Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения
по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров

Набережные Челны
2023

Математический анализ. *Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2023, 68 с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

Учебно-методические пособие включает в себя разделы математики: введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной.

В учебно-методическом пособии изложены цель и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену (зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы. Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: теоретические основы введения в математический анализ и дифференциального исчисления функции одной переменной;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами введения в математический анализ и дифференциального исчисления функции одной переменной; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка основной и дополнительной литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ, зачётов и экзаменов.

2. Содержание дисциплины.

Раздел. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Тема. Множества. Числовые множества. Функция.

Множества и операции над ними. Счётные и несчётные множества. Множества чисел. Действительные числа, модуль числа и его свойства. Числовые промежутки. Окрестность точки. Понятие функции. Способы задания функции. График функции. Основные элементы поведения функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Обратная и сложная функции. Элементарные функции, их классификация.

Тема. Числовая последовательность. Предел последовательности. Предел функции.

Понятие числовой последовательности. Предел последовательности, его геометрический смысл. Бесконечно малые и большие последовательности. Монотонная последовательность, признак её сходимости. Число e.

Определения предела функции при $x \to x_0$, при $x \to \infty$. Геометрический смысл предела. Односторонние пределы. Бесконечно большие и малые функции, их свойства. Неопределённые выражения. Основные теоремы о пределах функций. Предельный переход в неравенствах. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства и применение при вычислении пределов.

Тема. Непрерывность функции. Точки разрыва.

Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Раздел. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной.

Приращение функции. Определение производной, её геометрический смысл. Понятие дифференцируемости функции в точке. Связь между дифференцируемостью, существованием конечной производной и непрерывностью функции. Дифференциал функции. Простейшие правила дифференцирования (постоянной; суммы, разности, произведения и частного функций). Дифференцирование обратной и сложной функции. Логарифмическая производная. Производная степенно-показательной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функции, заданной неявно и параметрически. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Уравнения касательной и нормали.

Тема. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, их следствия. Правило Лопиталя, его применение для раскрытия неопределённостей. Формулы Тейлора и Маклорена, их применение в приближённых вычислениях. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций.

Тема. Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков монотонности функции. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

3. Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2.
2. Задачник по высшей математике для вузов [Текст] : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова .- 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Учебник для вузов. –М.: Айрис-пресс, 2009. -608с.
4. Шипачёв В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Шипачёв. – Москва: ИНФРА-М, 2018. -479 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=945790.

Дополнительная литература:

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. –СПб.:Изд-во «Лань», 2013. -112с. ISBN: 978-5-8114-1413-0.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть I: -М: Высшая школа, 2008. -304с.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: учеб. пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2009. -688с. ISBN: 978-5-8114-0572-5.
4. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)
5. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.С. Шипачёв. –10-е изд., стереотип. - Москва: ИНФРА-М, 2018. -304 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=927763.

4. Методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить индивидуальную контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5)*.

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

Раздел. Введение в математический анализ.

1 – 10. Для указанной функции $y = f(x)$ найти естественную область определения функции (ответ записать в виде промежутка числовой прямой или их объединения).

1. $y = \sqrt{3-x} + arc\sin(3-2x)$

2. $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\lg(1-x)}$

3. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

5. $y = \arccos(x-3) + \lg(4-x)$

6. $y = \sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}$

7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x}}$

8. $y = \lg(x^2 + 2x - 8)$

9. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x-2} - \lg(3-2x)$

10. $y = 2^{1/x} + \arcsin\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$

11 – 20. Для указанной функции $y = f(x)$ установить чётность (нечётность) функции в её естественной области определения.

11. $y = 2x \cdot \sin^2 x - 3x^3$

12. $y = \dfrac{\sin 2x}{x^2}$

13. $y = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

14. $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

15. $y = x \cdot \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

16. $y = \dfrac{\sin 3x}{2 - \cos 4x}$

17. $y = |x+1| - |x-1|$ **18.** $y = \sin^2 x + \cos^3 x$ **19.** $y = \dfrac{x}{1-x}$

20. $y = \dfrac{arctgx}{x^2+1}$

21-30. Вычислить (не пользуясь правилом Лопиталя) пределы алгебраических выражений:

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2+5x+3}{\sqrt{x+2}-1}$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4}{x^4+3x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x+1)(x+2)}{x^3+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{6x+4}-4}$

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+6x+5}{3x^2+7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{x^2-9x+14}{\sqrt{2x+11}-5}$

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{3x^4+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+6}{3x^3+7x-1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+6x^2+3x}{20x^2+70}$ **б)** $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{2x^2-11x+5}{\sqrt{2x-1}-3}$

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{\sqrt{2x-8}-2}{x^2-7x+6}$

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x^2}{3x^2+5x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{2x-10}{\sqrt{5x}-5}$

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-5x^2}{2x^2+3x+3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$

31-40. Вычислить:
а) предел тригонометрического выражения, используя первый замечательный предел и его следствия;

б) предел степенно-показательного выражения, используя второй замечательный предел;
в) предел выражения, содержащего факториалы.

31. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{3x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$

32. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{2x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-9}\right)^{2x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{n!-(n+3)!}$

33. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 3x}{tg 2x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n-1)!+2\cdot(n+1)!}$

34. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg 5x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-1}\right)^{2x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+2\cdot(n-1)!}{(n+1)!}$

35. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{arctg^2 2x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$

36. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 6x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+7}\right)^{x-4}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$

37. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+6}\right)^{4x-1}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot n!+(n+1)!}{3\cdot(n+1)!}$

38. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos 4x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+n!}{2\cdot n!}$

39. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 4x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x+8}\right)^{5x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(n-1)!+n!}{(n+1)!}$

40. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg 4x}{\cos 2x-\cos 4x}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x-2}\right)^{2x}$ **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(n+1)!}{n!+(n+1)!}$

41-50. Для указанной функции $y=f(x)$:
а) найти все точки разрыва элементарной функции и установить характер разрыва;
б) выяснить, при каких значениях параметра a, функция будет непрерывной в её естественной области определения.

41. а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ **б)** $y=\begin{cases}x^2+2x-a, & x<0\\ \cos x, & x\ge 0\end{cases}$

42. а) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ **б)** $y=\begin{cases} a-x, & x<4 \\ \sqrt{x}, & x\ge 4 \end{cases}$

43. а) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$ **б)** $y=\begin{cases} ax-2, & x<1 \\ \ln x, & x\ge 1 \end{cases}$

44. а) $y=\dfrac{4x^2}{x+3}$ **б)** $y=\begin{cases} e^{x} & x\le 0 \\ 3x+a & x>0 \end{cases}$

45. а) $y=\dfrac{12x}{x^2-9}$ **б)** $y=\begin{cases} x-2, & x<1 \\ ax^2-2, & x\ge 1 \end{cases}$

46. а) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ **б)** $y=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \sqrt{x+a}, & x\ge 1 \end{cases}$

47. а) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$ **б)** $y=\begin{cases} 2/x, & x<-1 \\ x-a, & x\ge -1 \end{cases}$

48. а) $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ **б)** $y=\begin{cases} x^3+a, & x<0 \\ arctg\, x, & x\ge 0 \end{cases}$

49. а) $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ **б)** $y=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ 3x-a, & x\ge 0 \end{cases}$

50. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ **б)** $y=\begin{cases} (x-1)\cdot(x-a), & x<0 \\ 2x+1, & x\ge 0 \end{cases}$

51-60. Для указанной функции $y=f(x)$ найти все точки разрыва и установить характер разрыва**.** Построить график функции**.**

51. $y=\begin{cases} 1/x & x\le 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$ **52.** $y=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 1-x & 0\le x\le 2 \\ 2 & x>2 \end{cases}$ **53.** $y=\begin{cases} 1/x & x<0 \\ x & 0\le x\le 2 \\ 3 & x>2 \end{cases}$

54. $y=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 1/x & x\ge 1 \end{cases}$ **55.** $y=\begin{cases} 1/x & x<0 \\ -\sqrt{x} & 0\le x\le 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$ **56.** $y=\begin{cases} 1/x & x<1 \\ \ln x & x\ge 1 \end{cases}$

57. $y = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ **58.** $y = \begin{cases} x + 2 & x \leq -2 \\ 2 - x & -2 < x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ **59.** $y = \begin{cases} 1/x & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$

60. $y = \begin{cases} 2x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

Раздел. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

61-70. Найти производную $y' = f'(x)$ функций, заданных явно, используя арифметические правила нахождения производной.

61 а) $y = 3x^2 + \dfrac{2}{x^3} - \sqrt{2}$ **б)** $y = \dfrac{x^3}{4 + x^2}$

62 а) $y = 2x^3 + \sqrt[3]{x} - \ln 3$ **б)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

63 а) $y = 2x^4 + \sqrt[3]{x^2} - \sin 2$ **б)** $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$

64 а) $y = x^2 - \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2}$ **б)** $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$

65 а) $y = \dfrac{4}{x} - x^3 - 2\cos 2$ **б)** $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$

66 а) $y = \dfrac{4}{x^2} - 3x^2 - 6e^2$ **б)** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

67 а) $y = 4x^4 + \sqrt[3]{x^2} - \ln 3$ **б)** $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$

6.8 а) $y = 3x^5 - \sqrt[3]{x^4} + \sin 4$ **б)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

69 а) $y = 2x^4 + \dfrac{4}{x^5} - \sqrt{3}$ **б)** $y = \dfrac{x^2}{2x^3 + 1}$

70 а) $y = 3x^2 + 4\sqrt[3]{x^2} - \ln 9$ **б)** $y = \dfrac{x^2}{3x + 4}$

71-80. Найти производную $y' = f'(x)$ функций, заданных явно, используя правило нахождения производной сложной функции:

71. а) $y=\sqrt[3]{x^2+4x+5}$ **б)** $y=\dfrac{arctg^3 4x}{\ln(6x-1)}$

72. а) $y=(2x-1)\cdot e^{-3x}$ **б)** $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\ln(5x-1)}$

73. а) $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{3+4x^2}}$ **б)** $y=ctg3x\cdot\cos^4 7x$

74. а) $y=x^2\cdot\sqrt{16-4x}$ **б)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\sin 4x+1}$

75. а) $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt[4]{3x+5}}$ **б)** $y=(\cos 4x+2)\cdot\sin 3x$

76. а) $y=x^2\cdot\ln(3x+1)$ **б)** $y=\dfrac{e^{-2x}+3}{x^3-4x+1}$

77. а) $y=(2x+1)^3\cdot arctg4x$ **б)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\ln(5x+1)}$

78. а) $y=\dfrac{\sqrt{4x-2}}{2x+3}$ **б)** $y=e^{-3x^2}\cdot(3x-2)$

79. а) $y=e^{-4x}\cdot\ln(2x-4)$ **б)** $y=\dfrac{\sin^3 4x}{\sqrt[4]{5x-1}}$

80. а) $y=3\sin^2 4x\cdot tg3x$ **б)** $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt[3]{arctg2x}}$

81-90. Найти производную функции, заданной параметрически.

81. $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x=tg3t \\ y=ctg3t \end{cases}$ **83.** $\begin{cases} x=\dfrac{2t-1}{t} \\ y=\sqrt{t^3} \end{cases}$

84. $\begin{cases} x=\ln^2 4t \\ y=\sqrt{\ln t} \end{cases}$ **85.** $\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=ctg3t \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} x=tg^2 t \\ y=\sin 2t \end{cases}$

87. $\begin{cases} x=tg4t \\ y=ctg2t \end{cases}$ **88.** $\begin{cases} x=3\sin 2t \\ y=\cos 4t \end{cases}$ **89.** $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=arctg2t \end{cases}$

90. $\begin{cases} x = \ln 5t \\ y = \lg 3t \end{cases}$

91-100. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

91. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{1/x^2})$

92. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ctgx-1}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(e^{2/x}-e^{1/x})$

93. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to +0}(tgx\cdot\ln\sin x)$

94. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

95. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\sin x}}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg8x$

96. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+5x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{x^2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$

97. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

98. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to +0}\left(tgx\cdot\ln\dfrac{1}{x}\right)$

99. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

100. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)\cdot\ln(1-x)$

101-110. Для указанной функции $y = f(x)$ требуется:

а) составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке x_0;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$;

в) найти локальные экстремумы, интервалы возрастания и убывания функции.

101. а) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x_0=1$ **б)** $y=x^3-3x^2+4$, $[0,4]$ **в)** $y=\ln(4-x^2)$

102. а) $y=x-x^3$, $x_0=-1$ **б)** $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, $[1,4]$ **в)** $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

103. а) $y=2x^2+3x-1$, $x_0=-2$ **б)** $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1,4]$ **в)** $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

104. а) $y=x+\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$ **б)** $y=2\sqrt{x}-x$, $[0,4]$ **в)** $y=arctg(x^2)$

105. а) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$, $x_0=0$ **б)** $y=x^3-3x^2+6$, $[1,4]$ **в)** $y=x\sqrt{x+3}$

106. а) $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=1$ **б)** $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$, $[0,2]$ **в)** $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$

107. а) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$ **б)** $y=x^3-6x^2+6$, $[2,4]$ **в)** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

108. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2}$, $x_0=2$ **б)** $y=x^3-3x^2+5$, $[1,3]$ **в)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

109. а) $y=\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=1$ **б)** $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $[-1,2]$ **в)** $y=\dfrac{\ln x}{x}$

110. а) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x_0=1$ **б)** $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$, $[-1,1]$ **в)** $y=\ln(x^2+2x+2)$

111-120. Для указанной непериодической функции $y=f(x)$ провести её полное исследование: **1)** найти естественную область определения; **2)** найти точки разрыва и установить характер разрыва; **3)** исследовать функцию на чётность (нечётность); **4)** найти точки пересечения графика функции с осями координат; **5)** найти асимптоты графика функции; **6)** найти интервалы возрастания, убывания, локальные экстремумы функции; **7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции. Построить график функции.

111 а) $y=2x^3-9x^2+12x-9$ **б)** $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$

112 а) $y=x^3+6x^2-15x+8$ **б)** $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

113 а) $y = 2 - 3x^2 - x^3$ **б)** $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$

114 а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$ **б)** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

115 а) $y = (x-1)^2(x-3)^2$ **б)** $y = \dfrac{4(x-12)}{(x-2)^2}$

116 а) $y = 6x - 8x^3$ **б)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

117 а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ **б)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

118 а) $y = (x-1)^2(x+1)^2$ **б)** $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 1}$

119 а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ **б)** $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

120 а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ **б)** $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

Раздел. Введение в математический анализ.

1. Понятие множества. Подмножество. Универсальное множество. Способы задания множеств. Равенство и эквивалентность множеств.
2. Пересечение, объединение и разность множеств. Дополнение множества. Диаграммы Эйлера-Венна.
3. Множества чисел. Счётные и несчётные множества. Множество действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства.
4. Модуль действительного числа и его свойства.
5. Числовые множества. Верхняя и нижняя грани, наибольший и наименьший элементы числовых множеств. Числовые промежутки. Окрестность конечной точки и бесконечности.
6. Понятие функции. Основные способы задания функции. Естественная область определения функции. Явная, неявная и параметрическая формы аналитического задания функции. График функции.
7. Основные элементы поведения функции (чётность, нечётность, периодичность, ограниченность, монотонность).
8. Основные элементарные функции (степенные: x, x^2, x^3, x^{-1}, $\sqrt{x}$; тригонометрические: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$; обратные тригонометрические: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$; показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$), их свойства и графики.
9. Понятие обратной и сложной функций. Элементарные функции, их классификация. Преобразование графиков элементарных функций.
10. Простейшие элементарные функции: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = (ax+b)/(cx+d)$, их свойства и графики.
11. Понятие числовой последовательности, арифметические операции над ними. Ограниченные и неограниченные, числовые монотонные последовательности.
12. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства, взаимосвязь, примеры.
13. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
14. Фундаментальная числовая последовательность. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
15. Монотонная последовательность и признак её сходимости. Число e.

16. Понятие предела функции в конечной точке и на бесконечности, их геометрический смысл. Односторонние пределы. Условия существования предела функции в конечной точке.
17. Бесконечно малые и большие функции, их основные свойства и взаимосвязь. Примеры бесконечно малых и больших функций.
18. Функции, ограниченные при $x \to a$. Взаимосвязь между функциями, имеющими предел и ограниченными при $x \to a$.
19. Основные теоремы о пределах функций (о пределе постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций; о пределе сложной и элементарной функций). Предельный переход в неравенствах.
20. Первый и второй замечательные пределы, их следствия и применение при вычислении пределов.
21. Эквивалентные бесконечно малые функции, их основные свойства и применение при вычислении пределов.
22. Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Условия непрерывности функции в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями.
23. Непрерывность элементарных функций. Условие существования непрерывной обратной функции.
24. Понятие непрерывности на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке (об ограниченности функции, об обращении функции в нуль, о наибольшем и наименьшем значениях функции).
25. Точки разрыва функции, их классификация и нахождение.

Раздел. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

26. Приращение функции. Определение производной. Правая и левая производные. Условия существования конечной производной в точке. Понятие дифференцируемости функции в точке.
27. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой в данной точке, их уравнения.
28. Непосредственное нахождение производной. Простейшие правила дифференцирования (постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций).
29. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование сложной функции.
30. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
31. Логарифмическая производная, её применение для нахождения производной степенно-показательной функции.
32. Дифференциал функции. Правила нахождения дифференциалов. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.
33. Производные и дифференциалы высших порядков, их нахождение.

34. Теорема Ферма. Геометрический смысл теоремы.
35. Теорема Ролля. Геометрический смысл теоремы.
36. Теорема Лагранжа. Геометрический смысл теоремы. Формула конечных приращений Лагранжа.
37. Теорема Коши.
38. Формулы Тейлора и Маклорена, их применение в приближённых вычислениях.
39. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределённостей: $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.
40. Достаточный признак монотонности функции. Стационарные и критические точки. Нахождение интервалов монотонности функции.
41. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции.
42. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) функции на отрезке, их нахождение.
43. Понятия выпуклости и вогнутости функции. Достаточный признак выпуклости (вогнутости) функции на интервале. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции.
44. Точка перегиба графика функции, условия её существования и нахождение.
45. Понятие асимптоты графика функции. Вертикальные и наклонные асимптоты, условия их существования и нахождение.

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

Раздел. Введение в математический анализ.

1-10. Найти естественную область определения функции $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ (ответ записать в виде промежутка числовой прямой или их объединения).

Решение.

1) Сначала естественную область определения находим как множество $D(y)$ всех значений аргумента x функции, для которых формула $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ имеет смысл: $D(y) = \left\{ x \in R \,\middle|\, \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases} \right\}$.

2) Затем, решаем (на числовой прямой) систему ограничений $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases}$ и устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является промежуток $[0, 2/3)$.

Ответ: $D(y) = [0, 2/3)$.

11-20. Установить чётность (нечётность) функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ в её естественной области определения.

Решение.

1) Сначала находим естественную область определения функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$**:** $D(y) = \{x \in R \mid x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0\}$. Решив (на числовой прямой) неравенство $x^4 - 13x^2 + 36 = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3) \geq 0$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является объединение промежутков $(-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, +\infty)$.

2) Проверяем симметричность области $D(y)$ относительно точки $x = 0$, т.е. выполнение условия $\forall x \in D(y) \Rightarrow (-x) \in D(y)$**.** Область $D(y)$ обладает симметрией относительно точки $x = 0$.

Если область $D(y)$ не симметрична относительно точки $x = 0$, то $f(x)$ на этом множестве является ни чётной, ни нечётной функцией (функцией общего вида).

3) Проверяем выполнение для всех $x \in D(y)$ условий: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, учитывая чётность и нечётность основных элементарных функций, входящих в аналитическое выражение $f(x)$.

Для этого находим $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 13(-x)^2 + 36} = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$. Поскольку $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(y) = (-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, +\infty)$, то функция $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ является чётной.

Ответ: Функция $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ - чётная**.**

21-30. Вычислить (не пользуясь правилом Лопиталя) пределы алгебраических выражений: **а)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 12x + 1}{x^2 + 2}$ **б)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 6}}{x^2 - x - 6}$ **.**

Вычисление предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$*, где* $a = x_0, \infty$*, начинают всегда с подстановки в* $f(x)$ *предельного значения её аргумента* x*. В результате могут получиться неопределённости* $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. *Неопределённости раскрывают тождественными преобразованиями* $f(x)$ *такими, чтобы преобразованное выражение получилось определённым. При вычислении пределов используют свойства конечных пределов и бесконечно малых и бесконечно больших функций, а также следующие известные пределы:*

$$\lim_{x \to \infty}\left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\right) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} n! = \infty \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n), \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \left(1 + \alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)} = e.$$

Решение. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 12x + 1}{x^2 + 2} = ?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения ∞ получим неопределённость $\left[\infty/\infty\right]$. Для её раскрытия сначала разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 (старшую степень переменной x в числителе и знаменателе), после чего используем свойства конечных пределов и бесконечно больших функций. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0+0}{0+0}=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения $x_0=-2$ получим неопределённость $[0/0]$. Для её раскрытия выделим в числителе и знаменателе дроби общий множитель вида $(x-x_0)^{\alpha}$, где $\alpha\in R$ - некоторое число, т.е. множитель $(x+2)^{\alpha}$. Затем сократим на него числитель и знаменатель дроби, после чего используем свойства пределов.

***1)** В квадратном трёхчлене ax^2+bx+c множитель выделяют разложением квадратного трёхчлена по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

***2)** В выражении $(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})$ множитель выделяют следующим способом:* $\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}=$

$$=\frac{(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})(\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d})}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}=\left(x-\frac{d-b}{a-c}\right)\frac{(a-c)}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}.$$

В результате получим $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$\left[\begin{array}{c}\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}=\dfrac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}=(x+2)\dfrac{(-2)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}\\ \\ x^2-x-6=(x+2)(x-3)\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(-2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{10}.$$

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\infty$ **; б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{10}$ **.**

31-40. Вычислить:

а) предел тригонометрического выражения $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}$, используя первый замечательный предел и его следствия;

б) предел степенно-показательного выражения $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$, используя второй замечательный предел;

в) предел выражения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}$, содержащего факториалы.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения 0 получим неопределённость $[0/0]$. Выделим в числителе множители вида $\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$ и используем свойства пределов. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}-\sin 3x}{6x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x(1-\cos 3x)}{6x^3\cos 3x}=$$

Для раскрытия неопределённостей $[0/0]$*, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, в числителе и знаменателе дроби выделяют сначала множители вида:* $\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}$, $\dfrac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}$*, где* $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$*, используя формулы тригонометрии:* $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\big((\alpha\pm\beta)/2\big)\cos\big((\alpha\mp\beta)/2\big)$, $1-\cos\alpha=2\sin^2(\alpha/2)$, $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\big((\alpha+\beta)/2\big)\cdot\sin\big((\alpha-\beta)/2\big)$. *После* *чего применяют свойства пределов, учитывая, что:* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}} \dfrac{tg\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}} \dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}} \dfrac{arctg\alpha}{\alpha}=1$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{6x^3\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3x\cdot 2\left(\frac{\sin(3x/2)}{(3x/2)}\right)^2\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{6x^3\cos 3x}=$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot\left(\frac{\sin(3x/2)}{(3x/2)}\right)^2}{\cos 3x}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1\cdot 1}{1}=\frac{9}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения ∞ получим неопределённость $\left[1^\infty\right]$.

Для раскрытия неопределённости $\left[1^\infty\right]$*, возникающей при вычислении предела* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$*, где* $f(x)=u(x)^{v(x)}$, $u(x)>0$*, сначала выражение* $f(x)$ *представляют в виде* $f(x)=\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}$*, где* $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$*. После чего используют свойства пределов, заменяя выражение* $(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}$ *его предельным значением* e *и учитывая, что*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha\to 0}}\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}=\lim_{x\to a} e^{\beta(x)}=\begin{cases}0, \text{ если} & \beta(x)\to -\infty\\ +\infty, \text{ если} & \beta(x)\to +\infty\\ e^b, \text{ если} & \beta(x)\to b\end{cases}.$$

Представим $\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$ в виде $\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\beta(x)}$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$, следующим способом: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x+2}{3x-1}=1+\alpha(x)\Rightarrow\alpha(x)=\dfrac{3x+2}{3x-1}-1=\dfrac{3}{3x-1}\\ 2x=\dfrac{1}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot 2x\Rightarrow\beta(x)=2x\alpha(x)=\dfrac{6x}{3x-1}\end{array}\right]$

$$\Rightarrow\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{6x}{3x-1}}.$$

Тогда учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{3x-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{6}{3-0}=2$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{6x}{3x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x}{3x-1}}=e^{2}.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}=?$

Для вычисления предела $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$*, где* $f(n)$ *представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой содержат факториалы натурального числа* n*, поступают следующим образом. Выделяют в числителе и знаменателе в качестве общего множителя факториал меньшего натурального числа и сокращают на него:* $(n+k)!=n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)\cdot(n+k)$. *В результате получают выражение, предел которого находят рассмотренными выше способами.*

Для вычисления данного предела сначала выразим $(n+1)!$, $(n+2)!$, $(n+3)!$ через $n!$: $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$, $(n+2)!=n!\cdot(n+1)(n+2)$, $(n+3)!=n!\cdot(n+1)(n+2)(n+3)$, после чего сократим числитель и знаменатель на $n!$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)(n+2)(n+3)+n!(n+1)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(1-(n+1)(n+2))}{n!(n+1)((n+2)(n+3)+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

В результате получили неопределённость $[\infty/\infty]$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7}$ на n^3 (старшую степень переменной n числителя и знаменателя), после чего используем свойства пределов. Получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2-3n-1}{n^3+6n^2+12n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{7}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-0-0-0}{1+0+0+0}=0.$$

Ответ:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x-\sin 3x}{6x^3}=\frac{9}{4}$ **; б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}=e^2$ **; в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}=0$ **.**

41-50. Требуется:

а) найти все точки разрыва элементарной функции $y=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3$ и установить характер разрыва;

б) выяснить, при каких значениях параметра a, функция $y=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}$ будет непрерывной в её естественной области определения.

Решение.

1а) Находим естественную область определения функции $D(y)=\{x\in R \mid x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2а) По области определения находим все точки разрыва функции – точки $x_i\notin D(y)$, но являющиеся конечными концевыми точками промежутков, составляющих $D(y)$ (являющиеся предельными точками $D(y)$, не принадлежащими $D(y)$, но в окрестности которых содержатся точки из $D(y)$). Это точка $x_1=0$.

3а) Устанавливаем характер разрыва в точке $x_1 = 0$. Для этого сначала вычисляем односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3 = +\infty$. Затем делаем вывод: точка $x_1 = 0$ является точкой бесконечного разрыва данной функции (точкой разрыва 2-го рода).

Точками разрыва функции $y = f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \le x_1 \\ \varphi_2(x), & x_1 < x \le x_2 \\ \dots & \dots \\ \varphi_m(x), & x > x_{m-1} \end{cases}$ *, заданной несколькими аналитическими выражениями, являются точки разрыва элементарных функций* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ *в промежутках* $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, +\infty)$*, кроме того, точками возможного разрыва функции* $y = f(x)$ *являются точки* $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ *в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями.*

Точка $x = x_0$ *является точкой непрерывности функции* $y = f(x)$ *тогда и только тогда, когда:* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

1б) Находим естественную область определения функции $D(y) = \{x \in R\} = (-\infty, +\infty)$.

2б) Находим точки возможного разрыва функции. Это точка $x_1 = 1$, в окрестности которой функция задаётся разными аналитическими выражениями.

3б) Определяем значение параметра a из условия непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x_1 = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1)$. Вычисляя $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $f(1)$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(3 - ax^2) = 3 - a$, $f(1) = 2$, из условия непрерывности $2 = 3 - a = 2$, находим $a = 1$.

Ответ: а) $x_1 = 0$ - точка бесконечного разрыва функции; **б)** $a = 1$.

51-60. Для функции $y = \begin{cases} x^2, & x \le -1 \\ \dfrac{1}{x}, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ найти все точки разрыва и установить характер разрыва**.** Построить график функции**.**

Решение.

1) Находим естественную область определения функции $D(y) = \{x \in R | x \ne 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Находим по области $D(y)$ все точки разрыва данной функции, а также по виду самой функции находим все точки, в которых разрыв возможен. Точка $x = 0$ является точкой разрыва, а точки $x = -1$ и $x = 1$, в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями, являются точками возможного разрыва.

3) Установим характер разрыва в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \ f(0) - \text{неопределено}.$$

Следовательно, точка $x = 0$ - точка бесконечного разрыва (точка разрыва 2-го рода) функции $y = f(x)$.

4) Исследуем на непрерывность точки $x = -1$ и $x = 1$:

4.1)
$$\lim_{x \to -1-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x \to -1+0} f(x) \overset{?}{=} f(-1) \ \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} x^2 = 1, \ \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (1/x) = -1, \ f(-1) = -1 \right]$$
$$\Rightarrow 1 \ne -1 = -1.$$

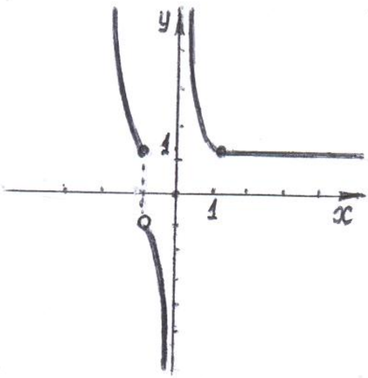
Следовательно, точка $x = -1$ - точка разрыва 1-го рода функции $y = f(x)$.

4.2)
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x \to 1+0} f(x) \overset{?}{=} f(1) \ \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (1/x) = 1, \ \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} 1 = 1, \ f(1) = 1 \right] \Rightarrow 1 = 1 = 1.$$

Следовательно, точка $x = 1$ - точка непрерывности функции $y = f(x)$.

5) Строим график функции. График функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1 \\ 1/x, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ имеет вид:



Ответ: $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода; $x=0$ - точка бесконечного разрыва функции (точка разрыва 2-го рода); график изображён на рисунке.

Раздел. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Нахождение производной $y'=y'(x)$ *функции* $y=y(x)$ *заданной явно, с помощью правил дифференцирования:*

$(C)'=0$ *(* $C=const$ *),* $(f\pm g)'=f'\pm g'$, $(f\cdot g)'=f'g+fg'$, $(Cf)'=C\cdot f'$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$, $(f^g)'=f^g\left(f'\cdot\dfrac{g}{f}+(\ln f)g'\right)$,

$f'(x)=\left(F(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\right)'=F'(u)\varphi'(x)$ *сводят к нахождению табличных производных.*

Производную $y'=y'(x)$ *функции* $y=y(x)$ *заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ *находят в параметрическом виде по формуле* $y'_x(t)=\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$.

При сведении к табличным производным следует иметь в виду следующие преобразования алгебраических выражений: $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha}$.

61-70. Найти производную $y' = f'(x)$ функций, заданных явно, используя арифметические правила нахождения производной:

а) $y = 3x^7 + 4\sqrt[4]{x^3} + \ln 2$ **б)** $y = \frac{x^3}{2x^4 + 5}$

Решение.

а) $y' = (3x^7 + 4\sqrt[4]{x^3} + \ln 2)' = (3x^7)' + (4\sqrt[4]{x^3})' + (\ln 2)'$, где

$$(3x^7)' = 3\underbrace{(x^7)'}_{\textit{табличная}} = 3 \cdot 7 \cdot x^{7-1} = 21x^6;$$

$$(4\sqrt[4]{x^3})' = 4\underbrace{(x^{\frac{3}{4}})'}_{\textit{табличная}} = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = 3x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{\sqrt[4]{x}};$$

$(\ln 2)' = 0$, так как $\ln 2 = const$.

Тогда $y' = (3x^7 + 4\sqrt[4]{x^3} + \ln 2)' = 21x^6 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$.

б) $y' = \left(\frac{x^3}{2x^4 + 5} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot (2x^4 + 5) - x^3 \cdot (2x^4 + 5)'}{(2x^4 + 5)^2}$, где

$$\underbrace{(x^3)'}_{\textit{табличная}} = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2;$$

$$(2x^4 + 5)' = (2x^4)' + (5)' = 2\underbrace{(x^4)'}_{\textit{табличная}} + 0 = 2 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 8x^3.$$

Тогда

$$y' = \left(\frac{x^3}{2x^4 + 5} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (2x^4 + 5) - x^3 \cdot 8x^3}{(2x^4 + 5)^2} = \frac{6x^6 + 15x^2 - 8x^6}{(2x^4 + 5)^2} = \frac{15x^2 - 2x^6}{(2x^4 + 5)^2}.$$

Ответ: а) $y' = 21x^6 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$; **б)** $y' = \frac{15x^2 - 2x^6}{(2x^4 + 5)^2}$.

71-80. Найти производную $y' = f'(x)$ функций, заданных явно, используя правило нахождения производной сложной функции:

а) $y = e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1-2x}$ **;** **б)** $y = \dfrac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}$ **.**

Решение.

а) $y' = \left(e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left(e^{4x}\right)' \sqrt[3]{1-2x} + e^{4x}\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'$, где

$$\left(e^{4x}\right)' = \left(e^{u}\big|_{u=4x}\right)' = \left(e^{u}\right)_u' u_x' = e^u u_x' = e^{4x}(4x)' = \left[(4x)' = 4(x)' = 4\right] = 4e^{4x}\text{;}$$

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left((1-2x)^{1/3}\right)' = (u^{1/3}\big|_{u=1-2x})' = (u^{1/3})_u' \cdot u_x' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}u_x' =$$

$$= \frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3}(1-2x)' = \left[(1-2x)' = (1)' - (2x)' = 0 - 2(x)' = -2\right] = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

Тогда $y' = 4e^{4x}\sqrt[3]{1-2x} + e^{4x} \cdot \left(-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right) = \dfrac{2e^{4x}(5-12x)}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ **.**

б) $y' = \left(\dfrac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}\right)' = \dfrac{(x\sin^2 3x)' \cdot \ln(5x+2) - x\sin^2 3x \cdot (\ln(5x+2))'}{\ln^2(5x+2)}$**,** где

$$(x\sin^2 3x)' = (x)'\sin^2 3x + x(\sin^2 3x)' =$$

$$\left[\begin{array}{c} (x)' = 1 \\ (\sin^2 3x)' = \left((\sin 3x)^2\right)' = (u^2\big|_{u=\sin 3x})' = (u^2)_u' u_x' = 2uu_x' = 2\sin 3x\,(\sin 3x)' \\ (\sin 3x)' = \left(\sin u\big|_{u=3x}\right)' = (\sin u)_u' u_x' = \cos u\, u_x' = \cos 3x(3x)' \\ (3x)' = 3(x)' = 3\cdot 1 = 3 \end{array}\right]$$

$$= 1\cdot\sin^2 3x + x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3 = \sin^2 3x + 3x\sin 6x\text{.}$$

$$(\ln(5x+2))' = \left(\ln u\big|_{u=5x+2}\right)' = (\ln u)_u' u_x' = \frac{1}{u}u'_x = \frac{1}{5x+2}(5x+2)' =$$

$$= \left[(5x+2)' = (5x)' + (2)' = 5(x)' + 0 = 5\cdot 1 = 5\right] = \frac{5}{5x+2}\ \text{.}$$

Тогда $y' = \dfrac{(\sin^2 3x + 3x\sin 6x)\ln(5x+2) - x\sin^2 3x\cdot\left(\dfrac{5}{5x+2}\right)}{\ln^2(5x+2)} =$

$$=\frac{(5x+2)(\sin^2 3x+3x\sin 6x)\ln(5x+2)-5x\sin^2 3x}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}.$$

81-90. Найти производную функции $\begin{cases} x=2^t+1 \\ y=\sqrt{1-2^t} \end{cases}$, заданной параметрически.

Решение.

Производную функции $y=f(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=2^t+1 \\ y=\sqrt{1-2^t} \end{cases}$ находим по формуле $y'_x(t)=\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$, где

$$y'_t(t)=\left(\sqrt{1-2^t}\right)'=\left((1-2^t)^{1/2}\right)'=\left(u^{1/2}\Big|_{u=1-2^t}\right)'=(u^{1/2})'_u\cdot u'_t=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}u'_t=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'_t=\frac{1}{2\sqrt{1-2^t}}(1-2^t)'=\left[(1-2^t)'=(1)'-(2^t)'=-2^t\ln 2\right]=\frac{-2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}};$$

$$x'_t(t)=(2^t+1)'=(2^t)'+(1)'=2^t\ln 2+0=2^t\ln 2.$$

Тогда $$y'_x(t)=\frac{\left(\dfrac{-2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}}\right)}{2^t\ln 2}=-\frac{2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}\cdot 2^t\ln 2}=-\frac{1}{2\sqrt{1-2^t}}.$$

91-100. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, где $a=x_0,\infty$, всегда начинают с подстановки в $\varphi(x)$ предельного значения её аргумента $x=a$. Если в результате получают неопределённость $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то для её раскрытия применяют правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ - функции, дифференцируемые в окрестности $a=x_0,\infty$. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила. На каждом этапе его применения следует использовать, упрощающие отношение, тождественные преоб-

разования, а также комбинировать это правило с любыми другими известными приёмами вычисления пределов. Раскрытие неопределённостей вида: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} *путём преобразований:* $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}$, $f-g=\dfrac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)}$, $f^{g}=e^{g\ln f}=e^{\frac{\ln f}{1/g}}$ *сводят к раскрытию неопределенностей вида* $0/0$ *или* ∞/∞.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x^2-2x-8)'}{(2x^2+3x-14)'}$**,** где

$$(3x^2-2x-8)'=(3x^2)'-(2x)'-(8)'=3(x^2)'-2(x)'-0=3\cdot 2x-2\cdot 1=6x-2,$$

$$(2x^2+3x-14)'=(2x^2)'+(3x)'-(14)'=2(x^2)'+3(x)'-0=2\cdot 2x+3\cdot 1=4x+3$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-2}{4x+3}=\dfrac{6\cdot 2-2}{4\cdot 2+3}=\dfrac{10}{11}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{-5x}-1+5x)'}{(\sin(x^2))'}$**,** где

$$(e^{-5x}-1+5x)'=(e^{-5x})'-(1)'+(5x)'=$$

$$\left[\begin{array}{c}(e^{-5x})'=(e^{u}\big|_{u=-5x})'=(e^{u})'_{u}\,u'_{x}=e^{u}u'_{x}=e^{-5x}(-5x)'=-5e^{-5x}\\ (1)'=0\\ (5x)'=5(x)'=5\cdot 1=5\end{array}\right]=$$

$$=-5e^{-5x}+5,$$

$$(\sin(x^2))'=\left(\sin u\Big|_{u=x^2}\right)'=(\sin u)'_{u}\,u'_{x}=\cos u\cdot u'_{x}=\cos(x^2)(x^2)'=$$

$$=2x\cos(x^2)\,.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Применяем правило Лопиталя ещё раз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-5e^{-5x}+5)'}{(2x\cos(x^2))'}$, где

$$(-5e^{-5x}+5)'=(-5e^{-5x})'+(5)'=-5(e^{-5x})'+0=-5\cdot(-5e^{-5x})=25e^{-5x},$$

$$(2x\cos(x^2))' = 2[(x)'\cos(x^2) + x(\cos(x^2))'] =$$

$$\left[\begin{array}{c} (x)' = 1 \\ (\cos(x^2))' = \left(\cos u\Big|_{u=x^2}\right)' = (\cos u)'_u\, u'_x = -\sin u\, u'_x = -\sin(x^2)(x^2)' = -2x\sin(x^2) \end{array}\right.$$

$$= 2[1\cdot\cos(x^2) + x(-2x\sin(x^2))] = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25e^{-5x}}{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \dfrac{25}{2-0} = \dfrac{25}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = [\infty - \infty]$. Преобразуем данную неопределённость (приведением разности дробей к общему знаменателю) к виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, после чего применим правило Лопиталя. Получим $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'}$, где

$$(\ln x - x + 1)' = (\ln x)' - (x)' + (1)' = \frac{1}{x} - 1 + 0 = \frac{1-x}{x},$$

$$((x-1)\ln x)' = (x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)' = 1\cdot\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \frac{x\ln x + x - 1}{x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}{\left(\dfrac{x\ln x + x - 1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Применяем правило Лопиталя ещё раз:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)'}{(x\ln x + x - 1)'}$, где $(1-x)' = (1)' - (x)' = -1$,

$$(x\ln x + x + 1)' = (x\ln x)' + (x)' + (1)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' + 1 + 0 =$$

$$= 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2.$$

В итоге получим $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\ln x + 2} = \dfrac{-1}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\dfrac{10}{11}$ **; б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\dfrac{25}{2}$ **;в)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=-\dfrac{1}{2}$ **.**

101-110. Для указанной функции $y=f(x)$ требуется:

а) составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}-1}$ в точке $x_0=4$;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-6x^2+1$ на отрезке $[1,7]$;

в) найти локальные экстремумы, интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-16}}$.

Решение.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет вид:* $y=y_0+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет вид:* $y=y_0+\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$. *Если* $f'(x_0)=0$, *то уравнение нормали имеет вид:* $x=x_0$.

1а) Вычисляем значение функции $y=f(x)$ в точке $x_0=4$:

$$f(4)=\frac{4^2}{\sqrt{4}-1}=16.$$

2а) Находим первую производную функции: $y'=\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}-1}\right)'=$

$$=\frac{(x^2)'(\sqrt{x}-1)-x^2(\sqrt{x}-1)'}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{2x(\sqrt{x}-1)-x^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{3x\sqrt{x}-4x}{2(\sqrt{x}-1)^2}$$ и вычисляем её значение в точке $x_0=4$: $f'(4)=\dfrac{3\cdot 4\sqrt{4}-4\cdot 4}{2(\sqrt{4}-1)^2}=4$.

3а) Составляем уравнение касательной: $y = y_0 + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ $\Rightarrow$ $y = 16 + 4\cdot(x-4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = 4x$.

4а) Составляем уравнение нормали: $y = y_0 + \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$ $\Rightarrow$

$y = 16 + \dfrac{1}{4}\cdot(x-4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = \dfrac{1}{4}x + 15$ $\cdot$

Ответ: $y = 4x$ **-** уравнение касательной; $y = \dfrac{1}{4}x + 15$ - уравнение нормали.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a, b]$ достигается или в точках $x_i \in (a, b)$, в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует, или на концах отрезка.

1б) Находим первую производную функции:

$$y' = (x^3 - 9x^2 + 3)' = (x^3)' - (9x^2)' + (3)' = 3x^2 - 18x$$

и определяем внутренние критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in (1, 7)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$y' = 3x^2 - 18x = 3x(x = 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1, 7) \\ x = 6 \in (1, 7) \end{cases}$, точек $x_i \in (1, 7)$ в которых y' не существует нет. Таким образом, единственной внутренней критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$ является точка $x_1 = 6$.

2б) Вычисляем значения функции $y = f(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[1, 7]$: $f(6) = 6^3 - 9\cdot 6^2 + 3 = -105$, $f(1) = 1^3 - 9\cdot 1^2 + 3 = -5$, $f(7) = 7^3 - 9\cdot 7^2 + 3 = -95$.

3б) Сравниваем значения $f(1)$, $f(6)$, $f(7)$ и находим наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$:

$m = y_{наим} = \min\limits_{[1,\,7]} f(x) = f(6) = -105$, $M = y_{наиб} = \max\limits_{[1,\,7]} f(x) = f(1) = -5$.

Ответ: $m = f(6) = -105$**,** $M = f(1) = -5$**.**

1в) Находим естественную область определения функции $D(y)$:
$D(y)=\left\{x\in R\middle|\begin{cases}x\neq 0\\ \sqrt{x^2-16}\neq 0\\ x^2-16\geq 0\end{cases}\right\}$. Решаем систему неравенств на числовой прямой:

$$\begin{cases}x\neq 0\\ \sqrt{x^2-16}\neq 0\\ x^2-16\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x^2-16>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x^2>4^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ |x|>4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x>4\\ -x>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x>4\\ x<-4\end{cases}\Rightarrow\boxed{D(y)=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)}.$$

2) Находим $f'(x)$: $y'=\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-16}}\right)'=\dfrac{(1)'\cdot(x\sqrt{x^2-16})-1\cdot(x\sqrt{x^2-16})'}{(x\sqrt{x^2-16})^2}$,

где $(1)'=0$;

$$(x\sqrt{x^2-16})'=(x)'\sqrt{x^2-16}+x\cdot(\sqrt{x^2-16})'=$$

$$\left[\begin{array}{c}x'=1\\ (\sqrt{x^2-16})'=\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-16}}\cdot(x^2-16)'}_{\textit{производная сложной функции}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-16}}\cdot(2x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}\end{array}\right]=$$

$$=1\cdot\sqrt{x^2-16}+x\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\right)=\frac{(x^2-16)+x^2}{\sqrt{x^2-16}}=\frac{2x^2-16}{\sqrt{x^2-16}}.$$

В результате получим:

$$\boxed{y'=\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-16}}\right)'=\frac{-\left(\dfrac{2x^2-16}{\sqrt{x^2-16}}\right)}{x^2(x^2-16)}=-\frac{2(x^2-8)}{x^2(x^2-16)\sqrt{x^2-16}}}.$$

3в) Находим все точки $x_i\in D(y)$, в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует (в частности $f'(x_i)=\infty$):

$f'(x)$ <u>не существует</u> ($f'(x)=\infty$) в точках $x=0\notin D(y)$, $x=-4\notin D(y)$, $x=4\notin D(y)$;

$$f'(x)=0 \Rightarrow y'=-\frac{2(x^2-8)}{x^2(x^2-16)\sqrt{x^2-16}}=0 \Rightarrow x^2-8=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}\approx 2.83\notin D(y).$$

4в) Точками $x_i \in D(y)$ (***<u>если они есть</u>***) разбиваем $D(y)=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ на интервалы J_i. Таких точек нет.

5в) Устанавливаем знак $f'(x)$ в каждом интервале J_i:

в интервале $(-\infty,-4)$ $f'(x)<0$; в интервале $(4,+\infty)$ $f'(x)<0$.

6в) Находим интервалы убывания и возрастания:

так как $f'(x)<0$ в интервале $(-\infty,-4)$ - то это интервал убывания;

так как $f'(x)<0$ в интервале $(4,+\infty)$ - то это интервал убывания.

7в) Находим точки локального экстремума, используя достаточное условие существования точки локального экстремума: точек локального экстремума нет.

Ответ: $(-\infty,-4)$ **-** интервал убывания; $(4,+\infty)$ - интервал возрастания; точек локального экстремума нет.

101-110. Для указанной непериодической функции $y=f(x)$ провести её полное исследование: **1)** найти естественную область определения; **2)** найти точки разрыва и установить их характер; **3)** исследовать функцию на чётность (нечётность); **4)** найти точки пересечения графика функции с осями координат; **5)** найти асимптоты графика функции; **6)** найти интервалы возрастания, убывания, локальные экстремумы функции; **7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции. Построить график функции.

а) $y=-\dfrac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}$ **б)** $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

Решение.

1а) Находим $D(y)$: $D(y)=\{x\in R\}=(-\infty,+\infty)$.

2а) Находим все точки разрыва функции и устанавливаем их характер: точек разрыва нет.

3а) Устанавливаем чётность (нечётность) функции.

Сначала устанавливаем симметричность $D(y)$ относительно 0: $D(y)$ симметрична относительно нуля, т.к. для $\forall x \in D(y) \Rightarrow (-x) \in D(y)$. Затем проверяем выполнение условия $f(-x) \overset{?}{=} \begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{ чётная} \\ -f(x) \Rightarrow \text{нечётная} \end{cases}$:

$$f(-x) = -\frac{((-x)+1)^2((-x)-3)^2}{16} = -\frac{(x-1)^2(x+3)^2}{16} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) \text{ -}$$

ни чётная, ни нечётная функция.

4а) Находим (по возможности) точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Oy: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{(0+1)^2(0-3)^2}{16} = -\frac{9}{16} \approx -0.56 \;\Rightarrow\; \left(0, -\frac{9}{16}\right)$ - точка пересечения с осью Oy.

С осью Ox: $y = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{16} = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ x = 3 \;\Rightarrow (-1,0)$, $(3,0)$ - точки пересечения с осью Ox.

5а) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции:

Вертикальных асимптот нет, так как $f(x)$ не имеет точек бесконечного разрыва.

Находим наклонную асимптоту $y = k_1 x + b_1$ при $x \to -\infty$, где $k_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - k_1 x)$:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{-(x+1)^2(x-3)^2}{16 \cdot x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty \quad \Rightarrow$$ наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ не существует.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} \infty & \text{при } m > k \\ a_0/b_0 & \text{при } m = k \\ 0 & \text{при } m < k \end{cases}.$$

Находим наклонную асимптоту $y = k_2 x + b_2$ при $x \to +\infty$, где $k_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - k_2 x)$:

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(x+1)^2(x-3)^2}{16\cdot x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty \quad \Rightarrow$$ наклонной асимптоты при $x\to+\infty$ не существует.

6а) Находим интервалы возрастания, убывания, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции.

6.1а) Находим $f'(x)$:

$$y'=\left(-\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}\right)'=-\frac{1}{16}\Big(((x+1)^2)'(x-3)^2+(x+1)^2((x-3)^2)'\Big),$$ где

$$((x+1)^2)'=\underbrace{2(x+1)\cdot(x+1)'}_{\textit{производная сложной функции}}=2(x+1)\cdot 1=2(x+1);$$

$$((x-3)^2)'=\underbrace{2(x-3)\cdot(x-3)'}_{\textit{производная сложной функции}}=2(x-3)\cdot 1=2(x-3).$$

Тогда $y'=-\dfrac{1}{16}\Big(2(x+1)(x-3)^2+(x+1)^2 2(x-3)\Big)=$

$$=-\frac{1}{16}\cdot 2(x+1)(x-3)(x-3+x+1)=-\frac{1}{16}\cdot 2(x+1)(x-3)(2x-2)=$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot 4(x+1)(x-3)(x-1)=-\frac{(x^2-1)(x-3)}{4}.$$

6.2а) Находим все точки $x_i\in D(y)$, в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует (в частности $f'(x_i)=\infty$):

$f'(x)$ <u>не существует</u> ($f'(x)=\infty$): таких точек нет;

$$f'(x)=0 \Rightarrow y'=-\frac{(x^2-1)(x-3)}{4}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1\in D(y) \\ x-3=0 \Rightarrow x=3\in D(y)\end{cases} \Rightarrow$$

таких точек три: $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3$.

6.3а) Точками $x_i\in D(y)$ (***<u>если они есть</u>***) разбиваем $D(y)=(-\infty,+\infty)$ на интервалы J_i: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,3)$, $(3,+\infty)$.

6.4а) Устанавливаем знак $f'(x)$ в каждом интервале J_i и находим интервалы возрастания и убывания:

J_i	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
знак $f'(x)$	+	—	+	—

поведение $f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Замечание. Результаты исследования $f(x)$ на монотонность можно изобразить и на числовой прямой.

6.5а) Находим точки локального экстремума (точки, принадлежащие $D(y)$, в которых $f'(x)$ изменяет знак) и локальные экстремумы:

$x_1 = -1$ - точка локального максимума $\Rightarrow f_{\max}(-1) = -\dfrac{(-1+1)^2(-1-3)^2}{16} = 0$;

$x_2 = 1$ - точка локального минимума $\Rightarrow f_{\min}(1) = -\dfrac{(1+1)^2(1-3)^2}{16} = -1$;

$x_3 = 3$ - точка локального максимума $\Rightarrow f_{\max}(3) = -\dfrac{(3+1)^2(3-3)^2}{16} = 0$.

7а) Находим интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции.

7.1а) Находим $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{(x^2-1)(x-3)}{4}\right)' = -\frac{1}{4}\left((x^2-1)'(x-3) + (x^2-1)(x-3)'\right),$$ где

$(x^2-1)' = (x^2)' - (1)' = 2x - 0 = 2x$;

$(x-3)' = (x)' - (3)' = 1 - 0 = 1$.

Тогда $y'' = -\dfrac{1}{4}\left(2x(x-3) + (x^2-1)\cdot 1\right) = -\dfrac{3x^2-6x-1}{4}$

7.2а) Находим все точки $x_i \in D(y)$, в которых $f''(x_i) = 0$ или $f''(x_i)$ не существует (в частности $f''(x_i) = \infty$):

$f''(x)$ <u>не существует</u> ($f''(x) = \infty$): таких точек нет;

$$f''(x) = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{3x^2-6x-1}{4} = 0 \Rightarrow 3x^2-6x-1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3} \approx -0.15$, $x_2 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} \approx 2.15$ $\Rightarrow$ таких точек две: $x_1 \approx -0.15$, $x_2 \approx 2.15$.

7.3а) Точками $x_i \in D(y)$ (***если они есть***) разбиваем $D(y) = (-\infty, +\infty)$ на интервалы J_i: $(-\infty, -0.15)$, $(-0.15, 2.15)$, $(2.15, +\infty)$.

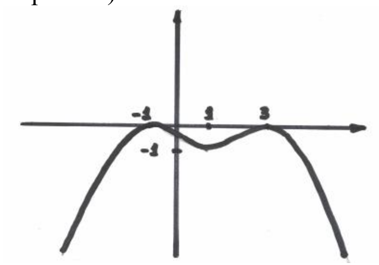
7.4а) Устанавливаем знак $f''(x)$ в каждом интервале J_i и находим интервалы выпуклости и вогнутости:

J_i	$(-\infty, -0.15)$	$(-0.15, 2.15)$	$(2.15, +\infty)$
знак $f''(x)$	$-$	$+$	$-$
поведение $f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Замечание. Результаты исследования $f(x)$ на выпуклость и вогнутость можно изобразить и на числовой прямой.

7.5а) Находим точки перегиба (точки, принадлежащие $D(y)$, в которых $f''(x)$ изменяет знак) и значения функции в них: $x_1 \approx -0.15$ - точка перегиба $\Rightarrow$ $f_{пер}(-0.15) \approx -\dfrac{(-0.15+1)^2(-0.15-3)^2}{16} \approx -0.45$; $x_2 \approx 2.15$ - точка перегиба $\Rightarrow$ $f_{пер}(2.15) \approx -\dfrac{(2.15+1)^2(2.15-3)^2}{16} \approx -0.45$.

8а) Строим график функции с учётом наличия особых точек (точек локального экстремума и точек перегиба) и наличия асимптот.



1б) Находим $D(y)$: $D(y) = \{x \in R \mid x^2 + 2x \neq 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

2б) Находим все точки разрыва функции и устанавливаем их характер.

Поскольку данная функция является элементарной, то точками разрыва являются точки $x = -2$ и $x = 0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x = -2$ и $x = 0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to -2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва (точками разрыва 2-го рода).

3б) Устанавливаем чётность (нечётность) функции.

Так как область определения функции $D(y)=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – ни чётная, ни нечётная (общего вида).

4б) Находим (по возможности) точки пересечения графика функции с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью Oy нет.

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$. Его решением является $x=-1$. Следовательно, точка $(-1,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox.

5б) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$.

Так как точки $x=-2$ и $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ и $x=0$.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1.$$

В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\infty & \text{если} \quad n>m\\ a_0/b_0 & \text{если} \quad n=m\\ 0 & \text{если} \quad n<m\end{cases}$

Следовательно $y=k_1x+b_1=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_2,\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_2$$

Следовательно $y=k_2x+b_2=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

6б) Находим интервалы возрастания, убывания, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции.

6.1б) Находим $f'(x)$:

$$y'=\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)'==\frac{\left((x+1)^2\right)'\cdot(x^2+2x)-(x+1)^2(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}=$$

$$=\frac{2(x+1)(x^2+2x)-(x+1)^2(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

6.2б) Находим все точки $x_i\in D(y)$, в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует (в частности $f'(x_i)=\infty$):

$f'(x)$ <u>не существует</u> ($f'(x)=\infty$): y' не существует при $x^2+2x=0\Rightarrow x=0\notin D(y)$ и $x=-2\notin D(y)\Longrightarrow$ таких точек нет;

$y'=-\dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}=0\Rightarrow\quad x+1=0\Rightarrow x=-1\in D(y)\Longrightarrow$ таких точек одна: $x_1=-1$.

6.3б) Точками $x_i\in D(y)$ (***<u>если они есть</u>***) разбиваем $D(y)=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ на интервалы J_i: $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$.

6.4б) Устанавливаем знак $f'(x)$ в каждом интервале J_i и находим интервалы возрастания и убывания:

J_i	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
знак $f'(x)$	+	+	–	–
поведение $f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Замечание. Результаты исследования $f(x)$ на монотонность можно изобразить и на числовой прямой.

6.5б) Находим точки локального экстремума (точки, принадлежащие $D(y)$, в которых $f'(x)$ изменяет знак) и локальные экстремумы:

$x_1 = -1$ - точка локального максимума $\Rightarrow$ $f_{\max}(-1) = 0$.

7б) Находим интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции.

7.1б) Находим $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}\right)' = -2\left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2 - (x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{1\cdot(x^2+2x)^2 - (x+1)\cdot 2\cdot(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}\right) = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

7.2б) Находим все точки $x_i \in D(y)$, в которых $f''(x_i) = 0$ или $f''(x_i)$ не существует (в частности $f''(x_i) = \infty$):

$f''(x)$ <u>не существует</u> ($f''(x) = \infty$): y'' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y) \Longrightarrow$ таких точек нет;

$f''(x) = 0 \Longrightarrow : y'' = \dfrac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3} \neq 0$, так как $3x^2 + 6x + 4 \neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней) $\Longrightarrow$ таких точек нет.

7.3б) Точками $x_i \in D(y)$ (<u>***если они есть***</u>) разбиваем $D(y) = (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$ на интервалы J_i: таких точек нет, следовательно, дополнительных интервалов нет.

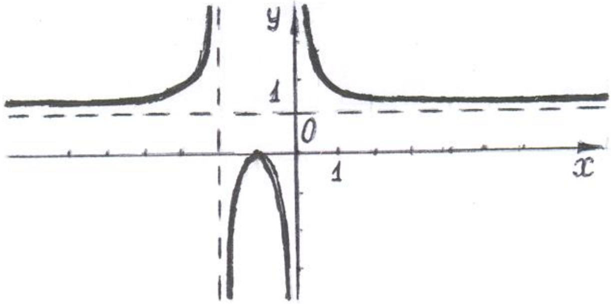
7.4б) Устанавливаем знак $f''(x)$ в каждом интервале J_i и находим интервалы выпуклости и вогнутости:

J_i	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
знак $f''(x)$	+	–	+
поведение $f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Замечание. Результаты исследования $f(x)$ на выпуклость и вогнутость можно изобразить и на числовой прямой.

7.5б) Находим точки перегиба (точки, принадлежащие $D(y)$, в которых $f''(x)$ изменяет знак) и значения функции в них: таких точек нет.

8б) Строим график функции с учётом наличия особых точек (точек локального экстремума и точек перегиба) и наличия асимптот.



6.2. Краткие теоретические сведения.

Раздел. Введение в математический анализ.

Тема. Множества. Числовые множества. Функция.

Под ***множеством*** понимают некоторую совокупность объектов любой природы, различимых между собой и мыслимую как единое целое. Объекты, составляющие множество называют его ***элементами***. Множество может быть бесконечным (состоит из бесконечного числа элементов), конечным (состоит из конечного числа элементов), пустым (не содержит ни одного элемента). Множества обозначают: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$, а их элементы: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$. Пустое множество обозначают $\varnothing$.

Множество B называют ***подмножеством*** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A и пишут $B \subset A$. Множества A и B называют ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов и пишут $A = B$. Два множества A и B будут равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество U называют ***универсальным*** (в рамках данной математической теории), если его элементами являются все объекты, рассматриваемые в данной теории.

Множество можно задать: **1)** перечислением всех его элементов, например: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (только для конечных множеств); **2)** заданием правила P определения принадлежности элемента u универсального множества U, данному множеству A: $A = \{u \in U \mid P(u)\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{u \in U \mid u \in A \text{ или } u \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \notin B\}.$$

Дополнением множества A (до универсального множества U) называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Два множества A и B называются ***эквивалентными*** и пишут $A \sim B$, если между элементами этих множеств может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Множество A называется ***счётным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел N: $A \sim N$. Пустое множество по определению относится к счётным.

Понятие мощности множества возникает при сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов. Мощность множества A обозначают $|A|$. Мощностью конечного множества является число его элементов.
Эквивалентные множества обладают равной мощностью. Множество A называется ***несчётным***, если его мощность больше мощности множества N.

Действительным (вещественным) ***числом*** называется бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком «+» или «$-$». Действительные числа отождествляют с точками числовой прямой. ***Модулем*** (абсолютной величиной) действительного числа x называется неотрицательное число:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0 \\ x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Множество X называется ***числовым***, если его элементами x являются действительные числа.Числовыми ***промежутками*** называются множества чисел: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty.,+\infty)$.

Множество всех точек x на числовой прямой, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое число, называется ε-***окрестностью*** (или просто окрестностью) точки x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$. Множество всех точек x условием $|x| > \mathrm{E}$, где $\mathrm{E} > 0$ - сколь угодно большое число, называется E-***окрестностью*** (или просто окрестностью) бесконечности и обозначается $O_\mathrm{E}(\infty)$.

Величина, сохраняющая одно и тоже числовое значение, называется ***постоянной.*** Величина, принимающая различные числовые значения, называется ***переменной. Функцией*** f называется правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие одно вполне определённое число $y \in Y$, и пишут $y = f(x)$. Множество X называется ***областью определения*** функции, Y - ***множеством (***или областью***) значений*** функции, $x \in X$ - ***аргументом***, $y \in Y$ - ***значением функции***. Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y = f(x)$ называется множество D значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл. ***Графиком функции*** $y = f(x)$, $x \in D$ в прямоугольной системе координат Oxy, называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.

Функция $f(x)$ называется ***чётной*** на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$, если для всех $x \in X$ выполняется условие:

$f(-x) = f(x)$ и ***нечётной***, если выполняется условие $f(-x) = -f(x)$. В противном случае $f(x)$ - функция общего вида или ***ни чётная, ни нечётная***.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** на множестве X, если существует число $T \neq 0$ (***период функции***), такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее число $T > 0$ называется основным периодом.

Функция $f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** (***убывающей***) на множестве X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция - ***неограниченная***.

Обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ называется такая функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x) = y$. Для нахождения функции $x = f^{-1}(y)$, обратной к функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является строго монотонной на X, то она всегда имеет обратную, при этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Функция $y = f(x)$, представляемая в виде $y = f(x) = F(\varphi(x))$, где $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ - некоторые функции такие, что область определения функции $F(u)$ содержит всё множество значений функции $\varphi(x)$, называется ***сложной функцией*** независимого аргумента x. Переменную u называют при этом промежуточным аргументом. Сложную функцию $f(x) = F(\varphi(x))$ называют также композицией функций F и φ, и пишут: $f = F \circ \varphi$.

Основными элементарными функциями считаются: ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$, ***показательная*** функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***логарифмическая*** функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***тригонометрические*** функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, ***обратные тригонометрические*** функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. ***Элементарной*** называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их арифметических операций и композиций.

Если задан график Γ функции $y = f(x)$, $x \in X$, то построение графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие или растяжение, отображение) графика Γ:

1) преобразование $-f(x)$ симметрично отображает график Γ, относительно оси Ox; **2)** преобразование $f(-x)$ симметрично отображает график Γ, относительно оси Oy; **3)** преобразование $f(x-a)$ сдвигает график Γ по оси Ox на $|a|$ единиц ($a>0$ - вправо, $a<0$ - влево); **4)** преобразование $f(x)+b$ сдвигает график Γ по оси Oy на $|a|$ единиц ($a>0$ - вверх, $a<0$ - вниз); **5)** преобразование $kf(x)$ график Γ вдоль оси Oy растягивает в k раз, если $k>1$ или сжимает в $1/k$ раз, если $0<k<1$; **6)** преобразование $f(kx)$ график Γ вдоль оси Ox сжимает в k раз, если $k>1$ или растягивает в $1/k$ раз, если $0<k<1$.

Последовательность преобразований при построении графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ можно представить символически в виде:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \to c\,f(ax+b) \to c\,f(ax+b)+d\,.$$

Примечание. При выполнении преобразования $f(ax) \to f(ax+b)$ следует иметь в виду, что величина сдвига вдоль оси Ox определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax.

Графиком функции $y = ax^2+bx+c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$, ветви которой направлены вверх, если $a>0$ или вниз, если $a<0$. Графиком дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ является гипербола с центром в точке $\left(-d/c\,,\,a/c\right)$, асимптоты которой проходят через центр, параллельно осям координат.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить её область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них. Например, при построении графика функции, в аналитическое выражение которой входит функция

$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$, следует выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля не меняет знак.

График функции $y=f_1(x)+f_2(x)$ можно построить, предварительно построив графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а затем сложив их ординаты при одинаковых значениях x.

Тема. Числовая последовательность. Предел последовательности. Предел функции.

Если каждому натуральному числу n по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно вполне определённое действительное число $x_n=f(n)$, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Кратко обозначают (x_n). Число x_n называется ***общим членом последовательности***. Последовательность называют также функцией натурального аргумента. Последовательность всегда содержит бесконечно много элементов, среди которых могут быть равные.

Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность (x_n), имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Последовательность (x_n) называется: **1)** ***убывающей***, если $x_1>x_2>\ldots>x_n>\ldots$; **2)** ***возрастающей***, если $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$; **3)** ***неубывающей***, если $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le\ldots$; **4)** ***невозрастающей***, если $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge\ldots$. Все вышеперечисленные последовательности называются ***монотонными***.

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существует число $M>0$ такое, что для всех $n\in N$ выполняется условие: $|x_n|\le M$. В противном случае последовательность - ***неограниченная***.

Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой*** (сходящейся к бесконечности) и пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ найдётся номер $N(\mathrm{E})$ такой, что при всех $n > N(\mathrm{E})$ выполняется неравенство $|x_n| > \mathrm{E}$.

Числом e называется предел последовательности (x_n), где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Постоянную $e = 2.718281...$ называют неперовым числом. Логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом числа x и обозначается $\log_e x = \ln x$.

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to x_0$ (или в точке x_0), и пишут $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, и пишут $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Рассматривают также односторонние пределы функций: $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, где x стремится к x_0, $+\infty$, $-\infty$ или только с левой стороны или только с правой стороны.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов функций при $x \to a$ (в дальнейшем a - или число x_0 или символ ∞):

1) Если c - постоянная величина, то $\lim_{x\to a} c = c$.

2) Если существуют конечные пределы $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = d$, то:

а) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm d$; **б)** $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b \cdot d$;

в) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c \cdot b \quad (c = const)$; **г)** $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}$, если $d \neq 0$.

При вычислении пределов постоянно пользуются и тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки x_0 из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Основные утверждения для бесконечно больших функций, используемые для вычисления пределов при $x \to a$:

1) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$,если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

2) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \infty$.

3) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

4) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

5) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x)/g(x)) = 0$.

6) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Если непосредственное применение свойств конечных пределов и бесконечно больших функций приводит к неопределённым выражениям, символически обозначаемым: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$, то для вычисления предела – «раскрытия неопределённости» - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить.

Первым замечательным пределом называется предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствиями из него являются пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

Вторым замечательным пределом называются пределы:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e,$$

где $e = 2.71828...$-основание натуральных логарифмов (число Непера). Он используется для вычисления предела степенно-показательной функции $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

При нахождении пределов $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ следует иметь в виду:

1) Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b > 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = d$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^d$.

2) Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \neq 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ вычисляют, учитывая, что: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to+\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < b < 1 \\ +\infty, & b > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to-\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} +\infty, & 0 < b < 1 \\ 0, & b > 1 \end{cases}$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются ***эквивалентными***, и пишут $\alpha \sim \beta$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций, состоит в том, что при вычислении предела частного $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или произведения $\alpha(x)\,\beta(x)$ одну из функций (или обе) в этих выражениях можно заменить эквивалентной функцией. Так, если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)};$$

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x)\,\beta(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha_1(x)\,\beta(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha(x)\,\beta_1(x)) = \lim_{x\to a} (\alpha_1(x)\,\beta_1(x))$$

Основные эквивалентности при $\alpha(x) \to 0$			
$\sin\alpha \sim \alpha$	$tg\alpha \sim \alpha$	$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$arctg\alpha \sim \alpha$
$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$	$a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$\log_a(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$	$(1+x)^m - 1 \sim m\alpha$	$\sqrt[n]{(1+x)^m} - 1 \sim \frac{m\alpha}{n}$	

Тема. <u>Непрерывность функции. Точки разрыва.</u>

Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки x_0 (левой полуокрестности, правой полуокрестности) и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$), то функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 (непрерывной слева, непрерывной справа).

Каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна слева (справа) в крайней правой (крайней левой) точке области определения.

Если в точке x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$.

2) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но они не равны друг другу, то x_0 называется ***точкой разрыва 1-ого рода.***

3) В остальных случаях x_0 называется ***точкой разрыва 2-ого рода*** .

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке a - непрерывна справа, в точке b - непрерывна слева). Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ обладает свойствами: **1)** ограничена на $[a, b]$; **2)** достигает на отрезке $[a, b]$ своего наименьшего значения m и наибольшего значения M; **3)** для любого числа C, заключённого между числами $f(a)$ и $f(b)$, всегда найдётся точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$; **4)** если $f(a) f(b) < 0$, то всегда найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Раздел. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента $\Delta x \neq 0$ называется выражение $\Delta y = \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной 1-ого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$. Геометрический смысл производной состоит в том, что число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox прямоугольной декартовой системы координат Oxy.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***бесконечную производную.*** В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 перпендикулярна к оси Ox.

Числа $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ называются, соответственно ***левой*** и ***правой производными*** функции $y = f(x)$ в точке x_0. Условие $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ равносильно дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0, при этом $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Любая элементарная функция $y = f(x)$ дифференцируема во всякой внутренней точке x естественной области определения D функции $f(x)$, в которой аналитическое выражение её производной $y' = f'(x)$ имеет смысл. Производная $f'(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек x, где она существует, сама является функцией. Операция нахождения производной $f'(x)$ называется также ***дифференцированием*** функции $f(x)$.

Основные правила дифференцирования элементарных функций.

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые функции, C - постоянная, то:

$(C)' = 0$	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$

$(Cf)' = Cf'$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, $g \neq 0$

2. Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(x) = F(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет производную:

$$\boxed{f'(x_0) = F'(u_0)\varphi'(x_0)} \quad \text{или кратко} \quad \boxed{y'_x = y'_u u'_x}..$$

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Применение предварительного логарифмирования функции приводит к следующему, часто более простому, способу вычисления её производной: $y' = y \cdot (\ln y)'$. Например, для степенно-показательной функции $y = f(x) = u^v$, где $u(x) > 0$, $v(x)$ - дифференцируемые функции:

$$\left(u^v\right)' = u^v (v \cdot \ln u)'.$$

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y(x)) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F'_x(x, y) = 0$, линейного относительно $y'(x)$, где $F(x, y(x))$ -рассматривается как сложная функция переменной x.

Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ -взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то справедлива формула: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ (***правило дифференцирования обратной функции***).

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha < t < \beta)$, где $x(t)$, $y(t)$ -дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, то справедлива формула: $y'_x = y'_t / x'_t$ (***правило дифференцирования функции заданной параметрически)***.

При дифференцировании сложных и обратных функций, а также функций заданных неявно и параметрически для производной используют обозначения типа y'_x, x'_y, y'_t, x'_t там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведётся дифференцирование.

Производной 2-ого порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её первой производной и обозначается $y'' = f''(x)$, т. е. $y'' = (y')'$. В общем ***производной порядка*** n **(**n***-ой производной*)** называется производная от $(n-1)$-ой производной и обозначается $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$, т.е. $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.Для производной $y^{(n)}$ используется также обозначение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производная $y^{(n)}$ функции $y=f(x)$ вычисляется её последовательным дифференцированием: y', $y''=(y')'$, $y'''=(y'')'$, …, $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. Если функция $y=f(x)$ задана параметрически, то её производные высших порядков находятся по формулам:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},\ldots.$$

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то её приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\text{, где }\alpha(\Delta x)\to 0\text{ при }\Delta x\to 0.$$

Дифференциалом dy функции $y=f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения Δy функции: $dy=f'(x)\Delta x$. В частности, для функции $y=x$ имеем $dy=\Delta x$, т.е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции $y=f(x)$ записывается в виде $dy=f'(x)dx$. Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

Для функции одной переменной $y=f(x)$ существование в точке x её дифференциала dy и производной $f'(x)$ равносильны.

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y=f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается d^2y, т. е. $d^2y=d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** n называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка и обозначается $d^n y$, т.е. $d^n y=d(d^{n-1}y)$.

Если x - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^n y$ функции $y=f(x)$ справедлива формула $d^n y=f^{(n)}(x)dx^n$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y=f(x)$ в малой окрестности точки x_0, в которой функция дифференцируема, по формуле:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \text{ где } x = x_0 + \Delta x.$$

Чем меньше значение $|\Delta x|$, тем точнее приближённая формула.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, а ***уравнение нормали*** - вид: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. ***Углом между*** двумя ***кривыми*** $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол φ между касательными к этим кривым в точке M_0, тангенс которого вычисляется по формуле: $tg\varphi = \left|\dfrac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}\right|$.

Тема. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то на (a, b) существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на (a, b) существует точка c такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (***формула Лагранжа***).

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то на интервале (a, b) существует точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ (\textbf{\textit{формула Коши}}).}$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, то при $x \to x_0$ имеет место ***формула Тейлора (порядка n) с остаточным членом в форме Пеано***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Если предположить существование $(n+1)$-ой производной $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки x_0 то для любой точки x из этой окрестности имеет место ***формула Тейлора (порядка n) с остаточным членом в форме Лагранжа***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ где $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Формула Тейлора (с остаточным членом в любой форме) в частном случае $x_0=0$ обычно называется ***формулой Маклорена***.

Формула Тейлора используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности ε, при вычислении пределов функций.

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что

$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n^*)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n^*}$, где n^*-минимальный из номеров n для которых $\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<\varepsilon$.

При вычислении пределов функций используют формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух дифференцируемых или бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x\to a$ (a - число x_0 или символ ∞) равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Правило Лопиталя используют для раскрытия неопределённостей видов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приёмами вычисления пределов. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила.

Раскрытие неопределённостей видов $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 путём преобразований:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f}{1/g},\quad f(x)-g(x)=\frac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)},\quad f(x)^{g(x)}=e^{g\ln f}=e^{\frac{\ln f}{1/g}}$$

приводится к раскрытию неопределенностей видов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Тема. <u>Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.</u>

1. <u>Возрастание, убывание функций. Экстремум.</u>

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b).

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y = f(x)$, называется ***критической точкой*** функции, если в этой точке $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения D на интервалы монотонности (интервалы возрастания и убывания).

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), а число $f(x_0)$ - ***минимумом*** (***максимумом***) функции. Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума,*** а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Если $x_0 \in D$ - точка экстремума функции $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f'(x)$, при переходе слева направо через точку x_0: **1)** меняет знак с «+» на « $-$ », то x_0 - точка максимума; **2)** меняет знак с знак с « $-$ » на «+», то x_0 - точка минимума; **3)** сохраняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда: **1)** если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума; **2)** если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

2. <u>Наибольшее и наименьшее значения функции.</u>

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a, b]$ достигается или во внутренних критических точках или на концах отрезка.

3. <u>Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты.</u>

Функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой*** **(*вогнутой*)** на интервале (a, b), если её график лежит под касательной (над касательной), проведённой к графику данной функции, в любой точке интервала (a, b).

Иногда выпуклость называют выпуклостью вверх, а вогнутость – выпуклостью вниз.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция является вогнутой (выпуклой) на (a, b).

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y = f(x)$, называется ***точкой перегиба*** функции, если при переходе через неё меняется направление выпуклости функции. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется ***точкой перегиба графика*** функции.

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой возможного перегиба*** функции $y = f(x)$, если в этой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Эти точки разбивают область определения D функции $y = f(x)$ на интервалы выпуклости и вогнутости.

Необходимое условие перегиба. Если $x_0 \in D$ - точка перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f''(x)$, при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Прямая L называется асимптотой графика Γ функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M \in \Gamma$ до прямой L стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$. Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$), если $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$). Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является ***горизонтальная асимптота***.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$) тогда и только тогда, когда одновременно существуют пределы: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$).

4. Построение графиков функций.

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно: **1)** найти область определения функции; **2)** найти точки разрыва и установить характер разрыва; **3)** исследовать функцию на чётность и нечётность, периодичность; **4)** найти точки пересечения графика с осями координат; **5)** найти асимптоты графика функции; **6)** найти интервалы возрастания и убывания, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции; **7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha\,,$ **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha\,.$

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^{\alpha}\ \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}dx$
2	$a^{x}\ \ (a>0, \neq 1)$	$a^{x}\ln a$	$a^{x}\ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x}dx$
4	$\log_{a} x\ \ (a>0, \neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^{2} x}$	$\frac{dx}{\cos^{2} x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^{2} x}$	$-\frac{dx}{\sin^{2} x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^{2}}$	$\frac{dx}{1+x^{2}}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^{2}}$	$-\frac{dx}{1+x^{2}}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\frac{1}{ch^{2}x}$	$\frac{dx}{ch^{2}x}$
17	$cthx$	$-\frac{1}{sh^{2}x}$	$-\frac{dx}{sh^{2}x}$

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине «Математический анализ»

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №________
*Ф.И.О. студента*__________
зач. книжка - №__________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
202…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**	**101**	**111**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**	**102**	**112**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**	**103**	**113**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**	**104**	**114**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**	**105**	**115**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**	**106**	**116**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**	**107**	**117**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**	**108**	**118**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**	**109**	**119**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**	**109**	**120**
12	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**	**108**	**119**
13	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**	**107**	**118**
14	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**	**106**	**117**
15	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**	**105**	**116**
16	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**	**104**	**115**
17	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**	**103**	**114**
18	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**	**102**	**113**
19	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**118**
20	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**117**
21	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**	**107**	**116**
22	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**	**106**	**115**
23	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**	**105**	**114**
24	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**	**104**	**113**
25	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**	**103**	**112**
26	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**	**102**	**111**
27	**1**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**	**110**	**120**
28	**2**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**119**
29	**3**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**118**
30	**10**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**	**101**	**111**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е