

УДК 512

## ВЕРБАЛЬНЫЕ КАТЕГОРИИ И ТОЖДЕСТВА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

*С.Н. Тронин*

### Аннотация

Охарактеризованы многообразия универсальных алгебр, рационально эквивалентные многообразиям алгебр над операдами над произвольными вербальными категориями.

**Ключевые слова:** вербальная категория, операда, многообразие алгебр, рациональная эквивалентность, свободная алгебра, свободная операда.

### Введение

Основной целью настоящей работы является полное доказательство одного из двух результатов, анонсированных в [1]. Доказательство другого результата было опубликовано в [2]. Задержка с публикацией была вызвана рядом обстоятельств, в том числе тем, что некоторые пункты доказательства, казавшиеся сначала почти очевидными, потребовали более тщательной проработки, и в конце концов превратились в утверждения, представляющие самостоятельный интерес. Частным случаем основного результата, содержащегося в § 5, можно считать результаты работы [3] и [2, § 1].

Для понимания содержания работы необходимы некоторые сведения из теории операд над вербальными категориями. Их можно найти в работах автора [2–4] (см. также [5]). Основы традиционной теории операд (симметрических операд, или  $\Sigma$ -операд) содержатся в книгах и обзорах [6–12].

Кратко опишем содержание работы. В § 1 приводятся известные сведения о вербальных категориях и доказываются некоторые технические результаты, отсутствующие в упоминавшихся выше работах автора. В § 2 описываются свободные алгебры в многообразиях алгебр над обобщенными операдами – операдами над вербальными категориями. В § 3 показывается, как по произвольной вербальной категории  $W$  можно построить  $W$ -операду. Использованный способ является далеко идущим обобщением конструкции из работы [13]. В § 4 результат § 3 применяется для построения свободных  $W$ -операд. Наконец, в § 5 дается характеристика многообразий алгебр над  $W$ -операдами, рассматриваемых с точностью до рациональной эквивалентности, в терминах выделенных операций и тождеств.

Отметим, что все используемые в настоящей работе понятия и полученные результаты обладают многосортными (мультикатегорными) аналогами. Ввиду недостатка места соответствующие формулировки и доказательства не приводятся. Некоторые сведения о многосортных вербальных категориях и многосортных операдах над ними (мультикатегориях) можно найти в [4] и [5].

### 1. Вербальные категории

Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из работы [3]. Пусть  $n \geq 0$  – натуральное число. Всюду в дальнейшем  $[n]$  обозначает множество

$\{0, 1, \dots, n\}$ . Обозначим через  $FSet$  подкатегорию категории множеств с объектами  $[n]$ ,  $n \geq 0$ , морфизмами которой являются такие отображения  $f : [n] \rightarrow [m]$ , что  $f(0) = 0$ , и  $f^{-1}(0) = \{0\}$ . Категория  $FSet$  обладает конечными копроизведениями, которые описываются следующим образом. Естественный изоморфизм  $[n] \sqcup [m] \rightarrow [n+m]$  отображает  $i \in [n]$  в  $i \in [n+m]$ ,  $j \in [m], j > 0$  – в  $n+j \in [n+m]$ . Поэтому если даны  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,  $g : [p] \rightarrow [q]$ , то  $f \sqcup g : [n+p] \rightarrow [m+q]$  действует следующим образом:  $(f \sqcup g)(i) = f(i)$  при  $0 \leq i \leq n$ ,  $(f \sqcup g)(j) = m+g(j)$  при  $1 \leq j \leq p$ .

*Разбиением* натурального числа  $n$  на  $m$  частей в настоящей работе будет называться неубывающее отображение вида  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ , являющееся морфизмом  $FSet$ . Через  $P$  обозначим категорию с объектами  $[n]$ , и множествами морфизмов  $P(n, m) = P([n], [m])$ , состоящими из всевозможных разбиений  $n$  на  $m$  частей. Для  $\alpha \in P(n, m)$  и для всех  $1 \leq i \leq m$  положим  $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$ . Тогда  $\alpha$  можно отождествить с упорядоченной последовательностью  $(n_1, \dots, n_m)$  целых неотрицательных чисел длины  $m$  такой, что  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Этим объясняется выбор термина. Если  $\beta \in P(n, m)$ ,  $\alpha \in P(m, k)$ ,  $\alpha = (m_1, \dots, m_k)$ , то  $\beta$  можно записать в виде  $(n_{1,1}, \dots, n_{1,m_1}, \dots, n_{k,1}, \dots, n_{k,m_k})$ . Теперь композицию  $\alpha\beta$  можно описать как последовательность  $(\sum_{i=1}^{m_1} n_{1,i}, \dots, \sum_{i=1}^{m_k} n_{k,i})$ . Если  $\alpha \in P(n, m)$ ,  $\beta \in P(k, l)$ , то  $\alpha \sqcup \beta \in P(n+k, m+l)$  (хотя  $[n+m]$  не есть копроизведение  $[n]$  и  $[m]$  в  $P$ ).

В категории  $FSet$  существуют также расслоенные произведения. Нам понадобится их явный вид в одном частном случае.

Условимся о следующих терминах и обозначениях. Пусть  $a$  и  $b$  – натуральные числа. При  $a \leq b$  положим  $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ , при  $a > b$  полагаем  $[a, b] = \emptyset$ . Множества вида  $[a, b]$  будут называться *отрезками*.

Пусть  $\alpha \in P(n, m)$ ,  $f : [k] \rightarrow [m]$  – морфизм из  $FSet$ . Рассмотрим расслоенное произведение (декартов квадрат) вида:

$$\begin{array}{ccc} [n] \times_{[m]} [k] & \xrightarrow{\pi_2} & [k] \\ \pi_1 \downarrow & & f \downarrow \\ [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m] \end{array} \quad (1)$$

**Лемма 1 [3].** *В категории  $FSet$  расслоенное произведение (1) устроено следующим образом. Пусть  $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ . Полагаем  $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ . При этом  $\pi_2$  становится неубывающим отображением, которое можно записать как  $(n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$ . Проекция  $\pi_1$  описывается так: ее ограничение на каждый отрезок  $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \dots + n_{f(j)}]$  есть неубывающая биекция на отрезок  $[n_1 + \dots + n_{f(j-1)} + 1, n_1 + \dots + n_{f(j)}]$ , и  $\pi_1(0) = 0$ .*

В случае, когда  $n_{f(j)} = 0$ , из сформулированного выше соглашения следует, что оба отрезка пусты. В общем случае речь идет о конечных линейно упорядоченных множествах, каждое из которых состоит из  $n_{f(j)}$  элементов. При этом выражение  $n_{f(1)} + \dots + n_{f(j)}$  надо понимать как  $\sum_{i=1}^j n_{f(i)}$ , а  $n_1 + \dots + n_{f(j)}$  как  $\sum_{i=1}^{f(j)} n_i$ . Отметим, что при  $j = 1$  имеются в виду отрезки  $[1, n_{f(1)}]$  и  $[n_1 + \dots + n_{f(1)-1} + 1, n_1 + \dots + n_{f(1)}]$ .

Проекцию  $\pi_2 = (n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$  будем обозначать через  $\alpha f$ , а проекцию  $\pi_1$  – через  $f^* \alpha$ . Заметим, что  $f^* \alpha$  есть не что иное, как подъем  $\alpha$  вдоль  $f$  (мы следуем здесь терминологии и обозначениям из [14]). Множество  $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$  можно рассматривать как результат применения функтора замены базы, то есть как  $f^*[n]$ .

**Определение 1.** Рассмотрим подкатегорию  $W \subseteq FSet$  со всеми теми же объектами  $[n]$ , морфизмы которой должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) Если  $f, g \in \text{Mor}(W)$ , то  $f \sqcup g \in \text{Mor}(W)$ ;
- 2) Если  $f : [k] \rightarrow [m]$  есть морфизм из  $W$ , то для любого  $\alpha \in P(n, m)$  имеет место включение  $f^*\alpha \in W(f^*[n], [n])$ .

Категорию  $W$  с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной*.

Укажем несколько очевидных примеров вербальных подкатегорий.

1. Тривиальная категория  $WId$ , морфизмы которой – тождественные отображения вида  $[n] \rightarrow [n]$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Категория  $\Sigma$ , в которой  $\Sigma(n, m)$  пусто при  $n \neq m$ , а  $\Sigma(n, n) = \Sigma_n$  – группа подстановок  $n$ -й степени. Можно показать, что в  $\Sigma$  не содержится ни одна вербальная категория, за исключением  $WId$ .

3. Категория  $Mon$ , морфизмами которой являются все мономорфизмы (инъекции) из  $FSet$ . Можно показать, что  $Mon$  не содержится ни в одной вербальной категории, отличной от  $FSet$ .

4. Категория  $Epi$ , морфизмами которой являются все эпиморфизмы (то есть сюръекции) из  $FSet$ . Можно показать, что и  $Epi$  не содержится ни в одной вербальной категории, отличной от  $FSet$ .

5. Наконец, вся категория  $FSet$  также является вербальной.

**Лемма 2.** Если  $\{W_i | i \in I\}$  – любое семейство вербальных категорий, то вербальной является и категория  $\bigcap_{i \in I} W_i$ , класс морфизмов которой есть  $\bigcap_{i \in I} \text{Mor}(W_i)$ . Как следствие этого, множество всех вербальных категорий является полной решеткой с минимальным элементом  $WId$  и максимальным элементом  $FSet$ .

**Доказательство.** Очевидно. □

Можно показать, что решетка всех вербальных подкатегорий категории  $FSet$  не менее чем счетна.

Так как в категории  $FSet$  изоморфные объекты совпадают, то в диаграмме (1) всегда имеет место равенство  $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ . С учетом этого дополним лемму 1 следующим образом.

**Лемма 3.** Если в диаграмме (1) потребовать, чтобы проекция  $\pi_2$  была неубывающим отображением, а ограничение проекции  $\pi_1$  на каждый отрезок  $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)}, n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)} + n_{f(i)}]$  есть неубывающая инъекция, то  $\pi_2 = \alpha f : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \rightarrow [k]$ , а морфизм  $\pi_1$  однозначно определяется из этих условий как введенное выше отображение  $f^*\alpha$ .

**Доказательство.** Сразу полагаем  $[n] \times_{[m]} [k] = [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ . Из определения расслоенного произведения следует, что существует единственное отображение  $\varphi : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \rightarrow [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$  со свойствами:  $\pi_1 \varphi = f^*\alpha$ ,  $\pi_2 \varphi = f\alpha$ . Достаточно будет показать, что при сделанных предположениях  $\varphi$  – тождественное отображение. Положим  $k_i = n_{f(1)} + \dots + n_{f(i-1)}$ . Тогда из  $\pi_2 \varphi = f\alpha$  и условия неубывания  $\pi_2$  следует  $\pi_2^{-1}(i) = [k_i + 1, k_{i+1}]$  для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , причем  $\varphi([k_i + 1, k_{i+1}]) = [k_i + 1, k_{i+1}]$ . Теперь из  $\pi_1 \varphi = f^*\alpha$ , условия неубывания ограничения  $\pi_1$  на  $[k_i + 1, k_{i+1}]$ , инъективности этого ограничения и из аналогичных свойств  $f^*\alpha$  следует, что ограничение  $\varphi$  на  $[k_i + 1, k_{i+1}]$  есть тождественное отображение для каждого  $i$ . Следовательно, то же самое верно для всего  $\varphi$ . □

**Следствие 1.** *Справедливы следующие тождества:*

$$(fg)^*\alpha = (f^*\alpha)(g^*(\alpha f)) \quad f^*(\alpha\beta) = (f^*\alpha)^*\beta \\ (\alpha\beta)f = (\alpha f)(\beta(f^*\alpha)) \quad \alpha(fg) = (\alpha f)g$$

**Доказательство.** Внешний контур диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} (f^*\alpha)^*[r] & \xrightarrow{\beta(f^*\alpha)} & f^*[n] & \xrightarrow{\alpha f} & [k] \\ (f^*\alpha)^*\beta \downarrow & & f^*\alpha \downarrow & & f \downarrow \\ [r] & \xrightarrow{\beta} & [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m] \end{array}$$

должен совпадать с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} f^*[r] & \xrightarrow{(\alpha\beta)f} & [k] \\ f^*(\alpha\beta) \downarrow & & f \downarrow \\ [r] & \xrightarrow{\alpha\beta} & [m] \end{array}$$

Это следует, во-первых, из того, что внешний контур диаграммы, каждый квадрат которой есть диаграмма расслоенного произведения, сам является диаграммой расслоенного произведения, а во-вторых, из леммы 3. Аналогично доказываются и другие равенства.  $\square$

## 2. Свободные алгебры над операдами

Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из [2].

**Определение 2.** Пусть  $W$  – вербальная категория. Рассмотрим *ковариантный* функтор  $G$  из категории  $W^{op}$  в категорию множеств. Будем писать  $G(n)$  вместо  $G([n])$ ,  $[n] \in \text{Ob}(W)$ , и  $fx$  вместо  $G(f)(x)$ , где  $f \in W^{op}([m], [n]) = W([n], [m])$ ,  $x \in G(n)$ . *Градуированной  $W$ -полугруппой* будем называть функтор, обладающий следующими дополнительными свойствами:

1) для любых  $[n], [m] \in \text{Ob}(W)$  определены операции  $G(n) \times G(m) \rightarrow G(n+m)$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ , такие, что  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  для всех возможных  $x \in G(n), y \in G(m), z \in G(k)$ ;

2) если даны  $f \in W^{op}([n'], [n])$ ,  $g \in W^{op}([m'], [m])$ , то  $(fx) \cdot (gy) = (f \times g)(x \cdot y)$  (заметим, что здесь использовано произведение в  $W^{op}$ , соответствующее копроизведению в  $W$ );

3) если даны  $g_j \in G(n_j), j = 1, 2, \dots, m$ , и  $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$  – разбиение, то для любого  $f \in W^{op}([m], [k])$  имеет место равенство  $(f^*\alpha)(g_1 \cdot \dots \cdot g_m) = g_{f(1)} \cdot \dots \cdot g_{f(k)}$ .

Определим также *гомоморфизм*  $h : G_1 \rightarrow G_2$  градуированных  $W$ -полугрупп как естественное преобразование функторов (семейство отображений  $h_n : G_1(n) \rightarrow G_2(n)$ ) такое, что для всех  $x \in G(n), y \in G(m)$  имеет место равенство  $h_{n+m}(x \cdot y) = h_n(x) \cdot h_m(y)$ .

**Пример 1.** Зафиксируем множество  $X$ . Тогда соответствие  $[n] \mapsto X^n$  есть градуированная  $FSet$ -полугруппа в смысле только что данного определения. Функтор  $[n] \mapsto X^n$  как контравариантный функтор на  $FSet$  действует следующим образом. Если дано отображение  $f : [n] \rightarrow [m]$ , то отображение  $X^f : X^m \rightarrow X^n$  сопоставляет строке  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$  строку  $\bar{x}f = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$ . Превращая этот функтор в ковариантный функтор из  $W^{op}$ , будем записывать результат рассмотренного только что отображения как  $f\bar{x}$ . Умножение  $X^n \times X^m \rightarrow X^{n+m}$  –

это приписывание строк друг к другу. Все свойства из определения градуированной  $FSet$ -полугруппы проверяются непосредственно. Компоненты градуированной  $FSet$ -полугруппы, построенной в этом примере, будем обозначать через  $T^n(X)$ , имея в виду аналогию с тензорными степенями модуля. Таким образом,  $T^n(X) = X^n$ . Вся градуированная полугруппа обозначается через  $T(X)$ .

**Теорема 1.** [2] Пусть  $R$  – некоторая  $W$ -операда,  $G$  – градуированная  $W$ -полугруппа.

1) Рассмотрим множество  $RG = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} R(n) \times G(n)$ . На нем естественным образом можно определить структуру алгебры над  $R$  как несимметрической операдой (в нашей терминологии –  $WId$ -операдой).

2) Рассмотрим конгруэнцию  $\Theta$  в алгебре  $RG$ , порожденную всеми эквивалентностями вида  $(fx, g) \equiv (x, fg)$ , где  $f \in W([n], [m])$ ,  $x \in R(n)$ ,  $g \in G(m)$ . Тогда факторалгебра  $R_WG = RG/\Theta$  обладает естественной структурой алгебры над  $W$ -операдой  $R$ .

3) При этом соответствие  $G \mapsto R_WG$  становится функтором из категории градуированных  $W$ -полугрупп в категорию  $\text{Alg}(R_W)$  алгебр над  $W$ -операдой  $R$ .

**Замечание 1.** Описанная в этой теореме конструкция алгебры  $R_WG$  есть не что иное, как тензорное произведение функторов  $R$  и  $G$  в смысле [15], [16, Chapter VII, § 2]. Мы используем упрощенную запись:  $RG$  (или  $R_WG$ ) вместо  $R \otimes G$  (или  $R \otimes_W G$ ) ввиду того, что рассматривается достаточно специфический частный случай.

**Теорема 2 [2, Теорема 1.4].** Пусть  $R$  – некоторая  $W$ -операда,  $X$  – множество. Тогда  $R_WT(X)$  есть свободная алгебра с базисом  $X$  в многообразии  $\text{Alg}(R_W)$  алгебр над  $R$ .

В дальнейшем свободную алгебру с базисом  $X$  в многообразии  $\text{Alg}(R_W)$  мы будем обозначать через  $\text{Fr}_{R,W}(X)$ .

Приведем еще некоторые общие факты о тождествах и свободных алгебрах в произвольных  $\Omega$ -алгебрах. Они потребуются нам в § 4.

Для произвольной  $A \in \text{Alg}(\Omega)$  положим  $\Theta_A(X) = \{(t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \text{Fr}_{\Omega}(X), h(t_1) = h(t_2) \text{ для любого гомоморфизма } h : \text{Fr}_{\Omega}(X) \rightarrow A\}$ . Это конгруэнция на  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$ , то есть  $\Omega$ -подалгебра алгебры  $\text{Fr}_{\Omega}(X) \times \text{Fr}_{\Omega}(X)$ , являющаяся отношением эквивалентности. Конгруэнция  $\Theta_A(X)$  вполне инвариантна, то есть если  $h : \text{Fr}_{\Omega}(X) \rightarrow \text{Fr}_{\Omega}(X)$  – какой угодно эндоморфизм и  $(t_1, t_2) \in \Theta_A(X)$ , то  $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_A(X)$ . Более того, если  $h$  – гомоморфизм из  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$  в  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$  и  $(t_1, t_2) \in \Theta_A(X)$ , то  $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_A(Y)$ . Элементы  $\Theta_A(X)$  естественно назвать *тождествами*  $A$  в алфавите  $X$ . Обратно, пусть дано некоторое семейство  $\Xi$  пар элементов  $(z_{1,i}, z_{2,i}) \in \text{Fr}_{\Omega}(X_i) \times \text{Fr}_{\Omega}(X_i)$ ,  $i \in I$ . Определим  $\text{Var}(\Xi)$  как полную подкатеорию категории  $\text{Alg}(\Omega)$ , объекты которой – все те алгебры, для которых элементы множества  $\Xi$  являются тождествами. Нам будет удобно принять такое определение *многообразия  $\Omega$ -алгебр*: это непустая полная подкатеория категории  $\text{Alg}(\Omega)$ , замкнутая относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов, и произвольных прямых произведений. Непустая полная подкатеория  $M$  категории  $\text{Alg}(\Omega)$  является многообразием  $\Omega$ -алгебр тогда и только тогда, когда  $M = \text{Var}(\Xi)$  для некоторого  $\Xi$  (теорема Биркгофа). Положим  $\Theta_M(X) = \bigcap_{A \in M} \Theta_A(X)$ .

Это вполне инвариантная конгруэнция на свободной алгебре  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$ . Соответствие  $X \mapsto \Theta_M(X)$  является функтором, и более того, для каждого гомоморфизма  $h$  из  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$  в  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$  если  $(t_1, t_2) \in \Theta_M(X)$ , то  $(h(t_1), h(t_2)) \in \Theta_M(Y)$ .

Свободная алгебра  $\text{Fr}_M(X)$  многообразия  $M$  с базисом  $X$  – это факторалгебра  $\text{Fr}_\Omega(X)/\Theta_M(X)$ . Каждое многообразие можно представить в виде  $\text{Var}(\Xi)$  для некоторого  $\Xi \subseteq \text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_{Z,\Omega}(X)$ , причем множество  $X$  можно выбрать счетным. Для такого  $X$  задание  $\text{Fr}_M(X)$  (или, соответственно,  $\Theta_M(X)$ ) полностью определяет многообразие  $M$ .

### 3. Оперადы, строящиеся по вербальным категориям

В этом параграфе будет показано, что по каждой вербальной категории естественным образом можно построить  $W$ -операту. Метод построения будет также использован в следующем параграфе для построения свободных  $W$ -операд.

Пусть  $W$  – произвольная вербальная категория. Для каждого  $m \geq 0$  положим

$$OW(m) = \coprod_{k \geq 0} W([k], [m]).$$

**Теорема 3.** Семейство  $OW = \{OW(n) | n \geq 0\}$  обладает естественной структурой  $W$ -оперადы.

**Доказательство.** Опишем, как устроена операдная композиция в  $OW$ . Пусть  $f \in OW(m)$ ,  $g_i \in OW(n_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Это означает, что заданы морфизмы категории  $W$  вида:  $f : [k] \rightarrow [m]$ ,  $g_i : [l_i] \rightarrow [n_i]$ . Положим  $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n_1 + \dots + n_m, m)$ . Тогда по определению

$$f g_1 \dots g_m = (f^* \alpha)(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)}). \quad (2)$$

Согласно определению вербальной категории в правой части равенства (2) получается морфизм категории  $W$ , имеющий вид  $[l_{f(1)} + \dots + l_{f(k)}] \rightarrow [n_1 + \dots + n_m]$ , то есть элемент  $OW(n_1 + \dots + n_m)$ . Единица операды  $OW$  – это тождественный морфизм из  $W([1], [1]) \subseteq OW(1)$ .

Структура  $W$ -операды задается следующим образом. Пусть  $w \in OW(m)$ , то есть фактически  $w : [k] \rightarrow [m]$  – морфизм категории  $W$ . Рассмотрим морфизм категории  $W$  вида  $f : [m] \rightarrow [n]$ . Тогда суперпозиция  $f \cdot w$  будет морфизмом  $[k] \rightarrow [n]$ , то есть элементом  $OW(n)$ . Однако в соответствии с принятыми в предыдущих работах автора обозначениями (см. [2]) мы должны превратить соответствие  $[n] \rightarrow OW(n)$  в контравариантный функтор на категории  $W^{op}$ , двойственной к категории  $W$ . А это значит, что «умножение»  $f$  на  $w$  должно производиться справа. Таким образом,

$$wf = f \cdot w, \quad (3)$$

причем в левой части этого равенства  $f$  понимается как морфизм категории  $W^{op}$ .

Доказательство того, что таким образом получается  $W$ -операта, использует тождества, сформулированные в следствии 1, и еще ряд подобным им тождеств, которые будут установлены в процессе доказательства теоремы.

Начнем с ассоциативности композиции (2). Пусть даны морфизмы  $W$  вида  $f : [k] \rightarrow [m]$ ,  $g_i : [l_i] \rightarrow [n_i]$ ,  $h_{i,j} : [v_{i,j}] \rightarrow [u_{i,j}]$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ . Это означает, что  $f \in OW(m)$ ,  $g_i \in OW(n_i)$ ,  $h_{i,j} \in OW(u_{i,j})$ . Положим  $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n_1 + \dots + n_m, m)$ ,  $\beta_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}) \in P(u_{i,1} + \dots + u_{i,n_i}, n_i)$ ,  $\beta = \beta_1 \sqcup \dots \sqcup \beta_m$ ,  $\bar{h}_i = h_{i,1} \dots h_{i,n_i}$ . Требуется доказать равенство

$$(f g_1 \dots g_m) \bar{h}_1 \dots \bar{h}_m = f(g_1 \bar{h}_1) \dots (g_m \bar{h}_m). \quad (4)$$

Вычислим левую и правую части (4). Пусть  $r = f g_1 \dots g_m$ . Согласно (2) правая часть равна  $(r^* \beta)h$ , где явный вид  $h$  будет уточнен ниже. Явный вид  $r$  таков:

$r = pq$ , где  $p = f^*\alpha$ ,  $q = g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)}$ . Тогда по следствию 1  $(pq)^*\beta = (p^*\beta)(q^*(\beta p))$ . Далее, согласно следствию 1  $p^*\beta = (f^*\alpha)^*\beta = f^*(\alpha\beta)$ . Пусть  $\gamma = \alpha\beta$ , это – разбиение, которое можно записать в виде  $(\sum_{j=1}^{n_1} u_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_m} u_{m,j})$ . Далее,  $\beta p = \beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)}$ . Таким образом,  $q^*(\beta p) = (g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})^*(\beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)})$ . Теперь нам необходимо тождество

$$(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})^*(\beta_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup \beta_{f(k)}) = ((g_{f(1)})^*\beta_{f(1)}) \sqcup \dots \sqcup ((g_{f(k)})^*\beta_{f(k)}),$$

являющееся следствием того, что в категории множеств копроизведение (то есть несвязное покомпонентное объединение) декартовых квадратов снова является декартовым квадратом, а выражения  $(g_{f(i)})^*\beta_{f(i)}$  определяются с помощью декартовых квадратов вида (1), и согласно лемме 3 имеет место единственность проекций при определенных условиях, которые в данном случае выполняются очевидным образом.

Далее, прямым вычислением можно убедиться, что определенное согласно (2) отображение  $h$  таково:

$$h = h_{f(1),g_{f(1)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(1),g_{f(1)}(l_{f(1)})} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k),g_{f(k)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k),g_{f(k)}(l_{f(k)})}.$$

Собирая все результаты вычислений вместе, получаем, что левая часть (4) равна

$$(f^*\gamma)(d_1 \sqcup \dots \sqcup d_k). \quad (5)$$

Здесь  $d_i = ((g_{f(i)})^*\beta_{f(i)})(h_{f(i),g_{f(i)}(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(i),g_{f(i)}(l_{f(i)})})$  при всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Займемся правой частью (4). По определению (2)

$$c_i = g_i h_{i,1} \dots h_{i,n_i} = ((g_i)^*\beta_i)(h_{i,g_i(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{i,g_i(l_i)}).$$

Это – отображение из  $[v_{i,g_i(1)} + \dots + v_{i,g_i(l_i)}]$  в  $[u_{i,1} + \dots + u_{i,n_i}]$ . Поэтому то разбиение, которое возникает вследствие применения (2) к правой части (4), есть  $(u_{1,1} + \dots + u_{1,n_1}, \dots, u_{m,1} + \dots + u_{m,n_m})$ . Это не что иное, как уже появившееся ранее разбиение  $\gamma = \alpha\beta$ . Отсюда

$$f c_1 \dots c_m = (f^*\gamma)(c_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup c_{f(k)})$$

Вспоминая выписанный выше явный вид  $c_i$ , убеждаемся, что получилось то же самое выражение, что и (5). Ассоциативность операдной композиции тем самым доказана. Свойства операдной единицы – тождественного отображения  $[1] \rightarrow [1]$  – проверяются очень легко.

Перейдем к свойствам, определяющим  $OW$  как  $W$ -операту. Для удобства различения элементов  $OW$  и морфизмов  $W$  несколько изменим обозначения. Пусть  $\xi : [k] \rightarrow [m]$  (морфизм из  $W$ ) рассматривается как элемент  $OW(m)$ , и аналогично  $\omega_i : [s_i] \rightarrow [l_i]$  (также морфизмы  $W$ ) рассматриваются как элементы  $OW(l_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Рассмотрим также  $f_i : [l_i] \rightarrow [n_i]$  – морфизмы  $W$ , которые понимаются только как морфизмы  $W$ . Обозначим через  $\alpha$  разбиение  $(n_1, \dots, n_m)$  и через  $\beta$  разбиение  $(l_1, \dots, l_m)$ . Необходимо доказать равенство:

$$\xi(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) = (\xi \omega_1 \dots \omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m). \quad (6)$$

Здесь выражения вида  $\omega_i f_i$  понимаются в смысле (3), то есть  $\omega_i f_i = f_i \cdot \omega_i$  – суперпозиция отображений  $[s_i] \rightarrow [l_i] \rightarrow [n_i]$ . Аналогично надо понимать и правую часть (6). Сделав все замены согласно (3), получим в левой части (6)

$$\begin{aligned} \xi(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) &= (\xi^*\alpha)((f_{\xi(1)} \cdot \omega_{\xi(1)}) \sqcup \dots \sqcup (f_{\xi(m)} \cdot \omega_{\xi(m)})) = \\ &= (\xi^*\alpha)(f_{\xi(1)} \sqcup \dots \sqcup f_{\xi(m)})(\omega_{\xi(1)} \sqcup \dots \sqcup \omega_{\xi(m)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Второй и третий члены этой цепочки равенств – обычные морфизмы  $W$  с обычными суперпозициями (то есть не надо ничего переворачивать). Теперь воспользуемся непосредственно проверяемым тождеством:

$$(\xi^* \alpha)(f_{\xi(1)} \sqcup \dots \sqcup f_{\xi(m)}) = (f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m)(\xi^* \beta).$$

С учетом этого тождества (а также (3)) будем иметь следующее продолжение равенства (7):

$$\begin{aligned} \xi(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) &= (f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m)(\xi^* \beta)(\omega_{\xi(1)} \sqcup \dots \sqcup \omega_{\xi(m)}) = \\ &= (f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m) \cdot (\xi \omega_1 \dots \omega_m) = (\xi \omega_1 \dots \omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (6) доказано. Последнее равенство, которое необходимо установить, выглядит так:

$$(\xi f) \omega_1 \dots \omega_m = (\xi \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)})(f^* \alpha).$$

Здесь  $\xi : [l] \rightarrow [k]$  – элемент  $OW(k)$ ,  $f : [k] \rightarrow [m]$  – морфизм  $W$ ,  $\omega_i : [s_i] \rightarrow [n_i]$  – элементы  $OW(n_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ , выражения вида  $\xi f$  понимаются как  $\xi f = f \cdot \xi$ . С учетом сказанного проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} (\xi f) \omega_1 \dots \omega_m &= ((f \cdot \xi)^* \alpha)(\omega_{f(\xi(1))} \sqcup \dots \sqcup \omega_{f(\xi(l))}) = \\ &= (f^* \alpha) \cdot (\xi^*(\alpha f)) \cdot (\omega_{f(\xi(1))} \sqcup \dots \sqcup \omega_{f(\xi(l))}) = \\ &= f^* \alpha \cdot (\xi \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}) = (\xi \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)})(f^* \alpha). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 2.** Заметим, что если  $W = \Sigma$ , то получается хорошо известная операда симметрических групп, если  $W = Wid$ , то получается также известная операда, все компоненты которой – одноэлементные множества. В остальных случаях, по-видимому, получаются новые операды.

#### 4. Свободные операды

Пусть  $\Omega = \{\Omega_n | n = 0, 1, \dots\}$  – некоторая сигнатура. Будем предполагать известной стандартную конструкцию алгебры  $\Omega$ -слов с базисом  $X$ , то есть свободной алгебры  $Fr_\Omega(X)$  в многообразии  $Alg(\Omega)$  всех  $\Omega$ -алгебр. Будем предполагать также известным следующее свойство  $\Omega$ -слов. Допустим, что для данного слова  $z \in Fr_\Omega(X)$  взяты все слова из  $\Omega$ , входящие в запись  $z$ , и из них составлено слово  $w$ , порядок следования символов в котором тот же самый, что и их вхождений в слово  $z$ . Если это слово окажется пустым, то обозначим его через  $\varepsilon$ . Допустим также, что аналогичным образом (то есть с сохранением порядка следования) из входящих в запись  $w$  символов из множества  $X$  составлено слово  $\bar{x}$ . Тогда по паре слов  $(w, \bar{x})$  слово  $z$  восстанавливается однозначно. Это легко следует из представления  $\Omega$ -слов виде помеченных корневых деревьев (набросок такого представления для многосортного случая можно найти в [6, гл. 2]). Символ  $w$  назовем  $\Omega$ -компонентой слова  $z$ , а слово  $\bar{x}$  –  $X$ -компонентой  $z$ . Таким образом, можно использовать для слова  $z$  альтернативный способ записи в виде  $w\bar{x}$ . Мы будем (явно или неявно) часто пользоваться этой возможностью.

Пусть множество  $\mathcal{FO}_\Omega(n)$  состоит из всех элементов  $z \in Fr_\Omega(x_1, \dots, x_n)$ , в которых после описанной выше процедуры  $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ . В этом случае слово  $z$  однозначно восстанавливается по слову  $w$  в алфавите  $\Omega$ . Будем использовать запись



вида  $z = z(x_1, \dots, x_n) = z(\bar{x})$ , чтобы иметь возможность делать подстановки вместо «переменных»  $x_1, \dots, x_n$  других  $\Omega$ -слов. Пусть  $a = a(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{FO}_\Omega(m)$ ,  $b_i = b_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in \mathcal{FO}_\Omega(n_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Положим

$$\begin{aligned} ab_1 \dots b_m &= ab_1 \dots b_m(x_1, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+n_m}) = \\ &= a(b_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, b_m(x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_{m-1}+n_m})). \end{aligned} \quad (8)$$

Легко заметить, что результат этой операции принадлежит множеству  $\mathcal{FO}_\Omega(n_1 + \dots + n_m)$

**Теорема 4.** *Определенное выше семейство  $\mathcal{FO}_\Omega = \{\mathcal{FO}_\Omega(m) | m = 0, 1, \dots\}$  с операцией композиции (8) является свободной  $Wid$ -операдой с базисом  $\Omega$ .*

**Доказательство.** То, что  $\mathcal{FO}_\Omega$  является  $Wid$ -операдой, легко проверяется с помощью (8). Роль единицы играет элемент  $x_1 \in \mathcal{FO}_\Omega(1) \subset \text{Fr}_\Omega(x_1)$ . Этот элемент при описанном выше разделении  $\Omega$ -слов на  $\Omega$ -компоненты и на  $X$ -компоненты можно отождествить с  $\varepsilon$ . Рассмотрим для каждого  $n$  отображение  $\xi_n : \Omega_n \rightarrow \mathcal{FO}_\Omega(n)$ , сопоставляющее элементу сигнатуры  $\omega$  слово  $\omega x_1 \dots x_n$ . Покажем, что для каждой  $Wid$ -операты  $R$  и любого семейства отображений  $\chi_n : \Omega_n \rightarrow R(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , существует однозначно определенный гомоморфизм операд  $\psi : \mathcal{FO}_\Omega \rightarrow R$  такой, что  $\psi\xi = \chi$  (то есть  $\psi_n \chi_n = \xi_n$  для каждого  $n$ ).

Рассмотрим свободные в  $\text{Alg}(R)$  алгебры

$$\text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{\infty} R(k) \times \{x_1, \dots, x_n\}^k.$$

Элементы  $r \in R(n)$  можно отождествлять с элементами

$$rx_1 \dots x_n = (r, x_1 \dots x_n) \in R(n) \times \{x_1, \dots, x_n\}^n \subseteq \text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n),$$

так что  $R(n) \subset \text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n)$ . Семейство отображений  $\chi_n : \Omega_n \rightarrow R(n)$  вместе с отображениями вида

$$\text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n) \times A^n \rightarrow A, \quad (u(x_1, \dots, x_n), a_1, \dots, a_n) \mapsto u(a_1, \dots, a_n),$$

где  $A$  есть  $R$ -алгебра, позволяет определить на каждой  $R$ -алгебре структуру  $\Omega$ -алгебры. Используя включения  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \text{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$  и  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n)$ , получаем однозначно определенные гомоморфизмы  $\Omega$ -алгебр  $\text{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{Fr}_R(x_1, \dots, x_n)$ . Ограничения этих гомоморфизмов на  $\mathcal{FO}_\Omega(n)$  и будут искомыми компонентами  $\psi_n$  гомоморфизма операд  $\mathcal{FO}_\Omega \rightarrow R$ , удовлетворяющего требуемым условиям.  $\square$

В следующей теореме (и в § 5) будет использоваться понятие *рациональной эквивалентности* многообразий, введенное в [17]. Современное изложение можно найти в [18, гл. 1].

Известно, что для любого множества  $A$  можно определить операту  $E_A$ , полагая компоненту  $E_A(n)$  равной множеству всех отображений из  $A^n$  в  $A$ . Это  $FSet$ -операта (а значит, ее можно считать оператой над любой вербальной категорией  $W$ ). Пусть  $R$  – некоторая  $W$ -операта. Хорошо известно (и легко показывается), что задание на  $A$  структуры  $R$ -алгебры равносильно заданию гомоморфизма  $W$ -операт  $R \rightarrow E_A$ .

**Лемма 4.** *Многообразия  $\text{Alg}(\mathcal{FO}_\Omega)$  и  $\text{Alg}(\Omega)$  рационально эквивалентны. В частности, можно отождествлять свободные  $\mathcal{FO}_\Omega$ -алгебры и свободные  $\Omega$ -алгебры.*

**Доказательство.** Ясно, что задание на алгебре  $A$  структуры  $\Omega$ -алгебры равносильно заданию для всех  $n \geq 0$  отображений  $\Omega_n \rightarrow E_A(n)$ . Но по определению свободной  $WId$ -операды с базисом  $\Omega$  это равносильно тому, что задан гомоморфизм  $W$ -операд  $\mathcal{FO}_\Omega \rightarrow E_A$ . Таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между алгебрами из  $\text{Alg}(\Omega)$  и из  $\text{Alg}(\mathcal{FO}_\Omega)$ . Проверка того, что это изоморфизм категорий с необходимыми свойствами, не представляет затруднений. Утверждение об отождествлении свободных алгебр следует из [18, теорема 1.2.1, с. 27].  $\square$

Последнее утверждение этой леммы будет играть в дальнейшем важную техническую роль. Оно означает, что вместо свободной алгебры  $\text{Fr}_\Omega(X)$  мы всегда можем брать алгебру  $\text{Fr}_{\mathcal{FO}_\Omega}(X)$ , которая, как уже выяснилось в § 2, имеет вид

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{FO}_\Omega(n) \times X^n.$$

Таким образом, каждый элемент  $\text{Fr}_\Omega(X)$  допускает *однозначное* представление в виде  $(w, (x_1, \dots, x_k))$ , где  $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$ . Обозначая  $(x_1, \dots, x_k)$  через  $\bar{x}$ , будем записывать этот элемент в виде  $w\bar{x}$ , опуская скобки и запятые.

Построим теперь свободные операды над произвольными вербальными категориями. Начнем с описания одной общей конструкции. Пусть  $W$  – некоторая вербальная категория,  $R$  – некоторая  $WId$ -операда. Определим семейство  $RW = \{RW(n) | n = 0, 1, 2, \dots\}$  следующим образом:

$$RW(n) = \prod_{m \leq 0} R(m) \times W([m], [n]).$$

Операдная композиция определяется так:

$$(w, f)(w_1, g_1) \dots (w_m, g_m) = (ww_{f(1)} \dots w_{f(k)}, (f^* \alpha)(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})).$$

Здесь  $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ ,  $w_i \in \mathcal{FO}_\Omega(k_i)$ ,  $f \in W([k], [m])$ ,  $g_i \in W([k_i], [n_i])$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ . Структура  $W$ -операды задается равенством

$$(w, f)g = (w, gf).$$

Здесь  $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ ,  $f \in W([k], [n])$ ,  $g \in W([n], [m])$ ,  $gf$  – суперпозиция в  $W \subseteq TSet$ .

Для каждого  $n$  определено отображение  $\eta_n : R(n) \rightarrow RW(n)$ , сопоставляющее элементу  $a \in R(n)$  элемент  $(a, id) \in R(n) \times W([n], [n])$ . Через  $\eta : R \rightarrow RW$  обозначим все семейство отображений  $\eta_n$ .

**Теорема 5.** *Определенное выше семейство  $RW$  является  $W$ -операдой, а семейство  $\eta$  – гомоморфизмом  $WId$ -операд. При этом выполняется следующее универсальное свойство. Для любой  $W$ -операды  $O$  и произвольного гомоморфизма  $WId$ -операд  $\xi : R \rightarrow O$  существует, притом только один, гомоморфизм  $W$ -операд  $\rho : RW \rightarrow O$  такой, что  $\xi = \rho\eta$ .*

**Доказательство.** Проверка свойств операды в значительной степени опирается на доказательство теоремы 3. То, что не следует из этого доказательства, устанавливается легко. Очевидно, что  $\eta$  есть гомоморфизм  $WId$ -операд. Гомоморфизм  $\rho$  строится следующим образом: если  $(w, f) \in R(k) \times W([k], [n]) \subseteq RW(n)$ , то  $\rho_n(w, f) = \xi_k(w)f$ . Проверка того, что  $\rho$  – гомоморфизм  $W$ -операд, опирается на те же тождества, что и в доказательстве теоремы 3. Единственность  $\rho$  очевидна. Универсальное свойство также проверяется без затруднений.  $\square$

**Теорема 6.**

1) Операта  $\mathcal{FO}_\Omega W$  является свободной  $W$ -оператой с базисом  $\Omega$ .

2) Для каждого  $n \geq 0$  отображим  $\mathcal{FO}_\Omega W(n)$  в алгебру  $\text{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$ , сопоставляя элементу  $(w, f)$  слово  $wx_{f(1)} \dots x_{f(k)}$ , где  $w \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ , и  $f: [k] \rightarrow [n]$  – морфизм из  $W$ . Если считать множества  $F(n) = \text{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$  компонентами  $FSet$ -операты  $F$ , построенной в [4] по семейству всех свободных алгебр многообразия  $\text{Alg}(\Omega)$  с конечными базисами  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , и рассмотреть эту операту как  $W$ -операту (что возможно благодаря  $W \subseteq FSet$ ), то описанное выше семейство отображений является инъективным гомоморфизмом  $W$ -операт  $\mathcal{FO}_\Omega W \rightarrow F$ .

**Доказательство.** Свободность  $\mathcal{FO}_\Omega W$  есть формальное следствие универсального свойства  $\mathcal{FO}_\Omega$  в классе  $WId$ -операт и предыдущей теоремы.

Отобразим  $\mathcal{FO}_\Omega W(n)$  в  $F(n) = \text{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$  описанным в пункте 2) способом:

$$(w, f) \mapsto h(w, f) = wx_{f(1)} \dots x_{f(k)} = w(x_{f(1)}, \dots, x_{f(k)}).$$

Инъективность этого отображения очевидна. Остается проверить, что все семейство таких отображений является гомоморфизмом  $W$ -операт. Это осуществляется непосредственной проверкой, использующей явный вид оператной композиции, описанной в [3].  $\square$

В дальнейшем будем обозначать свободную  $W$ -операту  $\mathcal{FO}_\Omega W$  через  $FO_{\Omega, W}$ .

**Теорема 7.** Многообразия  $\text{Alg}(FO_{\Omega, W})$  и  $\text{Alg}(\Omega)$  рационально эквивалентны. В частности, можно отождествлять свободные  $FO_{\Omega, W}$ -алгебры и свободные  $\Omega$ -алгебры.

**Доказательство.** Доказательство почти не отличается от доказательства леммы 4. Операту  $E_A$  можно рассматривать как  $W$ -операту для произвольной вербальной категории  $W$ , и задание структуры  $R$ -алгебры над  $W$ -оператой  $R$  равносильно заданию гомоморфизма  $W$ -операт  $R \rightarrow E_A$ . Если  $R = FO_{\Omega, W}$ , то по определению свободной  $W$ -операты с базисом  $\Omega$  это равносильно тому, что задано отображение  $\Omega_n \rightarrow E_A(n)$  для всех  $n$ . Так устанавливается взаимно-однозначное соответствие между алгебрами из  $\text{Alg}(\Omega)$  и из  $\text{Alg}(FO_{\Omega, W})$ . Легко проверяется, что на самом деле это изоморфизм категорий с необходимыми свойствами. Утверждение об отождествлении свободных алгебр с любыми базисами является следствием факта рациональной эквивалентности [18, теорема 1.2.1, с. 27].  $\square$

Таким образом, свободную  $\Omega$ -алгебру  $\text{Fr}_\Omega(X)$  можно отождествить со свободной  $FO_{\Omega, W}$ -алгеброй с базисом  $X$ , которая устроена следующим образом: это факторалгебра алгебры

$$\coprod_{m \geq 0} FO_{\Omega, W}(m) \times X^m$$

по конгруэнции, порожденной всеми парами  $((rf, x_1 \dots x_m), (r, x_{f(1)} \dots x_{f(k)}))$ . Здесь предполагается, что  $r \in FO_{\Omega, W}(k)$ ,  $f \in W([k], [m])$ . Как уже отмечалось в § 2, из этого построения следует, что  $\text{Fr}_{FO_{\Omega, W}}(X)$  является тензорным произведением функторов  $[n] \mapsto FO_{\Omega, W}(n)$  (контравариантный функтор  $W^{op} \rightarrow \text{Set}$ ) и  $[n] \mapsto X^n$  (ковариантный функтор  $W^{op} \rightarrow \text{Set}$ ).

Кроме того, из отождествления  $\text{Fr}_\Omega(X)$  и  $\text{Fr}_{FO_{\Omega, W}}(X)$  следует, что элементы  $\text{Fr}_\Omega(X)$  можно представлять в виде  $w\bar{x}$  (отождествляя пару  $(w, \bar{x})$  со строкой  $w\bar{x}$ ), где  $w \in FO_{\Omega, W}(m)$ ,  $\bar{x} = x_1 \dots x_m$ , элементы  $x_1, \dots, x_m \in X$  не обязательно различны. Утверждать, что такая запись в случае произвольной категории  $W$  единственна, нельзя, но если  $w = (\omega, f)$ , где  $\omega \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ ,  $f \in W(k, m)$  (такое представление по теореме 5 однозначно), то  $w\bar{x} = \omega(\bar{x}f) = \omega x_{f(1)} \dots x_{f(k)}$ , и последняя форма записи определена однозначно.

### 5. $W$ -тождества

**Теорема 8.** Пусть  $W$ -операда  $R$  изоморфна факторопераде  $FO_{\Omega,W}/V$ , где  $V$  – конгруэнция операды. Если  $X$  – произвольное множество, то

$$\text{Fr}_R(X) \cong \text{Fr}_\Omega(X)/V(X),$$

где  $V(X)$  – вполне инвариантная конгруэнция, которую можно описать как множество пар вида  $(u_1\bar{x}, u_2\bar{x})$ , где  $(u_1, u_2) \in V(k)$  для некоторого  $k$ ,  $\bar{x} = x_1 \dots x_k$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$  (всевозможные комбинации).

**Доказательство.** Условия теоремы означают, что имеет место диаграмма, определяющая  $R$  как коуравнитель:

$$V \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \rightarrow R. \quad (9)$$

Все объекты этой диаграммы являются контравариантными функторами из категории  $W^{op}$  в категорию множеств, а стрелки – естественными преобразованиями. Напомним, что в § 2 был определен ковариантный функтор  $T(X)$  из  $W^{op}$  в категорию множеств, действующий по правилу  $[n] \mapsto X^n$ . Таким образом, мы находимся в ситуации, когда определено тензорное произведение функторов [15], а поскольку тензорное произведение есть функтор, обладающий сопряженным справа функтором (см. [15, теорема 1], [16, Chapter VII, § 2, Theorem 1]), то после тензорного умножения (9) на  $T(X)$  снова получается коуравнитель пары морфизмов. При этом, как уже известно, можно считать, что  $R \otimes T(X) = \text{Fr}_R(X)$ ,  $FO_{\Omega,W} \otimes T(X) = \text{Fr}_\Omega(X)$ . Что касается стрелок  $V \rightrightarrows FO_{\Omega,W}$ , то это суперпозиции вложения  $V \subseteq FO_{\Omega,W} \times FO_{\Omega,W}$  и проекций  $FO_{\Omega,W} \times FO_{\Omega,W} \rightarrow FO_{\Omega,W}$ . После тензорного умножения на  $T(X)$  получаются стрелки  $V \otimes T(X) \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \otimes T(X) \cong \text{Fr}_\Omega(X)$ , что дает отображение  $V \otimes T(X) \rightarrow \text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_\Omega(X)$ . Образ этого отображения обозначим через  $V(X)$ . Легко заметить, что коуравнитель пары стрелок  $V \otimes T(X) \rightrightarrows FO_{\Omega,W} \otimes T(X)$  изоморфен коуравнителю пары стрелок, каждая из которых есть суперпозиция вложения  $V(X) \subseteq \text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_\Omega(X)$  и одной из проекций на сомножители:  $\text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_\Omega(X) \rightarrow \text{Fr}_\Omega(X)$ . Это означает, что  $\text{Fr}_R(X) \cong \text{Fr}_\Omega(X)/V(X)$ .

С другой стороны, вспоминая явный вид тензорного произведения  $T(X)$  на стрелки  $V \rightrightarrows FO_{\Omega,W}$ , а также способ построения изоморфизма  $FO_{\Omega,W} \otimes T(X) = \text{Fr}_{FO_{\Omega,W}}(X) \cong \text{Fr}_\Omega(X)$ , нетрудно убедиться, что  $V(X)$  состоит из всех пар вида  $(u_1\bar{x}, u_2\bar{x})$ , где  $(u_1, u_2) \in I(k)$  для некоторого  $k$ , и  $\bar{x} = x_1 \dots x_k$ , причем  $x_1, \dots, x_k$  пробегают все возможные комбинации элементов из  $X$ .

Покажем, что конгруэнция  $V(X)$  вполне инвариантна. Рассмотрим произвольный гомоморфизм  $\Omega$ -алгебр  $h : \text{Fr}_\Omega(X) \rightarrow \text{Fr}_\Omega(Y)$ , и пусть  $h(x_j) = a_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Элементы  $a_j$  можно представить в виде  $a_j = v_j\bar{x}_j$ , где  $v_j \in FO_{\Omega,W}(n_j)$ ,  $\bar{x}_j = x_{j,1} \dots x_{j,n_j}$ ,  $x_{j,l} \in X$ . Тогда  $h(u_1x_1 \dots x_k) = u_1h(x_1) \dots h(x_k) = (u_1v_1 \dots v_k)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$ . Ясно, что  $(u_1v_1 \dots v_k, u_2v_1 \dots v_k) \in V(n_1 + \dots + n_k)$ , и поэтому  $(h(u_1\bar{x}), h(u_2\bar{x})) \in V(X)$ . Более того, точно так же можно показать, что если  $Y$  – другое множество, которое рассматривается как базис свободной алгебры, и  $h : \text{Fr}_\Omega(X) \rightarrow \text{Fr}_\Omega(Y)$  – некоторый гомоморфизм  $\Omega$ -алгебр, то  $(h \times h)(V(X)) \subseteq V(Y)$ .  $\square$

Рассмотрим подробнее пары вида  $(u_1\bar{x}, u_2\bar{x})$ , где  $u_1, u_2 \in FO_{\Omega,W}(n)$ ,  $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ . Если  $u_i = (w_i, f_i)$ , где  $w_i \in FO_\Omega(m_i)$ ,  $f_i \in W([m_i], [n])$ . Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, каждый элемент  $u_i\bar{x}$  преобразуется к виду  $w_i(\bar{x}f_i) = w_ix_{f_i(1)} \dots x_{f_i(m_i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Определение 3.** Элемент из  $\text{Fr}_\Omega(X)^2$  будет называться  $W$ -парой, если он имеет вид  $(w_1(\bar{x}f_1), w_2(\bar{x}f_2))$ , где  $w_i \in FO_\Omega(m_i)$ ,  $f_i \in W([m_i], [n])$ ,  $i = 1, 2$ ,

$\bar{x} = x_1 \dots x_n$ , и все  $x_1, \dots, x_n \in X$  различны. В случае, если  $W$ -пара – тождество какой-либо алгебры, или какого-то многообразия, будем называть ее  $W$ -тождеством.

**Теорема 9.** *Существует изоморфизм между решеткой конгруэнций свободной  $W$ -операторы  $FO_{\Omega, W}$  и подрешеткой решетки вполне инвариантных конгруэнций свободной  $\Omega$ -алгебры  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$  со счетным базисом  $X$ , состоящей из конгруэнций, порожденных  $W$ -парами.*

**Доказательство.** Искомый изоморфизм – это соответствие  $V \mapsto V(X) = \tilde{V}$ , построенное при доказательстве теоремы 8. Отметим, что  $V(X)$  порождается  $W$ -парами, поскольку любой элемент  $(u_1 \bar{x}, u_2 \bar{x}) \in V(X)$ , где  $(u_1, u_2) \in V(k)$ , и  $\bar{x} = x_{j_1} \dots x_{j_k}$  – произвольная строка из элементов  $X$ , можно считать результатом подстановки в  $W$ -пару  $(u_1 x_1 \dots x_k, u_2 x_1 \dots x_k)$  элементов  $x_{j_i}$  вместо соответствующих  $x_i$ . По определению это и означает, что  $V(X)$  порождается  $W$ -парами как вполне инвариантная конгруэнция.

Обратное соответствие будем строить, предполагая, как и в теореме 6, что компоненты  $FO_{\Omega, W}(k)$  свободной  $W$ -операторы можно считать подмножествами  $\text{Fr}_{\Omega}(x_1, \dots, x_k)$ , которые, в свою очередь, можно считать подалгебрами  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$ , где  $X = \bigcup_{k \geq 0} \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Итак, пусть дана вполне инвариантная конгруэнция  $U \subseteq \text{Fr}_{\Omega}(X) \times \text{Fr}_{\Omega}(X)$ . Рассмотрим множество  $Pw$  всех  $W$ -пар  $(\omega(\bar{x}f), \mu(\bar{x}g)) \in U$ , где в  $\bar{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$  все  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  различны,  $\omega \in FO_{\Omega}(k)$ ,  $\mu \in FO_{\Omega}(l)$ ,  $f \in W([k], [n])$ ,  $g \in W([l], [n])$  для некоторого  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Определим семейство множеств  $V = \tilde{U}$ ,  $V = \{V(n) \mid n = 0, 1, \dots\}$ , полагая  $V(n) = \{((\omega, f), (\mu, g)) \in FO_{\Omega, W}(n)^2 \mid (\omega(\bar{x}f), \mu(\bar{x}g)) \in Pw \text{ для некоторого } \bar{x}\}$ . Покажем, что  $V$  есть конгруэнция в операторе  $FO_{\Omega, W}$ . Во-первых, заметим, что выбор  $\bar{x}$  для пары  $(\omega, \mu)$  произволен, в том смысле, что вместо  $\bar{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$  можно взять любое другое слово  $\bar{x}' = x_{j_1} \dots x_{j_n}$  с условием, что все  $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$  – различные элементы  $X$ . Это следует из инвариантности конгруэнции  $U$ : соответствие  $x_{i_k} \mapsto x_{j_k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , продолжается до эндоморфизма  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$ , а затем до эндоморфизма  $\text{Fr}_{\Omega}(X) \times \text{Fr}_{\Omega}(X)$ , отображающего  $U$  в  $U$ , а пару  $(\omega(\bar{x}f), \mu(\bar{x}g))$  – в пару  $(\omega(\bar{x}'f), \mu(\bar{x}'g))$ . Очевидно, что все  $V(n)$  будут отношениями эквивалентности. Пусть  $((\omega, f), (\mu, g)) \in V(m)$ ,  $((\omega_i, h_i), (\mu_i, t_i)) \in V(n_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Покажем, что  $((\omega \omega_1 \dots \omega_m, f h_1 \dots h_m), (\mu \mu_1 \dots \mu_m, g t_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m)$ . Выберем  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  – слова в алфавите  $X$  так, что  $(\omega_i(\bar{x}_i h_i), \mu_i(\bar{x}_i t_i)) \in Pw$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и в  $\bar{x}_i, \bar{x}_j$  нет общих символов для всех  $i \neq j$ . Это можно сделать ввиду счетности  $X$ . Поскольку  $U$  – подалгебра  $FO_{\Omega, W}$ -алгебры  $\text{Fr}_{\Omega}(X) \times \text{Fr}_{\Omega}(X)$ , то для любого  $(\omega, f) \in FO_{\Omega, W}(m)$  и любых  $(\omega_i \bar{x}_i, \mu_i \bar{x}_i) \in Pw$ ,  $1 \leq i \leq m$ , получим элемент из  $U$ :

$$\begin{aligned} & (\omega f)((\omega_1, h_1)\bar{x}_1, (\mu_1, t_1)\bar{x}_1) \dots ((\omega_m, h_m)\bar{x}_m, (\mu_m, t_m)\bar{x}_m) = \\ & = (((\omega, f)(\omega_1, f_1) \dots (\omega_m, f_m))\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, ((\omega, f)(\mu_1, t_1) \dots (\mu_m, t_m))\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m) = \\ & = ((\omega \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, (f^* \alpha)(h_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup h_{f(k)}))\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, \\ & \quad (\omega \mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, (f^* \beta)(t_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup t_{f(k)}))\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m) = \\ & = ((\omega \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, f h_1 \dots h_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, (\omega \mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, f t_1 \dots t_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m). \end{aligned}$$

Ввиду выбора  $\bar{x}_i$  этот элемент должен принадлежать  $Pw$ . Таким образом,

$$((\omega \omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, f h_1 \dots h_m), (\omega \mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, f t_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Пусть  $\bar{x} = x_{s_1} \dots x_{s_k}$  – слово в алфавите  $X$  такое, что все  $x_{s_j}$  различны и  $\bar{x}$  не имеет общих символов ни с одним из  $\bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Тогда  $((\omega, f)\bar{x}, (\mu, g)\bar{x}) \in Pw \subset U$ . Рассмотрим эндоморфизм  $\text{Fr}_{\Omega}(X)$ , отображающий  $x_{s_j}$  в  $(\mu_j, t_j)\bar{x}_j$ ,

$1 \leq j \leq m$ . Тогда  $((\omega, f)\bar{x}, (\mu, g)\bar{x})$  отображается в элемент  $U$ , имеющий вид

$$\begin{aligned} & (\omega, f)((\mu_1, t_1)\bar{x}_1) \dots ((\mu_m, t_m)\bar{x}_m), (\mu, g)((\mu_1, t_1)\bar{x}_1) \dots ((\mu_m, t_m)\bar{x}_m) = \\ & = ((\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m). \end{aligned}$$

Так как полученный элемент принадлежит  $Pw$ , то имеет место включение

$$((\omega\mu_{f(1)} \dots \mu_{f(k)}, ft_1 \dots t_m), (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Но поскольку  $V(n_1 + \dots + n_m)$  есть отношение эквивалентности, получаем требуемое включение:

$$((\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)}, fh_1 \dots h_m), (\mu\mu_{g(1)} \dots \mu_{g(l)}, gt_1 \dots t_m)) \in V(n_1 + \dots + n_m)$$

Из инвариантности конгруэнции  $U$  следует также, что соответствие  $[n] \rightarrow V(n)$  есть контравариантный функтор из  $W^{op}$  в категорию множеств. Проверим это. Если  $((\omega, f), (\mu, g)) \in V(m)$ , где  $\omega \in \mathcal{FO}_\Omega(k)$ ,  $f \in W([k], [m])$ ,  $\mu \in \mathcal{FO}_\Omega(l)$ ,  $g \in W([l], [m])$ , то для строки  $\bar{x} = x_1 \dots x_m$  элемент

$$((\omega, f)\bar{x}, (\mu, g)\bar{x}) = (\omega x_{f(1)} \dots x_{f(k)}, \mu x_{g(1)} \dots x_{g(k)})$$

принадлежит  $Pw \subset U$ . Если  $h \in W([m], [n])$ , то полагаем  $((\omega, f), (\mu, g))h = ((\omega, hf), (\mu, hg))$ . Элементы  $(\omega, hf)x_1 \dots x_n$  и  $(\mu, hg)x_1 \dots x_n$  суть образы элементов  $(\omega, f)x_1 \dots x_m$  и  $(\mu, g)x_1 \dots x_m$  соответственно при эндоморфизме  $\text{Fr}_\Omega(X)$ , отображающем  $x_j$  в  $x_{h(j)}$ ,  $1 \leq j \leq m$  (остальные иксы отображаются произвольным образом). Следовательно, ввиду полной инвариантности  $U$  пара  $((\omega, hf)x_1 \dots x_n, (\mu, hg)x_1 \dots x_n)$  принадлежит  $U$ . Так как это  $W$ -пара, то по определению  $V$  получаем включение  $((\omega, hf), (\mu, hg)) \in V(n)$ . Поэтому  $V = \widehat{U}$  есть  $W$ -подоперада  $W$ -операды  $FO_{\Omega, W} \times FO_{\Omega, W}$ .

Из построения видно, что соответствие  $U \mapsto \widehat{U} = V$  сохраняет включения и произвольные пересечения.

Покажем взаимную обратность соответствий  $U \mapsto \widehat{U}$  и  $V \rightarrow \widetilde{V}$ . В одну сторону это очевидно:  $W$ -пары из  $\widetilde{V}$  приводят вновь к операде  $V$ . Проверим, что если  $V = \widehat{U}$ , то  $U = \widetilde{V}$ . Очевидно, что  $\widetilde{V} \subseteq U$ . Чтобы показать обратное включение, используем условие, согласно которому  $U$  порождается множеством  $Pw$  как вполне инвариантная конгруэнция. Это, в частности, означает, что  $U \subseteq \text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_\Omega(X)$  есть  $FO_{\Omega, W}$ -подалгебра, порожденная всеми элементами, являющимися результатами подстановок в элементы из  $Pw$  произвольных  $\Omega$ -слов вместо элементов множества  $X$ , причем вместо каждого вхождения в данный элемент  $Pw$  одного и того же  $x \in X$  подставляется одно и то же слово. Ввиду этого произвольный элемент  $(z_1, z_2) \in U$  представляется в виде  $(\omega, f)(p'_1, p''_1) \dots (p'_m, p''_m)$ , где  $\omega \in \mathcal{FO}_\Sigma(k)$ ,  $f \in W([k], [m])$ , а каждая пара  $(p'_i, p''_i)$  получается из некоторого элемента  $Pw$  описанной выше подстановкой. Выполнив эту подстановку, и произведя необходимые преобразования, получаем, что каждый  $(p'_i, p''_i)$  есть элемент  $((q'_i, h'_i)\bar{x}_i, (q''_i, h''_i)\bar{x}_i)$ , где  $((q'_i, h'_i), (q''_i, h''_i)) \in V = \widehat{U}$ . Следовательно, произвольный элемент  $U$  можно записать в виде:

$$(\omega, f)((q'_1, h'_1)\bar{x}_1, (q''_1, h''_1)\bar{x}_1) \dots ((q'_m, h'_m)\bar{x}_m, (q''_m, h''_m)\bar{x}_m) = (t_1, t_2). \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} t_1 &= (\omega q'_{f(1)} \dots q'_{f(m)}, fh'_1 \dots h'_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, \\ t_2 &= (\omega q''_{f(1)} \dots q''_{f(m)}, fh''_1 \dots h''_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m. \end{aligned}$$

Элемент  $(t_1, t_2)$  принадлежит  $V$ . Чтобы убедиться в этом, выберем для каждой пары  $((q'_i, h'_i), (q''_i, h''_i))$  слово  $\bar{y}_i$  в алфавите  $X$  таким образом, что  $((q'_i, h'_i)\bar{y}_i, (q''_i, h''_i)\bar{y}_i) \in Pw$ , причем в  $\bar{y}_i$  и  $\bar{y}_j$  нет общих символов при всех  $i \neq j$ . Поскольку  $U$  является  $FO_{\Omega, W}$ -алгеброй, композиция

$$\begin{aligned} (\omega, f)((q'_1, h'_1)\bar{y}_1, (q''_1, h''_1)\bar{y}_1) \dots ((q'_m, h'_m)\bar{y}_m, (q''_m, h''_m)\bar{y}_m) = \\ = ((\omega q'_{f(1)} \dots q'_{f(m)}, fh'_1 \dots h'_m)\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m, (\omega q''_{f(1)} \dots q''_{f(m)}, fh''_1 \dots h''_m)\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m) \end{aligned}$$

принадлежит  $U$  и, очевидно, принадлежит также и  $Pw$ . Возвращаясь к элементу (10), заключаем, что он принадлежит  $\tilde{V}$ . Таким образом, получено включение  $U \subseteq \tilde{V}$ , откуда следует  $U = \tilde{V} = \tilde{U}$ .

Итак, получено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок, между двумя решетками, причем отображение  $U \mapsto \tilde{U}$  сохраняет произвольные пересечения. Но так как точная верхняя грань элементов  $U_1$  и  $U_2$  в рассматриваемых решетках есть пересечение всех  $U$  таких, что  $U_1, U_2 \subseteq U$ , то имеет место изоморфизм решеток.  $\square$

Пусть  $R$  – некоторая  $W$ -операда. Выберем в ней произвольное семейство образующих  $\Omega$  (предполагая, что  $\Omega \cap R(n) = \Omega_n$ ). Тогда операду  $R$  можно считать фактороперадой свободной операды  $F = FO_{\Omega, W}$  с базисом  $\Omega$  по некоторой конгруэнции  $V$ .

**Теорема 10.** *При сделанных выше предположениях многообразие  $R$ -алгебр  $\text{Alg}(R_W)$  рационально эквивалентно многообразию  $\Omega$ -алгебр, определяемому семейством тождеств вида  $(\omega_1, f_1)\bar{x} = (\omega_2, f_2)\bar{x}$ , где  $((\omega_1, f_1), (\omega_2, f_2)) \in V(n)$  пробегают некоторое семейство образующих конгруэнции  $V$ , а в строке  $\bar{x} = x_1 \dots x_n$  все переменные различны.*

Фактически речь идет о вполне инвариантной конгруэнции  $\tilde{V} = V(X)$  из теорем 8 и 9.

**Доказательство.** Рассмотрим естественную проекцию на факторопераду  $\pi : F \rightarrow R$ , и пусть  $V$  – ее ядро. Иными словами,  $V = \{V(n) | n \geq 0\}$ ,  $V(n) = \{(z_1, z_2) \in F(n) \times F(n) | \pi_n(z_1) = \pi_n(z_2)\}$  для всех  $n$ . Эта проекция индуцирует вполне унитарный функтор  $\text{Alg}(R_W) \rightarrow \text{Alg}(F_W)$ , причем многообразие  $\text{Alg}(F_W)$  можно отождествить с  $\text{Alg}(\Omega)$ . Действие функтора можно описать следующим образом. Структура  $R_W$ -алгебры на  $A$  определяется гомоморфизмом  $W$ -операд  $R \rightarrow E_A$ , а структура соответствующей  $F$ -алгебры задается суперпозицией этого гомоморфизма с гомоморфизмом  $\pi$ . Ввиду того, что  $\Omega$  – это базис  $F$ , такой гомоморфизм операд  $F \rightarrow E_A$  однозначно определяется отображением  $\Omega \rightarrow E_A$  (а точнее, семейством отображений  $\Omega_n \rightarrow E_A(n)$  для всех  $n$ ). Образом этого функтора и является то многообразие, для которого нужно доказать, что оно определяется тождествами из  $\tilde{V}$ .

Пусть  $A$  – некоторая  $\Omega$ -алгебра и  $\Theta_A(X) \subseteq \text{Fr}_\Omega(X) \times \text{Fr}_\Omega(X)$  – соответствующая ей вполне инвариантная конгруэнция. Предположим, что  $X$  счетно. Тогда ядром соответствующего структуре  $A$  гомоморфизма  $F \rightarrow E_A$  будет (в обозначениях доказательства теоремы 9) конгруэнция  $\widehat{\Theta_A(X)}$ . Алгебра  $A$  будет принадлежать многообразию  $\text{Alg}(R)$  (вложенному в  $\text{Alg}(\Omega)$  описанным выше образом) тогда и только тогда, если  $V \subseteq \widehat{\Theta_A(X)}$ .

Завершим доказательство следующим образом. Пусть  $M$  – многообразие  $\Omega$ -алгебр, определяемое вполне инвариантной конгруэнцией  $\tilde{V}$ . В обозначениях § 2 будем иметь

$$\Theta_M(X) = \tilde{V} = \bigcap_{A \in M} \Theta_A(X),$$

откуда согласно теореме 9

$$V = \widehat{\Theta_M(X)} = \bigcap_{A \in M} \widehat{\Theta_A(X)}.$$

Поэтому

$$A \in \text{Alg}_Z(R) \iff V \subseteq \widehat{\Theta_A(X)} \iff A \in M.$$

□

**Теорема 11.** *Если  $R$  есть  $W$ -операда, то многообразие  $\text{Alg}(R_W)$  определяется  $W$ -тождествами.*

**Доказательство.** Эта теорема непосредственно следует из предыдущей теоремы. Если представить  $R$  в виде  $FO_{\Omega, W}/V$ , то  $\text{Fr}_R(X) \cong \text{Fr}_{\Omega}(X)/V(X)$ . Если  $X$  – счетное множество, то многообразие  $\text{Alg}(R)$  определяется тождествами из  $V(X)$ , а эта конгруэнция порождается  $W$ -парами. □

**Теорема 12.** *Если многообразие  $\Omega$ -алгебр  $M$  определяется  $W$ -тождествами, то оно рационально эквивалентно многообразию вида  $\text{Alg}(R_W)$ , где  $R$  есть  $W$ -операда.*

**Доказательство.** Напомним, что  $M$  полностью определяется своей свободной алгеброй  $\text{Fr}_M(X)$  со счетным базисом  $X$ . Поскольку это алгебра из  $\text{Alg}(\Omega)$ , ее можно представить в виде  $\text{Fr}_{\Omega}(X)/J$ , где  $J$  – вполне инвариантная конгруэнция. По условию эта конгруэнция порождается  $W$ -тождествами, а значит, по теореме 9 она имеет вид  $V(X)$ , где  $V$  есть конгруэнция в свободной  $W$ -операде  $FO_{\Omega, W}$ . Рассмотрим  $W$ -операду  $R = FO_{\Omega, W}/V$ . Вычисляя свободную алгебру  $\text{Fr}_R(X)$  многообразия  $\text{Alg}(R_W)$  точно так же, как это сделано при доказательстве теоремы 8, получаем  $\text{Fr}_R(X) \cong \text{Fr}_{\Omega}(X)/V(X)$ . Таким образом,  $\text{Fr}_R(X) \cong \text{Fr}_M(X)$  как  $\Omega$ -алгебры. Но согласно теореме 1.2.1 из [18] отсюда следует рациональная эквивалентность  $M$  и  $\text{Alg}(R)$ . □

**Замечание 3.** Полагая  $W = FSet$ , видим, что  $FSet$ -тождества – это все возможные тождества в универсальных алгебрах. Таким образом, любое многообразие универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию вида  $\text{Alg}(R_{FSet})$ , где  $R$  – некоторая  $FSet$ -операда. Ранее этот результат был установлен в многосортном случае в [4]. Как уже отмечалось во введении, многосортные аналоги результатов § 5 также справедливы. В случае  $W = \Sigma$  результаты данного параграфа эквивалентны результатам работы [2] для случая  $Z$ -алгебр, где  $Z$  – тривиальная коммутативная операда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00431а) и гранта для поддержки ведущих научных школ НШ-5383.2012.1.

### Summary

*S.N. Tronin.* Verbal Categories and Identities of Universal Algebras.

We give a characterization of varieties of universal algebras which are rationally equivalent to varieties of algebras over operads over arbitrary verbal categories.

**Key words:** verbal category, operad, variety of algebras, rational equivalence, free algebra, free operad.



## Литература

1. *Тронин С.Н.* О характеристике многообразий алгебр над  $W$ -операдами // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Моск. гос. ун-та и 75-летию каф. высш. алгебры: Тез. докл. – М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. – С. 127–128.
2. *Тронин С.Н.* Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 670–694.
3. *Тронин С.Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 924–936.
4. *Тронин С.Н.* Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 1185–1202.
5. *Тронин С.Н.* Естественные мультипреобразования мультифункторов // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 11. – С. 58–71.
6. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах – М.: Мир, 1977. – 408 с.
7. *Мэй Дж.П.* Геометрия итерированных пространств петель // Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. – М.: Мир, 1977. – С. 267–403.
8. *Смирнов В.А.* Операдные и симплицальные методы в алгебраической топологии. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 272 с.
9. *Leinster T.* Higher Operads, Higher Categories. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 448 p.
10. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology and Physics. – Amer. Math. Soc., 2002. – 350 p.
11. *Markl M.* Operads and PROPs // Handbook of Algebra. V. 5. – Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 2008. – P. 87–140.
12. *Loday J.-L., Valette B.* Algebraic Operads. – 2010. – XVIII+512 p. – URL: <http://math.unice.fr/~brunov/Operads.pdf>.
13. *Тронин С.Н., Гареева Л.Д.* О некоторых операдах, связанных с операдой симметрических групп. I // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 9. – С. 61–72.
14. *Джонстон П.* Теория топосов. – М.: Наука, 1986. – 440 с.
15. *Кацов Е.Б.* Тензорное произведение функторов // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19, № 2. – С. 318–327.
16. *MacLane S., Moerdijk I.* Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. – N. Y.: Springer, 1992. – 620 p.
17. *Мальцев А.И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 120, № 1. – С. 29–32.
18. *Пинус А.Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 239 с.

Поступила в редакцию  
27.01.12

---

**Тронин Сергей Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: [Serge.Tronin@ksu.ru](mailto:Serge.Tronin@ksu.ru)