Научный дайджест: Критерий единственности для многочленов Эрмита–Паде.

Автор доклада: **профессор А.П. Старовойтов** (Гомель)

XIV Казанская конференция по теории функций. Сентябрь 2019 г. («Х-2019»)

Для $f \in X$, где X – одно из банаховых пространств $C_{2\pi}$, $C[-1,1]$, рассмотрим последовательности наилучших полиномиальных и рациональных приближений

$$E_n(f, X) = \ inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_X, n = 0,1,2, \ldots,$$

$$R_n(f, X) = \ inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_X, n = 0,1,2, \ldots,$$

$\mathcal{P}_n, \mathcal{R}_n$ – множества всех алгебраических или тригонометрических полиномов и рациональных функций степени не выше n. С ростом n введенные последовательности стремятся к нулю. Возникает следующая

Проблема. Какой должна быть бесконечно малая последовательность $a_n \downarrow 0$, чтобы существовала функция $f \in X$, для которой

(Бернштейн, 1938) $E_n(f, X) = \ a_n, n = 0,1,2, \ldots ;$

(Долженко, 1966) $R_n(f, X) = \ a_n, n = 0,1,2, \ldots .$

При этом требуется дать описание указанных последовательностей приближений, когда f пробегает X.

Теорема С.Н. Бернштейна 1938 г. устанавливает в качестве решения его проблемы произвольную бесконечно малую последовательность, однако доказательство этой теоремы оказывается неэффективным.

В случае рациональных приближений первый результат получен Е.П. Долженко (1967): для любой последовательности $a_n \downarrow 0$ существует функция $f \in X$, для которой при $n_k = 9^k$ выполняются равенства $R_{n_k}(f, X) = E_{n_k}(f, X) = a_{n_k}$, $k = 0,1,2, \dots$.

С момента опубликования работы Долженко (1967) и до 2000 г. для пространств $C_{2\pi}$, $C[-1,1]$ не появилось ни одного сколь-нибудь значимого результата, проливающего свет на то, какой должна быть последовательность $a_n \downarrow 0$, чтобы для некоторой функции $f \in X$ имели место равенства) $R_n(f, X) = a_n$, $n = 0,1,2, \dots$.

Последнее обстоятельство обусловлено, конечно же, не отсутствием интереса к таким исследованиям. Чтобы оценить сложность проблемы, достаточно заметить, что и в настоящее время отсутствуют примеры непрерывных функций, отличных от рациональных, для которых точно известны все их наилучшие равномерные рациональные приближения.

Более того, у математиков, интересующихся данной проблематикой, не было уверенности в том, что в случае рациональных приближений имеет место аналог теоремы Бернштейна. К тому времени уже имелись весьма веские аргументы в поддержку такого предположения. В работах А.А. Гончара и Е.П. Долженко было обнаружено, что «мир рациональных приближений устроен иначе, чем мир полиномиальных приближений».

Кроме того, немного позже стало ясно, что в случае рациональных приближений ответ на исходный вопрос зависит и от пространства X.

Перейдем к результатам автора. Соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ постулирует одинаковый порядок участвующих в нем бесконечно малых последовательностей, обозначение $\alpha_n \sim \beta_n$ традиционно. Рассмотрим следующий ослабленный вариант задачи Бернштейна для рациональных приближений:

Проблема Долженко. Какой должна быть последовательность $a_n \downarrow 0$, чтобы существовали такие функции $f, g \in X$, для которых $R_n(g, X) \asymp a_n$, $R_n(f, X) \sim a_n$?

Теорема 1 (2000). *Пусть последовательность $a_n \downarrow 0$ строго убывает к нулю. Тогда существует такая нечетная функция $f \in C_{2\pi}$, для которой $R_n(f, C_{2\pi}) = a_n$, $n = 0,1,2, \dots$*

Теорема 2 (2000). *Для произвольной числовой последовательности $a_n \downarrow 0$ существует такая нечетная функция $f \in C_{2\pi}$, для которой $R_n(f, C_{2\pi}) \sim a_n$, $n = 0,1,2, \dots$ Более того, существует эффективный пример нечетной функции $g \in C_{2\pi}$, для которой $R_n(g, C_{2\pi}) \asymp a_n$, $n = 0,1,2, \dots$.*

Текст восстановлен по фотографиям доклада.