УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 77–90 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 514.763 doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90

ЛЕВОИНВАРИАНТНАЯ КОНТАКТНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА МНОГООБРАЗИИ Sol

В.И. Паньженский, А.О. Растрепина

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия

Аннотация

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия Sol – группы Ли вещественных матриц специального вида. На многообразии Sol имеется левоинвариантная риманова метрика, для которой группа левых сдвигов является максимальной просто-транзитивной группой изометрии. В настоящей работе найдены все левоинвариантные дифференциальные 1-формы и доказано, что на ориентированном многообразии Sol существует единственная левоинвариантная дифференциальная 1-форма, которая вместе с левоинвариантной римановой метрикой определяют на Sol контактную метрическую структуру. Найдены все левоинвариантные контактные метрические связности, среди которых выделены плоские связности. Вполне неголономное контактное распределение вместе с ограничением римановой метрики на это распределение определяют на многообразии Sol субриманову структуру, а ортогональная проекция связности Леви-Чивита является усеченной связностью. Используя неголономное поле ортонормированных реперов, адаптированных к контактной метрической структуре, найдены параметрические уравнения геодезических усеченной связности, то есть уравнения субримановых геодезических. Установлено, что эти геодезические являются частью геодезических плоской контактной метрической связности.

Ключевые слова: многообразие Sol, контактная метрическая структура, контактная метрическая связность, субримановы геодезические

Введение

Исследуя проблему геометризации трехмерных многообразий, известный американский математик Уильям Тёрстон доказал, что существует лишь восемь трехмерных геометрий, подразумевая под геометрией, следуя Клейну, пару (M,G), где M – гладкое односвязное трехмерное многообразие, G – максимальная группа диффеоморфизмов с компактным стабилизатором, транзитивно действующая на M. Кроме того, требуется существование подгруппы H группы G, действующей на M как группа накрытия, такой, что фактормногообразие M/G по этому действию компактно [1, 2]. Указанные требования обеспечивают существование на M полной римановой метрики, для которой группа G является максимальной группой изометрий.

В списке восьми геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия Sol – группы Ли вещественных матриц специального вида. На многообразии Sol имеется левоинвариантная риманова метрика g, для которой группа левых сдвигов является максимальной просто-транзитивной группой изометрий.

В настоящей работе мы доказываем, что на ориентированном многообразии Sol имеется единственная левоинвариантная дифференциальная 1-форма η, которая вместе с метрикой g определяют на Sol контактную метрическую структуру

(η, ξ, Φ, g) [3] (см. также [4, 5]). Найдены все левоинвариантные контактные метрические связности, то есть левоинвариантные линейные связности с кручением, относительно которых контактная форма η и метрический тензор g ковариантно постоянны [6]. Из трехпараметрического семейства таких связностей выделено однопараметрическое семейство плоских связностей.

Вполне неголономное контактное распределение $\ker\eta$ вместе с ограничением метрики g на это распределение задают на Sol субриманову структуру [7, 8]. Ортогональная проекция связности Леви-Чивита метрики g на $\ker\eta$ определяет усеченную связность [9, 10]. В неголономной механике считается, что механическая система с неголономным распределением на конфигурационном пространстве движется по траектории, которая, вообще говоря, не является решением вариационной задачи на минимум. Известно [9], что траектории движения такой системы с квадратичным лагранжианом являются геодезическими усеченной связности – субримановыми геодезическими. В работе найдены параметрические уравнения субримановых геодезических и установлено, что они являются частью геодезических плоской контактной метрической связности.

1. Контактная метрическая структура

Многообразие Sol – это связная односвязная трехмерная группа Ли всех матриц вида
$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$
где определяющие элементы $x,\ y,\ z$ – вещественные числа: $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел. Умножая слева матрицу (1) на такую же матрицу с определяющими элементами $c_1,\ c_2,\ c_3$, заключаем, что левые сдвиги на Sol определяются формулами
$$\bar{x} = e^{-c_3}x + c_1, \quad \bar{y} = e^{c_3}y + c_2, \quad \bar{z} = z + c_3. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по параметрам $c_1,\ c_2,\ c_3$, находим левоинвариантные векторные поля – базис алгебры Ли группы Ли Sol
$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = -x\partial_1 + y\partial_2 + \partial_3, \tag{3}$$
где $\partial_1 = \partial/\partial x,\ \partial_2 = \partial/\partial y,\ \partial_3 = \partial/\partial z$ – естественный базис векторных полей. Структурные уравнения группы имеют вид
$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2.$$

Здесь $[X,Y] = XY - YX$ – коммутатор векторных полей $X,\ Y$ (скобка Ли). Левоинвариантную риманову метрику g можно получить следующим образом. В касательном пространстве единицы группы рассмотрим евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ и сдвинем ее в произвольную точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Разрешая уравнения (2) относительно $x,\ y,\ z$, находим
$$x = e^{c_3}(\bar{x} - c_1), \quad y = e^{-c_3}(\bar{y} - c_2), \quad z = \bar{z} - c_3.$$
$$dx = e^{c_3}\,d\bar{x}, \quad dy = e^{-c_3}\,d\bar{y}, \quad dz = d\bar{z}.$$

Тогда $ds^2 = e^{2c_3}\,d\bar{x}^2 + e^{-2c_3}\,d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$. Но так как единица группы $(0,0,0)$ сдвинется в точку $\bar{x} = 0\,e^{-c_3} + c_1,\ \bar{y} = 0\,e^{c_3} + c_2,\ \bar{z} = 0 + c_3$, то $c_3 = \bar{z}$. Опуская черту над произвольной точкой $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, получаем левоинвариантную риманову метрику g на многообразии Sol [1, 2]

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2. \tag{4}$$

Так как левые сдвиги образуют просто-транзитивную группу изометрий, то метрика (4) является полной. Группа Sol является ориентируемым многообразием, так как форма объема метрики (4) в каждой точке не равна нулю: $\sqrt{1}dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$. Будем считать, что форма $dx\wedge dy\wedge dz$ задает положительную ориентацию ($\sqrt{1} = 1$), а форма $-dx \wedge dy \wedge dz$ – отрицательную ($\sqrt{1} = -1$).

Напомним определение контактной метрической структуры (см., например, [4, 5]). Пусть M – нечетномерное гладкое многообразие, $\dim M = 2n+1$. Контактной формой на M называется дифференциальная 1-форма η, удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

где $\wedge$ – внешнее произведение, d – внешний дифференциал. Контактная форма определяет вполне неголономное контактное распределение $\mathfrak{L} = \ker\eta$, которое и называется контактной структурой. Многообразие M с фиксированной на нем контактной структурой называется контактным многообразием. Контактное распределение $\mathfrak{L}$ называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным, а распределение $\mathfrak{M} = \ker d\eta$ – вторым фундаментальным распределением, или вертикальным. В каждой точке $p \in M$ касательное пространство T_pM распадается в прямую сумму дополняющих друг друга подпространств $\mathfrak{L}_p$ и $\mathfrak{M}_p$ размерности $2n$ и 1 соответственно. Векторное поле $\xi \in \mathfrak{M}$, обладающее свойством $\eta(\xi) = 1$, называется характеристическим. Проекторы m и l на фундаментальные распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ имеют вид

$$m = \eta \otimes \xi, \quad l = id - \eta \otimes \xi,$$

где $\otimes$ – тензорное произведение.

Контактной метрической структурой на многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, Φ, g) на M, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой, ξ – характеристическое векторное поле, Φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей, g – риманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий:

$$1)\ \eta(\xi) = 1, \quad 2)\ \eta \circ \Phi = 0, \quad 3)\ \Phi(\xi) = 0, \quad 4)\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi,$$

$$5)\ g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad 6)\ d\eta = g(\Phi X, Y).$$

Теорема 1. *На ориентированном многообразии Sol существует единственная левоинвариантная контактная форма η, которая вместе с левоинвариантной метрикой g определяет на Sol контактную метрическую структуру.*

Доказательство. Пусть $\varphi_t = \exp(tX)$ – однопараметрическая подгруппа группы левых сдвигов (изометрий), порожденная векторным полем X. Тогда производная Ли от левоинвариантной формы η вдоль X равна нулю: $L_X\eta = 0$, то есть

$$X^p\partial_p\eta_j + \partial_j X^p\eta_p = 0, \tag{5}$$

где X^i и η_j – компоненты векторного поля X и формы η соответственно. Интегрируя уравнения инвариантности (5) для базисных левоинвариантных векторных полей (3), находим общее решение

$$\eta = a_1e^z\,dx + a_2e^{-z}\,dy + a_3\,dz, \tag{6}$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольные постоянные. Нетрудно теперь убедиться, что формы (6) инвариантны относительно левых сдвигов (2). Действительно, так как

$$d\bar{x} = e^{-c_3}\, d\bar{x}, \quad d\bar{y} = e^{c_3}\, dy, \quad d\bar{z} = dz,$$

то $\bar{\eta} = a_1 e^{\bar{z}}\, d\bar{x} + a_2 e^{-\bar{z}}\, d\bar{y} + a_3\, d\bar{z} = a_1 e^{z+c_3} e^{-c_3}\, dx + a_2 e^{-z-c_3} e^{c_3}\, dy + a_3\, dz = \eta$.

Среди левоинвариантных форм (6) нас будут интересовать те, которые вместе с метрикой (4) определяют контактную метрическую структуру на Sol. Структурный эндоморфизм Φ определяется условием 6). В координатах имеем

$$\Phi^i_j = g^{ip}(d\eta)_{pj},$$

где g^{ip} – контрвариантные компоненты метрического тензора g: $g_{ip}g^{pj} = \delta^j_i$, g_{ij} – компоненты тензора g, δ^j_i – символ Кронекера.

Поскольку $d\eta = -a_1 e^z dx \wedge dz + a_2 e^{-z} dy \wedge dz$, то

$$\Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 e^{-z} \\ 0 & 0 & a_2 e^z \\ a_1 e^z & -a_2 e^{-z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие 5) в координатах примет вид

$$g_{ps}\Phi^p_j \Phi^s_k = g_{jk} - \eta_j \eta_k.$$

Для метрики (4) имеем

$$e^{2z}\Phi^1_j\Phi^1_k + e^{-2z}\Phi^2_j\Phi^2_k + \Phi^3_j\Phi^3_k = g_{jk} - \eta_j\eta_k.$$

Придавая индексам (j,k) различные значения, находим, что

$$a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_3 = 0.$$

Таким образом,

$$\eta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^z dx \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z} dy.$$

Так как формы η и $\lambda\eta$ определяют одно и то же контактное распределение, то следует рассматривать лишь два варианта

$$a)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z\, dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\, dy,$$

$$b)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z\, dx - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\, dy.$$

Многообразие Sol по условию теоремы ориентировано, и мы будем считать, что его ориентация является положительной, а значит, определяется формой объема $dx \wedge dy \wedge dz$. Поэтому форма $\eta \wedge d\eta$ должна определять также положительную ориентацию. В случае $a)$ имеем $\eta \wedge d\eta = dx \wedge dy \wedge dz$, то есть форма $\eta \wedge d\eta$ не меняет ориентацию многообразия, тогда как в случае $b)$ $\eta \wedge d\eta = -dx \wedge dy \wedge dz$. Таким образом, в качестве левоинвариантной контактной формы мы должны взять форму

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z\, dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\, dy. \tag{7}$$

Характеристический вектор ξ имеет координаты $\xi^i = g^{ip}\eta_p$, и, следовательно,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z}\, dy.$$

Теперь нетрудно убедиться, что все условия 1)–6) определения контактной метрической структуры для метрики (4) и контактной формы (7) выполняются и все характеристические тензорные поля (η, ξ, Φ, g) контактной метрической структуры на многообразии Sol левоинвариантны. Таким образом, мы имеем единственную левоинвариантную контактную метрическую структуру на ориентированном многообразии Sol. $\square$

И наконец, выпишем компоненты тензорных полей (η, ξ, Φ, g), определяющих контактную метрическую структуру на многообразии Sol

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z} & \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Левоинвариантные контактные метрические связности

Пусть (η, ξ, Φ, g) – контактная метрическая структура. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ называется контактной метрической связностью, если контактная форма η и метрический тензор g ковариантно постоянны: $\widetilde{\nabla}\eta = 0$ и $\widetilde{\nabla}g = 0$ [6]. При параллельном переносе векторов в этой связности сохраняются длины векторов и углы между векторами, а также контактное распределение $\mathfrak{L}$, а следовательно, и распределение $\mathfrak{M}$, а значит, сохраняется структура почти произведения $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$. Из равенства $\widetilde{\nabla}\eta = 0$ следует, что связность $\widetilde{\nabla}$ имеет кручение [4].

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита метрики g, то есть линейная метрическая связность без кручения. Так как разность двух связностей является тензором, то $\widetilde{\nabla} = \nabla + T$, где T – тензор деформации связности ∇. В координатах

$$\widetilde{\Gamma}^{\,k}_{ij} = \Gamma^{\,k}_{ij} + T^{\,k}_{ij},$$

где $\Gamma^{\,k}_{ij}$ и $\widetilde{\Gamma}^{\,k}_{ij}$ – коэффициенты связностей ∇ и $\widetilde{\nabla}$, а $T^{\,k}_{ij}$ – компоненты тензора деформации T. Связность $\widetilde{\nabla}$ является метрической тогда и только тогда, когда ковариантные компоненты $T_{ijk} = T^{\,p}_{ij} g_{kp}$ тензора деформации T кососимметричны по последним двум индексам [11]: $T_{ijk} + T_{ikj} = 0$. Говорят, что связность $\widetilde{\nabla}$ имеет кососимметрическое кручение S, если T_{ijk} кососимметричный по всем индексам.

При этом $S_{ij}^{\,k} = \widetilde{\Gamma}_{ij}^{\,k} - \widetilde{\Gamma}_{ji}^{\,k} = T_{ij}^{\,k} - T_{ji}^{\,k} = 2T_{ij}^{\,k}$, следовательно, $S_{ijk} = S_{ij}^{\,p} g_{kp}$ также кососимметричны по всем индексам и

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{\,k} = \Gamma_{ij}^{\,k} + \frac{1}{2} S_{ij}^{\,k}.$$

Связность $\widetilde{\nabla}$ называется полусимметрической [12], если

$$S_{ij}^{\,k} = \frac{1}{n-1}\,(\delta_i^k \omega_j - \delta_j^k \omega_i)$$

или

$$T_{ijk} = \frac{1}{n-1}(g_{ik}\,\omega_j - g_{ij}\omega_k), \tag{8}$$

где ω_i – компоненты некоторой дифференциальной 1-формы ω.

Теорема 2. *На многообразии Sol существует трехпараметрическое семейство левоинвариантных контактных метрических связностей. Тензор деформации таких связностей имеет следующий вид:*

$$T = c_{113} e^{2z} dx \otimes dx \wedge dz + c_{223} e^{-2z} dy \otimes dy \wedge dz + c_{331} e^{z} dz \otimes dz \wedge dx +$$
$$+ c_{332} e^{-z} dz \otimes dz \wedge dy + c_{123} dx \otimes dy \wedge dz + c_{213} dy \otimes dx \wedge dz,$$

где постоянные c_{ijk} удовлетворяют условиям

$$1 - c_{113} - c_{123} = 0, \quad 1 + c_{213} + c_{223} = 0, \quad c_{331} + c_{332} = 0.$$

Доказательство. Найдем условия на компоненты T_{ijk} тензора деформации T, которые следуют из ковариантного постоянства контактной формы: $\widetilde{\nabla}\eta = 0$. В координатах имеем

$$\widetilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \widetilde{\Gamma}_{ij}^{\,p} \eta_p = \partial_i \eta_j - \Gamma_{ij}^{\,p} \eta_p - T_{ij}^{\,p} \eta_p = \partial_i \eta_j -$$
$$- \frac{1}{2}\, g^{ps}(\partial_i g_{sj} + \partial_i g_{js} - \partial_s g_{ij})\eta_p - T_{ijs} g^{ps} \eta_p = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} \xi^s (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is}) - T_{ijs} \xi^s.$$

Здесь мы учли, что $g_{ij} = g_{ij}(z)$, а $\xi^3 = 0$, поэтому $\xi^s \partial_s g_{ij} = 0$. Таким образом, должны выполняться равенства

$$\partial_i \eta_j - \frac{1}{2}\, \xi^s (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is}) - T_{ijs} \xi^s = 0. \tag{9}$$

Расписывая условия (9) для различных индексов i, j, находим, что

$$T_{112} = -T_{121} = T_{212} = -T_{221} = T_{312} = -T_{321} = 0,$$

$$e^z + e^{-z} T_{131} + e^z T_{132} = 0, \quad e^{-z} - e^{-z} T_{231} - e^z T_{232} = 0, \quad e^{-z} T_{331} + e^z T_{332} = 0. \tag{10}$$

Так как $T_{321} = 0$, то *не существует контактной метрической связности с кососимметрическим кручением.*

Далее, так как группа левых сдвигов совпадает с полной (максимальной) группой изометрий, которая сохраняет и связность Леви-Чивита ∇, то связность $\widetilde{\nabla}$ будет инвариантной тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации T, следовательно, производная Ли от T вдоль базисных левоинвариантных векторных полей (3) равна нулю, а значит, компоненты T_{ijk} должны быть решением следующих уравнений инвариантности:

$$X^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i X^p T_{pjk} + \partial_j X^p T_{ipk} + \partial_k X^p T_{ijp} = 0. \tag{11}$$

Из уравнений (11) для первых двух операторов (3) следует, что $T_{ijk} = T_{ijk}(z)$. Для третьего оператора имеем уравнения

$$\partial_3 T_{ijk} - \delta_i^1 T_{1jk} + \delta_i^2 T_{2jk} - \delta_j^1 T_{i1k} + \delta_j^2 T_{i2k} - \delta_k^1 T_{ij1} + \delta_k^2 T_{ij2} = 0. \tag{12}$$

Уравнения (12) легко интегрируются. В результате находим, что

$$\begin{aligned} &T_{131} = -T_{113} = c_{131}e^{2z}, \quad T_{132} = -T_{123} = c_{132}, \quad T_{213} = c_{213}, \\ &T_{231} = -c_{213}, \quad T_{223} = c_{223}e^{-2z}, \quad T_{232} = -c_{223}e^{-2z}, \quad T_{331} = c_{331}e^{z}, \\ &T_{313} = -c_{331}e^{z}, \quad T_{323} = c_{323}e^{-z}, \quad T_{332} = -c_{323}e^{-z}, \end{aligned} \tag{13}$$

где c_{ijk} – константы и $c_{ijk} = -c_{ikj}$.

Таким образом, из (10) и (13) следует, что у левоинвариантной контактной метрической связности $\widetilde{\nabla}$ ковариантный тензор деформации имеет указанный в теореме вид, а постоянные c_{ijk} удовлетворяют условиям теоремы. □

Компоненты Γ_{ij}^k, T_{ij}^k и $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивита ∇, тензора деформации T и контактной метрической связности $\widetilde{\nabla}$ образуют матрицы

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} -e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{113} \\ 0 & 0 & -c_{213}e^{-2z} \\ 0 & 0 & c_{331}e^{-z} \end{pmatrix}, \quad T_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{123}e^{2z} \\ 0 & 0 & -c_{223} \\ 0 & 0 & c_{332}e^{z} \end{pmatrix},$$

$$T_{ij}^3 = \begin{pmatrix} c_{113}e^{2z} & c_{123} & 0 \\ c_{213} & c_{223}e^{-2z} & 0 \\ -c_{331}e^{z} & -c_{332}e^{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-c_{113} \\ 0 & 0 & -c_{213}e^{-2z} \\ 1 & 0 & c_{331}e^{-z} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{123}e^{2z} \\ 0 & 0 & -1-c_{223} \\ 0 & -1 & c_{332}e^{z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} (c_{113}-1)e^{2z} & c_{123} & 0 \\ c_{213} & (c_{223}+1)e^{-2z} & 0 \\ -c_{331}e^{z} & -c_{332}e^{-z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если тензор кривизны $\widetilde{R}$ связности $\widetilde{\nabla}$ равен нулю, то есть связность плоская, то ее компоненты образуют матрицы

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ce^{-z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -ce^{z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ce^{z} & ce^{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

где $c = \mathrm{const}$.

Оказывается, что *среди трехпараметрического семейства контактных метрических связностей нет и полусимметрических связностей.*

Действительно, для полусимметрической связности должны выполняться равенства (8). Расписывая эти равенства для различных значений индексов i, j, k, находим, что $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $c_{123} = c_{213} = 0$, а $c_{113} = -\omega_3$ и $c_{223} = -\omega_3$, то есть $c_{113} = c_{223}$, но в силу условий теоремы 2 $c_{113} = 1$, а $c_{223} = -1$, получили противоречие.

Тензор деформации T является гладким сечением расслоения $TM \otimes \wedge^2 M$, для которого имеет место поточечно неприводимое разложение (см., например, [13])

$$T^*M \otimes \wedge^2 M \cong F_1(M) \oplus F_2(M) \oplus F_3(M).$$

При этом если тензор T является сечением расслоения $F_1(M)$, то $T(X,Y,Z)$ кососимметричен по своим аргументам, и мы имеем связность с кососимметрическим кручением, если T есть сечение расслоения $F_2(M)$, то связность является полусимметрической, все остальные метрические связности принадлежат третьему классу. Таким образом, *левоинвариантные контактные метрические связности принадлежат третьему классу* $F_3(M)$.

3. Субримановы геодезические

Вполне неголономное контактное распределение $\mathfrak{L} = \ker \eta$ вместе с ограничением метрики g на это распределение определяют на многообразии Sol субриманову структуру. Горизонтальная (допустимая) кривая $\gamma : x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$, где s – естественный параметр, называется субримановой геодезической, если она является геодезической относительно усеченной связности $\overline{\nabla}$ [9]: $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, где $\overline{\nabla}$ – ортогональная проекция связности ∇ на распределение $\mathfrak{L}$, а $\dot\gamma$ – поле касательных векторов кривой γ, лежащих в распределении $\mathfrak{L}$.

Теорема 3. *Субримановы геодезические, выходящие из единицы группы Sol, образуют однопараметрическое семейство следующих кривых:*

$$x = b(1 - e^{-as}), \quad y = b(1 - e^{as}), \quad z = as,$$

где a и b – постоянные, удовлетворяющие условию $a^2(1 + 2b^2) = 1$. Эти геодезические являются частью геодезических плоской контактной метрической связности $\widetilde{\nabla}$ с тензором деформации

$$T = e^{2z} dx \otimes dx \wedge dz - e^{-2z} dy \otimes dy \wedge dz.$$

Доказательство. На многообразии Sol рассмотрим неголономное поле реперов $\{p, E_i\}$, адаптированное к структуре почти произведения $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$:

$$E_1 = \partial_3, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\partial_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z}\partial_2, \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\partial_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z}\partial_2, \tag{14}$$

где векторные поля E_1 и E_2 принадлежат контактному распределению: $\eta(E_1) = \eta(E_2) = 0$, а $E_3 = \xi$. Разложения координатных векторных полей

$$[E_i, E_j] = \Omega_{ij}^k E_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, E_i\}$, а коэффициенты Ω_{ij}^k определяют объект неголономности. Для рассматриваемого поля реперов имеем

$$[E_1, E_2] = -E_3, \quad [E_1, E_3] = -E_2, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Таким образом, $\Omega_{12}^3 = -\Omega_{21}^3 = -1,\ \Omega_{13}^2 = -\Omega_{31}^2 = -1$, остальные компоненты равны нулю. Дуальный реперу $\{p, E_i\}$ корепер $\left\{p, Q^j\right\}$ определяется условием $Q^j(E_i) = \delta_i^j$ и имеет следующие координатные формы:

$$Q^1 = dz, \quad Q^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z}dx - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}dy, \quad Q^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{z}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-z}dy = \eta.$$

Нетрудно убедиться, что репер $\{p, E_i\}$ является ортонормированным относительно метрики (4), поэтому в этом репере

$$g(X,Y) = X^1Y^1 + X^2Y^2 + X^3Y^3,$$

где X^i и Y^i – неголономные координаты векторных полей X и Y: $X = X^iE_i$, $Y = Y^iE_i$, а

$$ds^2 = {Q^1}^2 + {Q^2}^2 + {Q^3}^2.$$

Вычислим неголономные коэффициенты γ_{ij}^k связности Леви-Чивита ∇

$$\nabla_{E_i}E_j = \gamma_{ij}^k E_k.$$

Для связности Леви-Чивита имеем следующую вычислительную форму (см., например, [14])

$$g(\nabla_x Y, Z) = \frac{1}{2}[Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y)+ \\ + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])].$$

Полагая $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j$, $Z = Z^kE_k$, получим

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\,\delta^{ks}[E_i(\delta_{sj}) + E_j(\delta_{is}) - E_s(\delta_{ij}) + \Omega_{ij}^{\,l}\delta_{sl} + \Omega_{si}^{\,l}\delta_{jl} - \Omega_{js}^{\,l}\delta_{il}].$$

Так как $E_i(\delta_{jk}) = 0$ и $\Omega_{ij}^k = -\Omega_{ji}$, то

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\,(\Omega_{ij}^k + \delta^{ks}(\Omega_{si}^{\,l}\delta_{jl} + \Omega_{sj}^{\,l}\delta_{il})),$$

откуда находим

$$\gamma_{23}^1 = \gamma_{32}^1 = -1, \quad \gamma_{31}^2 = 1, \quad \gamma_{21}^3 = 1,$$

остальные коэффициенты равны нулю. Таким образом,

$$\nabla_{E_2}E_3 = -E_1, \quad \nabla_{E_3}E_2 = -1, \quad \nabla_{E_3}E_1 = E_2, \quad \nabla_{E_2}E_1 = E_3,$$

откуда следует, что для ортогональной проекции связности ∇ на контактное распределение $\overline{\nabla} = \text{пр}_{\mathfrak{L}}\nabla$ имеют место равенства

$$\overline{\nabla}_{E_i}E_j = 0. \quad i,j = 1,2; \quad E_i \in \mathfrak{L}.$$

Найдем сначала уравнения горизонтального параллельного векторного поля v вдоль горизонтальной кривой γ в усеченной связности $\overline{\nabla} : \overline{\nabla}_{\dot\gamma}v = 0$. Пусть

$$v = v^k\partial_k, \quad k = 1,2,3, \quad v = w^kE_k, \quad k = 1,2,$$

$$\dot\gamma = \frac{dx}{ds}\,\partial_1 + \frac{dy}{ds}\,\partial_2 + \frac{dz}{ds}\,\partial_3, \quad \dot\gamma = \eta^iE_i, \quad i = 1,2.$$

Тогда, учитывая, что $\overline{\nabla}_{E_i}E_k = 0$, получим

$$\overline{\nabla}_{\dot\gamma}v = \overline{\nabla}_{\eta^iE_i}(w^kE_k) = \eta^i\overline{\nabla}_{E^i}(w^kE_k) = \eta^i(E_iw^k)E_k = 0.$$

Таким образом, уравнения параллельного векторного поля v вдоль кривой γ примут вид

$$\eta^iE_i(w^k) = 0. \tag{15}$$

Найдем формулы перехода от естественных координат векторного поля v к неголономным. Из (14) следует, что

$$\partial_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z E_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z E_3, \quad \partial_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} E_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} E_3, \quad \partial_3 = E_1.$$

В силу (15)

$$\begin{aligned} v &= v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 = \\ &= v^1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z E_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z E_3\Big) + v^2\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z} E_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} E_3\Big) + v^3 E_1 = \\ &= v^3 E_1 + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} v^1\, e^z - \frac{1}{\sqrt{2}} v^2\, e^{-z}\Big) E_2 + \Big(v^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z + v^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z}\Big) E_3. \end{aligned}$$

Так как $v \in \mathfrak{L}$, то есть $\eta(v) = 0$ и $v = w^1 E_1 + w^2 E_2$, то

$$v^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z + v^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} = 0, \tag{16}$$

$$w^1 = v^3, \quad w^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v^1 e^z - \frac{1}{\sqrt{2}}\, v^2 e^{-z}. \tag{17}$$

Аналогичные формулы имеем и для вектора $\dot\gamma$

$$\frac{dx}{ds} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^z + \frac{dy}{ds} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-z} = 0 \tag{18}$$

и

$$\eta^1 = \frac{dz}{ds}, \quad \eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{ds}\, e^z - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dy}{ds}\, e^{-z}. \tag{19}$$

Заменяя в (15) неголономные координаты естественными, получим

$$\frac{dv^3}{ds} = 0, \quad e^z\, \frac{dv^1}{ds} - e^{-z}\, \frac{dv^2}{ds} = 0. \tag{20}$$

Из (16) следует, что $v^2 = -v^1 e^{2z}$, а значит, из (20) вытекает, что

$$e^z \frac{dv^1}{ds} - e^{-z}\, \frac{d}{ds}(-v^1 e^{2z}) = e^z\, \frac{dv^1}{ds}\, - e^{-z}\Big(-\frac{dv^1}{ds}\, e^{2z} - v^1 2e^{2z}\, \frac{dz}{ds}\Big) = 0,$$

поэтому $\dfrac{dv^1}{ds} + v^1\, \dfrac{dz}{ds} = 0$. Выражая из (16) $v^1 = -v^2 e^{-2z}$ и подставляя в (20), находим, что $\dfrac{dv^2}{ds} + v^2\, \dfrac{dz}{ds} = 0$. Таким образом, для горизонтальной кривой γ и горизонтального векторного поля v (то есть при выполнении условий (16) и (18)) справедливы следующие дифференциальные уравнения параллельного векторного поля

$$\frac{dv^1}{ds} + v^1\, \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dv^2}{ds} + v^2\, \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dv^3}{ds} = 0. \tag{21}$$

Полагая в уравнениях (21) $v = \dot\gamma$, получим дифференциальные уравнения субримановых геодезических

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \tag{22}$$

которые легко интегрируются. Общее решение системы (22) есть

$$x = -\frac{a^1}{a^3} e^{-a^3 s} + b^1, \quad y = \frac{a^2}{a^3} e^{a^3 s} + b^2, \quad z = a^3 s + b^3, \quad a^3 \neq 0, \tag{23}$$

где a^i, b^i – постоянные, удовлетворяющие условию $\eta(\dot\gamma) = 0$, то есть $a^1 e^{b^3} + a^2 e^{-b^3} = 0$. При исследовании строения геодезических, в силу левоинвариантности субримановой структуры, можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы. В этом случае при $s = 0$ x, y и z должны обращаться в нуль. Тогда

$$\frac{a^1}{a^3} = b^1, \quad \frac{a^2}{a^3} = -b^2, \quad b^3 = 0$$

и уравнения (23) примут вид

$$x = -b^1 e^{-a^3 s} + b^1, \quad y = -b^2 e^{a^3 s} + b^2, \quad z = a^3 s. \tag{24}$$

Так как вектор $\dot\gamma(b^1 a^3 e^{-a^3 s},\ -b^2 a^3 e^{a^3 s},\ a^3)$ – горизонтальный, то из (18) вытекает, что $b^1 = b^2$. Поэтому имеем параметрические уравнения субримановых геодезических, выходящих из единицы группы Sol:

$$x = b(1 - e^{-as}), \quad y = b(1 - e^{as}), \quad z = as, \tag{25}$$

где a и b – постоянные. И, наконец, необходимо учесть, что s – длина дуги кривой γ. Так как $ds^2 = {Q^1}^2 + {Q^2}^2 + {Q^3}^2$ и контактное распределение $\mathfrak{L}$ определяется уравнением $Q^3 = 0$, то ограничение метрики g на горизонтальное распределение будет следующим

$$ds^2 \,|_{\mathfrak{L}} = {Q^1}^2 + {Q^2}^2 = dz^2 + \Big(\frac{1}{\sqrt2}\, e^z dx - \frac{1}{\sqrt2}\, e^{-z} dy\Big)^2.$$

Отсюда

$$\dot\gamma^2 = a^2 + \Big(\frac{1}{\sqrt2}\, e^z abe^{-as} - \frac{1}{\sqrt2} e^{-z}(-ab)\, e^{as}\Big)^2 = \\ = a^2 + \Big(\frac{1}{\sqrt2}\, e^{as} abe^{-as} + \frac{1}{\sqrt2}\, e^{-as} abe^{as}\Big)^2 = a^2 + 2a^2b^2 = 1,$$

это означает, что на постоянные a, b в уравнениях геодезических (25) накладывается условие $a^2(1 + 2b^2) = 1$.

Во второй части теоремы утверждается, что субримановы геодезические являются частью геодезических плоской контактной метрической связности $\widetilde\nabla$ с тензором деформации, указанным в теореме. В этом случае $\widetilde\Gamma^1_{31} = 1$, $\widetilde\Gamma^2_{32} = -1$, остальные коэффициенты равны нулю. Поэтому дифференциальные уравнения геодезических в этой связности совпадают с уравнениями (22). Таким образом, решение (23) является решением уравнений геодезических плоской контактной метрической связности. Уравнения геодезических, выходящих из единицы группы имеют вид (25), а условие естественной параметризации

$${a^3}^2(1 + {b^1}^2 + {b^2}^2) = 1$$

при требовании горизонтальности геодезических: $b^1 = b^2 = b$, $a^3 = a$ – совпадает с условием для субримановых геодезических. □

Литература

1. *Thurston W.P.* The Geometry and Topology of Three-Manifold / Ed. by S. Levy. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1997. – 328 p.
2. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях / Под ред. В.И. Арнольда. – М.: Мир, 1986. – 164 с.
3. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, I // Tohoku Math. J. (2). – 1960. - V. 12, No 3. – P. 459–476. – doi: 10.2748/tmj/1178244407.
4. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. – Berlin; N. Y.: Springer, 1976. – 148 p. – doi: 10.1007/BFb0079307.
5. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Одесса: Печатный Дом, 2013. – 458 с.
6. *Паньженский В.И., Климова Т.Р.* Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 11. – С. 51–59.
7. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian Geometry. – Trieste, Italy: SISSA, 2012. – 179 p.
8. *Аграчев А.А.* Некоторые вопросы субримановой геометрии // Усп. матем. наук. – 2016. – Т. 71, № 6. – С. 989–1019. – doi: 10.4213/rm9744.
9. *Вершик А.М., Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики: Сб. ст. / Под ред. М.Г. Веселова и др. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – С. 129–141.
10. *Вершик А.М., Герикович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 16 – С. 5–85.
11. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. – М.: Изд-во иностар. лит., 1957. – 152 с.
12. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
13. *Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е.* Многообразия Римана – Картана // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ, 2009. – Т. 123. – С. 110–141.
14. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом / Пер. с нем. Ю.Д. Бураго; под ред. и с доб. В.А. Топоногова. – М.: Мир, 1971. – 343 с.

Поступила в редакцию
30.10.2019

Паньженский Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое образование»

Пензенский государственный университет
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: *kaf-geom@yandex.ru*

Растрепина Анастасия Олеговна, студент факультета физико-математических и естественных наук

Пензенский государственный университет
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: *n.rastrepina@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 1, pp. 77–90

doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90

The Left-Invariant Contact Metric Structure on the Sol Manifold

*V.I. Pan'zhenskii**, *A.O. Rastrepina***

Penza State University, Penza, 440026 Russia
E-mail: **kaf-geom@yandex.ru*, ***n.rastrepina@mail.ru*

Received October 30, 2019

Abstract

Among the known eight-dimensional Thurston geometries, there is a geometry of the Sol manifold – a Lie group consisting of real special matrices. For a left-invariant Riemannian metric on the Sol manifold, the left shift group is a maximal simple transitive group of isometry. In this paper, we found all left-invariant differential 1-forms and proved that on the oriented Sol manifold there is only one left-invariant differential 1-form, such that this form and the left-invariant Riemannian metric together define the contact metric structure on the Sol manifold. We identified all left-invariant contact metric connections and distinguished flat connections among them. A completely non-holonomic contact distribution along with the restriction of a Riemannian metric to this distribution define the contact metric structure on the Sol manifold, and an orthogonal projection of the Levi-Chivita connection is a truncated connection. We obtained geodesic parameter equations of the truncated connection, which are the sub-geodesic equations, using a non-holonomic field of frames adapted to the contact metric structure. We revealed that these geodesics are a part of the geodesics of the flat contact metric connection.

Keywords: Sol manifold, contact metric structure, contact metric connection, sub-Riemannian geodesics

References

1. Thurston W.P. *The Geometry and Topology of Three-Manifold.* Levy S. (Ed.). Princeton, Princeton Univ. Press, 1997. 328 p.
2. Scott P. *Geometrii na trekhmernykh mnogoobraziyakh* [The Geometries of 3-Manifolds]. Arnol'd V.I. (Ed.). Moscow, Mir, 1986. 164 p. (In Russian)
3. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, I. *Tohoku Math. J. (2)*, 1960, vol. 12, no. 3, pp. 459–476. doi: 10.2748/tmj/1178244407.
4. Blair D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Berlin, New York, Springer, 1976. 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.
5. Kirichenko V.F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa, Pechatnyi Dom, 2013. 458 p. (In Russian)

6. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051.
7. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian Geometry*. Trieste, SISSA, 2012. 179 p.
8. Agrachev A.A. Topics in sub-Riemannian geometry. *Russ. Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 989–1019. doi: 10.1070/RM9744.
9. Vershik A.M., Faddeev L.D. Lagrangian mechanics in invariant form. In: *Problemy teoreticheskoy fiziki* [Problems of Theoretical Physics]. Veselov M.G. et al. (Eds.). Leningrad, Izd. LGU, 1975, pp. 129–141. (In Russian)
10. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. *Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravleniya*, 1987, vol. 16, pp. 5–85. (In Russian)
11. Jano K., Bochner S. *Krivizna i chisla Betti* [Curvature and Betty Numbers]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1957. 152 p. (In Russian)
12. Norden A.P. *Prostranstva affinnoi svyaznosti* [Affine Connection Spaces]. Moscow, Nauka, 1976. 432 p. (In Russian)
13. Gordeeva I.A., Pan'zhenskii V.I., Stepanov S.E. Riemann–Cartan manifolds. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 169, no. 3, pp. 342–361. doi: 10.1007/s10958-010-0052-5.
14. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. *Rimanova geometriya v tselom* [Riemannian Geometry as a Whole]. Toponogov V.A. (Ed.). Moscow, Mir, 1971. 343 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 1. – С. 77–90. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90. ⟩

⟨ ***For citation*:** Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90. (In Russian) ⟩