

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ  
(ПРЕДЕЛЫ, ПРОИЗВОДНЫЕ, ГРАФИКИ).

Учебное пособие

Казань

2010

УДК 517

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета*

*ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет*

*учебно-методической комиссии*

*механико-математического факультета*

*Протокол № 2 от 26 ноября 2010 г.,*

*заседания кафедры математического анализа*

*Протокол № 3 от 24 ноября 2010 г.*

*Авторы-составители:*

канд. физ.– мат. наук, доцент Луговая Г.Д.,

канд. физ.– мат. наук Скворцова Г.Ш.

*Рецензенты*

кандидат физико-математических наук, доцент Веселова Л.В.

кандидат физико-математических наук, доцент Турилова Е.А.

**[Функции одной вещественной переменной (пределы, производные, графики).]:** Учебное пособие/ Луговая Г.Д., Скворцова Г.Ш. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2010. — 85 с.

Данное учебное пособие предназначено для проведения занятий по курсу математического анализа со студентами, обучающимся по всем специальностям механико-математического факультета.

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2010.

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	4
--------------------	---

## I. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

1. Предел последовательности. . . . .	5
2. Вычисление пределов последовательности . . . . .	10
3. Предел функции. . . . .	13
4. Использование замечательных пределов . . . . .	9
5. Переход к эквивалентным функциям при вычислении пределов . . . . .	26

## II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6. Производная явной функции . . . . .	29
7. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная неявной функции. . . . .	35
8. Геометрический смысл производной . . . . .	39
9. Дифференциал функции. . . . .	43
10. Правило Лопиталю. . . . .	45
11. Производные и дифференциалы высших порядков. . . . .	49
12. Формула Тейлора. . . . .	57
13. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. . . . .	63
14. Возрастание и убывание функции.	

Выпуклость вверх и вниз.	
Точки перегиба . . . . .	68
15. Асимптоты. . . . .	71
16. Построение графиков функций. . . . .	73

## ВВЕДЕНИЕ

В пособии приведены некоторые теоретические сведения по темам, изучаемым в I семестре курса "Математический анализ". Также даны методические указания к решению задач по этим темам. Пособие содержит подборку задач, которые могут быть использованы для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов I курса всех специализаций механико-математического факультета.

## СОГЛАШЕНИЯ

Значком  $\nabla$  обозначается начало доказательства, значком  $\square$  — конец доказательства.

# I. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

## 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**1.1. Определение предела.** Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $x_n$  (обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  или  $x_n \rightarrow a$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n > N (|x_n - a| < \varepsilon).$$

**1.2. Теорема о двух милиционерах.**

Если  $z_n \leq x_n \leq y_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**1.3. Критерий Коши**

Последовательность  $x_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} (|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon).$$

**1.4. Монотонные последовательности. Теорема.** Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

**Замечание.** Так как всякая возрастающая (убывающая) последовательность  $x_n$  ограничена снизу (сверху) числом  $x_1$ , при применении теоремы к возрастающей (убывающей) последовательности достаточно проверить ее ограниченность сверху (снизу).

**1.5. Примеры.**

**1.5.1. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , если  $|q| < 1$ .

$\nabla$  Докажем с помощью определения. Имеем  $|q| < 1 \implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies \frac{1}{|q|} = 1 + \delta$ , где  $\delta = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ . Тогда, пользуясь формулой бинома Ньютона, получим

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \dots > n\delta,$$

что влечет  $|q|^n < \frac{1}{\delta n}$  и, следовательно, неравенство  $|q|^n < \varepsilon$  справедливо при

$$n > \frac{1}{\varepsilon \delta} = \frac{1}{\varepsilon \left( \frac{1}{|q|} - 1 \right)}.$$

Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  (в качестве  $N$  можно взять, например,  $\lceil \frac{1}{\varepsilon \delta} \rceil + 1$ ) такое, что  $\forall n > N (|q|^n < \varepsilon)$ , откуда и следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .  $\square$

**1.5.2. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , если  $|q| > 1$ .

$\nabla$  Следует из примера 1.3.1:

$$q^n = \frac{1}{\left( \frac{1}{q} \right)^n} \longrightarrow \infty. \square$$

**1.5.3. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  ( $a > 0$ ).

$\nabla$  При  $a = 1$  равенство верно. Докажем для случая  $a > 1$  (тогда случай  $a < 1$  будет следовать из доказанного и выкладки

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \longrightarrow 1).$$

Обозначим  $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$  и докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Имеем

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$$

(здесь, как и в примере 1, мы воспользовались формулой бинома), откуда  $0 < \alpha_n < \frac{a}{n}$  и, следовательно, по теореме "о двух милиционерах"  $\alpha_n \longrightarrow 0$ .  $\square$

**1.5.4. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

$\nabla$  Как и в предыдущем примере, обозначим  $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$  и докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Пользуясь снова формулой бинома Ньютона, имеем

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \quad n \geq 2$$

Учитывая, что  $n-1 \geq \frac{n}{2}$  при  $n \geq 2$ , получим

$$n \geq \frac{n^2}{4}\alpha_n^2 \implies 0 < \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \implies \alpha_n \longrightarrow 0. \square$$

**1.5.5. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$ .

▽ Воспользовавшись выкладкой предыдущего примера, получим

$$a^n = (1 + a - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2 \quad (n \geq 2),$$

откуда следует, что  $0 < \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n(a-1)^2}$  и, следовательно, по теореме "о двух милиционерах"  $\frac{n}{a^n} \rightarrow 0$ . □

**1.5.6. Пример.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}, a > 1)$ .

▽ Следует из примера 1.3.5.:

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k \rightarrow 0. \square$$

**1.5.7. Пример.**

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

▽ Применим критерий Коши для доказательства сходимости данной последовательности. Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $p \in \mathbb{N}$ —произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \\ \left| \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - \frac{\sin 1}{2} - \frac{\sin 2}{2^2} - \dots - \frac{\sin n}{2^n} \right| &= \\ = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| &\leq \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} &= \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \text{ при } n > N = \left[ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1. \end{aligned}$$

(Во втором равенстве мы воспользовались формулой суммы  $p$  членов геометрической прогрессии). □

**1.5.8. Пример.** Доказать, что последовательность  $x_n$  сходится (имеет предел).

$$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}.$$

▽ Покажем, что последовательность является убывающей.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (n+9)(n+10) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (n+9)} = \frac{n+10}{2n+1} < 1, \quad n > 9.$$

Следовательно,  $x_{n+1} < x_n$  ( $n > 9$ ), то есть  $x_n$  убывает. Кроме того,  $x_n$  ограничена снизу:  $x_n > 0$ . Таким образом, по теореме о монотонной ограниченной последовательности  $x_n$  является сходящейся. □

**1.5.9. Пример.** С помощью теоремы о монотонной ограниченной последовательности доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

▽ Так как  $|x_n| \rightarrow 0$  влечет  $x_n \rightarrow 0$ , достаточно рассмотреть случай  $a > 0$ .

Покажем, что последовательность  $x_n = \frac{a^n}{n!}$  убывающая. Действительно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}n!}{a^n(n+1)!} = \frac{a}{n+1} < 1, \quad \text{начиная с некоторого } n. \text{ Кроме того}$$

$x_n$  ограничена снизу:  $x_n > 0$ . По теореме о монотонной ограниченной последовательности существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Обозначим его через  $c$ . Переходя к

пределу в равенстве  $x_{n+1} = \frac{a}{n+1}x_n$ , получим:  $c = 0 \cdot c = 0$ . Таким образом,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad \square$$

## 1.6. УПРАЖНЕНИЯ

**1.6.1.** Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (\text{указать } N(\varepsilon)).$$

$$1) x_n = \frac{n}{n+1}, \quad a = 1.$$

$$4) x_n = \frac{1}{n!}, \quad a = 0.$$

$$2) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad a = 0.$$

$$5) x_n = (-1)^n 0,999^n, \quad a = 0.$$

$$3) x_n = \frac{2n}{n^3+1}, \quad a = 0.$$

$$6) x_n = \frac{\log_b n}{n}, \quad a = 0.$$



$$7) x_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \frac{3}{2}.$$

$$14) x_n = \frac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

$$8) x_n = \frac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \frac{7}{2}.$$

$$15) x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \frac{4}{3}.$$

$$9) x_n = \frac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$$

$$16) x_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$$

$$10) x_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$17) x_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

$$11) x_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$18) x_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \frac{3}{4}.$$

$$12) x_n = \frac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$19) x_n = \frac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$$

$$13) x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$$

$$20) x_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5}.$$

**1.6.2.** С помощью критерия Коши доказать сходимость следующих последовательностей.

$$1) x_n = a_0 + a_1q + \dots + a_nq^n, \text{ где } |a_k| < M \ (k = 0, 1, \dots), \ |q| < 1.$$

$$2) x_n = \frac{\cos(1!)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(2!)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}.$$

$$3) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Указание. Воспользоваться неравенством  $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  для  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.6.3.** Пользуясь теоремой о монотонной ограниченной последовательности доказать сходимость следующих последовательностей.

$$1) x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n}, \text{ где } p_i \text{ — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с } p_1.$$

$$2) x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$3) x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.

**2.1.** При вычислении пределов последовательностей используются следующие арифметические свойства.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(Равенства понимаются в том смысле, что если существуют пределы в правых частях равенств, то существуют и в левых, и они равны)

**2.2.** Также будем использовать следующие свойства:

$$x_n \longrightarrow 0 \iff |x_n| \longrightarrow 0.$$

$$x_n \longrightarrow \infty \implies \frac{1}{x_n} \longrightarrow 0.$$

$$x_n \longrightarrow 0 \implies \frac{1}{x_n} \longrightarrow \infty.$$

### 2.3. Примеры.

**2.3.1. Пример.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (0,5)^n}{(0,3)^{n+1} + 5} = \frac{3 + 0}{0 + 5} = \frac{3}{5}.$$

(Здесь мы воспользовались арифметическими свойствами предела и примером 1.5.1.)

В случае неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$  следует вынести старшую степень в числителе и знаменателе и сократить на нее.

### 2.3.2. Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^2}{3n^3 + 2} = 100 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3(3 + \frac{2}{n^3})} = 100 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n^3}} = 0.$$

### 2.3.3. Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n(5 \left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 \cdot 5)}{5^n(100 \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2)} = \frac{5 \cdot 0 - 3 \cdot 5}{100 \cdot 0 + 2} = -\frac{15}{2}.$$

### 2.3.4. Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2-n}{n+1} + \frac{n2^{-n}}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( \frac{2}{n} - 1 \right)}{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \frac{1}{2^n}}{n \left( 1 + \frac{2}{n} \right)} = -1 + 0 = -1.$$

Неопределенность  $\infty - \infty$  приводится к  $\frac{\infty}{\infty}$  с помощью предварительных преобразований (приведением к общему знаменателю, домножением на сопряженное и т.п.).

### 2.3.5. Пример.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(6n + 1) - (3n^2 + 1)(2n + 1)}{(2n + 1)(6n + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 6n + n^2 + 1 - 6n^3 - 2n - 3n^2 - 1}{(2n + 1)(6n + 1)} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2n^2}{(2n + 1)(6n + 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{4}{n} - 2 \right)}{n^2 \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \left( 6 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### 2.3.6. Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Обратим внимание на одну типичную ошибку, допускаемую многими студентами. Например, при вычислении предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n}$  поступают так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{-(-1)^n} = -1, \text{ объясняя при этом, что } \frac{1}{n} \text{ и } \frac{1}{n^2} \text{ стремятся к } 0, \text{ что, конечно, верно, но переход к пределу совершен не по правилам.}$$

Верное решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n(-1)^n}\right)}{(-1)^n \left(\frac{1}{(-1)^n n^2} - 1\right)} = \frac{1 + 0}{0 - 1} = -1.$$

(Здесь  $\frac{1}{n(-1)^n}$  и  $\frac{1}{(-1)^n n^2}$  стремятся к 0, так как стремятся к 0 их модули.)

## 2.4. УПРАЖНЕНИЯ

**2.4.1** Вычислить пределы следующих последовательностей (найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ) [в квадратных скобках приведены ответы].

$$1) x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^5 \quad [1].$$

$$6) x_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2} \quad [1].$$

$$2) x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} \quad [1].$$

$$7) x_n = \frac{3n}{5+3^{n+1}} \quad [0].$$

$$3) x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2} \quad [0].$$

$$8) x_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n} \quad [27].$$

$$4) x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n} + n} \quad \left[\frac{1}{2}\right].$$

$$9) x_n = \frac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}} \quad \left[\frac{1}{6}\right].$$

$$5) x_n = \frac{n^3 + 27}{n^4 - 15} \quad [0].$$

$$10) x_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad \left[\frac{1}{3}\right].$$

$$11) x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad [0].$$

$$\begin{array}{ll}
12) x_n = \sqrt{n^2 - 1} - (n + 1) & [-1]. \\
13) x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} & [1]. \\
14) x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n & \left[\frac{2}{3}\right]. \\
15) x_n = \frac{n}{2} \left( \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) & \left[\frac{1}{3}\right]. \\
16) x_n = \frac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}} & \left[\frac{1}{3}\right]. \\
17) x_n = \frac{n^{10} - 1}{1 + n(1, 1)^n} & [0]. \\
18) x_n = \sqrt[3]{3^n + n \cdot 2^n} & [3]. \\
19) x_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 + 4^n}{n + 5^n}} & \left[\frac{4}{5}\right]. \\
20) x_n = \sqrt[n]{\frac{10}{n} - \frac{1}{(1, 2)^n}} & [1].
\end{array}$$

### 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

**3.1. Определение.** Пусть  $a$ —предельная точка множества  $E$ . Число  $\alpha$  называется *пределом функции*  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon),$$

(обозначается  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ).

**3.2. Вычисление пределов функций** Вычисление пределов основывается на следующих арифметических свойствах предела функции .

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

Равенства понимаются в том смысле, что, если существуют пределы в правых частях, то существуют и в левых, и они равны.

**3.3. Вычисление пределов рациональных функций** В случае, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к  $\infty$  (говорят, что имеет место

неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ ), надо вынести в числителе и знаменателе старшую степень и сократить на нее (см. примеры 3.5.3., 3.5.4.).

В случае, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 (говорят, что имеет место неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ), следует, разложив числитель и знаменатель на множители, выделить сомножитель, стремящийся к 0, и сократить на него (см. примеры 3.5.5., 3.5.6.).

Неопределенность вида  $\infty - \infty$  приводится к неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  (см. пример 3.5.11.).

**3.4. Вычисление пределов иррациональных функций** В примерах, содержащих иррациональности, для того, чтобы выделить выражение, подлежащее сокращению, следует предварительно умножить числитель и знаменатель на сопряженное (см. примеры 3.5.7., 3.5.8, 3.5.11.).

### 3.5. Примеры.

**3.5.1. Пример.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$ .

▽ Докажем с помощью определения (в нашем случае

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}, a = -3, \alpha = -7).$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  оценим разность  $|f(x) - \alpha| = \left| \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} + 7 \right| = \left| \frac{2x^2 + 5x - 3 + 7x + 21}{x + 3} \right| = \left| \frac{2x^2 + 12x + 18}{x + 3} \right| = \left| \frac{2(x + 3)^2}{x + 3} \right| = 2|x + 3| < \varepsilon$  при  $0 < |x + 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . □

**3.5.2. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0}(x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 0}(2x^2 - x - 1)} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$ .

**3.5.3. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} =$

$$\frac{1 - 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
3.5.4. \text{ Пример. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 20)^{30}}{(2x + 1)^{50}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{20} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} x^{30} \left(3 + \frac{20}{x}\right)^{30}}{x^{50} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{20}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.5.5. \text{ Пример. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.5.6. \text{ Пример. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x - 1) - (x - 1)}{x^2(x + 1) - (x + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.5.7. \text{ Пример. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + 4} - 2)(\sqrt{x + 4} + 2)}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(Здесь мы умножили числитель и знаменатель на  $\sqrt{x + 4} + 2$  — сопряженное к  $\sqrt{x + 4} - 2$ , затем применили в числителе формулу разности квадратов).

$$\begin{aligned}
3.5.8. \text{ Пример. } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1 - x} - 3)(\sqrt{1 - x} + 3)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(2 + \sqrt[3]{x})((4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1 - x} + 3))} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1 - x - 9)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8 + x)(\sqrt{1 - x} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -8} -\frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1 - x} + 3} = -\frac{4 + 4 + 4}{3 + 3} = -2.
\end{aligned}$$

(Здесь мы умножили числитель и знаменатель на выражения  $(\sqrt{1-x}+3)$  и на  $(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$ , а затем применили формулы разности квадратов в числителе и суммы кубов в знаменателе.

**3.5.9. Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ .

▽ Положим  $1+x=y$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^n - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + 1)} = \frac{1}{n}. \quad \square$$

**3.5.10. Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}$ .

▽ Вычислим этот предел с использованием результата примера 3.5.9. Вычитая и добавляя единицу в числителе и разделив числитель и знаменатель на  $x$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - 1}{3 \cdot \frac{x}{3}} - \frac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}} - 1}{4 \cdot \frac{x}{4}}}{\frac{\sqrt{1+(-\frac{x}{2})} - 1}{2(-\frac{x}{2})}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{7}{36}. \quad \square$$

**3.5.11. Пример.**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = \{\infty - \infty\} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\
&= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 8/x + 3/x^2} + \sqrt{1 + 4/x + 3/x^2}} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}$$

### 3.6. УПРАЖНЕНИЯ

**3.6.1.** В следующих примерах доказать (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), что:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -7.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$$

**3.6.2.** Вычислить пределы функций [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \quad \left[ \frac{1}{4} \right].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} \quad \left[ \frac{1}{5^5} \right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\dots(x^n+1)}{((nx)^n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \left[ \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} \quad [3].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \quad [1].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

**3.6.3.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x^2 + x^5} \quad [3].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \quad \left[\frac{1}{2}\right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1} \quad \left[\frac{2}{3}\right].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \quad \left[\frac{1}{4}\right].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\right].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \left[\frac{m}{n}\right].$$

**3.6.4.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \quad \left[\frac{4}{3}\right].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9} \quad \left[-\frac{1}{16}\right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} \quad \left[\frac{1}{4}\right].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2} \quad \left[\frac{1}{4}\right].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}} \quad \left[\frac{2}{27}\right].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}} \quad \left[\frac{3}{2}\right].$$

**3.6.5.** Используя результат **примера 3.5.9.**, вычислить пределы функций [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \quad \left[ \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} \right].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} \cdot \sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x} \quad \left[ \frac{\beta}{n} + \frac{\alpha}{m} \right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad \left[ \frac{n}{m} \right].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} \quad \left[ \frac{1}{n!} \right].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} ((x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}) \quad \left[ \frac{4}{3} \right].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) \quad [2].$$

**3.6.6.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) \quad [0].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) \quad [2].$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}) \quad \left[ \frac{2}{3} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d}) \quad \left[ \frac{a-c}{2} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) \quad \left[ \frac{a+b}{2} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \quad \left[ \frac{1}{2} \right].$$

## 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ .

### 4.1. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

### 4.2. Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

или

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (\mathbf{1} + \mathbf{x})^{\frac{1}{\mathbf{x}}} = \mathbf{e}.$$

**4.3.** С помощью второго замечательного предела получается формула для раскрытия неопределенности вида  $\mathbf{1}^\infty$ , а именно, если  $U(x) \rightarrow 1$ , а  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x)^{V(x)} = e^A, \text{ где } A = \lim_{x \rightarrow a} (U(x) - 1)V(x).$$

(Формула получается из тождественного равенства:

$$U(x)^{V(x)} = \left( \left( 1 + (U(x) - 1) \right)^{\frac{1}{U(x) - 1}} \right)^{(U(x) - 1)V(x)}.$$

**4.4.** Из второго замечательного предела также получаем:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\ln(\mathbf{1} + \mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

**4.5.** В свою очередь, из предыдущего получаются значения еще двух пределов:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{x}} - \mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \ln \mathbf{a}.$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{1} + \mathbf{x})^\mu - \mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mu.$$

▽ Для доказательства первого из двух равенств обозначим  $a^x - 1 = \alpha$  и прологарифмируем равенство  $a^x = 1 + \alpha$ . Получим  $x \ln a = \ln(1 + \alpha)$ , откуда  $x = \frac{\ln(1 + \alpha)}{\ln a}$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln a}{\ln(1 + \alpha)} = \ln a.$$

Аналогично, для доказательства второго равенства обозначим  $(1+x)^\mu - 1 = \alpha$  и прологарифмируем равенство  $(1+x)^\mu = 1 + \alpha$ . Получим:  $\mu \ln(1+x) = \ln(1 + \alpha)$ . Из равенств  $\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} \cdot \frac{\ln(1 + \alpha)}{x} = \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{x}$  с учетом того, что  $x \rightarrow 0$  влечет  $\alpha \rightarrow 0$ , и  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} = 1$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu \ln(1+x)}{x} = \mu. \square$$

#### 4.6. Примеры.

4.6.1. Пример.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

4.6.2. Пример.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = 1.$

4.6.3. Пример.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = 1.$

4.6.4. Пример.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$

4.6.5. Пример.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{(\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x + x \sin x} =$   
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}} = (\text{с учетом примера 4.6.4.}) = 2 \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{4}{3}.$

4.6.6. Пример.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)(x + \pi)}{\sin(\pi - x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)(x + \pi)}{-\sin(x - \pi)} =$   
 $= - \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin(x - \pi)} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} (x + \pi) = -1 \cdot 2\pi = -2\pi.$

4.6.7. Пример.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2(1/2 - \cos x)}{3(\pi/3 - x)} =$   
 $\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\cos \pi/3 - \cos x}{\pi/3 - x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{-2 \sin \frac{\pi/3 + x}{2} \sin \frac{\pi/3 - x}{2}}{\pi/3 - x} =$   
 $= -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \pi/3} \sin \frac{\pi/3 + x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin \frac{\pi/3 - x}{2}}{\frac{\pi/3 - x}{2}} =$

$$= -\frac{2}{3}(\sin \pi/3) \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**4.6.8. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \{1^\infty\} = e^A$ , где

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e$ .

**4.6.9. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x = e^A$ , где

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x = e$ .

**4.6.10. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \pi/2}} = e^A$ , где  $A = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x/2 - 1}{x - \pi/2} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x/2 - \cos x/2}{(\cos x/2)(x - \pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(\pi/2 - x/2) - \cos x/2}{x - \pi/2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2(\sin \pi/4) \sin \frac{x - \pi/2}{2}}{x - \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x - \pi/2}{2}}{2 \cdot \frac{x - \pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \pi/2}} = e^{\sqrt{2}/2}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \{1^\infty\} = e^A$ , где

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e$ .

**4.6.11. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x = e^A$ , где

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x = e$ .

**4.6.12. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^A$ , где  $A = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x/2 - 1}{x - \pi/2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x/2 - \cos x/2}{(\cos x/2)(x - \pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(\pi/2 - x/2) - \cos x/2}{x - \pi/2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2(\sin \pi/4) \sin \frac{x - \pi/2}{2}}{x - \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x - \pi/2}{2}}{2 \cdot \frac{x - \pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^{\sqrt{2}/2}$ .

**4.6.13. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7^{2x} - 1) - (5^{3x} - 1)}{2x(1 - \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 1}{2x(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x})} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{3x} - 1}{3x(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x})} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 1}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x})} - \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{3x} - 1}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x})} =$$

$$= \ln 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cdot 1} - \frac{3}{2} \ln 5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cdot 1} = -2 \ln 7 + 3 \ln 5 = \ln \frac{125}{49}.$$

**4.6.14. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+x-1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1 \cdot 2 = 2.$$

**4.6.14. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \{1^\infty\} = e^A,$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} - 1 \right) \frac{1}{x} =$$

(так как  $a^x + b^x \rightarrow 2$  при  $x \rightarrow 0$ )

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - a^x + b^{x^2} - b^x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{x^2-x} - 1) + b^x(b^{x^2-x} - 1)}{x(x-1)} \cdot (x-1) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} = -\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = -\ln \sqrt{ab}.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\ln \sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$

## 4.7. УПРАЖНЕНИЯ

**4.7.1** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$  [5].

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$  [ $\frac{1}{8}$ ].

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$  [ $\frac{1}{3}$ ].

9)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{(\pi - x)^2}$  [1].

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$  [ $-\frac{5}{3}$ ].

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$  [-1].

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$  [ $\frac{7}{\pi}$ ].

11)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$  [ $\cos a$ ].

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$  [ $\frac{1}{2}$ ].

12)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$  [ $\frac{1}{\cos^2 a}$ ].

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$  [2].

13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$  [ $\frac{1}{4}$ ].

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$  [4].

14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$  [4].



$$\begin{array}{ll}
15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)} & \left[\frac{1}{4}\right]. \\
16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} & [\sqrt{2}]. \\
17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} & [0]. \\
21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} & \left[-\frac{1}{12}\right]. \quad 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} & \left[\frac{1}{4}\right]. \\
18) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x} & [0]. \\
19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x} & \left[\frac{2}{\pi}\right]. \\
20) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x} & [-1].
\end{array}$$

**4.7.2.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$\begin{array}{ll}
1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^3} & [e^3]. \\
2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x} & [e^{-2}]. \\
3) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x} & [e^{-1}]. \\
4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} & [1]. \\
5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} & [\sqrt{e}]. \\
6) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x - a}} & [e^{\operatorname{ctg} a}]. \\
7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & [e^{3/2}]. \\
8) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}^2 x} & \left[\frac{1}{e}\right]. \\
9) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} & [1]. \\
10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x} & [e^{-2}]. \\
20) \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} & [e^{-2/9}]. \\
11) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} & \left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]. \\
12) \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} & [e^{4/\pi}]. \\
13) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6 - x}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}} & [e^{2/\pi}]. \\
14) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}} & [e^{-1/12}]. \\
15) \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} & [e^{2/\pi}]. \\
16) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}} & [e^{-1/8}]. \\
17) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}} & [e]. \\
18) \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}} & [e^{-1/4}]. \\
19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x} & [e^{-5/2}].
\end{array}$$

**4.7.3** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$  [ln 1764].
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$   $[\ln \frac{9}{125}]$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}$   $[\frac{1}{8} \ln \frac{2}{243}]$ .
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{3x - \operatorname{tg} 2x}$  [-2].
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg}(x^2)}$  [1].
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \operatorname{arcsin}(x^3)}$   $[\ln \frac{8}{9}]$ .
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}$   $[\frac{1}{5} \ln \frac{8}{9}]$ .
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin(x^2)}$  [3].
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}$   $[\frac{1}{2} \ln(3^5 \cdot 2^7)]$ .
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$   $[\frac{1}{a}]$ .
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$   $[\frac{1}{2}]$ .
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$  [-2].
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$   $[\frac{1}{4}]$ .
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$  [50].
- 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$   $[\frac{1}{\ln \frac{a}{b}}]$ .
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) \frac{1}{x}$   $[e^2]$ .
- 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right) \frac{1}{x^2}$   $[\frac{2}{3}]$ .
- 18)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}$   $[a^{a^a} \ln a]$ .
- 19)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$   $[a^x \ln^2 a]$ .
- 20)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right) \frac{1}{x}$   $[\sqrt[3]{abc}]$ .

## 5. ПЕРЕХОД К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ФУНКЦИЯМ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ.

**5.1. Определение.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *эквивалентными* при  $x \rightarrow a$  (пишут  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow a$ )), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

**5.2. Теорема.** Если  $f(x) \sim g(x)(x \rightarrow a)$ , и существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)h(x)$ , и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)h(x)$ .

**5.3.** Приведем ряд эквивалентностей, используемых при вычислении пределов.

$$\begin{array}{ll} \sin x \sim x & (x \rightarrow 0), & \ln(1+x) \sim x & (x \rightarrow 0), \\ \arcsin x \sim x & (x \rightarrow 0), & a^x - 1 \sim x \ln a & (x \rightarrow 0), \\ \operatorname{tg} x \sim x & (x \rightarrow 0), & e^x - 1 \sim x & (x \rightarrow 0), \\ \operatorname{arctg} x \sim x & (x \rightarrow 0), & (1+x)^\mu \sim \mu x & (x \rightarrow 0), \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 & (x \rightarrow 0), & \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x & (x \rightarrow 0). \end{array}$$

#### 5.4. Примеры.

**5.4.1. Пример.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)}{2\sqrt{\sin x + 1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\pi - \frac{x^2}{\pi}\right)}{2(2\sqrt{\sin x + 1} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - \frac{x^2}{\pi}}{2(\sqrt{\sin x + 1} - 1) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2 - x^2}{2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin x \cdot \ln 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi - x)(\pi + x)}{\pi \sin(\pi - x) \cdot \ln 2} = \frac{2}{\ln 2}. \end{aligned}$$

(Здесь мы применили следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi - \frac{x^2}{\pi}\right) &\sim \pi - \frac{x^2}{\pi} \quad (\text{так как } \pi - \frac{x^2}{\pi} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pi), \\ 2\sqrt{\sin x + 1} - 1 &\sim (\sqrt{\sin x + 1} - 1) \ln 2 \quad (\text{так как } \sqrt{\sin x + 1} - 1 \rightarrow 0 \\ &\text{при } x \rightarrow \pi), \\ \sqrt{\sin x + 1} - 1 &\sim \frac{1}{2} \sin x \quad (\text{так как } \sin x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pi). \end{aligned}$$

**5.4.2. Пример.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(\ln(3x - 5))}{e^{x+3} - e^{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x - 5)}{e^{x^2+1}(e^{x+3-x^2-1} - 1)} = \\ &= \frac{1}{e^5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1 + (3x - 6))}{x - x^2 + 2} = -\frac{1}{e^5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(x - 2)(x + 1)} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{e^5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{e^5}.$$

(Здесь мы применили следующие эквивалентности:

$$\operatorname{tg}(\ln(3x-5)) \sim \ln(3x-5) \quad (\text{так как } \ln(3x-5) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2),$$

$$e^{x-x^2+2} - 1 \sim x - x^2 + 2 \quad (\text{так как } x - x^2 + 2 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2),$$

$$\ln(1 + (3x-6)) \sim 3x-6 \quad (\text{так как } 3x-6 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2).)$$

## 5.5. УПРАЖНЕНИЯ

**5.5.1** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + ax))}{\sin bx} \quad \left[\frac{2a}{b}\right].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(2x - \pi)^2} \quad \left[-\frac{1}{8}\right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos(\pi x)} \quad \left[\frac{2}{3\pi^2}\right].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))} \quad [-2].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin(5x)}{e^{\sin^2 x} - 1} \quad [-15\pi^2].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2-a^2} - 1}{\operatorname{tg}(\ln(\frac{x}{a}))} \quad [2a^2 \ln a].$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)} \quad \left[-\frac{1}{4}\right].$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x} \quad [2].$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(\frac{x+2}{2})}{3\sqrt{2+x+x^2} - 9} \quad \left[-\frac{2}{27} \ln 3\right].$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln(\cos x)}{3^{\sin 2x} - 1} \quad [0].$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2} \quad \left[\frac{5}{\cos^2 2}\right].$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2} \quad \left[\frac{1}{2 \ln^2 3}\right].$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}} - e} \quad \left[\frac{3}{11e}\right].$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x} - 3)}{3^{\cos(3x/2)} - 1} \quad \left[-\frac{2}{\pi}\right].$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1} \quad \left[-\frac{2}{\pi}\right].$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln \frac{2x}{\pi}} \quad [-2\pi].$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)} \quad [1].$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad \left[\frac{1}{\ln \frac{a}{b}}\right].$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \quad [1].$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \quad [-2].$$

$$21) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h} \quad \left[ \frac{1}{1+x^2} \right].$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)} \quad [2].$$

## II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 6. ПРОИЗВОДНАЯ ЯВНОЙ ФУНКЦИИ

**6.1. Определение производной.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x$ . Функция  $f$  называется *дифференцируемой* в точке  $x$ , если существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Этот предел называется *производной  $f$  в точке  $x$*  и обозначается  $f'(x)$ . Функция называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

На практике производную функции чаще вычисляют с помощью основных правил дифференцирования, используя уже известные производные элементарных функций.

**6.2. Производные элементарных функций.**

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n - \text{константа}), \quad \sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x,$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\operatorname{arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x, \quad \operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x, \quad \operatorname{th}'x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}, \quad \operatorname{cth}'x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

**6.3.** Основные правила дифференцирования.

**6.3.1.** Производные суммы, произведения и частного. Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$  и  $C$ —константа, то

$$(Cf(x))' = Cf'(x);$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**6.3.2.** Производная сложной функции. Если функция  $g$  дифференцируема в точке  $x$ , функция  $f$  дифференцируема в точке  $g(x)$ , то

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

**6.3.3.** Производная функции вида  $f(x)^{g(x)}$ . По свойствам 6.3.1. и 6.3.2. если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$  и  $f(x) > 0$ , то

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$

При дифференцировании функции, заданной фигурной скобкой, пользуются следующим свойством производной.

**6.4.** Пусть

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(эти пределы называются соответственно *левой* и *правой* производной функции  $f$  в точке  $x$ .) Функция  $f$  в точке  $x$  дифференцируема тогда и только тогда, когда

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

## 6.5. Примеры.

**6.5.1.** Найти  $f'(1)$ , если  $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ .

▽ Найдем  $f'(1)$  с помощью определения.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h-1)(1+h-2)^2(1+h-3)^3 - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)^2(h-2)^3}{h} = (-1)^2(-2)^3 = -8. \square \end{aligned}$$

**6.5.2.** Найти  $f'(x)$ , если  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ .

▽ По формуле производной сложной функции

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{2}-1} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1} (x + \sqrt{x})' \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right). \square \end{aligned}$$

**6.5.3.** Найти  $f'(x)$ , если  $f(x) = \cos x \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)$ .

▽ По формулам производной произведения и производной сложной функции

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos' x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x \left( \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' = -\sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' = \\ &= -\sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left( \frac{x}{2} \right)' = -\sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{2} = \\ &= -\sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}. \square \end{aligned}$$

**6.5.4.** Найти  $f'(x)$ , если  $f(x) = (\arccos x)^x$ .

▽ Запишем функцию в следующем виде  $f(x) = e^{\ln(\arccos x)^x} = e^{x \ln \arccos x}$ .

Теперь по формуле производной сложной функции

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln \arccos x} (x \ln \arccos x)' = \\ &= (\arccos x)^x \left( \ln \arccos x + \frac{x}{\arccos x} (\arccos x)' \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\arccos x)^x \left( \ln \arccos x + \frac{x}{\arccos x} \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) = \\
&= (\arccos x)^x \left( \ln \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} \right).
\end{aligned}$$

Также можно было использовать формулу 6.3.3.  $\square$

**6.5.5.** Найти  $f'(x)$ , если

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & \text{при } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$\nabla$  Во всех точках числовой прямой, за исключением точек  $x = 1$  и  $x = 2$ , производная вычисляется по основным правилам и

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 1, \\ -3 + 2x & \text{при } 1 < x < 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Посчитаем  $f'(1)$  и  $f'(2)$ . Вначале, в точках  $x = 1$  и  $x = 2$  найдем левые и правые производные  $f'_-(1)$ ,  $f'_+(1)$  и  $f'_-(2)$ ,  $f'_+(2)$ :

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 - (1+h)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \\
f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1 - (1+h))(2 - (1+h)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h(1-h)}{h} = -1.
\end{aligned}$$

Так как  $f'_-(1) = f'_+(1)$ , то

$$f'(1) = f'_-(1) = f'_+(1) = -1.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 - (2+h))(2 - (2+h)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1-h)(-h)}{h} = 1, \\
f'_+(2) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2 - (2+h)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.
\end{aligned}$$

Значит  $f'(2) = 1$ .  $\square$

**6.5.6.** Найти  $f'(x)$ , если  $f(x) = |x|$ .



▽ Во всех точках числовой прямой, за исключением точки  $x = 0$  производная вычисляется по основным правилам и

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдем  $f'_-(0)$ ,  $f'_+(0)$ .

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Так как левая и правая производные в точке  $x = 0$  не совпадают, то функция  $f(x) = |x|$  в этой точке не дифференцируема. □

## 6.6. УПРАЖНЕНИЯ

**6.6.1.** Исходя из определения, найти производные следующих функций:

$$1) y = \sqrt[3]{x}, 2) y = \arcsin x, 3) y = \operatorname{arctg} x.$$

**6.6.2.** Найти  $f'(2)$ , если  $f(x) = x^2 \sin(x - 2)$ .

**6.6.3.** Пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & 7) y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}, \\ 2) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}, & 8) y = e^x + e^{x^x} + e^{x^{x^x}}, \\ 3) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, & 9) y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b, \\ 4) y = \sin(\sin(\sin x)), & 10) y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}, \\ 5) y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, & 11) y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \\ 6) y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}, & 12) y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)), \\ & 13) y = \ln^3 x^2, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
14)y &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & 25)y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x), \\
15)y &= x \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2\sqrt{x^2 + 1}, & 26)y &= \sqrt{x^2 + 1} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x, \\
16)y &= \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & 27)y &= \log_x e \\
17)y &= x(\sin \ln x - \cos \ln x), & 28)y &= x + x^x + x^{x^x}, \\
18)y &= \arccos \frac{1}{x}, & 29)y &= \sqrt[x]{x}, \\
19)y &= \arcsin(\sin x), & 30)y &= (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}, \\
20)y &= \arccos(\cos^2 x), & 31)y &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}, \\
21)y &= \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & 32)y &= \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}, \\
22)y &= \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}, & 33)y &= \ln \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} + \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2}, \\
22)y &= \frac{1}{\arccos^2 x^2}, & 34)y &= \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \\
23)y &= \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \operatorname{arctg}(\sin x), & 35)y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x). \\
24)y &= \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

**6.6.4.** Найти производные следующих функций:

$$1) f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{при } 0 \leq x. \end{cases}$$

$$2) f(x) = x |x|.$$

**6.6.5.** Найти левую и правую производную, если:

$$1) f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \text{ при } x \neq 0, f(0) = 0,$$

$$2) f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}} & \text{при } 0 \leq x. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} & \text{при } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

## 7. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

**7.1. Производная обратной функции.** Пусть функция  $f(x)$  обладает непрерывной производной на интервале  $(a, b)$ , причем  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$  имеет однозначную дифференцируемую обратную функцию  $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$  и  $\forall y_0 = f(x_0)$

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**7.2. Производная функции, заданной параметрически.** Пусть функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  дифференцируемы на интервале  $(\alpha, \beta)$ , причем производная  $x'(t)$  непрерывна и  $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$ . Тогда на интервале  $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$  определена однозначная дифференцируемая функция от переменной  $x$  вида  $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$  и  $\forall x_0 = \varphi(t_0)$

$$f'_x(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

**7.3. Производная функции, заданной неявно.** Если функция  $f(x)$  задана неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ , то, дифференцируя тождество

$$F(x, f(x)) = 0$$

как сложную функцию, можно найти  $f'_x(x)$ .

### 7.4. Примеры.

**7.4.1.** Выделить однозначные непрерывные ветви обратной функции  $x = x(y)$  и найти их производные, если  $f(x) = 2x^2 - x^4$ . Найти  $x'(0)$ .

▽ Функция  $f(x) = 2x^2 - x^4$  является дифференцируемой и ее производная  $f'(x) = 4x - 4x^3$  непрерывна. В точках  $x = 0$ ,  $x = 1$ , и  $x = -1$  производная  $f'(x) = 4x - 4x^3 = 0$ . Эти точки разбивают числовую прямую на 4 интервала  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$ . Обозначим

$$f_1(x) = f(x)(x \in (\infty, -1)), \quad f_2(x) = f(x)(x \in (-1, 0)),$$

$$f_3(x) = f(x)(x \in (0, 1)), \quad f_4(x) = f(x)(x \in (1, \infty)).$$

Производные  $f'_i(x) \neq 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ , значит определены однозначные дифференцируемые обратные функции  $x_i(y) = f_i^{-1}(y) (i = 1, 2, 3, 4)$ . Эти обратные функции являются однозначными непрерывными ветвями обратной функции  $x = x(y)$  и для  $y = 2x^2 - x^4$

$$(f_i^{-1})'(y) = \frac{1}{4x - 4x^3} (i = 1, 2, 3, 4).$$

Для того, чтобы найти  $x'(0)$ , сначала выясним, при каких значениях  $x$  переменная  $y = 0$ . Для этого решим уравнение  $2x^2 - x^4 = 0$ . Корнями уравнения являются значения  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$ . Точка  $x = 0$  является границей одного из интервалов, указанных выше, поэтому обратная функция не определена однозначно, следовательно производная не определена. Точка  $x = \sqrt{2} \in (1, \infty)$ , следовательно,  $x = \sqrt{2} = x_4(0)$ , производная считается по формуле, выведенной выше и

$$x'(0) = (f_4^{-1})'(0) = \frac{1}{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}(1 - 2)} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}.$$

Аналогично при  $x = -\sqrt{2} = x_1(0)$  производная

$$x'(0) = (f_1^{-1})'(0) = \frac{1}{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}. \square$$

**7.4.2.** Найти производную  $f'_x(x)$  от функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями  $x = -1 + 2t - t^2$ ,  $y = 2 - 3t + t^3$ . Чему равна  $f'_x(x)$  при  $x = 0$  и  $x = -1$ .

▽ Продифференцируем  $x(t)$  и  $y(t)$ . Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t, \quad y'(t) = -3 + 3t^2.$$

Производная  $x'(t) = 2 - 2t = 0$  при  $t = 1$ . Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые функции:  $f_1(x)$  при  $t < 1$  и  $f_2(x)$  при  $t > 1$ . При  $t \neq 1$  производные обеих функций имеют вид

$$f'_x(x) = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1 + t)}{2}.$$

Так как  $x = -1$  при  $t = 0$  и  $t = 2$ , то

$$(f_1)'(-1) = \frac{-3 + 3 \cdot 0}{2 - 2 \cdot 0} = \frac{-3}{2}$$

$$(f_2)'(-1) = \frac{-3 + 3 \cdot (2)^2}{2 - 2 \cdot 2} = \frac{-9}{2}.$$

В точке  $t = 1$  (т.е. при  $x = 0$ ) производная  $f'(x)$  не может быть найдена по формуле из 7.2. Попробуем найти производную по определению:

$$\begin{aligned} f'_x(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(1+t) - y(1)}{x(1+t) - x(1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - 3(1+t) + (1+t)^3 - 0}{-1 + 2(1+t) - (1+t)^2 - 0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2 + t^3}{-t^2} = -3. \square \end{aligned}$$

**7.4.3.** Найти производную  $y'_x(x)$  от функции  $y = f(x)$ , заданной неявно следующим уравнением

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Чему равно  $y'_x(x)$  при  $x = 2, y = 4$  и при  $x = 2, y = 0$ .

▽ Запишем данное уравнение в виде  $x^2 + 2xy(x) - y^2(x) = 2x$  и продифференцируем его как сложную функцию. Получаем

$$2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 2.$$

Откуда выражаем

$$y'_x(x) = \frac{2 - 2x - 2y(x)}{2x - 2y(x)} = \frac{1 - x - y(x)}{x - y(x)}.$$

Следовательно,

$$\text{при } x = 2, y = 4 \text{ производная } y'_x(2) = \frac{1 - 2 - 4}{2 - 4} = \frac{5}{2},$$

$$\text{при } x = 2, y = 0 \text{ производная } y'_x(2) = \frac{1 - 2 - 0}{2 - 0} = \frac{-1}{2}. \square$$

**7.4.3.** Найти производную  $y'_x(x)$  от функции  $y = f(x)$ , заданной в полярной системе координат  $r = a(1 + \cos \varphi)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

▽ Можно считать, что функция  $y = f(x)$  задана параметрически с параметром  $\varphi$  следующими уравнениями

$$x = r \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Найдем производные

$$x'(\varphi) = -a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi =$$

$$= -2a \sin \varphi \cos \varphi - a \sin \varphi = -a(\sin 2\varphi + \sin \varphi) = -2a \sin \left( \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$y'(\varphi) = -a \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi = a(\cos 2\varphi + \cos \varphi) = 2a \cos \left( \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что  $x'(\varphi) = 0$  при  $\varphi = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$ . Тогда, при  $\varphi \neq 0, \pm \frac{2\pi}{3}$ , по формуле пункта 7.2,

$$f'_x(x) = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{2a \cos \left( \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}}{-2a \sin \left( \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg} \left( \frac{3\varphi}{2} \right). \square$$

## 7.5. УПРАЖНЕНИЯ

**7.5.1** Показать, что существует однозначная дифференцируемая обратная функция  $y(x)$ , удовлетворяющая уравнению  $y^3 + 3y = x$  и найти ее производную.

**7.5.2.** Выделить однозначные непрерывные ветви обратной функции  $x = x(y)$  и найти их производные, если

$$1) = \frac{x^2}{1 - x^2},$$

$$2) = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

**7.5.3.** Найти производные  $y'_x(x)$  от функций, заданных параметрически уравнениями

$$1) x = \sin^2 t, y = \cos^2 t,$$

$$2) x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t,$$

$$3) x = e^{2t} \cos^2 t, \quad y = e^{2t} \sin^2 t,$$

$$4) x = \arcsin \frac{t}{1+t^2}, \quad y = \arccos \frac{1}{1+t^2}.$$

**7.5.4.** Найти производные  $y'_x(x)$  от функций, заданных неявно

$$1) y^2 = 2px,$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$3) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

**7.5.5.** Найти производные  $y'_x(x)$  от функций, заданных в полярной системе координат 1)  $r = a\varphi$ , 2)  $r = ae^{m\varphi}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ .

## 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

**8.1.** Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , то производная  $f'(x)$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке  $(x, f(x))$ .

**8.2.** *Уравнения касательной и нормали.* Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции  $y = f(x)$ , проведенной в точке  $(x_0, f(x_0))$  имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику дифференцируемой функции  $y = f(x)$ , проведенной в точке  $(x_0, f(x_0))$  имеет вид:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Говорят, что кривые  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  пересекаются под углом  $\alpha$ , если под углом  $\alpha$  пересекаются касательные к этим кривым, проведенные в точке пересечения  $x_0$ . Угол  $\alpha = |\arctg f'_1(x_0) - \arctg f'_2(x_0)|$ .

**8.3.** *Бесконечная производная.* Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x$  и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty,$$

то говорят, что в точке  $x$  функция имеет бесконечную производную. В этом случае касательная к графику функции  $f$  в точке  $(x, f(x))$  перпендикулярна оси  $Ox$ .

## 8.4. Примеры.

**8.4.1.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 3)$  и  $C(3, 0)$ .

▽ Найдем производную от данной функции:

$$y'(x) = \sqrt[3]{3 - x} - \frac{x + 1}{3\sqrt[3]{(3 - x)^2}}.$$

Так как  $y'(-1) = \sqrt{4}$ ,  $y(-1) = 0$ , то уравнение касательной к графику данной функции в точке  $A$  имеет вид:  $y = \sqrt{4}(x + 1)$ .

Так как  $y'(2) = 0$ ,  $y(2) = 3$ , то касательная к графику функции в точке  $B$  параллельна оси  $Ox$ . Уравнение касательной в точке  $B$  имеет вид:  $y = 3$ .

В точке  $C(3, 0)$  функция имеет бесконечную производную, так как

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + h)\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \infty.$$

Значит касательная к графику функции в точке  $C(3, 0)$  перпендикулярна оси  $Ox$  и ее уравнение  $x = 0$ . □

**8.4.2.** Определить угол между левой и правой касательными к кривой

$$y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}} \text{ в точке } x = 0.$$

▽ Найдем  $f'_-(0)$ ,  $f'_+(0)$ .

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|ah|}{h} = -|a|,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|ah|}{h} = |a|.$$



Так как левая и правая производные в точке  $x = 0$  не совпадают, то заданная функция в этой точке не дифференцируема. В точке  $x = 0$  можно построить касательную к левой части графика (левую касательную) и к правой части графика (правую касательную). Угловым коэффициентом левой касательной равен  $k_1 = -|a|$ , а угловым коэффициентом правой касательной  $k_2 = |a|$ . Пусть  $\alpha$  — угол между левой касательной и положительным направлением оси, а  $\beta$  — угол между правой касательной и положительным направлением оси. Тогда  $\operatorname{tg}(\alpha) = -|a|$ ,  $\operatorname{tg}(\beta) = |a|$ . Угол между касательными есть угол  $\gamma = \beta - \alpha$  и

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{-2|a|}{1-a^2}. \square$$

**8.4.3.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой, задаваемой параметрическими уравнениями  $x(t) = 2t - t^2$ ,  $y(t) = 3t - t^3$  в точках  $t = 0, t = 1$ .

▽ Продифференцируем  $x(t)$  и  $y(t)$ . Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t, y'(t) = 3 - 3t^2.$$

Производная  $x'(t) = 2 - 2t = 0$  при  $t = 1$ . Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые функции:  $f_1(x)$  при  $t < 1$  и  $f_2(x)$  при  $t > 1$ . При  $t \neq 1$  производные обеих функций имеют вид

$$f'(x) = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t}.$$

В точке  $t = 0$  переменная  $x(0) = 0$ , значение функции  $f_1(x) = f_1(0) = y(0) = 0$  и производная  $f'(0) = \frac{3}{2}$ . Следовательно, уравнение касательной в точке  $t = 0$  имеет вид  $y = \frac{3}{2}x$ , а уравнение нормали  $y = -\frac{2}{3}x$ . В точке  $t = 1$  переменная  $x(1) = 1$ , значение функции  $f(x) = f(1) = y(1) = 2$ . Так как  $x'(t) = 2 - 2t = 0$  при  $t = 1$  производная  $f'(x)$  не может быть найдена по формуле из 2.2. Найдем производную по определению:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(1+t) - y(1)}{x(1+t) - x(1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3(1+t) - (1+t)^3 - 2}{2(1+t) - (1+t)^2 - 1} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3t^2 - t^3}{-t^2} = 3.
\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение касательной в точке  $t = 1$  имеет вид

$$y - 2 = 3(x - 1), \text{ т.е. } y = 3x - 1,$$

а уравнение нормали

$$y - 2 = \frac{-(x - 1)}{3}, \text{ т.е. } y = \frac{-x}{3} + 2\frac{1}{3}. \square$$

## 8.5. УПРАЖНЕНИЯ.

**8.5.1.** В каких точках кривой  $y = 2 + x + x^2$  касательная к ней

а) параллельна оси ординат, б) параллельна биссектрисе первого координатного угла

**8.5.2.** Напишите уравнения касательных к следующим кривым в заданных точках

$$1) y(x) = \sqrt{5 - x^2}, M(1; 2);$$

$$2) y(x) = \arcsin \frac{x}{2}, M(0; 0).$$

$$3) y(x) = \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}, M(0; 0);$$

$$4) y(x) = \cos 2x - 2 \sin x, M(\pi; 1).$$

**8.5.3.** Найдите углы, под которыми пересекаются следующие пары кривых:

$$1) y = x^2 \text{ и } x = y^2,$$

$$2) y = \sin x \text{ и } y = \cos x.$$

**8.5.4.** Найдите угол между правой и левой касательными к кривой:

$$1) y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \text{ в точке } x = 1,$$

$$2) y = \sqrt{2x^3 + 9x^2} \text{ в точке } x = 0.$$

**8.5.5.** Напишите уравнения касательных к следующим кривым

$$1) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3 \text{ в точках } t = 0; t = 1,$$

$$2) x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3} \text{ в точках } t = 0; t = 1; t = \infty.$$

**8.5.6.** Напишите уравнения касательных к следующим кривым в заданных точках

$$1) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6; 6, 4);$$

$$2) yx + \ln y = 1, M(1; 1);$$

$$3) x^5 + y^5 = 2xy, M(1; 1).$$

## 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

**9.1.** Функция  $f$  имеет конечную производную в точке  $x$  тогда и только тогда, когда приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta f(x) = f(x + dx) - f(x) = A(x)dx + o(dx) \quad (dx \rightarrow 0).$$

Линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции  $f$  в точке  $x$*  и обозначается  $df(x)$ . Дифференциал равен

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Пренебрегая бесконечно малой  $o(dx)$ , для приближенных подсчетов можно пользоваться формулой

$$f(x + dx) - f(x) \approx f'(x)dx \quad (dx \rightarrow 0).$$

### 9.2. Примеры.

**9.1.1.** Для функции  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  определить  $\Delta f(1)$ ,  $df(1)$  и сравнить их, если  $dx = 1$ ;  $dx = 0, 1$ ;  $dx = 0, 01$ .

▽ Выведем формулы для приращения и дифференциала функции. Приращение функции

$$\Delta f(1) = f(1 + dx) - f(1) = (1 + dx)^3 - 2(1 + dx) + 1 - 0 = (dx)^3 + 3(dx)^2 + dx.$$

Для того, чтобы найти дифференциал функции, вычислим производную

$$f'(x) = 3x^2 - 2, f'(1) = 1.$$

Дифференциал равен  $df(1) = f'(1)dx = dx$ . Представим результаты вычислений в виде таблицы

$dx = 1$	$\Delta f(1) = 5$	$df(1) = 1$
$dx = 0,1$	$\Delta f(1) = 0,131$	$df(1) = 0,1$
$dx = 0,01$	$\Delta f(1) = 0,010301$	$df(1) = 0,01$ .

Как видно из таблицы, при убывании к нулю значений  $dx$  значения  $\Delta f(1)$  и  $df(1)$  становятся приблизительно равны.  $\square$

**9.1.2.** Найти  $d(\sqrt{a^2 + x^2})$ .

$\nabla$  Для того, чтобы найти дифференциал, найдем

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Тогда по формуле из 4.1

$$df(x) = f'(x)dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx. \square$$

**9.1.3.** Пусть  $u, v$  — дифференцируемые функции от  $x$ . Найти  $d(\frac{u}{v^2})$ .

$\nabla$  Используя правила нахождения производной, получаем

$$d\left(\frac{u}{v^2}\right) = \frac{vdu - u dv^2}{v^4} = \frac{vdu - 2uv dv}{v^4}.$$

**9.1.4.** Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно  $\sqrt[3]{1,02}$ .

$\nabla$  Обозначим  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Нужно найти  $f(1 + 0,02)$ . Заменяя приращение функции дифференциалом, получим  $f(1 + dx) - f(1) \approx f'(1)dx$ . При  $dx = 0,02$ , формула примет вид  $f(1 + 0,02) \approx f'(1)0,02 + f(1)$ . Для окончательного результата осталось вычислить  $f'(x)$  в точке  $x = 1$  и  $f(1)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, f'(1) = \frac{1}{3}, f(1) = 1.$$

Следовательно

$$\sqrt[3]{1,02} = f(1 + 0,02) \approx f'(1)0,02 + f(1) = \frac{0,02}{3} + 1 \approx 1,0067. \square$$

## 9.2. УПРАЖНЕНИЯ.

9.2.1. Найдите дифференциал функции  $y$ , если

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{1}{x}, & 4) y = \sin x - x \cos x, \\ 2) y = \arcsin \frac{x}{a}, & 5) y = xe^x, \\ 3) y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|, & 6) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \\ & 7) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

9.2.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно

1)  $\sin 29^\circ$ , 2)  $\operatorname{arctg} 1,05$ , 3)  $\ln 11$ .

9.2.2. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}, \quad a > 0, \quad x \rightarrow 0.$$

С помощью этой формулы приближенно вычислить 1)  $\sqrt[3]{9}$ , 2)  $\sqrt[4]{80}$ , 3)  $\sqrt[7]{100}$ , 4)  $\sqrt[10]{1000}$ .

## 10. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

10.1. Пусть  $a \in \mathbb{R}$  и  $f, g$  определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности  $U$  точки  $a$ , причем  $g(x), g'(x) \neq 0$  и выполнено одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , если существует (возможно, несобственный) предел в правой части. Правило верно также для случаев  $a = \infty, \pm\infty, x \rightarrow a \pm$ .

**10.2. Раскрытие неопределенностей других видов.** Раскрытие неопределенностей вида  $0 \cdot \infty$  и  $\infty - \infty$  путем алгебраических преобразований приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Для раскрытия неопределенностей вида  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  при вычислении пределов функций  $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$ , следует представить функцию  $\varphi(x)$  в виде

$$\varphi(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$$

и свести вычисление предела функции  $g(x) \ln f(x)$  к раскрытию неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ .

При раскрытии неопределенностей с помощью правила Лопиталья можно пользоваться замечательными пределами и эквивалентностями.

### 10.3. Примеры.

**10.3.1. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x - \sin x)'} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = 2.$$

**10.3.2. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} x)'} =$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = 3 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2 \cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = - \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{(-\sin 3x) \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

**10.3.3. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0.$$

**10.3.4. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

**10.3.5. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x},$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = e^0 = 1.$

**10.3.6. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = \{\infty^0\} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} 2 \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)},$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^0 = 1.$

**10.3.7. Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} = \{1^\infty\} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} = e^{-1/6}.$  В этом примере мы воспользовались известным пределом  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \square$

## 10.4. УПРАЖНЕНИЯ.

**10.4.1.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad \left[ \frac{a}{b} \right].$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} \quad [-2].$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} \quad [1].$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} \quad \left[ -\frac{1}{3} \right].$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} \quad \left[\frac{1}{3}\right].$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \quad \left[\frac{a^2}{b^2}\right].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \quad \left[\frac{1}{6}\right].$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \quad \left[\frac{1}{6}\right].$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \quad \left[\frac{1}{2}\right].$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{10}} \quad [0].$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} \quad [1].$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad [0].$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad \left[\frac{\ln a}{6}\right].$$

$$15) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad [a^a(\ln a - 1)].$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \quad [1].$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \quad [-2].$$

**10.4.2.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-0,01x} \quad [0].$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad \left[\frac{1}{2}\right].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(x-1) \quad [0].$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad [0].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x \quad [0].$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right) \quad [0].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right) \quad \left[-\frac{2}{\pi}\right].$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad \left[-\frac{1}{3}\right].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3} \quad [0].$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \left[\frac{1}{3}\right].$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x} \quad [2].$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arcsin(x/\sqrt{x^2 + 1})) \quad [2].$$

**10.4.3.** Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/2-} (\pi - 2x)^{\cos x} \quad [1].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2} \quad [e^{1/3}].$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{3/x^2} \quad [e^{-6}].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{1/x} \quad [2].$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{1 + \ln x}} \quad [e].$$



$$\begin{array}{ll}
6) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} & [e^{-1}]. \\
7) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} & [e^{2/\pi}]. \\
8) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} & [e^{-1}]. \\
9) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} & [1]. \\
10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x & [e^{-2/\pi}]. \\
11) \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x & [1]. \\
12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} & [1]. \\
13) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} & [e^{\frac{2}{\sin 2a}}]. \\
14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} & [e^{1/3}]. \\
15) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} & [e^{-1/3}]. \\
16) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x} & [e^{-1/2}]. \\
17) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} & [e^{-2/\pi}]. \\
18) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} & [e^{1/6}]. \\
19) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} & [e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}].
\end{array}$$

## 11. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

**11.1.** *Определение производной порядка  $n$ .* Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на некотором интервале и  $f'(x)$  — ее производная. Пусть  $f'(x)$  также дифференцируемая функция. *Второй производной от  $f(x)$*  называется производная от  $f'(x)$ , т.е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Последовательным соотношениями (при условии, что дифференцирование имеет смысл) определяется *производная порядка  $n$  от  $f(x)$*  как

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

**11.2.** *Определение дифференциалов порядка  $n$ . Дифференциал порядка  $n$  определяется формулой*

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Если  $x$  — независимая переменная, то (так как  $dx$  не зависит от  $x$ )

$$d^n x = d^n x = \dots = d^n x = 0$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Если  $x$  — промежуточный аргумент, то есть  $x = \varphi(t)$ , тогда

$$d^2 x(t) = d(dx(t)) = d(x'(t)dt) = x''(t)(dt)^2, \quad df(x) = f'(x)dx = f'(x)x'(t)dt$$

$$d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x(t) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)x''(t)(dt)^2.$$

Для вычисления производных высших порядков используются правила вычисления производных, формула Лейбница и формулы производных высших порядков от элементарных функций.

**11.3.** *Формулы производных высших порядков от элементарных функций.*

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n},$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n,$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n}.$$

**11.4.** *Формула Лейбница.* Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$   $n$  раз дифференцируемы, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

где  $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$ , и  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — биномиальные коэффициенты.

## 11.5. Примеры.

**11.5.1.** Найти  $f''(x)$ , если  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

▽ Найдем сначала первую производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\arcsin x)' \sqrt{1-x^2} - (\sqrt{1-x^2})' \arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} \\ &= \frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученную функцию, получим:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x)' \sqrt{(1-x^2)^3} - (\sqrt{(1-x^2)^3})' (\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x)}{(1-x^2)^3} \\ &= \frac{(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) \sqrt{(1-x^2)^3} - (\frac{3}{2} \sqrt{1-x^2}) (\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x)}{(1-x^2)^3} \\ &= \frac{\sqrt{(1-x^2)^3} \arcsin x - 1,5x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 1,5(1-x^2)}{(1-x^2)^3} = \\ &= \frac{(1-x^2) \arcsin x - 1,5x \arcsin x - 1,5\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^5}}. \square \end{aligned}$$

**11.5.2.** Найти  $d^2 f(x)$  для  $f(x) = e^x$  в случае а)  $x$  — независимая переменная; б)  $x$  — промежуточный аргумент.

▽ а) Если  $x$  — независимая переменная, то

$$d^{(2)} f(x) = f^{(2)}(x)(dx)^2 = e^x(dx)^2.$$

б) Если  $x$  — промежуточный аргумент (т.е.  $x = x(t)$ ), то

$$d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x(t) = e^x(dx)^2 + e^x d^2 x(t). \square$$

**11.5.3.** Найти производные  $f'_x, f''_{xx}$  и  $f'''_{xxx}$  (нижний индекс обозначает, что производные берутся по переменной  $x$ ) от функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$ .

▽ Продифференцируем  $x(t)$  и  $y(t)$ . Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t, \quad y'(t) = 3 - 3t^2.$$

Производная  $x'(t) = 2 - 2t = 0$  при  $t = 1$ . Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые ветви  $y = f(x)$ :  $f_1(x)$  при  $t < 1$  и  $f_2(x)$  при  $t > 1$ . При  $t \neq 1$  производные обеих ветвей имеют вид:

$$f'_x = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1 + t)}{2}.$$

Функция  $y = f'_x$  также является параметрически заданной функцией и по формуле производной параметрически заданной функции при  $x_0 = x(t_0)$

$$f''_{xx}(x_0) = \frac{f''_{xt}(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Так как

$$f''_{xt} = \frac{3}{2}, \quad \text{то } f''_{xx} = \frac{3}{2} \div (2 - 2t) = \frac{3}{4(1 - t)}.$$

Аналогично

$$f'''_{xxx}(x_0) = \frac{f'''_{xxt}(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Вычисляя

$$f'''_{xxt} = \frac{3}{4(1 - t)^2}, \quad \text{получаем } f'''_{xxx} = \frac{3}{4(1 - t)^2} \div (2 - 2t) = \frac{3}{8(1 - t)^3}. \quad \square$$

**11.5.4.** Найти производные  $y'_x, y''_{xx}$  и  $y'''_{xxx}$  от функции, заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 = 25$ . Чему равны  $y'_x, y''_{xx}$  и  $y'''_{xxx}$  в точке  $M(3, 4)$ .

▽ Продифференцируем данное уравнение, считая что  $y = y(x)$ . Получаем

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \quad \text{или} \quad x + y(x)y'(x) = 0, \quad \text{то есть } y'(x) = \frac{-x}{y(x)}.$$

Продифференцируем уравнение еще раз:  $1 + y'(x)y'(x) + y(x)y''(x) = 0$ . Подставляя  $y'(x)$  и учитывая, что  $x^2 + y^2 = 25$ , выводим:

$$y''(x) = \frac{-1 - (y'(x))^2}{y(x)} = \frac{-(x^2 + y(x)^2)}{y(x)^3} = \frac{-25}{y(x)^3}.$$

Продифференцируем последнее выражение

$$y'''(x) = \frac{-25 \cdot (-3)y'(x)}{y(x)^4} = \frac{-75x}{y(x)^5}.$$

В точке  $M(3, 4)$  производные принимают следующие значения:

$$y'(3) = \frac{-3}{4}, \quad y''(3) = \frac{-25}{64}, \quad y'''(3) = \frac{-225}{1024}. \quad \square$$

**11.5.5.** Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема достаточное число раз и пусть определена обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  вместе со своими производными  $x'(y)$ ,  $x''(y)$ ,  $x'''(y)$ ,  $x^{IV}(y)$ . Найти эти производные.

$\nabla$  Как известно,  $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ . Найдем  $x''(y)$ , как производную сложной функции

$$x''(y) = \left( \frac{1}{y'(x)} \right)' = \frac{-x'(y)y''(x)}{y'(x)^2} = \frac{-y''(x)}{y'(x)^3}.$$

Аналогично, используя формулы производной сложной функции и отношения функций, получим:

$$\begin{aligned} x'''(y) &= \left( \frac{-y''(x)}{y'(x)^3} \right)' = \frac{-y'''(x)x'(y)y'(x)^3 + 3y'(x)^2y''(x)x'(y)y''(x)}{y'(x)^6} = \\ &= \frac{-x'(y)y'(x)^2 \cdot (y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2)}{y'(x)^6} = -\frac{y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2}{y'(x)^5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{IV}(y) &= \left( -\frac{y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2}{y'(x)^5} \right)' = \\ &= -\frac{x'(y)(y''''(x)y'(x) + y'''(x)y''(x) - 6y''(x)y'''(x))y'(x)^5}{y'(x)^{10}} - \\ &\quad - \frac{5y'(x)^4y''(x)x'(y)(y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2)}{y'(x)^{10}} \\ &= -\frac{x'(y)y'(x)^4 \cdot (y''''(x)y'(x)^2 - 10y'''(x)y''(x)y'(x) + 15(y''(x))^3)}{y'(x)^{10}} = \\ &= -\frac{y''''(x)y'(x)^2 - 10y'''(x)y''(x)y'(x) + 15(y''(x))^3}{y'(x)^7}. \quad \square \end{aligned}$$

**11.5.6.** Найти производную  $y^{(20)}$  от функции  $y = x^2e^{2x}$ .

▽ По формуле Лейбница

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(20-k)}.$$

Вычислим  $(e^{2x})^{(k)}$ . Первая производная  $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ , вторая  $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$ , очевидно по индукции  $(e^{2x})^{(k)} = 2^k e^{2x}$ . Теперь посчитаем  $(x^2)^{(k)}$ . Получаем

$$(x^2)^{(0)} = x^2, (x^2)' = 2x, (x^2)'' = 2 \text{ и } (x^2)^{(k)} = 0 \text{ для всех } k = 3, \dots, n.$$

Значит суммироваться будут только слагаемые с номерами  $k = 0, 1, 2$ . Нам нужны

$$(e^{2x})^{(20)} = 2^{20} e^{2x}, (e^{2x})^{(19)} = 2^{19}, (e^{2x})^{(18)} = 2^{18} e^{2x} \text{ и}$$

$$C_{20}^0 = 1, C_{20}^1 = 20, C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Лейбница, выводим

$$y^{(20)} = 2^{20} e^{2x} x^2 + 2^{19} e^{2x} \cdot 2x \cdot 20 + 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \cdot 190 = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \square$$

**11.5.7.** Найти производную  $f^{(n)}(x)$  от функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

▽ Разложим функцию  $f(x)$  на сумму простейших дробей

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Найдем производные порядка  $n$  от полученных дробей

$$y = \frac{1}{x-a} = (x-a)^{-1}.$$

Последовательно вычисляя, находим

$$y' = -(x-a)^{-2}, y'' = 2(x-a)^{-3}, y''' = -2 \cdot 3(x-a)^{-4}, \dots, y^{(n)} = (-1)^n n! (x-a)^{-(n+1)}.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(x) = \left( \frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \left( \frac{1}{(x-2)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x-1)^{(n+1)}} \right).$$

**11.5.8.** Найти производную  $y^{(n)}(x)$  от функции

$$y(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

▽ Представим функцию  $y(x)$  в виде произведения

$$y = x \cdot (1-x)^{-\frac{1}{3}}.$$

По формуле Лебница

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k(x)^{(k)} ((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n-k)}.$$

Так как

$$(x)^{(0)} = x, \quad x' = 1 \text{ и } (x)^{(k)} = 0 \text{ для всех } k = 2, \dots, n,$$

то суммироваться будут только два первых слагаемые. Найдем  $(1-x^{-\frac{1}{3}})^{(k)}$ .

Начнем с вычисления

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{4}{3}} \cdot (-1) = \frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{4}{3}},$$

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})'' = \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{7}{3}} \cdot (-1) = \frac{4}{9} \cdot (1-x)^{-\frac{7}{3}}.$$

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})''' = \frac{4}{9} \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{10}{3}} \cdot (-1) = \frac{4 \cdot 7}{3^3} \cdot (1-x)^{-\frac{10}{3}}.$$

По аналогии вычисляется

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(k)} = \frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^k} \cdot (1-x)^{-\frac{(3k+1)}{3}} = \frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^k (1-x)^{k+\frac{1}{3}}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Лейбница, выводим

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= x((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n)} + n((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n-1)} = \\ &= x \frac{4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}} + n \frac{4 \cdot 7 \dots (3(n-1)-2)}{3^{(n-1)} (1-x)^{(n-1)+\frac{1}{3}}} = \\ &= x \frac{4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}} + n \frac{4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3^{(n-1)} (1-x)^{n-1+\frac{1}{3}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \cdot 7 \dots (3n - 5)}{3^n (1 - x)^{n + \frac{1}{3}}} \cdot ((3n - 2)x + 3n(1 - x)) = \\
&= \frac{(3n - 2x)4 \cdot 7 \dots (3n - 5)}{3^n (1 - x)^{n + \frac{1}{3}}}. \square
\end{aligned}$$

## 11.6. УПРАЖНЕНИЯ.

11.6.1. Найдите  $y''(x)$ , если

$$1) y = x\sqrt{1 + x^2},$$

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}},$$

$$3) y = x \ln x,$$

$$4) y = \sin x - x \cos x,$$

$$5) y = e^{-x^2},$$

$$6) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$7) y = \operatorname{tg} x.$$

11.6.2. Найти  $d^2 f(x)$  в случае  $x$  — независимая переменная для 1)  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ , 2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 3)  $f(x) = x^x$ .

11.6.3. Найти производные  $f'_x, f''_{xx}$  и  $f'''_{xxx}$  от функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически нижеследующими уравнениями в точке  $x_0$

$$1) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), x_0 = \frac{a(\pi - 2)}{2},$$

$$2) x = a \cos t, y = a \sin t, x_0 = 0,$$

$$3) x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, x_0 = 1.$$

11.6.4. Найти производные  $y'_x, y''_{xx}$  и  $y'''_{xxx}$  от функции, заданной неявно уравнением 1)  $y^2 = 2px$ , 2)  $x^2 - xy + y^2 = 1$ .

11.6.5. Найти производные  $y'_x, y''_{xx}$ , если  $y^2 + 2 \ln y = x^4$ .

11.6.6. Найти производную указанного порядка

$$1) y^{(100)} \text{ от } y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}},$$

$$2) y^{(100)} \text{ от } y = x \operatorname{sh} x,$$

$$3) y^{(8)} \text{ от } y = \frac{x^2}{1 - x},$$



$$4)y^{(10)} \text{ от } y = \frac{e^x}{x},$$

$$5)y^{(5)} \text{ от } y = x \ln x,$$

$$6)y^{(10)} \text{ от } y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}},$$

$$7)y^{(5)} \text{ от } y = \frac{\ln x}{x}.$$

**11.6.7.** Найти производную  $f^{(n)}(x)$  от функций

$$6)y = x \cos ax,$$

$$1)y = \frac{1}{x(1-x)},$$

$$7)y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x},$$

$$2)y = \frac{x}{\sqrt{1-2x}},$$

$$8)y = \frac{e^x}{x},$$

$$3)y = \sin^2 x,$$

$$9)y = e^x \cos ax,$$

$$4)y = \cos^3 x,$$

$$10)y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$$

$$5)y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

## 12. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

**12.1.** *Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.* Если функция  $f(x)$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $a$ , то при  $(x \rightarrow a)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n).$$

Разложение в сумму с остатком в форме Пеано единственно.

**12.2.** *Формула Тейлора.* Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывные производные  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f^{(n-1)}(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и производную  $f^{(n)}(x)$  на интервале  $(a, b)$ , тогда для любого  $x$  из  $[a, b]$  верно

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

где  $R_n(x)$  — остаток в форме Лагранжа. Остаток в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}, \quad c \text{ — некоторая точка интервала } (a, b).$$

При разложении функций по формуле Тейлора часто применяются разложения элементарных функций.

### 12.3. Разложение по формуле Тейлора важнейших элементарных функций.

Если переменная  $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

### 12.4. Примеры.

12.4.1. Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной  $x$  до члена с  $x^4$  функции

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$$

Чему равно  $f^{(4)}(0)$ ?

▽ Предположим, что при  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$$

— требуемое разложение. Тогда  $1+x+x^2 = (1-x+x^2)(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4))$ . Перемножим скобки в правой части, учитывая, что при  $x \rightarrow 0$

$$o(x^4) + o(x^4) = o(x^4), \quad x^n \cdot o(x^4) = o(x^{4+n}),$$

$$o(x^{4+n}) = o(x^4) \quad (n \geq 0), \quad x^m = o(x^4) \quad (m > 4).$$

Получим

$$1+x+x^2 = a+bx-ax+cx^2-bx^2+ax^2+dx^3-cx^3+bx^3+ex^4-dx^4+cx^4+o(x^4).$$

Так как разложение по формуле Тейлора единственно, то коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в правой и левой частях последнего равенства совпадают. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в правой и левой частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = a \text{ (при } x^0) \\ 1 = b - a \text{ (при } x^1) \\ 1 = c - b + a \text{ (при } x^2) \\ 0 = d - c + b \text{ (при } x^3) \\ 0 = e - d + c \text{ (при } x^4). \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$a = 1, b = 2, c = 2, d = 0, e = -2.$$

Таким образом, при  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

По формуле Тейлора коэффициент при  $x^4$  равен  $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ , в нашем разложении этот коэффициент равен  $-2$ . Так как разложение по формуле Тейлора единственно, то  $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2$  и, следовательно,  $f^{(4)}(0) = -2 \cdot 4! = -48$ .  $\square$

**12.4.2.** Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной  $x$  до члена с  $x^2$  функции

$$f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}.$$

$\nabla$  Представим функцию  $f(x)$  в виде произведения трех функций

$$f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}.$$

Используя формулу

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

разложим по степеням переменной  $x$  до члена с  $x^2$

$$(1+x)^{100} = 1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 + 100x + 4950x^2 + o(x^2),$$

$$(1-2x)^{-40} = 1 - 40(-2x) + \frac{-40 \cdot (-41)}{2!}(-2x)^2 + o(x^2) = 1 + 80x + 3240x^2 + o(x^2),$$

$$(1+2x)^{-60} = 1 - 60 \cdot 2x + \frac{-60 \cdot (-61)}{2!}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - 120x + 7320x^2 + o(x^2).$$

Значит

$$\begin{aligned} & (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60} = \\ & = (1+100x+4950x^2+o(x^2)) \cdot (1+80x+3240x^2+o(x^2)) \cdot (1-120x+7320x^2+o(x^2)). \end{aligned}$$

Перемножим скобки в правой части. Сумма слагаемых порядка малости большей, чем 2, есть  $o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} & (1+100x+4950x^2+o(x^2)) \cdot (1+80x+3240x^2+o(x^2)) = \\ & = 1+100x+4950x^2+80x+80 \cdot 100x^2+3240x^2+o(x^2) = 1+180x+16190x^2+o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1+180x+16190x^2+o(x^2))(1-120x+7320x^2+o(x^2)) = \\ & = 1-120x+7320x^2+180x-120 \cdot 180x^2+16190x^2+o(x^2) = 1+60x+1950x^2+o(x^2). \square \end{aligned}$$

**12.4.3.** Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной  $x$  до члена с  $x^{13}$  функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}.$$

▽ Разложим сначала по формуле Тейлора при  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin(x^3) &= x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} + o((x^3)^6) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{18}) = \\ &= x^3 \left( 1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15}) \right). \end{aligned}$$

Получаем

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 \left( 1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15}) \right)} = x \sqrt[3]{1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})}.$$

Разложим выражение

$$\sqrt[3]{1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})}$$

до слагаемого с  $x^{12}$ . Используем формулу

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots}{3^n \cdot n!} x^n + o(x^n).$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})} = \\ & = 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})\right) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!} \left(-\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемые вида  $o\left(\left(-\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})\right)^n\right)$  есть  $o(x^{5n})$ . Поэтому в разложении до члена с  $x^{12}$  должны участвовать только слагаемые с номерами  $n = 0, 1, 2$ . Приводя подобные и записывая все члены  $x^n$  с  $n > 12$  в  $o(x^{12})$  выводим

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})} = \\ & = 1 - \frac{x^6}{3 \cdot 3!} + \frac{x^{12}}{3 \cdot 5!} - \frac{2}{3^2 \cdot 2!} \left(\frac{x^6}{3!}\right)^2 + o(x^{12}) = \\ & = 1 - \frac{x^6}{3 \cdot 3!} + \left(\frac{1}{3 \cdot 5!} - \frac{2}{3^2 \cdot 2! \cdot (3!)^2}\right) x^{12} + o(x^{12}) = \\ & = 1 - \frac{x^6}{18} - \frac{x^{12}}{3240} + o(x^{12}). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sqrt[3]{1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{15})} = \\ &= x \left(1 - \frac{x^6}{18} - \frac{x^{12}}{3240} + o(x^{12})\right) = 1 - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13}). \square \end{aligned}$$

**12.4.4.** С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить  $\sqrt[3]{30}$  и оценить погрешность.

▽ Используем формулу Тейлора для функции  $(1+x)^m$  при малых  $x$ . Представим  $\sqrt[3]{30}$  как значение функции  $(1+x)^{\frac{1}{3}}$  при некотором малом  $x$

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3^3 + 3} = 3 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}} = 3 \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Применяя формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа, получим

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3^2 \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + R_2\left(\frac{1}{9}\right).$$

Откидывая остаток, вычисляем

$$\sqrt[3]{30} = 3 \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 3 \left(1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{9^3}\right) = 3,10699.$$

Погрешность при вычислении равна величине остатка в форме Лагранжа

$$|R_2\left(\frac{1}{9}\right)| = \left|\frac{f^{(2)}(c)}{9^2 \cdot 2!}\right| = \left|\frac{2}{3^2 \sqrt[3]{(1+c)^5}}\right| < \frac{2}{3^2}, \quad c \in \left(0, \frac{1}{9}\right).$$

Значит погрешность не превышает

$$|R_2\left(\frac{1}{9}\right)| < \frac{2}{2!3^29^2} = 0,0041. \square$$

**12.4.5.** С помощью формулы Тейлора найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

▽ Записывая все члены  $x^n$  с  $n > 3$  в  $o(x^3)$ , разложим по формуле Тейлора функцию,

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \\ &= 1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) + x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) + \frac{x^2}{2!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + x^2 + \frac{x^3}{2!} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в предел и приведем подобные

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \square$$

## 12.5 УПРАЖНЕНИЯ.

**12.5.1** Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной до членов указанного порядка включительно следующих функций

$$1) y = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} \text{ до члена с } x^2,$$

$$2) y = \sqrt[n]{a^n + x} \text{ до члена с } x^2,$$

$$3) y = e^{2x-x^2} \text{ до члена с } x^5,$$

$$4) y = \frac{x}{e^x - 1} \text{ до члена с } x^4,$$

$$5) y = \sqrt[3]{\sin x^3} \text{ до члена с } x^{13},$$

$$6) y = \ln \cos x \text{ до члена с } x^6,$$

$$7) y = \ln \frac{\sin x}{x} \text{ до члена с } x^6.$$

**12.5.2.** С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить

$$1) \sqrt[5]{250}, \quad 2) \sqrt{e}, \quad 3) \sin 18^\circ,$$

$$4) \ln(1,2), \quad 5) \operatorname{arctg} 0,8$$

и оценить погрешность.

**12.5.3.** С помощью формулы Тейлора найти

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5},$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}.$$

## 13. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ.

### НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ.

**13.1.** *Локальный экстремум.* По определению, функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный максимум*, если существует такая окрестность  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

точки  $x_0$ , что для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  выполнено неравенство  $f(x_0) \geq f(x)$ . Аналогично, функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный минимум*, если существует такая окрестность  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , что для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  выполнено неравенство  $f(x_0) \leq f(x)$ . Говорят, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный экстремум*, если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  локальный максимум или минимум.

**13.1.1. Необходимое условие экстремума.** В точке экстремума производная функции либо не существует либо равна нулю. Точки, в которых производная функции либо не существует либо равна нулю будем называть *критическими точками*.

**13.2. Достаточные условия экстремума.**

**13.2.1 Первое достаточное условие экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$  и имеет производную во всех точках этой окрестности, за исключением, возможно, самой точки  $x_0$ . Если производная меняет знак при переходе  $x_0$ , то  $x_0$  есть точка локального экстремума. Причем, если

$$f'(x) \leq 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) \geq 0 \text{ при } x > x_0$$

(т.е. знак производной меняется с "−" на "+" при возрастании аргумента  $x$ ), то  $x_0$  есть точка локального минимума, если

$$f'(x) \geq 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) \leq 0 \text{ при } x > x_0$$

(т.е. знак производной меняется с "+" на "−" при возрастании аргумента  $x$ ), то  $x_0$  есть точка локального максимума. Если производная не меняет знак при переходе  $x_0$ , то в  $x_0$  нет локального экстремума.

**13.2.2 Второе достаточное условие экстремума.** Если функция  $f(x)$  имеет вторую производную,  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) \neq 0$ , то в  $x_0$  функция имеет локальный экстремум. Причем, если  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  есть точка локального минимума, если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  есть точка локального максимума.



**13.2.3 Третье достаточное условие экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема  $n$  раз и

$$f^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, \dots, n - 1, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если  $n$  — число четное, то в  $x_0$  функция имеет локальный экстремум. Причем, если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  есть точка локального минимума, если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  есть точка локального максимума. Если  $n$  — число нечетное, то в  $x_0$  функция не имеет локального экстремума.

**13.3 Наибольшее и наименьшее значения функции.** Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  достигаются либо в критических точках (т.е. там, где производная функции не существует или равна нулю), либо на концах отрезка.

## 13.4. Примеры.

**13.4.1.** Найти экстремумы функции

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

▽ Найдем точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, т.е. критические точки. Для этого вычислим производную

$$y' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Производная определена на всей числовой прямой и равна нулю в  $x = -1$  и  $x = 1$ . Следовательно, точки экстремума функции находятся среди этих точек. Выясним, в каких точках выполняется первое достаточное условие экстремума. Изменение знака производной приводится в следующей таблице:

$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$

Знак производной меняется при переходе каждой из этих точек. Значит обе точки  $x = -1$  и  $x = 1$  являются экстремумами функции. Как следует из

таблицы, точка  $x = -1$  — точка минимума и значение  $f(-1) = -1$ , а  $x = 1$  — точка максимума и  $f(1) = 1$ .  $\square$

### 13.4.2. Найти экстремумы функции

$$y = x\sqrt[3]{1-x}.$$

$\nabla$  Найдем критические точки функции. Для этого вычислим производную функции

$$y = \sqrt[3]{1-x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Производная равна нулю при  $x = \frac{3}{4}$  и неопределена в точке  $x = 1$ . Согласно необходимому условию экстремума, точки экстремума функции находятся среди этих точек. Выясним, как меняется знак производной:

$x < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) < 0$

В точке  $x = \frac{3}{4}$  знак производной меняется с "+" на "-" — поэтому  $x = \frac{3}{4}$  является точкой локального максимума. В точке  $x = 1$  знак производной не меняется, поэтому точка  $x = 1$  не является экстремумом.  $\square$

### 13.4.3. Найти экстремумы функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$\nabla$  Вычислим производную функции  $y' = -\sin x - \sin 2x$ . Производная определена на всей числовой прямой. Выясним в каких точках производная равна нулю. Решая тригонометрическое уравнение  $\sin x + \sin 2x = 0$ , находим бесконечное число критических точек  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  и  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для того чтобы выбрать среди критических точек точки экстремума. Найдем вторую производную функции  $y'' = -\cos x - 2\cos 2x$ . Приведем значения второй производной в найденных точках в таблице

$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$y''(x) = -3 < 0$	$y''(x) = -1 < 0$	$y''(x) = \frac{3}{2} > 0$

Из второго достаточного условия экстремума следует, что точки вида

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

являются точками локального максимума, а точки

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

являются точками локального минимума.  $\square$

**13.4.4.** Найти экстремумы функции  $y = x + \sin x$ .

$\nabla$  Вычислим производную функции  $y' = 1 + \cos x$ . Производная равна нулю в бесконечном числе критических точек  $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Воспользуемся третьим достаточным условием экстремума, для того чтобы выбрать среди критических точек точки экстремума. Найдем вторую производную функции  $y'' = -\sin x$ . Значения второй производной в найденных точках  $y''((2k + 1)\pi) = 0$ . Найдем третью производную функции  $y''' = -\cos x$ , тогда  $y'''((2k + 1)\pi) = 1$ . Так как первая и вторая производные в критических точках равны нулю, а третья производная в критических точках не равна нулю, то согласно третьему достаточному условию экстремума у данной функции экстремумов нет.  $\square$

**13.4.5.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{1}{x}$$

на отрезке  $[0, 01; 100]$ .

$\nabla$  Найдем критические точки функции. Для этого вычислим производную

$$y = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Производная равна нулю в точках  $x = 1$  и  $x = -1$  и не определена в точке  $x = 0$ . Точка  $x = 0$  не принадлежит области допустимых значений функции, а точка  $x = 0$  не принадлежит отрезку  $[0, 01; 100]$ . В точке  $x = 1$  производная меняет знак с "−" на "+" поэтому точка  $x = 1$  является точкой локального минимума. Для нахождения абсолютных минимума

и максимума на отрезке  $[0,01; 100]$ , сравним значения функции на концах отрезка  $f(0,01) = 100,01$ ,  $f(100) = 100,01$  и значение функции в точке локального минимума  $f(1) = 2$ . Очевидно наибольшим значением является значение  $f(0,01) = f(100) = 100,01$ , а наименьшим значением является значение  $f(1) = 2$ .  $\square$

### 13.5. УПРАЖНЕНИЯ.

**13.5.1** Найти экстремумы следующих функций

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1},$$

$$2) y = \sqrt{2x - x^2},$$

$$3) y = \cos x + \operatorname{ch} x,$$

$$4) y = xe^x,$$

$$5) y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

$$6) y = \sqrt{x} \ln x,$$

$$7) y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2),$$

$$8) y = \frac{e^x}{x},$$

$$9) y = e^x \sin x.$$

**13.5.2.** Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций

$$1) y = x^2 - 4x + 6 \text{ на отрезке } [-3; 10],$$

$$1) y = \sqrt{5 - 4x} \text{ на отрезке } [-1; 1].$$

## 14. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

### ВЫПУКЛОСТЬ ВВЕРХ И ВНИЗ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА.

**14.1.** *Возрастание и убывание функций.* Функция  $f(x)$  называется *возрастающей* на промежутке  $(a, b)$ , если

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ при } a < x_1 < x_2 < b.$$

Функция  $f(x)$  называется *убывающей* на промежутке  $(a, b)$ , если

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } a < x_1 < x_2 < b.$$

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

**14.2. Признак монотонности функций.** Если  $f'(x) > 0$  при  $x \in (a, b)$ , то функция  $f(x)$  возрастает на промежутке  $(a, b)$ . Если  $f'(x) < 0$  при всех  $x$  из  $(a, b)$ , то функция  $f(x)$  убывает на промежутке  $(a, b)$ .

**14.3. Выпуклость вверх и вниз.** Функция  $f(x)$  называется *выпуклой вверх* на промежутке  $(a, b)$ , если график  $y = f(x)$  ( $a < x < b$ ) расположен ниже касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка  $(a, b)$ .

Функция  $f(x)$  называется *выпуклой вниз* на промежутке  $(a, b)$ , если график  $y = f(x)$  ( $a < x < b$ ) расположен выше касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка  $(a, b)$ .

**14.4. Признак выпуклости вверх и вниз.** Если  $f''(x) > 0$  при  $x$  из  $(a, b)$ , то функция  $f(x)$  является выпуклой вниз на промежутке  $(a, b)$ . Если  $f''(x) < 0$  при  $x \in (a, b)$ , то функция  $f(x)$  является выпуклой вверх на промежутке  $(a, b)$ .

**14.5. Точки перегиба.** Точки, в которых меняется направление выпуклости функции называются *точками перегиба*. Для того, чтобы точка  $x_0$  была точкой перегиба необходимо, чтобы  $f''(x_0) = 0$  либо вторая производная в  $x_0$  не существовала, и достаточно, чтобы  $f''(x)$  меняла свой знак при переходе через  $x_0$ .

## 14.6. Примеры.

**14.6.1.** Определить промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

▽ Используем вычисления примера 13.4.1. Изменение знака производной функции приводится в следующей таблице:

$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$

Следовательно на промежутках  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$  функция убывает, а на промежутке  $(-1, 1)$  возрастает.  $\square$

**14.6.2.** Определить промежутки выпуклости вверх и вниз, найти точки перегиба функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$\nabla$  Первая производная вычислена в примере 13.4.1.

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Вторая производная

$$y'' = \frac{-4x(4-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

определена на всей числовой прямой и равна нулю при  $x = -2$ ,  $x = 0$  и  $x = 2$ .

2. Изменение знака второй производной приводится в следующей таблице:

$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$y''(x) < 0$	$y''(x) > 0$	$y''(x) < 0$	$y''(x) > 0$

Следовательно, на промежутках  $(-\infty, -2)$  и  $(0, 2)$  функция выпукла вверх, а на промежутках  $(-2, 0)$  и  $(2, +\infty)$  выпукла вниз. Точки  $x = -2$ ,  $x = 0$  и  $x = 2$  являются точками перегиба.  $\square$

## 14.7. УПРАЖНЕНИЯ.

**14.7.1.** Определить промежутки возрастания и убывания следующих функций

$$1) y = 3x - x^3,$$

$$2) y = \frac{\sqrt{x}}{x+100},$$

$$3) y = x + \sin x,$$

$$4) y = \frac{x^2}{2^x},$$

$$5) y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

$$6) y = x^2 - \ln x^2,$$

$$7) y = x + \sin x,$$

$$8) y = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right).$$

**14.7.2.** Определить промежутки выпуклости вверх и вниз, найти точки перегиба следующих функций

$$\begin{array}{ll}
1) y = 3x^2 - x^3, & 5) y = e^{-x^2}, \\
2) y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, & 6) y = \ln(1 + x^2), \\
3) y = x + x^{\frac{5}{3}}, & 7) y = x + \sin x, \\
4) y = \sqrt{1 + x^2}, & 8) y = x^x.
\end{array}$$

## 15. АСИМПТОТЫ

**15.1.** *Определение асимптоты.* Пусть функция  $f(x)$  задана при достаточно больших  $x$ . Прямая  $y = kx + b$  называется *асимптотой к графику функции  $f(x)$*  при  $x \rightarrow +\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Аналогично определяется асимптота к графику функции при  $x \rightarrow -\infty$ .

Если  $k = 0$ , то прямая  $y = b$  называется *горизонтальной асимптотой*.

*Вертикальной асимптотой при  $x \rightarrow a$*  называется прямая  $x = k$ , если

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \infty.$$

**15.2.** *Отыскание асимптот к графику функции  $f(x)$ .* Если существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то прямая  $y = kx + b$  является асимптотой к графику функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Аналогично отыскивается асимптота при  $x \rightarrow -\infty$ .

**15.3.** *Отыскание асимптот к кривой, заданной параметрически.* Пусть кривая задана параметрически уравнениями  $x = x(t); y = y(t)$ . Если существует такое  $t_0$ , что  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = +\infty$  и существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \text{ и } \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - kx(t)) = b,$$

то прямая  $y = kx + b$  является асимптотой к кривой при  $x \rightarrow +\infty$ . Аналогично отыскивается асимптота при  $x \rightarrow -\infty$ .

## 15.4. Примеры.

### 15.4.1. Найти асимптоты функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

▽ Вычислим пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(1+x^2)} = 0 \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{(1+x^2)} = 0.$$

Такие же пределы получаются при  $x \rightarrow -\infty$ . Значит при  $x \rightarrow \pm\infty$  функция обладает горизонтальной асимптотой  $y = 0$ . □

### 15.4.2. Найти асимптоты функции

$$y = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}.$$

▽ Вычислим пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x-1)}{x(1+x)^2} = 1 \text{ и}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} - x = -3.$$

Полученные пределы не зависят от знака  $x$ , поэтому при  $x \rightarrow \pm\infty$  функция обладает асимптотой  $y = x - 3$ .

Кроме того функция обладает вертикальной асимптотой  $x = -1$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = \infty. \square$$

### 15.4.3. Найти асимптоты функции $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$ и $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

▽ Заметим, что  $\lim_{t \rightarrow -1} x(t) = \infty$   $\lim_{t \rightarrow -1} y(t) = \infty$ . Вычислим пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2}{1+t^3} \div \frac{3at}{1+t^3} = -1 \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(t) - kx(t) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$



Полученные пределы не зависят от знака  $t$  и, следовательно, от знака  $x$ , поэтому при  $x \rightarrow \pm\infty$  функция  $y = f(x)$  обладает асимптотой  $y = -x - a$ .  $\square$

## 15.5. УПРАЖНЕНИЯ.

15.5.1. Найти асимптоты следующих функций

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{x^3}{3x^2 - x^3}, & 4) y = \frac{xe^x}{e^x - 1}, \\ 2) y = \sqrt{x^2 + x}, & 5) y = \ln(1 + e^x), \\ 3) y = \sqrt[3]{x^2 + x^3}, & 8) y = x + \arccos \frac{1}{x}. \end{array}$$

15.5.1. Найти асимптоты следующих функций, заданных параметрически уравнениями

$$\begin{array}{l} 1) x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t, \\ 2) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, \\ 3) x = \frac{t^2}{1 - t^2}, y = \frac{t}{t^2 - 1}, \\ 4) x = t + e^t, y = 2t + e^{2t}. \end{array}$$

## 16. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

16.1. *План построения.* При построении графиков используется следующий план исследования функции.

I. Исследования, проводимые без использования производной.

- 1) Определить область существования функции.
- 2) Выяснить симметрию графика (четность или нечетность) и периодичность.
- 3) Найти нули функции, промежутки постоянства знака.
- 4) Найти точки разрыва функции, промежутки непрерывности.
- 5) Исследовать поведение функции на границе области существования, найти асимптоты.

II. Исследования, проводимые при помощи производных.

- 6) Вычислить производную функции.
- 7) Найти точки экстремума и промежутки монотонности функции.
- 8) Найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх и вниз.

## 16.2. Примеры.

**16.2.1.** Построить график функции

$$y = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}.$$

∇ Функция определена всюду, кроме точки  $x = -1$ . Данная функция не является четной или нечетной, не является периодичной. Решая уравнение

$$\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = 0,$$

находим нули функции  $x = 0$  и  $x = 1$ .

Функция  $f(x) > 0$  при  $x > 1$  и  $f(x) < 0$  при  $x < 1$ . Функция непрерывна на всей области существования. Как показано в примере 15.2.2., при  $x \rightarrow \pm\infty$  функция обладает асимптотой  $y = x - 3$  и функция обладает вертикальной асимптотой  $x = -1$  при  $x \rightarrow -1$ .

Найдем производную

$$y' = \frac{(3x^2 - 2x)(x-1)^2 - 2(x+1)(x^3 - x^2)}{(1+x)^4} = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(1+x)^3}.$$

Производная равна нулю в точках  $x = 0$ ,  $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \simeq -3,56$  и  $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \simeq 0,56$  и не определена в точке  $x = -1$ . Обозначим точки по возрастанию  $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$  и  $x_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ . Знак производной и промежутки монотонности приводятся в следующей таблице:

$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x > x_4$
$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$
возрастает	убывает	возрастает	убывает	возрастает

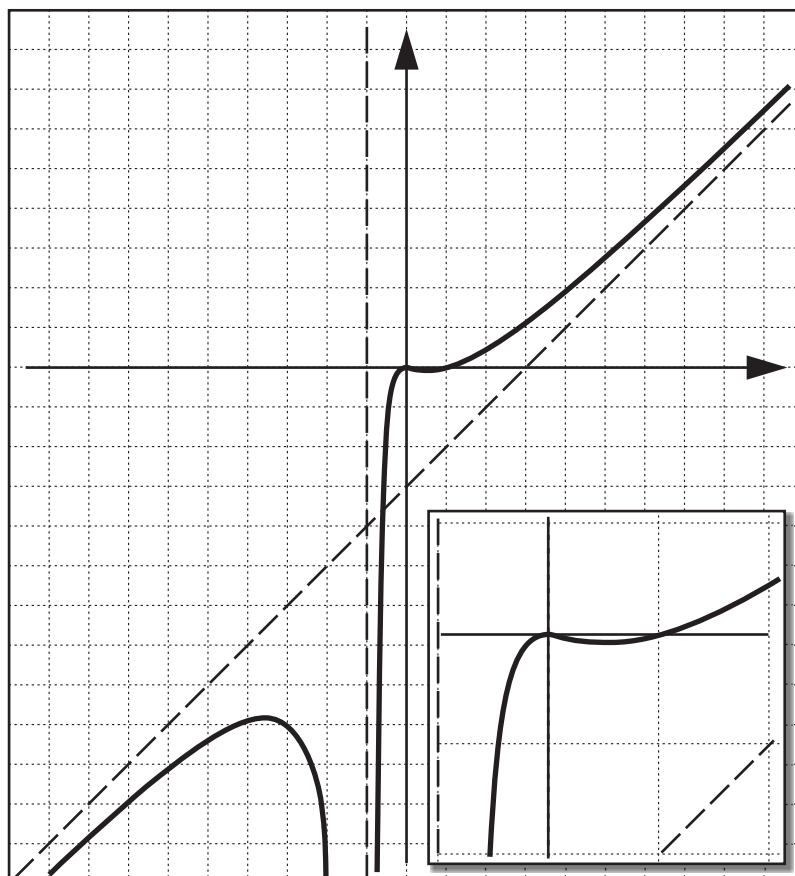


Рис. 1: График функции примера 16.2.1

Как следует из таблицы, в точках  $x_2 = -1$  и  $x_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$  — минимумы, а в точках  $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$  и  $x_3 = 0$  — максимумы. Причем  $f(x_1) \simeq -8,82$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ ,  $f(x_1) = 0$  и  $f(x_4) \simeq -0,06$ .

Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(3x^2 + 6x - 2)(x - 1)^3 - 3(x + 1)^2(x^3 + 3x^2) - 2x}{(1 + x)^6} = \frac{10x - 2}{(1 + x)^4}.$$

Вторая производная равна нулю в точке  $x = 0,2$  и не определена в при  $x = -1$ . В точке  $x = 0,2$  вторая производная меняет знак с "−" на "+" и в точке  $x = -1$  вторая производная не меняет знак. Следовательно, на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; 0,2)$  функция выпукла вверх, а на промежутке  $(0,2; +\infty)$  выпукла вниз. Точка  $x = 0,2$  является точкой перегиба.

График функции представлен на рис. 1.  $\square$

### 16.2.2. Построить график функции

$$y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}.$$

$\nabla$  Функция определена на всей числовой прямой. Данная функция является нечетной, поэтому достаточно исследовать ветвь графика при  $x > 0$ . Для построения полного графика необходимо к полученной ветви добавить ее симметричное относительно начала координат отображение. Функция не периодична. Найдем нули функции. Уравнение

$$(x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}} = 0 \text{ эквивалентно } |x + 2| = |x - 2|.$$

Решая последнее, получаем, что точка  $x = 0$  — нуль функции. Функция  $f(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $f(x) < 0$  при  $x < 0$ . Функция непрерывна на всей области существования. Так как предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 2)^2 - (x + 2)^2}{(x + 2)^{\frac{4}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}(x + 2)^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt[3]{x^4}} = 0, \end{aligned}$$

то прямая  $y = 0$  является горизонтальной асимптотой к графику функции при  $x \rightarrow \infty$ .

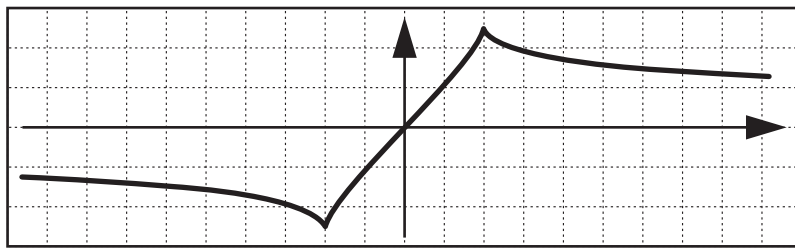


Рис. 2: График функции примера 16.2.2.

Найдем производную

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} = \\
 &= \frac{2((x-2) - (x+2))}{3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-2}((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})} = \\
 &= \frac{-8}{3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-2}((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})}.
 \end{aligned}$$

Производная не определена в точках  $x = -2$ ,  $x = 2$  и нигде не равна нулю. В точке  $x = 2$  знак производной меняется с "+" на "-" поэтому  $x = 2$  является точкой локального максимума. Из соображений симметрии  $x = -2$  — точка минимума. Причем  $f(2) = 2\sqrt[3]{2} \simeq 2,52$ ,  $f(-2) = -2\sqrt[3]{2} \simeq -2,52$ . На промежутках  $(-\infty, -2)$  и  $(2, +\infty)$  функция убывает, а на промежутке  $(-2, 2)$  возрастает.

Найдем вторую производную

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{-2}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}} + \frac{2}{9(x-2)^{\frac{4}{3}}} = \\
 &= \frac{-2((x-2)^4 - (x+2)^4)}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}((x+2)^{\frac{8}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{8}{3}})} = \\
 &= \frac{-8x(1+x^2)}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}((x+2)^{\frac{8}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{8}{3}})}.
 \end{aligned}$$

Вторая производная равна нулю в точке  $x = 0$  и не определена при  $x = -2$  и  $x = 2$ . В точке  $x = 0$  вторая производная меняет знак с "-" на "+" и при  $x = -2$  и  $x = 2$  вторая производная не меняет знак. Следовательно, на промежутках  $(-\infty, -2)$  и  $(-2, 0)$  функция выпукла вверх, а на промежутках  $(0, 2)$  и  $(2, +\infty)$  выпукла вниз. Точка  $x = 0$  является точкой перегиба.

График функции представлен на рис. 2.  $\square$

**16.2.3.** Построить график функции

$$y = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}.$$

$\nabla$  Функция определена на всей числовой прямой и является нечетной. Функция периодична с периодом  $2\pi$ . Достаточно исследовать функцию на отрезке  $[0, \pi]$ . Весь график получается симметричным относительно начала координат продолжением графика на отрезке  $[0, \pi]$  и, далее, периодическим продолжением.

Найдем нули функции. Упростим функцию

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} = \sin x + \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = 2 \sin x \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 x\right).$$

Так как  $1 - \frac{2}{3} \sin^2 x > 0$  при всех  $x$ , то уравнение  $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} = 0$  сводится к уравнению  $\sin x = 0$ . Решая последнее, получаем что точки  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$  — нули функции. На отрезке  $[0, \pi]$  функция  $f(x) > 0$ , значит (исходя из нечетности) на отрезке  $[-\pi, 0]$  функция  $f(x) < 0$ . Функция непрерывна и не имеет асимптот.

Найдем производную

$$y' = \cos x + \cos 3x = \cos x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 2 \cos x \cos 2x.$$

На отрезке  $[0, \pi]$  производная равна нулю при  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  и  $x = \frac{3\pi}{4}$ . Для исследования на экстремум используем второй достаточный признак экстремума. Найдем вторую производную  $y'' = -(\sin x + 3 \sin 3x)$ . В точках  $x = \frac{\pi}{4}$  и  $x = \frac{3\pi}{4}$  вторая производная  $y'' = -2\sqrt{2} < 0$ , следовательно в этих точках — локальные максимумы и  $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0,94$ .

В точке  $x = \frac{\pi}{2}$  вторая производная  $y'' = 2 > 0$ , следовательно в точке  $x = \frac{\pi}{2}$  — локальный минимум и  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3} \simeq 0,67$ .

Найдем точки перегиба. Для этого решим уравнение

$$\sin x + 3 \sin 3x = 10 \sin x - 12 \sin^3 x = 0.$$

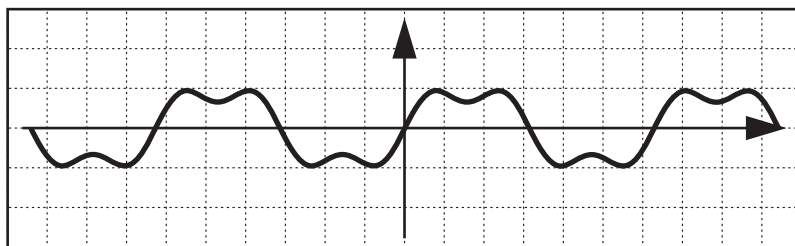


Рис. 3: График функции примера 16.2.3.

Вторая производная на отрезке  $[0, \pi]$  равна нулю при

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \simeq 0,37\pi, \quad x_2 = \pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \simeq 0,63\pi, \quad x_3 = \pi.$$

На отрезках  $[0, x_1]$  и  $[x_2, \pi]$  вторая производная отрицательна, следовательно функция выпукла вверх. На отрезке  $[x_1, x_2]$  вторая производная положительна, следовательно функция выпукла вниз. Точки  $x_0, x_1, x_2$  и  $x_3$  являются точками перегиба.

Построим график функции сначала на отрезке  $[0, \pi]$ . Затем отобразим полученную кривую симметрично началу координат. Имеем график функции на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Периодически продолжим график на всю числовую прямую. График функции представлен на рис. 3.  $\square$

**16.2.4.** Построить кривую, заданную параметрически уравнениями

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}; \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

$\nabla$  Построим сначала вспомогательные графики функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ . Обе функции определены всюду, кроме точки  $t = -1$ , не являются четными или нечетными, не являются периодичными. Точка  $t = 0$  является нулем обеих функций. Функция  $x(t) > 0$  при  $t < -1$  и  $t > 0$ ,  $x(t) < 0$  при  $-1 < t < 0$ . Функция  $y(t) > 0$  при  $t > -1$  и  $y(t) < 0$  при  $t < -1$ . Заметим, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Значит, прямая  $x = 0$  является горизонтальной асимптотой функции  $x = x(t)$  и прямая  $y = 0$  является горизонтальной асимптотой функции  $y = y(t)$ . Кроме того, прямая  $t = 0$  является вертикальной асимптотой обеих функций.

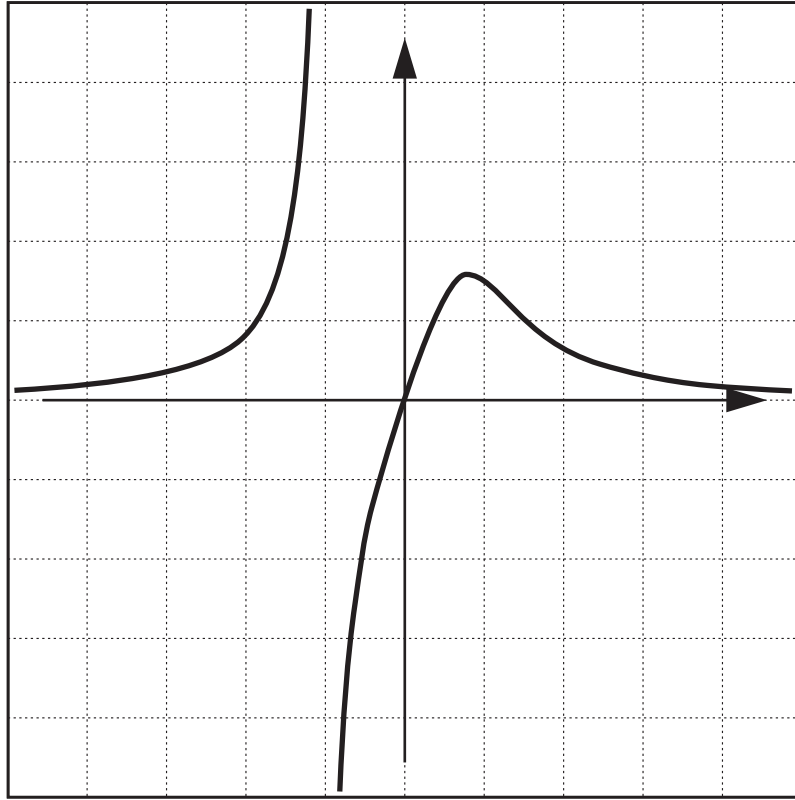


Рис. 4:  $x=x(t)$ .

Найдем производные

$$x'(t) = \frac{3a(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2} \text{ и } y'(t) = \frac{3at(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}.$$

Производная  $x'(t) = 0$  при  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и не определена при  $t = -1$ . Исследуя знак производной  $x'(t)$ , получаем, что точка  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  — точка максимума функции  $x(t)$  и  $x(\frac{1}{\sqrt{3}}) = a\sqrt[3]{4}$ , а точка  $t = -1$  не является экстремумом функции  $x(t)$ . Производная  $y'(t) = 0$  при  $t = 0$  и  $t = \sqrt[3]{2}$  и неопределена при  $t = -1$ . Исследуя знак производной  $y'(t)$ , получаем, что точка  $t = 0$  — точка минимума функции  $y(t)$  и  $y(0) = 0$ ; точка  $t = \sqrt[3]{2}$  — точка максимума функции  $y(t)$  и  $y(\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4}$ ; точка  $t = -1$  не является экстремумом функции  $y(t)$ . Графики функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  представлены на рис. 4 и рис. 5.

Приступим к построению графика кривой. Область изменения параметра  $t$  — числовая прямая, разбивается точками  $t = -1, t = 0, t = \frac{1}{\sqrt{3}}, t = \sqrt[3]{2}$  (это особые точки графиков  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ ) на интервалы. Используя



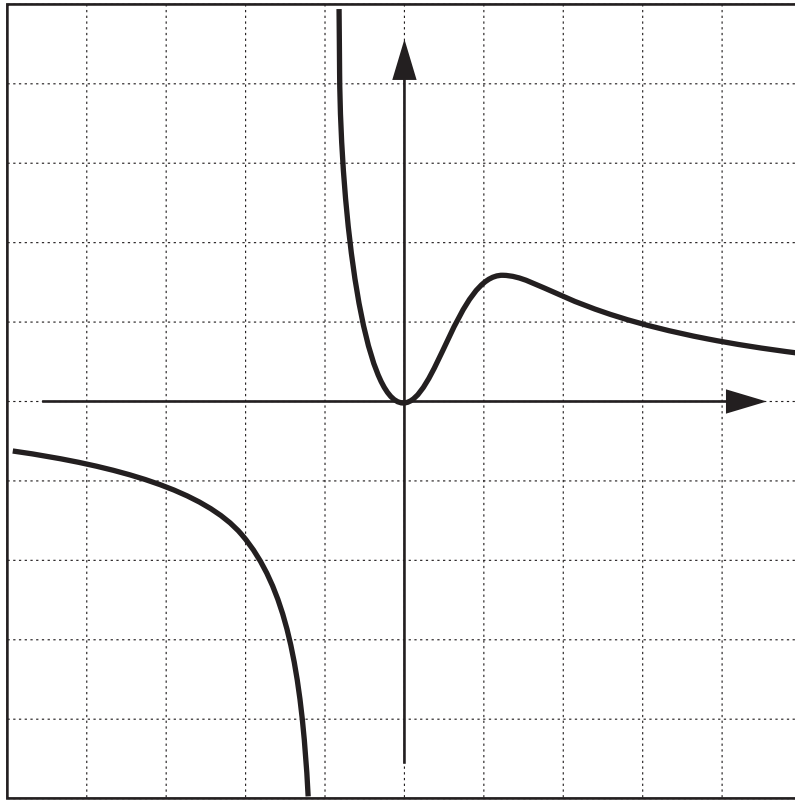


Рис. 5:  $y=y(t)$ .

вспомогательные графики, изучим поведение функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  на каждом из полученных интервалов. Полученные данные приведем в виде таблицы для  $t \leq 0$ :

$t \rightarrow -\infty$	$t < -1$	$t \rightarrow -1-$	$t \rightarrow -1+$	$-1 < t < 0$	$t = 0$
$x(t) \rightarrow 0$	$x(t) > 0 \uparrow$	$x(t) \rightarrow +\infty$	$x(t) \rightarrow -\infty$	$x(t) < 0 \uparrow$	$x(t) = 0$
$y(t) \rightarrow 0$	$y(t) < 0 \downarrow$	$y(t) \rightarrow -\infty$	$y(t) \rightarrow +\infty$	$y(t) > 0 \downarrow$	$y(t) = 0$
					$y(t) \text{—min}$

Продолжение таблицы для  $t > 0$ :

$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$t = \sqrt[3]{2}$	$t > \sqrt[3]{2}$	$t \rightarrow +\infty$
$x(t) > 0 \uparrow$	$x(t) = a\sqrt[3]{4}$	$x(t) > 0 \downarrow$	$x(t) = a\sqrt[3]{2}$	$x(t) > 0 \downarrow$	$x(t) \rightarrow 0$
$y(t) > 0 \uparrow$	$y(t) = a\sqrt[3]{2}$	$y(t) < 0 \uparrow$	$y(t) = a\sqrt[3]{4}$	$y(t) > 0 \downarrow$	$y(t) \rightarrow 0$
	$x(t) \text{—max}$		$y(t) \text{—max}$		

Из таблицы следует, во-первых, что точка  $O(0,0)$  есть точка самопересечения кривой, так как  $x(t) = y(t) = 0$  при  $t = 0$  и при  $t \rightarrow +\infty$ . Во-вторых

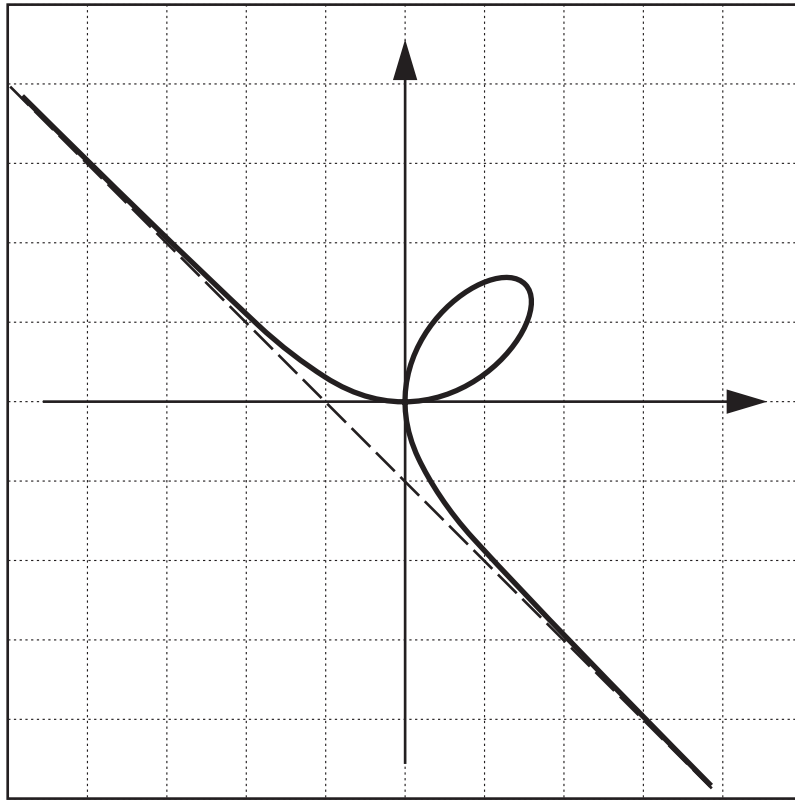


Рис. 6: Параметрически заданная кривая.

точка  $x(t) = y(t) = 0$  есть точка минимума одной из ветвей кривой ( при  $-1 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ), так как при  $x < x(0) = 0$  параметр  $t < 0$  и  $y(t)$  убывает, а при  $x > x(0) = 0$  параметр  $t > 0$  и  $y(t)$  возрастает. В-третьих, точка  $x(t) = a\sqrt[3]{2}, y(t) = a\sqrt[3]{4}, t = \sqrt[3]{2}$  есть точка локально максимума ветви кривой при  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t$ , так как при переходе по возрастанию параметром  $t$  значения  $\sqrt[3]{2}$  переменная  $x(t)$  убывая переходит значение  $x(t) = a\sqrt[3]{2}$ , переменная же  $y(t)$  возрастает при  $t < \sqrt[3]{2}$  до значения  $y(t) = a\sqrt[3]{4}$ , а при  $t > \sqrt[3]{2}$  переменная  $y(t)$  убывает. В-четвертых точка  $x(t) = a\sqrt[3]{4}, y(t) = a\sqrt[3]{2}, t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  есть точка возврата кривой, так как при переходе по возрастанию параметром  $t$  значения  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  переменная  $y(t)$  возрастая переходит значение  $y(t) = a\sqrt[3]{2}$ , переменная же  $x(t)$  возрастает при  $t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  до значения  $x(t) = a\sqrt[3]{4}$ , а при  $t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  переменная  $x(t)$  убывает.

В примере 15.4.3 найдена асимптота кривой при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Это прямая с уравнением  $y = -x - a$ .

Найдем производные  $y'_x$  и  $y''_{xx}(x_0)$  по формулам производных параметрически

заданных функций:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{xt}(t)}{x'(t)} = \frac{2(t^3+1)^2}{(1-2t^3)^2} \cdot \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}.$$

Исследование знака первой производной подтверждает сведения, приведенные в таблице выше. Вторая производная меняет знак с "+" на "-" при возрастании параметра  $t$  в точке  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ . Следовательно, на промежутках  $(-\infty, -1)$  и  $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$  функция выпукла вниз, а на промежутке  $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$  выпукла вверх. Точка  $x(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = a\sqrt[3]{4}$  является точкой перегиба. Из графика видно, что точка  $x = 0, y = 0$ , соответствующая значению параметра  $t \rightarrow +\infty$ , также является точкой перегиба на одной из ветвей кривой.

Кривая изображена на рис. 6.  $\square$

### 16.3. УПРАЖНЕНИЯ.

**16.3.1.** Построить графики следующих функций

- |   |   |
|---|---|
| 1) $y = 3x^2 - x^3,$                                | 10) $y = \cos^4 x + \sin^4 x,$            |
| 2) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3},$                       | 11) $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x,$   |
| 3) $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4,$            | 12) $y = \cos^2 x + \sin x,$              |
| 4) $y = \frac{(1+x)^3}{(1-x)^2},$                   | 13) $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \pi/4)},$ |
| 5) $y = (x-3)\sqrt{x},$                             | 14) $y = e^{2x-x^2},$                     |
| 6) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1},$           | 15) $y = (1+x^2)e^{-x^2},$                |
| 7) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}},$ | 16) $y = \frac{e^x}{1+x},$                |
| 8) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},$                 | 17) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$          |
| 9) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}},$                 | 18) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$         |
|   | 19) $y = x + \operatorname{arctg} x,$     |
|   | 20) $y = x \operatorname{arctg} x,$       |

$$21)y = \arcsin \frac{x}{1+x^2},$$

$$22)y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$23)y = \cos^4 x + \sin^4 x,$$

$$24)y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}},$$

$$25)y = (x+2)e^{\frac{1}{x}},$$

$$26)y = x^x,$$

$$27)y = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

**16.3.1.** Построить графики следующих кривых, заданных параметрически уравнениями

$$1)x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t,$$

$$2)x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3,$$

$$3)x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{t}{t^2-1},$$

$$4)x = t + e^t, \quad y = 2t + e^{2t},$$

$$5)x = a \cos 2t, \quad y = a \cos 3t,$$

$$6)x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t,$$

$$7)x = t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{t},$$

$$7)x = \frac{a}{\cos^3 t}, \quad y = \operatorname{tg}^3 t.$$

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*// М: Наука, 1977. – 528 с.
1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу, том 1.*// М: Наука, 1986. – 528 с.
1. Шерстнев А.Н. *Конспект лекций по математическому анализу.*// Казань: Изд. КГУ., 1989. – 295 с.