

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

А.М. Думанский¹, М.Ю. Русин², В.И. Неповинных²

¹*Институт машиноведения им. А.А. Благодирова РАН, г. Москва, 101990, Россия*

²*АО «ОНПП «Технология» им. А.Г. Ромашина», г. Обнинск, 249031, Россия*

Аннотация

Проведен анализ геометрии преобразований при простом сдвиге. Для этого использован матричный анализ и математический аппарат нелинейной теории упругости. Исследована последовательность преобразований при простом сдвиге и дано сравнение с полярным разложением. Показано, что простой сдвиг может быть представлен в виде последовательных действий поворота, деформации и поворота. Получены явные выражения для соответствующих тензоров, зависящих от параметра величины сдвига. Осуществлена расчетная проверка полученных соотношений. Получены разложения тензоров мер деформаций Коши–Грина, Фингера, Пиолы и Альманси.

Ключевые слова: простой сдвиг, эллипс деформации, градиент деформации, тензор Коши–Грина, полярное разложение, тензор меры деформации

Введение

Наряду с растяжением и сжатием сдвиг является одним из видов деформации, который определяет кинематику и разрушение в природе и технике. Срезание слоя металла в стружку, течение ньютоновской жидкости в канале, сдвиговые механизмы пластической деформации и многие другие явления описываются сдвиговой деформацией. В слоистых волокнистых композитах различают внутри- и межслойный сдвиг. Известно также, что внутрислойный сдвиг является основным источником нелинейных и реологических свойств [1, 2]. Простой сдвиг является важным случаем конечных деформаций, имеющим важное прикладное значение. Стимулом для его изучения явились комплексные экспериментальные и теоретические исследования в связи с обеспечением работоспособности клеевых соединений элементов конструкций в авиационно-космической технике [3–5]. В центре внимания авторов стояли вопросы корреляции результатов испытаний эластомерного герметика при растяжении и при сдвиге, а также объяснения складчатой формы поверхности разрушения при когезионном механизме разрушения в клеевом слое [3]. Оказалось, что понятие сдвига широко используется в геологии, в частности при исследовании тектонических явлений в земной коре. Исследование геометрии зон сдвига и характера разрушения в структурной геологии и тектонофизике является общепринятым и детально рассмотрено в [6–8]. В вышеприведенных работах указывается на образование S-образных трещин отрыва в зоне сдвиговой деформации. В работе [6] говорится, что при развитии деформации простого сдвига ось максимального удлинения испытывает вращение к плоскости сдвига. Наличие подобных трещин отмечается при разрушении связующего при сдвиге вдоль волокна [9]. Таким образом, изучение геометрии деформирования при простом сдвиге имеет важное прикладное значение.

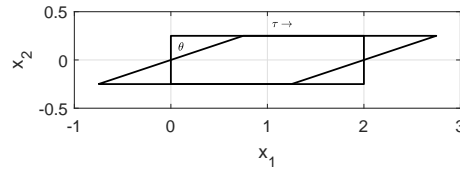


Рис. 1. Деформирование по схеме простого сдвига

1. Анализ кинематики деформирования при простом сдвиге

Сдвигом называется деформация, при которой происходит смещение слоев тела друг относительно друга. Например, пластическая деформация происходит путем смещения слоев металла под влиянием внешних механических усилий. Кинематика деформирования при чистом и простом сдвигах в условиях конечных деформаций различна. Для сравнения можно рассмотреть изменение формы сферы или круга в процессе деформации. При чистом сдвиге имеет место соосная или коаксиальная деформация в направлениях, не меняющих ориентацию осей деформации эллипса, вызванная растяжением и сжатием вдоль осей. При простом сдвиге наряду с деформацией осей имеет место еще и поворот осей. При таком сдвиге прямоугольник, расположенный в плоскости сдвига, в результате деформации превращается в параллелограмм и угол наклона, характеризуемый тангенсом угла поворота боковой грани, полностью определяет деформацию. Тангенс угла наклона боковой стороны к оси Ox_2 называется величиной сдвига и обозначается $k = \operatorname{tg} \theta$ [10] (рис. 1). В соответствии со схемой, представленной на рисунке, аффинное преобразование исходной конфигурации определяется следующими соотношениями [10–12]:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + kx_2, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

При простом сдвиге площадь параллелограмма равна площади исходного прямоугольника, что свидетельствует о несжимаемости материала. Начало системы координат помещено в середину прямоугольника. Путем решения системы (1) можно определить неподвижные точки преобразования. Из первого уравнения системы следует соотношение $x_1 = x_1 + kx_2$, которое удовлетворяется при $x_2 = 0$, неподвижными остаются точки, лежащие на плоскости Ox_2x_3 . Изменение геометрии слоя определяется тензором градиента деформации

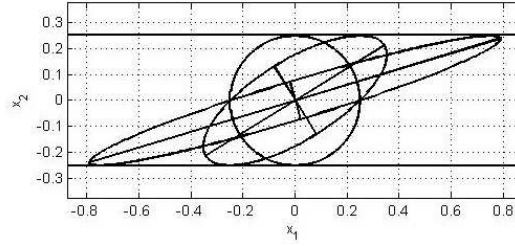
$$F = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сечение слоя по толщине, что позволит свести анализ к рассмотрению двумерной задачи. Координаты любой точки сечения $x = (x_1, x_2)^T$ исходной конфигурации переходят в новую точку с координатами

$$\tilde{x} = Fx,$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$, индекс T означает транспонирование. Тензор градиента деформации в двумерном случае определяется формулой

$$F \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r (\cos t + k \sin t) \\ r \sin t \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Рис. 2. Трансформация окружности при простом сдвиге, $k = 1, 3$

где $r = h/2$ – полутолщина слоя. Из соотношений (2) можно получить параметрическое выражение кривой

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos t + kr \sin t, \\ x_2 &= r \sin t, \end{aligned}$$

откуда $x_1 - kx_2 = r \cos t$. После простых преобразований, исключая параметр t , получим уравнение кривой в виде неявной функции

$$(x_1 - kx_2)^2 + x_2^2 = x_1^2 - 2kx_1x_2 + (1 + k^2)x_2^2 = r^2. \quad (3)$$

Квадратичная форма (3) описывает эллипс, соответствующий левому тензору Коши–Грина B^{-1} [12]:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 + k^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3) описывает эллипс, и угол наклона его главной оси к оси Ox находится из выражения для квадратичной формы и определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2}{k}. \quad (4)$$

Из этого соотношения вытекает, что тангенсы углов наклона главных осей эллипса вычисляются по формулам (4)

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2}. \quad (5)$$

Отметим, что выражение (5) определяет тангенсы углов наклона взаимно перпендикулярных осей эллипса, то есть $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. На рис. 2 показана трансформация окружности при простом сдвиге.

Следует отметить, что расстояние от точек касания окружности и эллипса с прямыми $x_2 = \pm r$ будет равно $k \cdot r$. Приводя квадратичную форму (3) к каноническому виду, получаем что уравнение эллипса есть

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{r^2 \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} \sqrt{k^2 + 4} \right)} + \frac{\tilde{x}_2^2}{r^2 \left(1 + \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \sqrt{k^2 + 4} \right)} = 1. \quad (6)$$

Выражения в скобках знаменателей (6) представляют собой квадраты собственных значений тензора Коши–Грина. Можно показать, что для любого значения величины сдвига площади круга и эллипсов будут конгруэнтны в связи с равенством их площадей: $S = \pi r^2 = \pi ab$. Отметим также, что, поскольку точки оси неподвижны,

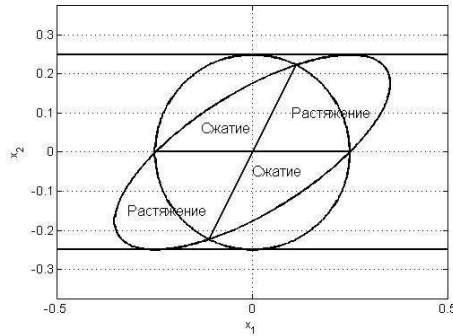


Рис. 3. Области растяжения и сжатия в эллипсе деформации

на ней в одной точке будут пересекаться окружность и эллипсы, и указанные радиусы будут разделять области растяжения и сжатия. Для определения отрезков разделяющих области растяжения и сжатия нужно решить уравнение

$$\sqrt{(r(\cos t + k \sin t))^2 + (r \sin t)^2} = r. \tag{7}$$

Решение (7) приводит к уже описанному из геометрических соображений уравнению $\sin t = 0$, решения которого и определяют отрезки, лежащие на оси Ox . Другой способ определения границ зон растяжения и сжатия может быть получен из условия равенства длин исходного и преобразованного отрезков

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + kx_2, \\ \tilde{x}_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Квадраты длин отрезков приравниваются с помощью соотношения

$$(x_1 + kx_2)^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) эквивалентно выполнению двух условий: $x_2 = 0$ и $x_2 = -\frac{2}{k}x_1$. Второе условие означает, что угол наклона отрезка равен $\operatorname{tg} \psi = -\frac{2}{k}$, откуда $\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2}{k}$. На рис. 3 представлены области растяжения и сжатия при простом сдвиге.

2. Полярное разложение

Известно, что, в отличие от чистого сдвига, простой сдвиг наряду с деформацией характеризуется поворотом среды как жесткого целого. В частности, указанные преобразования можно записать с помощью полярного разложения [6, 7]:

$$F = VR = RU \tag{9}$$

где R – тензор поворота, характеризующий вращение тела как твердого целого, V, U – положительные симметричные тензоры, называемые левым и правым тензорами коэффициентов длины [14]. Используя выражение для тензора поворота

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

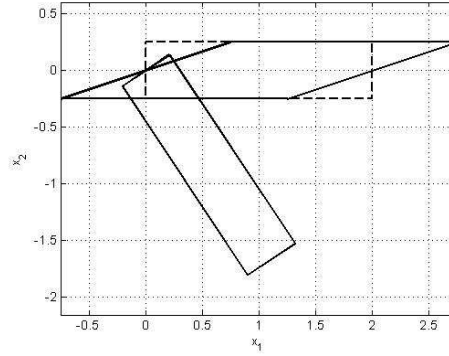


Рис. 4. Трансформация сечения с помощью полярного разложения $F = VR$, $k = 3$

при повороте по часовой стрелке, можно найти тензоры коэффициентов длины

$$V = FR^T, \quad U = R^T F. \quad (10)$$

Для разделения деформации и поворота можно воспользоваться известными выражениями для тензоров Коши–Грина. Например, для левого тензора после ряда преобразований имеем

$$B = FF^T = VR(VR)^T = V^2. \quad (11)$$

Для нахождения матрицы V нужно извлечь корень из матрицы левого тензора Коши–Грина. Однако вычисление матриц перемещений можно провести и непосредственно путем умножением матриц, в частности, из выражения (10) следует

$$V = F \cdot R^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi + k \sin \varphi & -\sin \varphi + k \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Учитывая симметрию тензора V , получим уравнение для определения угла поворота $\sin \varphi = -\sin \varphi + k \cos \varphi$, отсюда для тангенса угла поворота получаем $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{2}$. Учитывая это обстоятельство, получим последовательно выражения для тензоров коэффициентов длины и вращения

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2+k^2}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{k}{\sqrt{k^2+4}} \\ \frac{k}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{k^2+4}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{k}{\sqrt{k^2+4}} \\ -\frac{k}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{k^2+4}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

С помощью представления (9) можно получить выражение для правого тензора коэффициентов длины

$$U = R^T V R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{k}{\sqrt{k^2+4}} \\ \frac{k}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{2+k^2}{\sqrt{k^2+4}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Рассмотрим трансформацию преобразования некоторых конфигураций при простом сдвиге. В частности, разложение по схеме поворот и деформация, соответствующей первому соотношению в (11), представлено на рис. 4.

Полярное разложение по схеме $F = VR$ осуществляется с помощью поворота тела как твердого целого на угол $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{2} \right)$, который для величины сдвига

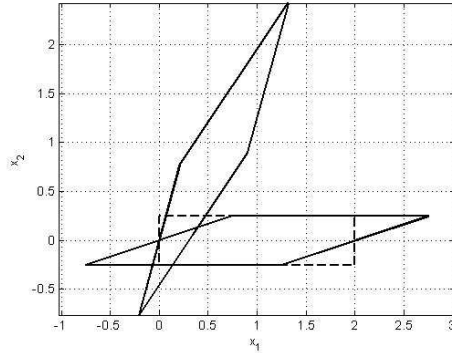


Рис. 5. Трансформация сечения с помощью полярного разложения $F = RU$, $k = 3$

$k = 3$ соответствует углу $\approx 56^\circ$ по часовой стрелке, затем с помощью тензора коэффициентов длин сечение укладывается в параллелограмм, соответствующий непосредственному воздействию тензора градиента деформации. На рис. 5 представлено разложение по схеме $F = RU$. Сначала выполняется преобразование с помощью тензора, затем поворот на тот же угол $\approx 56^\circ$ по часовой стрелке.

С помощью полярного разложения может быть выполнено также преобразование окружности при простом сдвиге. В результате сдвига наблюдается сплющивание окружности в эллипсы с поворотом главных осей. Последовательность преобразования окружности в эллипсы деформации показана на рис. 2.

3. Разложение при простом сдвиге

В то время как поворот представляет собой ясное геометрическое преобразование, тензоры деформации, которым соответствуют симметричные матрицы, не очевидным образом описывают геометрическое преобразование, происходящее при простом сдвиге. В [15] показано, что любое собственное преобразование с определителем, бóльшим нуля, может быть представлено как последовательное выполнение вращения, растяжения по координатным осям и еще одного вращения. Используя выражения для тензоров коэффициентов удлинений (12), (13), проведем их разложение. Тензор V может быть записан в виде

$$V = R_\theta D R_\theta^T, \tag{14}$$

где R_θ – матрица поворота на угол θ , D – диагональная матрица из собственных значений V . Собственные значения V равны соответственно $\lambda_1 = -\frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2}$, то есть $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Из условия (14) следует, что $V R_\theta = R_\theta D$, где $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Перемножив вышеприведенные матрицы, согласно (14) получим условия для определения компонентов матрицы поворота:

$$\text{tg } \theta = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2}.$$

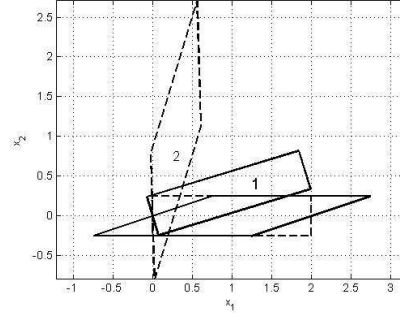


Рис. 6. Преобразование сечения слоя с помощью поворота, вращения и поворота, $k = 3$

Тогда для тензора поворота, выраженного через величину сдвига, имеем

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k\sqrt{k^2+4}+k^2+4}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{k\sqrt{k^2+4}+k^2+4}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{k\sqrt{k^2+4}+k^2+4}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k\sqrt{k^2+4}+k^2+4}} \end{pmatrix}.$$

Учитывая представление (9), тензор градиента деформации можно представить по формуле

$$F = R_{\theta} D R_{\theta}^T R_{\varphi} = R_{\theta} D R_{\varphi-\theta}, \quad (15)$$

полученной с использованием ортогональных тензоров $R_{\theta}^T R_{\varphi} = R_{\varphi-\theta}$, где $\operatorname{tg}(\varphi - \theta) = -\frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k^2+4}}{2}$. При этом

$$R_{\varphi-\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+4-k\sqrt{k^2+4}}} & \frac{\sqrt{2}(k-\sqrt{k^2+4})}{2(k^2+4-k\sqrt{k^2+4})} \\ \frac{\sqrt{2}(k-\sqrt{k^2+4})}{2(k^2+4-k\sqrt{k^2+4})} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+4-k\sqrt{k^2+4}}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование простого сдвига можно представить в виде последовательного действия поворота, растяжений вдоль координатных осей и повторного поворота. С помощью полученных соотношений преобразование простого сдвига сведем к последовательности поворотов и деформации. Очевидно, что неравенство $\operatorname{tg}(\varphi - \theta) < 0$ означает поворот на угол $\Delta = \varphi - \theta$ против часовой стрелки, далее с помощью диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ осуществим сжатие по координате x_1 и растяжение по координате x_2 , последующий поворот на угол θ по часовой стрелке приводит к требуемой конфигурации простого сдвига. Соответствующая геометрическая интерпретация приведена на рис. 6.

Преобразование окружности представлено на рис. 7. Отметим, что окружность индифферентна к повороту относительно ее центра, однако при этом имеет место поворот точек окружности. В результате первым, меняющим геометрию окружности, оказывается воздействие тензора растяжения, который преобразует ее в эллипс, затем производится поворот эллипса по часовой стрелке на угол θ .

Выполнив ряд матричных преобразований с тензором градиента деформации, можно легко получить выражения, необходимые для представления тензора, обратного тензору градиента, а также прямые и обратные выражения для правого

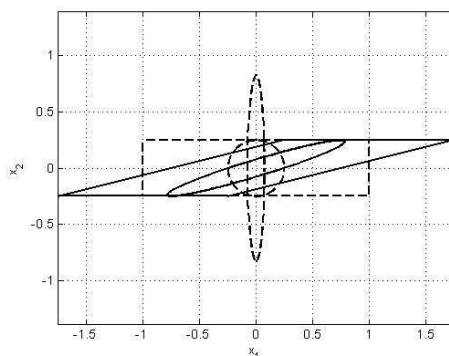


Рис. 7. Преобразование окружности при помощи поворота, вращения и поворота, $k = 3$

(мера деформации Коши – Грина) и левого тензоров Коши – Грина (мера деформации Фингера) соответственно [13]:

$$F = R_{\Delta} D R_{\theta}, \quad C = R_{\Delta}^T D R_{\Delta}, \quad B = R_{\theta} D R_{\theta}^T. \quad (16)$$

Используя (16), получаем формулы для правого тензора Пиолы и левого тензора Пиолы (мера деформации Альманси)

$$B^{-1} = R_{\theta} D^{-1} R_{\theta}^T, \quad C^{-1} = R_{\Delta}^T D^{-1} R_{\Delta}.$$

При этом было использовано соотношение

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

справедливость которого следует из условия $\lambda_2 = 1/\lambda_1$.

Отметим, что, поскольку $\lambda_1 = \operatorname{tg} \Delta$ и $\lambda_2 = \operatorname{tg} \theta$, можно получить выражение для связи углов: $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \Delta = 1$, откуда следует $\Delta = \pi/2 - \theta$.

Литература

1. *Dumansky A.M., Tairova L.P.* Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates // Proc. 2nd Int. Conf. on Advanced Composite Materials and Technologies for Aerospace Applications, ACMТAA-2012. – Wrexham, North Wales, UK, 2012. – P. 75–79.
2. *Dumansky A.M., Tairova L.P.* Analysis of nonlinear mechanical behavior of carbon fibre reinforced polymer laminates // Proc. 3rd Int. Conf. on Advanced Composite Materials and Technologies for Aerospace Applications, ACMТAA-2013. – Wrexham, North Wales, UK, 2013. – P. 66–69.
3. *Думанский А.М., Неповинных В.И., Русин М.Ю., Терехин А.В.* Оценка предельного состояния герметиков в конструкциях летательных аппаратов // Клеи. Герметики. Технологии. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
4. *Татарников О.В., Русин М.Ю., Воробьев С.Б., Прасолов А.Н.* Моделирование упругого поведения кремний органических герметиков при конечных деформациях // Клеи. Герметики. Технологии. – 2008. – № 2. – С. 20–23.
5. *Неповинных В.И., Русин М.Ю., Думанский А.М.* Закономерности образования упорядоченного рельефа поверхности разрушения герметиков под воздействием сдвиговой нагрузки // Клеи. Герметики. Технологии. – 2015. – № 10. – С. 22–27.

6. *Колодяжный С.Ю.* Структурно-кинематическая эволюция юго-восточной части балтийского щита в палеопроторозе. – М.: ГЕОС, 2006. – 334 с.
7. *Гзовский М.В.* Основы тектонофизики. – М.: Наука, 1975. – 536 с.
8. *Яковлев Ф.Л.* Анализ деформированного состояния зон сдвига в связи типами вторичных нарушений: постановка проблемы // Геодинамика и тектонофизика. – 2011. – Т. 2, № 1. – С. 68–82.
9. *Hart-Smith L.J.* The design of adhesively bonded joints // The Mechanics of Adhesion / Ed. by D.A. Dillard, A.V. Pocius. – Amsterdam: Elsevier, 2002. – P. 746–777.
10. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
11. *Ogden R.W.* Elements of the theory of finite elasticity // Nonlinear Elasticity. Theory and Applications / Ed. by Y.B. Fu, R.W. Ogden. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. – P. 1–57.
12. *Boulangier Ph., Hayes M.* Shear // Nonlinear Elasticity. Theory and Applications / Ed. by Y.B. Fu, R.W. Ogden. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. – P. 201–232.
13. *Голованов А.И.* Кинематика конечных упругопластических деформаций // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 7. – С. 16–30.
14. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 320 с.
15. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. – Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 267 с.
16. *Destrade M., Murphy J.G., Saccomandi G.* Simple shear is not so simple // Int. J. Non-Linear Mech. – 2010. – V. 47. – P. 210–214.

Поступила в редакцию
17.01.18

Думанский Александр Митрофанович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Малый Харитоньевский переулок, д. 4, г. Москва, 101990, Россия
E-mail: aldumans@yandex.ru

Русин Михаил Юрьевич, доктор технических наук, профессор, директор НПК – главный конструктор

АО «ОНПП «Технология» им. А.Г. Ромашина»
Киевское шоссе, д. 15, г. Обнинск, 249031, Россия
E-mail: mrusin@technologya.ru

Неповинных Виктор Иванович, кандидат технических наук, начальник лаборатории

АО «ОНПП «Технология» им. А.Г. Ромашина»
Киевское шоссе, д. 15, г. Обнинск, 249031, Россия
E-mail: nepvi@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 1, pp. 196–206

Transformation Geometry under Simple Shear

A.M. Dumansky^{a*}, *M.Y. Rusin*^{b**}, *V.I. Nepovinnykh*^{b***}^a*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990 Russia*^b*AO ORPE Technologiya, Obninsk, 249031 Russia*E-mail: **aldumans@yandex.ru, **mrusin@technologiya.ru, ***nepvi@mail.ru*

Received January 17, 2018

Abstract

Transformation geometry under simple shear has been analyzed. For this purpose, the mathematical apparatus of the nonlinear theory of elasticity has been used. The sequence of transformations under simple shear has been investigated. Comparison with polar decomposition has been performed. The regions of compression and extension in the deformation ellipse have been determined. It has been shown that a simple shift can be represented in the form of successive actions of rotation, deformation and rotation.

Keywords: simple shear, deformation ellipse, tensor of deformation gradient, Cauchy–Green tensor, polar decomposition.

Figure Captions

- Fig. 1. Deformation on simple shear scheme.
- Fig. 2. Circle transformation under simple shear.
- Fig. 3. Areas of tension and compression in strain-ellipse.
- Fig. 4. Cross-section transformation with the help of polar decomposition.
- Fig. 5. Cross-section transformation with the help of polar decomposition.
- Fig. 6. Cross-section transformation with the help of rotation, tension and rotation.
- Fig. 7. Circle transformation with the help of rotation, tension and rotation.

References

1. Dumansky A.M., Tairova L.P. Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates. *Proc. 2nd Int. Conf. on Advanced Composite Materials and Technologies for Aerospace Applications, ACMTAA-2012*. Wrexham, North Wales, UK, 2012, pp. 75–79.
2. Dumansky A.M., Tairova L.P. Analysis of nonlinear mechanical behavior of carbon fibre reinforced polymer laminates. *Proc. 3rd Int. Conf. on Advanced Composite Materials and Technologies for Aerospace Applications, ACMTAA-13*. Wrexham, North Wales, UK, 2013, pp. 66–69.
3. Dumanskii A.M., Nepovinnykh V.I., Rusin M.Yu., and Terehin A.V. Estimating the limit state of sealants in aircraft structures. *Polym. Sci., Ser. D*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 201–207. doi: 10.1134/S1995421214030046.

4. Tatarniov O.V., Rusin M.Y., Vorob'ev S.B., Prasolov A.N. Modeling of elastic behavior of organic silicon sealants under finite strain. *Klei, Germetiki, Tekhnol.*, 2008, no. 2, pp. 20–23. (In Russian)
5. Nepovinnykh V.I., Rusin M.Yu., Dumanskii A.M. General rules of formation of an ordered relief on a sealant fracture surface under shear loading. *Polym. Sci., Ser. D*, 2016, vol. 9, no. 2. pp. 145–150. doi: 10.1134/S1995421216020167.
6. Kolodyazhnyi S.Yu. *Strukturno-kinematicheskaya evolyutsiya yugo-vostochnoi chasti baltiiskogo shchita v paleoproterozoe* [Paleoproterozoic Structural Kinematic Evolution of the Southeastern Part of the Baltic Shield]. Moscow, GEOS, 2006. 334 p. (In Russian)
7. Gzovsky M.V. *Osnovy tektonofiziki* [Principles of Tectonophysics]. Moscow, Nauka, 1975. 536 p. (In Russian)
8. Yakovlev F.L. Strain analysis of shear zones in terms of types of secondary fractures: Problem statement. *Geodin. Tektonofiz.*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 68–82. (In Russian)
9. Hart-Smith L.J. The design of adhesively bonded joints. In: Dillard D.A., Pocius A.V. (Eds.) *The Mechanics of Adhesion*. Amsterdam, Elsevier, 2002, pp. 746–777.
10. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Baltimore, Md., 1972. 592 p.
11. Ogden R.W. Elements of the theory of finite elasticity. In: Fu Y.B., Ogden R.W. (Eds.) *Nonlinear Elasticity. Theory and Applications*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001, pp. 1–57.
12. Boulanger Ph., Hayes M. Shear. In: Fu Y.B., Ogden R.W. (Eds.) *Nonlinear Elasticity. Theory and Applications*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001. pp. 201–232.
13. Golovanov A.I. Kinematics of finite elastoplastic deformations. *Russ. Math.*, 2010, vol. 54, no. 7, pp. 12–25. doi: 10.3103/S1066369X10070029.
14. Mase G. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. New York, McGraw Hill Company, 1970. 320 p.
15. Godunov S.K., Romensky E.I. *Elementy mekhaniki sploshnykh sred i zakony sokhraneniya* [Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws]. Novosibirsk, Nauchn. Kn., 1998. 267 p. (In Russian)
16. Destrade M., Murphy J.G., Saccomandi G. Simple shear is not so simple. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2010, vol. 47, pp. 210–214.

⟨ **Для цитирования:** Думанский А.М., Русин М.Ю., Неповинных В.И. Геометрия преобразований при простом сдвиге // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 1. – С. 196–206. ⟩

⟨ **For citation:** Dumansky A.M., Rusin M.Y., Nepovinnykh V.I. Transformation geometry under simple shear. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 1, pp. 196–206. (In Russian) ⟩