ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 26 октября 2022 г.

Аннотация: *Теорема А.И.Мальцева и границы ее применимости. Условие максимальности для решеток конгруэнций. Универсальная и универсально-хорновская определимость. Q-конгруэнции. Счетные решетки конгруэнций и вычислимая отделимость алгебр со счетными решетками конгруэнций. Применения счетности решетки конгруэнций.*

Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса

Теорема M1 (А.И.Мальцев)

Всякая позитивная нумерация конечно порожденной универсальной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями лишь конечного индекса является вычислимой.

Теорема M2 (А.И.Мальцев)

Всякая алгебра, инициальная в конечно базируемом квазимногообразии, аппроксимируемая конечными алгебрами этого квазимногообразия, является вычислимой.

Теорема 1

Характеристическая трансверсаль нумерационной эквивалентности позитивной алгебры, обладающей ненулевыми когнруэнциями лишь конечного индекса является либо вычислимым, либо гипериммунным множеством.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ – универсальная алгебра, всякая ненулевая конгруэнция которой имеет конечный индекс и ν – ее позитивная нумерация. Допустим, что характеристическая трансверсаль $tr(ker(\nu))$ ядра представления ν алгебры $\mathfrak{A}$ – бесконечное не гипериммунное множество. Тогда существует бесконечная последовательность $S_0, S_1, \ldots$ попарно непересекающихся конечных множеств, перечислимая по каноническим индексам, каждый член которой имеет непустое пересечение с $tr(ker(\nu))$. Будем считать, что $0 \notin \bigcup_{n<\omega} S_n$. Определим $\eta_\nu(x, y)$ как наименьшую конгруэнцию позитивной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$, содержащую нулевую конгруэнцию η_ν и пару чисел x, y (главную конгруэнцию, порожденную парой $\nu x, \nu y$). Очевидно, что $\eta_\nu(x, y)$ –позитивная конгруэнция, равномерно зависящая от x, y. Покажем, что наличием сильной таблицы $S_0, S_1, \ldots$ для $tr(ker(\nu))$ гарантируется существование алгоритма разрешения для η_ν.

Если $S_m = \{s_1, \ldots, s_n\}$, то m-допустимым множеством назовем произвольное множество упорядоченных пар натуральных чисел вида $\{\langle x_1, s_1\rangle, \ldots, \langle x_n, s_n\rangle\}$, где $x_j < s_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Очевидно, что множество Δ_m всех m-допустимых множеств конечно и строится явно, коль скоро задано m.

Для произвольного вычислимо перечислимого множества α, как обычно, через α^n обозначим то подмножество множества α, которое порождается за первые n шагов некоторого фиксированного эффективного пересчета множества α.

Пусть $x, y \in \omega$. Шаг n процедуры ответа на вопрос $\nu x = \nu y$? разбивается на два этапа.

Этап 1. Если $\langle x, y\rangle \in \eta_\nu^n$, то процедура оканчивает работу с результатом $\nu x = \nu y$.

Этап 2. Если $\exists m \leqslant n \exists \alpha \in \Delta_m(\alpha \subset \eta_\nu^n(x, y))$, то процедура заканчивает работу с результатом $\nu x \neq \nu y$.

Докажем корректность предложенного алгоритма.
Если $\nu x = \nu y$, то алгоритм окончит работу на первом этапе некоторого шага. Второй этап в этом случае не может успешно окончиться ни на каком шаге. В самом деле, если $\nu x = \nu y$, то $\eta_\nu(x, y) = \eta_\nu$ и $\forall n \forall \alpha (\alpha \in \Delta_n \Rightarrow \alpha \setminus \eta_\nu \neq \emptyset)$, т.к. в каждом S_n найдется такое $s \in S_n$, что $s \in tr(ker(\nu))$.
Если $\nu x \neq \nu y$, то $tr(\eta_\nu(x, y))$ – конечное множество, поскольку всякая ненулевая конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$ имеет конечный индекс. Поэтому для всех m, больших некоторого n, имеем $S_m \cap tr(\eta_\nu(x, y)) = \emptyset$.
Следовательно, $\forall m > n \exists \alpha \in \Delta_m (\alpha \subset \eta_\nu(x, y))$, что означает успешное завершение работы алгоритма на втором этапе некоторого шага.
Первый этап в этом случае не может успешно завершиться ни на каком шаге, т.к. $\langle x, y \rangle \notin \eta_\nu$.
Из разрешимости η_ν следует вычислимость $tr(ker(\nu))$, т.к. $x \in tr(ker(\nu)) \Leftrightarrow \forall y < x (\langle x, y \rangle \notin \eta_\nu)$. Теорема доказана.

Теорема 2

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная универсальная алгебра конечной сигнатуры, которая имеет нумерацию с гипериммунной характеристической трансверсалью. Тогда $\mathfrak{A}$ локально конечна.

Доказательство. Зафиксируем любую нумерацию ν алгебры $\mathfrak{A}$. Допустим, что $\mathfrak{A}_0$ – бесконечная конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Для всякого подмножества M алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $T(M)$ результат однократного применения всех операций к всевозможным последовательностям элементов из M подходящей размерности, т.е. T – оператор порождения и

$$\bigcup_{n\in\omega} T^n(M)$$

– подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством M.

Локально конечные алгебры

Обозначим через T_ν – оператор порождения, в котором вместо операций алгебры $\mathfrak{A}$ участвуют вычислимые функции, представляющие соответствующие операции этой алгебры в нумерации ν. Возьмем порождающие $a_0, \ldots, a_s$ этой подалгебры и построим индуктивное семейство конечных множеств, перечислимое по каноническим индексам, следующим образом:
Шаг 0. $\delta_0 = \{\min \nu^{-1}(a_0), \ldots, \min \nu^{-1}(a_s)\}$.
Шаг $n+1$. Пусть k – максимальное число из разности $T_\nu(\delta_n) \setminus \delta_n$ (которая непуста в силу бесконечности $\mathfrak{A}_0$). Полагаем

$$\delta_{n+1} = \{0, 1, \ldots, k\} \setminus \bigcup_{j \leqslant n} \delta_j.$$

Заметим, что в силу бесконечности подалгебры $\mathfrak{A}_0$ на каждом новом шаге мы гарантированно получаем новые элементы и, соответственно, ν-номера новых элементов.

Поэтому для каждого n разность множеств $\delta_{n+1} \setminus \bigcup_{j \leqslant n} \delta_j$ непуста и значит в этой разности обязательно найдется элемент из характеристической трансверсали $tr(ker(\nu))$.
Следовательно, последовательность $\delta_0, \delta_1, \ldots$ обладает следующими свойствами:
1. $\forall n \in \omega(\delta_n \cap tr(ker(\nu)) \neq \emptyset)$;
2. $\forall m, n \in \omega(m \neq n \Rightarrow \delta_m \cap \delta_n = \emptyset)$;
3. последовательность $\delta_0, \delta_1, \ldots$ перечислима по каноническим индексам.
Таким образом, $tr(ker(\nu))$ не гипериммунна. Теорема доказана.

Непосредственно из теорем 1 и 2 вытекает теорема А.И.Мальцева о вычислимости всякой конечно порожденной позитивной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса.

Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса

Теорема 3

Всякая алгебра с ненулевыми конгруэнциями лишь конечного индекса, обладающая невычислимой позитивной нумерацией, локально конечна, финитно аппроксимируема, локально финитно отделима и, в случае конечности сигнатуры, не является уноидом

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ – универсальная алгебра с ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса и ν – ее невычислимая позитивная нумерация. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ бесконечна. Обозначим через $tr(\eta_\nu)$ характеристическую трансверсаль ядра представления ν.
1. По теореме 1 характеристическая трансверсаль $tr(\eta_\nu)$ есть гипериммунное множество, а по теореме 2 алгебра $\mathfrak{A}$ локально конечна.
2. Допустим, что $\mathfrak{A}$ не является финитно аппроксимируемой. Тогда найдутся такие числа m, n, что $\nu m \neq \nu n$ и пара $\langle \nu m, \nu n \rangle$ содержится во всякой ненулевой конгруэнции конечного индекса.

Но тогда эта пара содержится и во всякой ненулевой конгруэнции, поскольку всякая нетривиальная конгруэнция имеет конечный индекс. Покажем, что нумерация ν будет негативной. Действительно, если $\nu x \neq \nu y$, то главная конгруэнция $\eta_\nu(x, y)$, порожденная парой $\langle \nu x, \nu y \rangle$, не различает пару $\langle m, n \rangle$, т.е. $\langle m, n \rangle \in \eta_\nu(x, y)$. Из равномерной позитивности $\eta_\nu(x, y)$ по x, y и позитивности η_ν следует разрешимость η_ν, а значит и вычислимость ν.

3. Пусть $\mathfrak{A}$ не является локально финитно отделимой. Тогда для некоторой конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$ и некоторого натурального числа m элемент νm и подалгебра $\mathfrak{A}_0$ не различаются никакой нетривиальной конгруэнцией. Очевидно, что множество $\nu^{-1}\mathfrak{A}_0$ вычислимо перечислимо и если $\nu x \neq \nu y$, то $\eta_n u(x, y)$ содержит пару $\langle m, n \rangle$ для подходящего $n \in \nu^{-1}\mathfrak{A}_0$. Поэтому нулевая конгруэнция η_ν негативна, а значит ν вычислима.

4. Пусть $\mathfrak{A}$ – уноид. В силу локальной конечности $\mathfrak{A}$ существует бесконечная возрастающая цепь $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots$ подалгебр, в которой каждое включение собственное.Рассмотрим следующую цепь эквивалентностей: $\theta_0 \subset \theta_1 \subset \ldots$, где $\theta_n = \mathfrak{A}_n^2 \cup id\ \mathfrak{A}$. Очевидно, что все включения в этой цепи также собственные. Нетрудно заметить, что каждая из этих эквивалентностей является конгруэнцией, поскольку для "склеиваемых" значений аргументов соответствующие "склеиваемые" значения операций находятся в той же подалгебре. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ не только обладает ненулевыми конгруэнциями бесконечного индекса, но даже не удовлетворяет условию максимальности для решетки конгруэнций. Теорема доказана.

В силу теоремы 3 интересующие нас алгебры нужно искать в классе локально конечных, финитно аппроксимируемых и локально финитно отделимых алгебр, в сигнатуре которых названа хотя бы одна не унарная и не нульарная операция.
Простейшей алгеброй такого рода является группоид $G = \langle \omega ; \bullet \rangle$, определенный следующим образом:

$$x \bullet y \quad = \quad \begin{cases} y, \text{если} x > 0 \wedge y = x+1 \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что G вычислимо представим. Пусть θ – ненулевая конгруэнция группоида G, $\langle m, n \rangle \in \theta$ и $m < n$. Индукцией по j покажем, что $\langle 0, n+j \rangle \in \theta$ для любого $j \in \omega$. Очевидно, что $\langle m \bullet (n+1), n \bullet (n+1) \rangle \in \theta$, но $m \bullet (n+1) = 0 \wedge n \bullet (n+1) = n+1$, поэтому $\langle 0, n+1 \rangle \in \theta$.

Невычислимые позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса

Пусть $\langle 0, n+j\rangle\theta$, тогда $\langle 0 \bullet (n+j+1), (n+j) \bullet (n+j+1)\rangle$, откуда $\langle 0, n+j+1\rangle \in \theta$. Следовательно, всякая ненулевая конгруэнция группоида G имеет конечный индекс.

Теорема 4

Существует позитивная невычислимая нумерация группоида G.

Доказательство. Вначале дадим одну специальную характеризацию вычислимо перечислимых не гипергиперпростых множеств.

Лемма 1 (Упражнение)

Вычислимо перечислимое множество α с бесконечным дополнением не гипергиперпросто тогда и только тогда, когда существует перечислимая по вычислимо перечислимым индексам бесконечная последовательность попарно непересекающихся конечных множеств, каждое из которых содержит в точности один элемент из $\omega \setminus \alpha$.

Невычислимые позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса

Можно выбрать вычислимо перечислимое гиперпростое не гипергиперпростое множество α и слабую таблицу $S_0, S_1, \ldots$ для него так, что

1) $|S_j \cap (\omega \setminus \alpha)| = 1$ для всех $j \in \omega$;
2) $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$;
3) $\bigcup_{n\in\omega} S_n = \omega$.

Будем считать, что $0 \in S_0 \cap \alpha$.

Построим вычислимый группоид $\langle \omega; \bullet \rangle$ по шагам.

Шаг 0. На множестве $\omega_0 = S_0$ определим операцию "$\bullet$" как тождественно равную числу 0. Все элементы множества ω_0 назовем элементами уровня 0.

Шаг $n+1$. Последовательно включаем алгоритмы для перечисления $S_1, S_2, \ldots$ и каждому элементу a уровня n сопоставляем некоторое множество S_j так, что все элементы из S_j расположены "под" z.

Предельная конструкция дает конечно-ветвящееся дерево.
Пусть $\omega_n = \{b_0 < b_1 < \cdots < b_k\}$. Тогда в предельной конструкции каждое b_i расположится "под" элементом a. Заметим, что уровень с меньшим номером может все еще строиться тогда, когда какие-то уровни с большими номерами уже построены. Идея описания конструкции закончена.
Построим эквивалентность $\eta(\alpha)$ следующим образом. Если "над" элементом l есть число m из α, то и m, и все, что находится "под" ним (включая k) отождествляется с числом 0. Операцию $\bullet$ определим так, что $x \bullet y = y$, если y находится непосредственно "под" x и 0, в противном случае. Заметим, что одноэлементные классы $\eta(\alpha)$-эквивалентности упорядочены по типу ω, т.к. в S_0 есть ровно один элемент из дополнения α, под ним – также ровно один элемент из $\omega \setminus \alpha$ и т.д. Все остальные числа попадают в единственный нетривиальный класс, порожденный множеством α.

Невычислимые позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса

Легко заметить, что операция $\bullet$ согласована с эквивалентностью $\eta(\alpha)$. Поэтому корректно определена фактор-алгебра $\omega/\eta(\alpha)$, которая изоморфна G. Очевидно, что нумерация $\nu x = x/\eta(\alpha)$ (т.е. ν – естественное проектирование) позитивна и невычислима. Теорема доказана.

Всякая вычислимо непредставимая позитивная алгебра, обладающая ненулевыми конгруэнциями лишь конечного индекса, имеет не столь обозримую структуру, как группоид G, но метод построения такой алгебры идейно примыкает к доказательству теоремы 4.

Теорема 5

Существует алгебра с ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, которая не имеет вычислимых представлений, но является позитивно представимой.

Нетеровость

Теорема об алгебрах с условием максимальности

Всякая позитивная алгебра, обладающая ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, эффективно вложима в конечно порожденную позитивную алгебру с нётеровой решеткой конгруэнций.

Следствие

Существует конечно порожденная позитивная невычислимая алгебра с нётеровой решеткой конгруэнций.

Теорема о конечно порожденных обогащениях

Бесконечная алгебра с нётеровой решеткой конгруэнций имеет конечно порожденное позитивно представимое обогащение тогда и только тогда, когда она эффективно бесконечна.

Определимость в классе гомоморфных образов

Пусть $\Sigma = \{c_0, c_1, \dots\}$ – счетное множество константных символов, не пересекающееся с сигнатурой Σ системы $\mathfrak{M}$, μ – нумерация этой системы и $\mathfrak{M}_\mu$ обозначает стандартное μ-обогащение системы $\mathfrak{M}$, т.е. $c_n = \mu(n)$.

Предложение 1

Для произвольной системы $(\mathfrak{M}, \mu)$ сигнатуры Σ следующие условия равносильны:
1. μ вычислима;
2. существует такое вычислимо перечислимое множество Φ универсальных предложений сигнатуры $\Sigma \cup C$, реализующееся в $\mathfrak{M}_\mu$, что для всякой Φ-системы ее подсистема порожденная константами изоморфна $\mathfrak{M}_\mu$.

Определимость в классе гомоморфных образов

Другими словами, характеризуемость системы, порожденной значениями сигнатурных констант, с точностью до изоморфизма в классе всех систем, порожденных константами подходящим вычислимо перечислимым множеством универсальных предложений равносильна ее вычислимости.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если μ – вычислимое представление, то в качестве Φ можно взять вычислимую диаграмму $\Delta(\mathfrak{M}_\mu)$, т.к. для любой Φ-системы, ее подсистема, порожденная константами, также является Φ-системой (в силу устойчивости универсальных предложений относительно подсистем) и, очевидно, изоморфна $\mathfrak{M}_\mu$.
$2 \Rightarrow 1$. Пусть Φ – такое вычислимо перечислимое множество универсальных предложений в сигнатуре $\Sigma \cup C$, которое реализуется в $\mathfrak{M}_\mu$, и порожденная константами подсистема любой Φ-системы изоморфна $\mathfrak{M}_\mu$ (выше было отмечено, что случай, когда подсистема Φ-системы не является Φ-системой не может иметь места).

Определимость в классе гомоморфных образов

Обозначим через $\Delta_P(\mathfrak{M}_\mu)$ позитивную диаграмму системы $\mathfrak{M}_\mu$ в сигнатуре $\Sigma \cup C$. Мы хотим доказать, что $\Delta_P(\mathfrak{M}_\mu)$ вычислимо перечислима. Действительно, пусть $\mathfrak{M}_\mu \models p(\bar{t})$, где $p \in P, \bar{t} \in T(F \cup C)$. Покажем, что множество $\Phi \cup \{\neg p(\bar{t})\}$ противоречиво. Предположим противное. Тогда существует Φ-система $\mathfrak{N}$, в которой реализуется $\neg p(\bar{t})$. В силу устойчивости универсальных предложений относительно подсистем, в порожденной значениями замкнутых термов подсистеме $\mathfrak{N}_0$ системы $\mathfrak{N}$ также реализуется Φ. По условию должен иметь место изоморфизм $\mathfrak{N}_0 \cong \mathfrak{M}_\mu$, однако это невозможно, т.к. $\mathfrak{M}_\mu \models p(\bar{t})$ и $\mathfrak{N}_0 \models \neg p(\bar{t})$. Следовательно, $\Phi \cup \{\neg p(\bar{t})\}$ противоречивое множество и значит $\Phi \vdash p(\bar{t})$.
Аналогично, рассмотрим негативную диаграмму $\Delta_N(\mathfrak{M}_\mu)$ системы $\mathfrak{M}_\mu$ в сигнатуре $\Sigma \cup C$. Допустим, что $\mathfrak{M}_\mu \models \neg p(\bar{t})$, т.е. $\neg p(\bar{t}) \in \Delta_N(\mathfrak{M}_\mu)$. Тогда множество $\Phi \cup \{p(\bar{t})\}$ противоречиво, т.к. в противном случае существовала бы Φ-система, в которой порожденная константами подсистема реализовала бы $p(\bar{t})$, что невозможно.

Определимость в классе гомоморфных образов

Теперь рассмотрим следующий алгоритм. Для каждого атомарного предложения $p(\bar{t})$ пытаемся эффективно определить либо $\Phi \vdash p(\bar{t})$ (и тогда $p(\bar{t} \in \Delta_P(\mathfrak{M}_\mu))$, либо $\Phi \vdash \neg p(\bar{t})$ (в этом случае $\neg p(\bar{t}) \in \Delta_N(\mathfrak{M}_\mu))$. Эффективность процедуры обеспечивается вычислимой перечислимостью множества Φ. Поэтому один из этих двух случаев подтвердится через конечное число шагов. Свойство $\forall \bar{t} \in T(F \cup C)[\mathfrak{M}_\mu \vDash p(\bar{t}) \Rightarrow \Phi \vdash p(\bar{t})] \wedge [\mathfrak{M}_\mu \vDash \neg p(\bar{t}) \Rightarrow \Phi \vdash \neg p(\bar{t})]$ означает вычислимую перечислимость как позитивной, так и негативной диаграммы системы $\mathfrak{M}_\mu$, откуда следует вычислимость диаграммы $\Delta(\mathfrak{M}_\mu)$, а значит и вычислимость μ. Предложение доказано.

Предложение 2

Если алгебраическая система имеет невычислимое позитивное представление, то любое вычислимо перечислимое множество универсальных предложений, реализующееся в ней, реализуется и в некотором собственном гомоморфном образе этой системы.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $\mathfrak{M}$ – позитивно представимая система сигнатуры Σ и Φ – вычислимо перечислимое множество универсальных предложений, реализующееся в ней и не реализующееся ни в каком собственном гомоморфном образе этой системы. Зафиксируем любое невычислимое позитивное представление μ этой системы и рассмотрим ее стандартное константное μ-обогащение $\mathfrak{M}_\mu$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_\mu$ также позитивна и в ней реализуется Φ.

Определимость в классе позитивных гомоморфных образов

Т.к. семейство гомоморфных образов при обогащении константами не изменяется, то Φ не реализуется ни в каком собственном гомоморфном образе $\mathfrak{M}_\mu$ (иначе, вопреки предположению, некоторый собственный гомоморфный образ Σ-обеднения системы $\mathfrak{M}_\mu$ реализовывал бы Φ). Тогда $\mathfrak{M}_\mu$ является универсально определимой и, по предложению 1, μ – вычислимое представление. Противоречие. Предложение доказано.

Предложение 3

Если алгебраическая система имеет невычислимое позитивное представление, то любое вычислимо перечислимое множество универсальных хорновских предложений, реализующееся в ней, реализуется и в некотором собственном позитивном гомоморфном образе этой системы.

Определимость в классе позитивных гомоморфных образов

Следствие

Всякое вычислимо перечислимое множество универсальных хорновских предложений, реализующееся в невычислимой позитивной алгебре, реализуется и в некоторой фактор-алгебре этой алгебры по подходящей ненулевой позитивной конгруэнции.

Таким образом, никакую алгебру, обладающую невычислимым позитивным представлением, нельзя выделить в классе ее собственных гомоморфных образов никаким вычислимо перечислимым множеством универсальных предложений.

Аналогично, никакую алгебру, обладающую невычислимым позитивным представлением, нельзя выделить в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никаким вычислимо перечислимым множеством универсальных хорновских предложений.

Универсально определимая модель

Сказанное выше поставило проблему определения тонкой грани (если она существует) между выразительными возможностями универсальных хорновских и универсальных спецификаций в рамках проблемы определимости модели в классе ее гомоморфных образов. Иначе говоря, можно ли в принципе выделить позитивную невычислимую модель в классе ее собственных эффективных гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией?

Теорема об универсально-позитивной определимости

Существует позитивно представимая модель M, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.

Универсально определимая модель

Доказательство. Пусть A – простое не гиперпростое множество, $d_0, d_1, ...$ – сильная таблица для дополнения A, т.е. процедура построения каждого d_i по каноническим индексам вычислима (d_i не пересекается с d_j для различных i, j и для каждого i множество d_i содержит элемент из дополнения A). Можно считать, что семейство d_i покрывает весь натуральный ряд ω, каждое d_i имеет вид $y+1, y+2, \ldots, y+f(i)$, где вычислимая функция f определяет мощность множеств d_i, т.е. $f(i) = card(d_i)$ для каждого i, и все числа из предыдущего (по номерам) множества меньше всех чисел из последующего. Кроме того, можно считать, что каждый член сильной таблицы содержит как минимум два элемента из дополнения A.

Определим неформальную процедуру построения вычислимого дерева T на ω следующим образом.
Обозначим d_0 через $\{x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{f(0)}\}$. Эти числа – единственные минимальные в T. Пусть $z_0, \ldots, z_m$ – все максимальные в T элементы, построенные на предыдущем шаге, расположенные в порядке возрастания как натуральные числа, k – номер множества из сильной таблицы, содержащего число $z_m + 1$. Определим $T(z_0, x)$ для всех x из d_k, $T(z_1, x)$ для всех x из d_{k+1}, $\ldots$, $T(z_m, x)$ для всех x из d_{k+m}. Рефлексивное и транзитивное замыкание данного множества завершает процедуру.
По построению, если $T(x, y) \& T(x, z) \& T(y, u) \& T(z, u)$, то $T(y, z) \vee T(z, y)$, т.е. T – дерево. Очевидно, оно вычислимо.
Теперь определим множество B как совокупность $\{x | x \in A \vee \exists y \in A(T(y, x))\}$.

Лемма 1

B – простое не гиперпростое множество.

Доказательство. В d_0 есть элемент из дополнения A. Над ним (в смысле частичного порядка, определяющего дерево T) есть минимум два элемента из дополнения A. Рассуждая таким же образом далее, получим континуум ветвей, целиком лежащих в дополнении B. Следовательно, B – перечислимое расширение простого множества A с бесконечным дополнением, т.е. оно простое. Не гиперпростота следует из построения, для которого на каждом шаге явно строится множество заведомо содержащее числа из дополнения B. Лемма доказана Зафиксируем разбиение B на две непересекающиеся бесконечные части P и Q. Построим модель $M = (\omega; P, Q, C)$, где P, Q определены выше, а интерпретация I множества $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ определяется стандартным образом: $I(c_n) = n$.

Пусть $w_1, w_2, \ldots$ – сильная таблица для дополнения из построения, т.е. в терминах нашего построения на шаге n конечное множество w_n есть объединение d_k, d_{k+1}, ..., d_{k+m}. Определим следующее множество Φ универсальных предложений:

(1) $\forall x \forall y((P(x) \vee Q(x)) \& T(x, y)) \to (P(y) \vee Q(y))$

(2) $c_i \neq c_j$ для всех различных i, j,

(3) $\forall x((P(x) \to Q(x)) \& (Q(x) \to \neg P(x)))$

Очевидно, Φ реализуется в M.

Лемма 2

Модель M имеет континуум гомоморфных образов, реализующих Φ и всякий собственный Φ-образ модели M содержит бесконечное расширение либо отношения P, либо отношения Q.

Доказательство. Любая ветвь (максимальное линейно упорядоченное подмножество) дерева T, не пересекающаяся с B, может быть континуумом способов разбита на две части, одна из которых расширяет P, а другая Q.

Для доказательства второй части леммы заметим, что всякое собственное расширение отношения P (или Q) содержит элемент из дополнения B (назовем его g), над которым, опять-таки, есть элемент из дополнения B и т.д. Универсальное предложение (1) гарантирует вовлеченность всех элементов над g в процесс расширения хотя бы одного из отношений – P либо Q. Таким образом, любая собственная Ф-реализация модели M содержит бесконечное расширение хотя бы одного из двух основных отношений. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что можно выбрать P и Q так, чтобы они реализовали поставленную перед нами цель.

Лемма 3

Существует такое разложение множества B на две вычислимо перечислимые части P и Q, что всякое вычислимо перечислимое расширение множества P (соответственно Q), не пересекающееся с Q (соответственно с P) отличается от P (от Q) на конечное число элементов.

Доказательство. Применим к множеству B классическую процедуру разложения Фридберга любого вычислимр перечислимого невычислимого множества на две перечислимые невычислимые части. Пусть это будут P и Q. Согласно построению Фридберга любое перечислимое расширение множества P (соответственно Q), не пересекающееся с Q (соответственно с P) отличается от P (от Q) на конечное число элементов. Предположим противное. Пусть, например, P' – бесконечное расширение P, не пересекающееся с Q. Тогда, из построения Фридберга следует, что разность между P' и P вычислимо перечислима, Но B, по лемме 1, простое, а значит его дополнение иммунно. Противоречие. Аналогично рассматриваются и расширения Q. Лемма доказана.

Таким образом, собственное расширение любого из отношений P или Q в модели M реализующее Φ, согласно лемме 2 является бесконечным. По лемме 3 никакое из этих расширений не является вычислимо перечислимым, т.е. все эти гомоморфные образы не имеют эффективных представлений. Теорема доказана.

Особые свойства модели из теоремы об универсально-позитивной определимости демонстрирует следующий факт.

Следствие

Существуют позитивно представимая модель M и ее универсальная спецификация Φ со следующими свойствами:
- M не имеет вычислимого представления;
- всякая позитивно представимая Φ-модель, построенная из констант, изоморфна M;
- M изоморфно вложима во всякую позитивно представимую Φ-модель.

Наконец, получаем окончательный ответ на поставленный выше вопрос.

Следствие

Существует позитивно представимая модель, не обладающая вычислимыми представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей бескванторной спецификацией.

Понятно, что такая спецификация не может быть хорновской. Таким образом, язык универсальных спецификаций оказывается существенно богаче языка универсальных хорновских предложений с точки зрения возможности адекватного описания эффективно представимых моделей.

Определимость невычислимой позитивной алгебры в классе ее собственных вычислимых фактор-алгебр оказалась не только возможной, но и весьма полезной.

Теорема об определимости в классе вычислимых факторов

Всякая невычислимая позитивная алгебра, выделяемая подходящим вычислимо перечислимым множеством Q универсальных хорновских предложений в классе своих вычислимых фактор-алгебр имеет континуум Q-конгруэнций (т.е. конгруэнций, в фактор-алгебрах по которым реализуется Q).

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ – невычислимая позитивная алгебра, Q – вычислимо перечислимое множество универсальных хорновских предложений, реализующееся в $\mathfrak{A}$, и никакая Q-конгруэнция не является вычислимой. Предположим, что число Q-конгруэнций меньше континуума.

Обогатим стандартным образом алгебру $\mathfrak{A}$ счетным множеством константных символов $\{c_n | n \in \omega\}$, полагая $c_n = \nu n$. Очевидно, что множества Q-конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ и ее стандартного ν-обогащения совпадают. Через $\mathfrak{A}_\nu$, как и ранее, будем обозначать стандартное ν-обогащение алгебры $\mathfrak{A}$. В силу вычислимой устойчивости алгебры $\mathfrak{A}_\nu$ относительно позитивных представлений можно говорить о позитивных конгруэнциях абстрактной алгебры $\mathfrak{A}_\nu$, вместо того, чтобы говорить о позитивных конгруэнциях позитивной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$. Ясно также, что $\mathfrak{A}_\nu$ можно (и удобно) считать позитивной.

Покажем, что для любой позитивной Q-конгруэнции θ найдутся две несравнимые Q-конгруэнции, расширяющие θ.

Лемма 1

Если для некоторой позитивной Q-конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}_\nu$ не существует несравнимых Q-конгруэнций, расширяющих θ, то $\mathfrak{A}_\nu$ имеет континуум Q-конгруэнций.

Доказательство. Обозначим через L множество всех Q-конгруэнций фактор-алгебры $\mathfrak{A}_\nu/\theta$ и всякую конгруэнцию из L будем называть L-конгруэнцией. По условию теоремы $\mathfrak{A}_\nu/\theta$ – позитивная, не вычислимая фактор-алгебра алгебры $\mathfrak{A}_\nu$, а по условию доказываемой леммы – множество L является линейно упорядоченным. Это множество неодноэлементно, т.к. иначе конгруэнция θ была бы вычислимой. Очевидно, что L является подрешеткой решетки всех конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}_\nu/\theta$. Легко проверить, что точные верхняя и нижняя грани всякой цепи элементов из L суть L-конгруэнции, поэтому L полна.

Пусть θ_0, θ_1 – две различные L-конгруэнции, $\theta_0 \subset \theta_1$ и θ_0 позитивна. Тогда существует позитивная L-конгруэнция θ_2, находящаяся строго между ними. В самом деле, в противном случае существовала бы такая пара элементов $\langle a, b\rangle$, различных по модулю θ_0 и равных по модулю θ_1, что всякая главная конгруэнция фактор-алгебры $\mathfrak{A}_\nu/\theta_0$ "склеивала бы" элементы этой пары (в силу линейности L), а значит θ_0 была бы вычислимой.

Таким образом, для любых двух различных конгруэнций $\theta_0 \subset \theta_1$ из позитивности θ_0 следует существование такой позитивной L-конгруэнции, которая лежит строго между ними. Следовательно, множество позитивных L-конгруэнций содержит подрешетку I, изоморфную множеству рациональных чисел с их естественным порядком. Из полноты L следует, что решетка L должна содержать пополнения всех своих сечений в области I, число которых континуум. Поэтому число Q-конгруэнций фактор-алгебры $\mathfrak{A}_\nu/\theta_0$ есть континуум, но тогда и $\mathfrak{A}_\nu$ имеет континуум Q-конгруэнций. Лемма доказана.

Пусть I – множество всех конечных последовательностей из нулей и единиц, ε – пустая последовательность. Определим для каждого $\alpha \in I$ некоторую конгруэнцию θ_α алгебры $\mathfrak{A}_\nu$ и некоторое множество Q_α универсальных хорновских предложений следующим образом:

$$\theta_\varepsilon = id\, \mathfrak{A}_\nu, Q_\varepsilon = Q.$$

Счетные решетки конгруэнций

Пусть для данного $\alpha \in I$ построены конгруэнции θ_α и множество Q_α так, что Q_α – вычислимо перечислимое множество универсальных хорновских предложений, $Q \subseteq Q_\alpha$ и Q_α есть позитивная Q_α-конгруэнция. По лемме 1 с θ_α в качестве θ и с Q_α в качестве Q существуют две несравнимые Q_α-конгруэнции θ_0, θ_1, расширяющие θ_α. В самом деле, в противном случае алгебра $\mathfrak{A}_\nu$ имеет континуум Q_α-конгруэнций, но всякая Q_α-конгруэнция есть и Q-конгруэнция. Пусть $\langle \nu p, \nu q\rangle \in \theta_0 \setminus \theta_1$ и $\langle \nu r, \nu s\rangle \in \theta_1 \setminus \theta_0$. Полагаем:

$$Q_{\alpha 0} = Q_\alpha \cup \{c_p = c_q, c_r \neq c_s\}, Q_{\alpha 1} = Q_\alpha \cup \{c_p \neq c_q, c_r = c_s\}.$$

Тогда θ_0 есть $Q_{\alpha 0}$-конгруэнция, а θ_1 есть $Q_{\alpha 1}$-конгруэнция. В силу неопределимости невычислимой позитивной алгебры в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никаким вычислимо перечислимым множеством универсальных хорновских предложений, существуют такие позитивные конгруэнции θ_0^*, θ_1^*, расширяющие θ_α, что θ_0^* является $Q_{\alpha 0}$-конгруэнцией, а θ_1^* – $Q_{\alpha 1}$-конгруэнцией.

Очевидно, что θ_0^* и θ_1^* несравнимы.
Полагаем $\theta_{\alpha 0} = \theta_0^*, \theta_{\alpha 1} = \theta_1^*$.
Указанный процесс позволяет позволяет построить множество Q-конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}_\nu$, упорядоченного включением по типу двоичного дерева, причем объединение конгруэнций, принадлежащих любой ветви этого дерева, есть, как легко заметить, опять-таки Q-конгруэнция, а разным ветвям соответствуют различные конгруэнции, т.к. по построению конгруэнции $\theta_{\alpha 0 \beta}$ и $\theta_{\alpha 1 \gamma}$ несравнимы для любых $\alpha, \beta, \gamma \in I$. Следовательно, $\mathfrak{A}_\nu$, а значит и $\mathfrak{A}$ имеют континуум Q-конгруэнций (если Q – множество предложений в сигнатуре алгебры $\mathfrak{A}$). Противоречие. Теорема доказана.
В частности, если алгебра имеет такую позитивную нумерацию ν, что никакая конгруэнция не является ν-вычислимой, то число конгруэнций этой алгебры есть континуум (случай $Q = \emptyset$).

Таким образом, умение строить универсальную хорновскую спецификацию Q, выделяющую невычислимую позитивную алгебру в классе ее вычислимых фактор-алгебр равносильно доказательству существования континуума Q-конгруэнций этой алгебры.

Упражнение 1

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ – позитивная алгебра, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих трех условий:
1. $(\mathfrak{A}, \nu)$ не является вычислимо отделимой;
2. характеристическая трансверсаль $tr(ker(\nu))$ нумерации ν иммунна, но не гипериммунна;
3. некоторое конечное обеднение алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ имеет неэффективно бесконечную конечно порожденную подалгебру.
Тогда $\mathfrak{A}$ имеет континуум конгруэнций.

Докажем, например,1. Если $\nu m, \nu n$ вычислимо неотделимы, то положим $c = \nu m, d = \nu n$ и $Q = \{c \neq d\}$.

Докажем 2. Пусть $tr(ker(\nu))$ – иммунное, но не гипериммунное множество и $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ – перечислимая по каноническим индексам бесконечная последовательность попарно непересекающихся конечных множеств, каждый член которой содержит число из $tr(ker(\nu))$. Можно считать, что $0 \notin \sigma_k$ для любого $k \in \omega$. Обогатим алгебру $\mathfrak{A}$ счетным множеством констант $\{c_n | n \in \omega\}$, полагая $c_n = \nu n$. Если $\sigma_k = \{m_0, \ldots, m_t\}$, то k-предложением назовем квазитождество $\forall xy(c_{i_o} = c_{m_0} \wedge \cdots \wedge c_{i_t} = c_{m_t} \Rightarrow x = y)$, где $i_0 \ldots, i_t$ – произвольный набор таких натуральных чисел, что $i_0 < m_0, \ldots, i_t < m_t$. Очевидно, что для любого $k \in \omega$ число k-предложений конечно. Пусть φ_k есть конъюнкция всех k-предложений. Содержательно, истинность φ_k в неединичной фактор-алгебре алгебры $(\mathfrak{A}/\theta, \mu)$ алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$, где $\mu = \theta\nu$, означает, что $\sigma_k \cap tr(ker(\mu)) \neq \emptyset$. Пусть $\nu i \neq \nu j$, и $Q = \{\varphi_k | k \in \omega\} \cup \{c_i \neq c_j\}$. Тогда никакая Q-конгруэнция θ не является вычислимой, т.к. $tr(ker(\eta^*))$, где $\eta^* = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y \pmod{\theta}\}$, есть бесконечное подмножество иммунного множества $tr(ker(\nu))$. Остается применить теорему об определимости.

Следствие

Всякая позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой.

Действительно, в противном случае используя п.1 предыдущего упражнения получим континуум конгруэнций.
Нумерация ν называется совершенной, если она позитивна и не существует нетривиальных ν-вычислимых множеств.

Упражнение 2

Всякая алгебра, обладающая совершенной нумерацией имеет континуум конгруэнций.

Упражнение 3

Всякое позитивно представимое обогащение любого расширения конечно порожденной неэффективно бесконечной алгебры имеет континуум конгруэнций.

Упражнение 4

Если α – простое не гиперпростое, то всякая алгебра представимая над η_α имеет континуум конгруэнций.

Упражнение 5

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ – равномерно вычислимо отделимая позитивная алгебра и Q – вычислимо перечислимое множество универсальных хорновских предложений, реализующееся в $\mathfrak{A}$. Если $(\mathfrak{A}, \nu)$ не имеет вычислимой Q-конгруэнции, то число равномерно вычислимо отделимых Q-конгруэнций алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ есть континуум.

Упражнение 6

Всякая алгебра со счетной решеткой конгруэнций, обладающая неэффективно бесконечной позитивной нумерацией является локально конечной и финитно аппроксимируемой.

Упражнения

Упражнение 7

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ *– позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций. Тогда*

1. ν *– вычислимо отделимая нумерация;*

2. tr(ker(ν*)) гипериммунна либо не иммунна;*

3. $(\mathfrak{A}, \nu)$ *аппроксимируется вычислимыми алгебрами.*

Упражнение 8

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ *– бесконечная конечно порожденная позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций. Тогда tr(ker(*ν*)) эффективно бесконечна.*

Упражнение 9

Бесконечная алгебра со счетной решеткой конгруэнций эффективно бесконечна тогда и только тогда, когда она обладает позитивно представимым конечно порожденным обогащением.

Упражнение 10

Для бесконечной позитивной алгебры $(\mathfrak{A}, \nu)$ *со счетной решеткой конгруэнций следующие условия равносильны:*

1. характеристическая трансверсаль $tr(ker(\nu))$ *не иммунна;*

2. $(\mathfrak{A}, \nu)$ *имеет бесконечную вычислимую фактор-алгебру;*

3. $(\mathfrak{A}, \nu)$ *имеет конечно порожденное* ν*-обогащение.*

Упражнение 11

Всякая позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций имеет позитивное обогащение, эффективно вложимое в конечно порожденную позитивную алгебру со счетной решеткой конгруэнций.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!