqrt{3}x^3 \end{bmatrix}$. Проведя расчет по формуле (16), имеем $L_1 = -1/128$. Далее, число $\gamma_0 = \rho'(\mu_0)$ здесь равно $3/2$. Отсюда и из теоремы 4 получим, что значение $\mu_0 = 1/2$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (17). При этом замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ в окрестности нулевой точки равновесия этой системы возникает при $\mu > \mu_0$ и она является асимптотически устойчивой.

3. О ПОСТРОЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Для доказательства приведенных выше утверждений используется переход от исходных задач к редуцированным уравнениям на соответствующих центральных многообразиях. При этом возникает необходимость приближенного построения этих многообразий. В этом разделе приводятся новые схемы таких построений. Хотя раздел носит вспомогательный характер, но предлагаемые схемы имеют и самостоятельный интерес.

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, заданное формулой

$$F(x) = A_0x + a_2(x) + a_3(x) + \tilde{a}_4(x), \quad (18)$$

где A_0 — квадратная матрица, функции $a_2(x)$ и $a_3(x)$ являются соответственно квадратичными и кубическими по x слагаемыми, а $\tilde{a}_4(x)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\tilde{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$.

Предполагается, что спектр σ оператора $A_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, равные единице по модулю, а σ^0 — остальные собственные значения. Обозначим через E_0 и E^0 — корневые подпространства матрицы A_0 , отвечающие соответственно частям σ_0 и σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 — это размерности подпространств E_0 и E^0 . Пространство \mathbb{R}^N представляется в виде прямой суммы $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$ инвариантных для оператора $A_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ подпространств E_0 и E^0 . Обозначим через $P_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow E_0$ и $P^0 : \mathbb{R}^N \rightarrow E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Согласно теореме о центральном многообразии (например, [1], [4], [10], [12]) существуют δ_0 -окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что отображение (18) имеет в шаре $T(0, \delta_0)$ гладкое инвариантное k_0 -мерное многообразие W_c , содержащее точку $x = 0$ и касающееся в этой точке подпространства E_0 ; инвариантность многообразия W_c для отображения (18) означает, что если $x \in W_c$ и $F(x) \in T(0, \delta_0)$, то $F(x) \in W_c$. Многообразию W_c называют *центральным* для отображения (18) в окрестности неподвижной точки $x = 0$; оно может быть задано уравнением вида $v = \psi(u)$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, а функция $\psi(u)$ является гладкой и удовлетворяет равенствам $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

Здесь будут рассматриваться те же основные случаи, что и выше при рассмотрении задач о бифуркациях в системе (1), а именно ситуации, когда матрица A_0 имеет

- P1) простое собственное значение 1;
- P2) простое собственное значение -1 ;
- P3') пару простых собственных значений $e^{\pm\varphi_0 i}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 не равны по модулю единице. Рассматривается задача приближенного построения центрального многообразия W_c .

3.1. Случай P1). Существуют собственные векторы e и g матриц A_0 и A_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 1 и удовлетворяющие равенствам (4). Подпространство E_0 является одномерным и содержит вектор e . Наконец, операторы проектирования P_0 и P^0 определяются равенствами (6).

Так как подпространство E_0 является одномерным, то векторы $u \in E_0$ можно задавать равенством $u = \varepsilon e$, где $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$. Соответственно, произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^N$ единственным образом представляется в виде суммы $x = \varepsilon e + v$ так, что $\varepsilon = (x, g)$ и $v = P^0 x$. Наконец, центральное многообразие может быть определено равенством

$$W_c = \{x : x = \varepsilon e + \psi(\varepsilon)\}, \quad (19)$$

в котором

- S_1) функция $\psi(\varepsilon)$ принимает свои значения в подпространстве E^0 ;
 S_2) функция $\psi(\varepsilon)$ является гладкой, при этом $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$;
 S_3) существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $x_1 \in T(0, \delta_0)$, $x_1 = \varepsilon_1 e + \psi(\varepsilon_1)$ для некоторого ε_1 и при этом $x_2 = F(x_1) \in T(0, \delta_0)$, то $x_2 = \varepsilon_2 e + \psi(\varepsilon_2)$ при некотором ε_2 .

С учетом этих требований искомую функцию естественно строить в виде

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon), \quad (20)$$

где $\psi_2, \psi_3 \in E^0$ — требующие определения коэффициенты, а принимающая свои значения в подпространстве E^0 функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Положим $B_0 = I - A_0 + P_0$. По построению оператор $B_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него. Далее для краткости запишем

$$a_2 = a_2(e), \quad a_3 = a_3(e), \quad a'_2 = a'_2(e). \quad (21)$$

Теорема 5. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 1, а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c может быть описано равенством (19), в котором $\psi(\varepsilon)$ — функция (20), а

$$\psi_2 = B_0^{-1} P^0 a_2, \quad \psi_3 = B_0^{-1} P^0 [-2(a_2, g)(A_0 \psi_2 + a_2) + a'_2 \psi_2 + a_3]. \quad (22)$$

3.2. Случай P2). Существуют собственные векторы e и g матриц A_0 и A_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению -1 и удовлетворяющие равенствам (4). Подпространство E_0 здесь также (как и случае P1)) является одномерным и содержит вектор e . Наконец, операторы проектирования P_0 и P^0 определяются теми же равенствами (6).

Как и в случае P1), здесь уравнение центрального многообразия W_c можно искать в виде (20). Положим

$$B_1 = I - A_0, \quad B_2 = I + A_0 + P_0. \quad (23)$$

По построению операторы $B_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ и $B_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ обратимы, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для них.

Теорема 6. Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение -1 , а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c может быть описано равенством (19), в котором $\psi(\varepsilon)$ — функция (20), а

$$\psi_2 = B_1^{-1} P^0 a_2, \quad \psi_3 = B_2^{-1} P^0 [-2(a_2, g)(A_0 \psi_2 + a_2) - a'_2 \psi_2 - a_3]. \quad (24)$$

3.2.1. Пример 4 (центральное многообразие в модели Эно). Рассмотрим модель Эно (12) в предположениях примера 2. Соответствующая матрица $A_0 = A(\mu_0)$ (см. (13)) имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -\mu_0$. Рассмотрим вопрос о построении центрального многообразия W_c системы (12) при $\mu = \mu_0$.

Вычисления по формулам (4), (6), (23) и (24) приводят к равенствам

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 - 1} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2(\mu_0^2 - 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mu_0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Поэтому искомое центральное многообразие $W_c = \{x : x = \varepsilon e + \varepsilon^2 \psi_2 + O(\varepsilon^3)\}$, где e и ψ_2 — это векторы из (25).

3.3. Случай P3') имеет смысл рассматривать только при $N \geq 3$.

Так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\varphi_0}$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = e^{i\varphi_0}(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = e^{-i\varphi_0}(e^* + ig^*); \quad (26)$$

здесь A_0^* — транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* можно считать нормированными в соответствии с равенствами

$$\|e\| = \|g\| = 1, \quad (e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (27)$$

Пусть E_0 — корневое подпространство оператора A_0 , отвечающее простым собственным значениям $e^{\pm i\varphi_0}$, которое является двумерным; в качестве его базиса могут использоваться векторы e и g . Пространство \mathbb{R}^N может быть представлено в виде $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$, где E^0 — дополнительное инвариантное для A_0 подпространство размерности $N - 2$.

Равенство $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$ определяет операторы проектирования $P_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow E_0$ и $P^0 : \mathbb{R}^N \rightarrow E^0$ так, что $P^0 = I - P_0$, а оператор P_0 может быть представлен в виде $P_0 x = (x, e^*)e + (x, g^*)g$; последнее следует из того, что по предположению векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с равенствами (27).

Центральное многообразие в рассматриваемом случае имеет вид

$$W_c = \{x : x = u + \psi(u), \quad u \in E_0\}, \quad (28)$$

где $\|u\| < \delta$ при некотором $\delta > 0$, при этом

- S'_1) функция $\psi(u)$ определена в круге $\|u\| < \delta$ подпространства E_0 и принимает свои значения в подпространстве E^0 ;
- S'_2) функция $\psi(u)$ является гладкой, при этом $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$;
- S'_3) существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $x_1 \in T(0, \delta_0)$, $x_1 = u_1 + \psi(u_1)$ для некоторого $u_1 \in E_0$ и при этом $x_2 = F(x_1) \in T(0, \delta_0)$, то $x_2 = u_2 + \psi(u_2)$ при некотором $u_2 \in E_0$.

С учетом этих требований искомую функцию построим в виде

$$\psi(u) = \psi_2(u) + \psi_3(u) + \widehat{\psi}_4(u), \quad (29)$$

где $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ — требующие определения функции (квадратичная и кубическая соответственно), а принимающие свои значения в подпространстве E^0 функция $\widehat{\psi}_4(u)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(u)\| = O(\|u\|^4)$, $u \rightarrow 0$.

С целью определения функций $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ через Q_0 обозначим сужение оператора $A_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ на подпространство E_0 , т.е. $Q_0 : E_0 \rightarrow E_0$ и $Q_0 u = A_0 u$ для $u \in E_0$. Оператор Q_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\varphi_0}$ и, следовательно, обратим.

Далее, через F_p обозначим множество однородных порядка p (p — натуральное число) функций, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0 :

$$F_p = \{\varphi(u) \mid \varphi : E_0 \rightarrow E^0, \varphi(\alpha u) \equiv \alpha^p \varphi(u)\}.$$

Для каждого p множество F_p образует линейное пространство с обычными операциями сложения элементов и умножения на вещественные числа. Обозначим через L действующий в пространстве F_p линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $\psi(u) \in F_p$ функцию $L_p \psi(u) \in F_p$:

$$L\psi(u) = \psi(u) - A_0 \psi(Q_0^{-1}u). \quad (30)$$

Лемма. *Определенный равенством (30) линейный оператор $L : F_p \rightarrow F_p$ обратим.*

Через L^{-1} будем обозначать оператор, обратный для (30). Ниже для простоты будем использовать обозначения L и L^{-1} для действующих в пространствах F_p соответствующих операторов независимо от значения p .

Положим

$$b_2(u) = P^0 a_2(Q_0^{-1}u); \quad (31)$$

по построению верно включение $b_2(u) \in F_2$. Далее пусть

$$\psi_2(u) = L^{-1}b_2(u), \quad (32)$$

где L^{-1} — оператор, обратный для (30) при $p = 2$.

Положим далее

$$b_3(u) = P^0 a_3(Q_0^{-1}u) + A_0 \psi_2'(Q_0^{-1}u) f_2(u) + P^0 a_2'(Q_0^{-1}u) [f_2(u) + \psi_2(Q_0^{-1}u)],$$

где $f_2(u) = -Q_0^{-1}P_0 a_2(Q_0^{-1}u)$. Тогда $b_3(u) \in F_3$ и, следовательно, определена функция

$$\psi_3(u) = L^{-1}b_3(u), \quad (33)$$

где L^{-1} — оператор, обратный для оператора (30) при $p = 3$.

Теорема 7. Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\varphi_0}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$, а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c может быть описано равенством (28), в котором $\psi(u)$ — функция (29), а функции $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами (32) и (33) соответственно.

3.3.1. *О построении функций $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$.* Приведенное в разделе 4 доказательство теоремы 7 фактически дает и способ построения функций $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$, определяемых равенствами (32) и (33). Приведем соответствующую схему, ограничиваясь построением функции $\psi_2(u)$.

Ниже через E_c будем обозначать комплексификацию вещественного линейного пространства E .

- (1) Выберем в качестве базиса в подпространстве E_0 векторы $e, g \in \mathbb{R}^N$ (см. (26)). Тогда для $u \in E_0$ имеем $u = u_1 e + u_2 g$ при некоторых вещественных u_1 и u_2 . Определенный равенством (31) вектор запишем в виде $\tilde{b}_2(u) = b_2(u_1, u_2)$.
- (2) Полагая $z = u_1 + iu_2$ определим функцию $\tilde{b}_2(z) = b_2((z+\bar{z})/2, (z-\bar{z})/2i)$ и представим ее в виде $\frac{\tilde{b}_2(z) = c_1 z^2 + c_2 z \bar{z} + \dots}{\text{lin } c_1 \bar{z}^2}$, где $c_1, c_2 \in E_c^0$ (при этом фактически $c_2 \in E^0$).
- (3) Из уравнений

$$\varphi_1 = e^{-2i\varphi_0} A_0 \varphi_1 + c_1, \quad \varphi_2 = A_0 \varphi_2 + c_2, \quad (34)$$

определим векторы $\varphi_1, \varphi_2 \in E_c^0$. Эти уравнения однозначно разрешимы, так как оператор $A_0 : E_c^0 \rightarrow E_c^0$ не имеет собственных значений, равных единице по модулю.

- (4) Определим функцию $\tilde{\psi}(z) = \varphi_1 z^2 + \varphi_2 z \bar{z} + \bar{\varphi}_1 \bar{z}^2$.
- (5) Положим $\psi_2(u) = \tilde{\psi}(u_1 + iu_2)$.

3.3.2. **Пример 4** (построение центрального многообразия). Рассмотрим оператор (18) вида

$$F(x) = A_0 x + a_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (35)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 & 0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix}, \quad a_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix};$$

здесь $0 < \varphi_0 < \pi$ и $k_0 \neq \pm 1$.

Имеем (см. (26)) $e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тогда вектор $u \in E_0$ представляется в виде $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, а оператор Q_0^{-1} — в виде $Q_0^{-1}u = \begin{bmatrix} cu_1 \cos \varphi_0 + u_2 \sin \varphi_0 \\ -u_1 \sin \varphi_0 + u_2 \cos \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому

$$b_2(u) = b_2(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^2 + u_2^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_2(z) = b_2((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z\bar{z} \end{bmatrix}.$$

Тогда $c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Решая систему (34) получим $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/(1 - k_0) \end{bmatrix}$.

Таким образом, в соответствии с формулой (28) центральное многообразие отображения (35) может быть описано равенством

$$W_c = \left\{ x : x = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ (u_1^2 + u_2^2)/(1 - k_0) \end{bmatrix} + O(\|u\|^3) \right\}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательства теорем 1–3. Тот факт, что в условиях теорем 1–3 число μ_0 является точкой соответствующей бифуркации системы (1) и при этом возникают непрерывные ветви бифурцирующих решений, следует из аналогичных утверждений, доказанных в [15]. Поэтому остается лишь убедиться в справедливости утверждений теорем 1–3 относительно свойств устойчивости возникающих решений. Для доказательства этих утверждений используется схема, основанная на переходе от исходных задач к редуцированным уравнениям на соответствующие одномерные центральные многообразия (теоремы 5 и 6) и анализе получаемых при этом ляпуновских величин. Ограничимся приведением этой схемы для доказательства теоремы 3.

Для простоты рассмотрим ситуацию, когда система (1) двумерна, т. е. $N = 2$. Также для простоты будем считать, что при $\mu = \mu_0$ матрица $A(\mu)$ имеет вид $A_0 = A(\mu_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, где $b \neq \pm 1$. Наконец, пусть в нелинейности (2) квадратичная и кубическая нелинейности при $\mu = \mu_0$ представлены соответственно в виде

$$\begin{aligned} a_2(x) &= \begin{bmatrix} a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ b_{20}x_1^2 + 2b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \end{bmatrix}, \\ a_3(x) &= \begin{bmatrix} a_{30}x_1^3 + 3a_{21}x_1^2x_2 + 3a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \\ b_{30}x_1^3 + 3b_{21}x_1^2x_2 + 3b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Имеем

$$\begin{aligned} e = g &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ a_2 &= \begin{bmatrix} a_{20} \\ b_{20} \end{bmatrix}, \quad a'_2 = 2 \begin{bmatrix} a_{20} & a_{11} \\ b_{20} & b_{11} \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} a_{30} \\ b_{30} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1), редуцированное при $\mu = \mu_0$ на соответствующее одномерное центральное многообразие (теорема 6), является скалярным и его можно представить в виде

$\varepsilon_{n+1} = G(\varepsilon_n)$, где $G(\varepsilon) = -\varepsilon + (a(\varepsilon e + \psi(\varepsilon), \mu_0), g)$; здесь $\psi(\varepsilon)$ — функция (20) с коэффициентами (24). Так как при малых $|\varepsilon|$ имеем

$$G(\varepsilon) = -\varepsilon + \varepsilon^2(a_2, g) + \varepsilon^3[(a'_2\psi_2, g) + (a_3, g)] + O(\varepsilon^4),$$

то указанное редуцированное уравнение можно представить в виде

$$\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n + \gamma_2\varepsilon_n^2 + \gamma_3\varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4), \quad (37)$$

где $\gamma_2 = (a_2, g)$ и $\gamma_3 = (a'_2\psi_2, g) + (a_3, g)$.

В ([2], с. 114) отмечено, что первая ляпуновская величина одномерного уравнения (37) определяется формулой

$$l_1 = -(\gamma_2^2 + \gamma_3), \quad (38)$$

совпадающей с (11).

Остается убедиться в том, что числа (10) и (38) совпадают. Учитывая формулы (24), непосредственным вычислением получаем, что (10) и (38) равны одному и тому же числу:

$$l_1 = -\left(a_{20}^2 + a_{30} + \frac{2}{1-b} a_{11}b_{20}\right).$$

Анализ полученной ляпуновской величины с использованием соответствующих утверждений теории локальных бифуркаций (например, [2], с. 193) завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть для простоты в нелинейности (15) функция $a_3(x, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ определяется равенством (36). Для этого случая в ([1] с. 209) для ляпуновской величины L_1 приведена формула

$$L_1 = \frac{3}{8}[(a_{30} + a_{12} + b_{21} + b_{03}) \cos 2\pi \varphi_0 + (b_{30} + b_{12} - a_{21} - a_{03}) \sin 2\pi \varphi_0]. \quad (39)$$

Поэтому доказательство формулы (16) можно свести к подстановке (36) в (16) и вычислению полученного интеграла, в результате чего получим число, совпадающее с (39).

Для завершения доказательства теоремы 4 остается провести анализ полученной ляпуновской величины с использованием соответствующих утверждений теории локальных бифуркаций (например, [2], с. 222).

Доказательство теорем 5 и 6 проводят по одной схеме, поэтому ограничимся приведением доказательства первой из них.

Пусть в (19) функция $\psi(\varepsilon)$ определяется равенством (20), в котором коэффициенты ψ_2 и ψ_3 — это векторы (22). Для доказательства теоремы достаточно проверить п. S_3) из определения (19) центрального многообразия W_c .

Пусть $x = \varepsilon e + \psi(\varepsilon)$ при некотором малом ε . Положим $y = F(x)$. Тогда достаточно показать, что $y = \delta e + \psi(\delta)$ при некотором малом δ .

С учетом равенства (20) имеем

$$F(x) = F(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \varepsilon^3\psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)) = A_0(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) + \\ + a_2(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) + a_3(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) + \widetilde{a}_4(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots),$$

где символом “ \dots ” обозначены слагаемые $\varepsilon^3\psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)$. Отсюда, учитывая равенства (в которых используются обозначения (21))

$$A_0 e = e, \quad a_2(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) = \varepsilon^2(a_2 + \text{varepsilonpsilon}'_2\psi_2) + O(\varepsilon^4), \quad a_3(\varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) = \varepsilon^3 a_3 + O(\varepsilon^4),$$

получим

$$F(x) = \underbrace{\varepsilon e + \varepsilon^2 P_0 a_2 + \varepsilon^3 P_0 (a'_2 \psi_2 + a_3) + P_0 b_4(\varepsilon)}_{\substack{+ \varepsilon^2 P^0 a_2 + \varepsilon^3 P^0 (a'_2 \psi_2 + a_3) + \varepsilon^2 A_0 \psi_2 + \varepsilon^3 A_0 \psi_3 + P^0 b_4(\varepsilon),}}$$

где функция $b_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению $\|b_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Первая группа слагаемых в полученном равенстве лежит в подпространстве E_0 , вторая — в E^0 . Для завершения доказательства теоремы остается показать, что указанные группы слагаемых представляются в виде $\delta e + \psi(\delta)$ при некотором δ ; другими словами, покажем, что найдется такое δ (малое, если ε мало), для которого выполняются равенства

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon + \varepsilon^2 (a_2, g) + \varepsilon^3 (a'_2 \psi_2 + a_3, g) + (b_4(\varepsilon), g), \\ \psi(\delta) &= \varepsilon^2 P^0 a_2 + \varepsilon^3 P^0 (a'_2 \psi_2 + a_3) + \varepsilon^2 A_0 \psi_2 + \varepsilon^3 A_0 \psi_3 + P^0 b_4(\varepsilon). \end{aligned} \quad (40)$$

При малых δ первое уравнение этой системы имеет единственное решение относительно ε :

$$\varepsilon = \delta + \delta^2 k_2 + \delta^3 k_3 + O(\delta^4), \quad (41)$$

где $k_2 = -(a_2, g)$, $k_3 = 2(a_2, g)^2 - (a'_2 \psi_2 + a_3, g)$ (проверка этого сводится к подстановке (41) в первое уравнение системы (40) и получения равенства $\delta = \delta$ с точностью до $O(\delta^4)$). Остается убедиться в том, что если подставить (41) во второе уравнение системы (40), то получим аналогичное (20) равенство

$$\psi(\delta) = \delta^2 \psi_2 + \delta^3 \psi_3 + \hat{\psi}_4(\delta). \quad (42)$$

Действительно,

$$\psi(\delta) = \delta^2 (A_0 \psi_2 + P^0 a_2) + \delta^3 [A_0 \psi_3 + 2k_2 (A_0 \psi_2 + P^0 a_2) + P^0 (a'_2 \psi_2 + a_3)] + O(\delta^4).$$

В силу (22) последнее равенство совпадает с (42). \square

Доказательство леммы. Рассмотрим уравнение

$$\psi(u) = A_0 \psi(Q_0^{-1} u) + b(u) \quad (43)$$

относительно неизвестной функции $\psi(u) \in F_p$ и при заданной функции $b(u) \in F_p$. Для доказательства леммы достаточно показать, что уравнение (43) однозначно разрешимо.

Пусть векторы $e, g \in \mathbb{R}^N$ (см. (26)) выбраны в качестве базиса в подпространстве E_0 . Тогда произвольный вектор $u \in E_0$ может быть единственным образом представлен в виде $u = u_1 e + u_2 g$ при некоторых вещественных u_1 и u_2 . Перейдя в (43) от u к комплексной переменной $z = u_1 + i u_2$ получим равносильное (в естественном смысле) уравнение

$$\psi(z) = A_0 \psi(e^{-i\varphi_0} z) + b(z), \quad (44)$$

в котором для простоты сохранены обозначения за соответствующими функциями.

Пусть для определенности $p = 2$, т.е. в уравнении (44) $\psi(z)$ и $b(z)$ — это квадратичные относительно комплексной переменной z функции, принимающие значения в комплексификации E_c^0 подпространства E^0 . Эти функции могут быть представлены в виде

$$\psi(z) = \varphi_1 z^2 + \varphi_2 z \bar{z} + \bar{\varphi}_1 \bar{z}^2, \quad b(z) = c_1 z^2 + c_2 z \bar{z} + \bar{c}_1 \bar{z}^2,$$

при некоторых $\varphi_1, \varphi_2, c_1, c_2 \in E_c^0$ (при этом фактически $\varphi_2, c_2 \in E^0$). Так как

$$\psi(e^{-i\varphi_0} z) = \varphi_1 e^{-2i\varphi_0} z^2 + \varphi_2 z \bar{z} + \bar{\varphi}_1 e^{2i\varphi_0} \bar{z}^2,$$

то уравнение (44) равносильно системе

$$\varphi_1 = e^{-2i\varphi_0} A_0 \varphi_1 + c_1, \quad \varphi_2 = A_0 \varphi_2 + c_2, \quad \bar{\varphi}_1 = e^{2i\varphi_0} A_0 \bar{\varphi}_1 + \bar{c}_1.$$

Эта система однозначно разрешима, так как оператор $A_0 : E_c^0 \rightarrow E_c^0$ не имеет собственных значений, равных единице по модулю. \square

Доказательство теоремы 7. Пусть в (28) функция $\psi(u)$ определяется равенством (29), а функции $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами (32) и (33). Для доказательства теоремы достаточно проверить п. S_3) из определения (28) центрального многообразия W_c . В свою очередь, для этого достаточно показать, что если $x = u + \psi(u)$ при некотором малом $\|u\|$, $u \in E_0$, то вектор $y = F(x)$ представим в виде $y = v + \psi(v)$ при некотором малом $\|v\|$, $v \in E_0$. Этот факт доказывается по той же схеме, что и аналогичный факт, установленный при доказательстве теоремы 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложены новые формулы для вычисления ляпуновских величин в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций системы (1) в терминах исходных уравнений. Это формулы (8) для первой и второй ляпуновских величин в задаче о бифуркации положений равновесия, формула (10) для первой ляпуновской величины в задаче о бифуркации удвоения периода и формула (16) для первой ляпуновской величины в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа. Приведены утверждения (теоремы 1–4), позволяющие в новых условиях провести эффективный качественный анализ основных сценариев бифуркаций. Предложены новые алгоритмы построения центральных многообразий соответствующих нелинейных отображений в основных случаях вырождения линеаризованного оператора. Эти алгоритмы описаны в теоремах 5–7.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2002).
- [2] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике*. Ч. 2 (Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2009).
- [3] Kuznetsov Y.A. *Elements of applied Bifurcation Theory*. 2nd ed. (Springer, New York, 1998).
- [4] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* (Мир, М., 1980).
- [5] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла* (Мир, М., 1985).
- [6] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2000).
- [7] Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем* (МЦНМО, М., 2005).
- [8] Кузнецов С.П. *Динамический хаос* (Физматлит, М., 2006).
- [9] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости* (МЦНМО, М., 2005).
- [10] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике*. Ч. 1 (НИИ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2003).
- [11] Плисс В.А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1977).
- [12] Kelley Al. *The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds*, J. Diff. Equat. **3**(4), 546–570 (1967).
- [13] Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Тр. ММО **25**, 119–262 (1971).
- [14] Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Тр. ММО **26**, 199–239 (1972).
- [15] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах*, Уфимск. матем. журн. **2** (4), 3–26 (2010).
- [16] Юмагулов М.Г. *Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем*, Уфимск. матем. журн. **5** (2), 109–131 (2013).
- [17] Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. *Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений*, ДАН **365** (2), 162–164 (1999).
- [18] Козьякин В.С. *Суббифуркация периодических колебаний*, ДАН СССР **232** (1), 25–27 (1977).

Марат Гаязович Юмагулов

*Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450074, Россия,*

e-mail: yum_mg@mail.ru

Марат Флюрович Фазлытдинов

*Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450074, Россия,*

e-mail: fazlitdin_marat@mail.ru

M.G. Yumagulov and M.F. Fazlytdinov

Bifurcation formulas and algorithms of constructing central manifolds of discrete dynamical systems

Abstract. Ones of the main questions in theory of local bifurcations and its applications are questions about direction of bifurcations (sub- or supercriticality) and on stability of the solutions arising in neighborhood of a nonhyperbolic equilibrium point or cycle dynamic system. We consider problems of local bifurcations in dynamical systems with discrete time. New features are proposed to orientation of bifurcations and properties stability of bifurcation solutions for problems on basic scenarios of bifurcations. We also propose new algorithms for constructing central manifolds of the corresponding problems, allowing to obtain new bifurcation formulas, in particular, formulas to calculate Lyapunov quantities. Proposed algorithms and formulas are based on the common operator method the study of problems on local bifurcations and allow under the new conditions effective qualitative analysis of bifurcations in terms of the initial equations.

Keywords: dynamical system, discrete system, equilibrium point, local bifurcation, bifurcation formula, stability, Lyapunov quantity, central manifold, normal form.

Marat Gayazovich Yumagulov

*Bashkir State University,
32 Z. Validi str., Ufa, 450074 Russia,*

e-mail: yum_mg@mail.ru

Marat Flurovich Fazlytdinov

*Bashkir State University,
32 Z. Validi str., Ufa, 450074 Russia,*

e-mail: fazlitdin_marat@mail.ru