Казанский федеральный университет

СУНЦ КФУ
IT-лицей

НАУКА И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

Л.Н. ЗАЙНУЛЛИНА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Специализированный учебный научный центр –
общеобразовательная школа-интернат «IT-лицей»

Л.Н. ЗАЙНУЛЛИНА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2023

УДК 519.2(075.3)
ББК 22.171я721
З-17

Печатается по рекомендации Ученого совета Специализированного учебного научного центра – общеобразовательной школы-интерната «IT-лицей» Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 2 от 15 октября 2023 г.)

Автор
кандидат педагогических наук, учитель математики первой квалификационной категории СУНЦ IT-лицей КФУ **Л.Н. Зайнуллина**

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент, учитель математики СУНЦ IT-лицей КФУ **Р.Ф. Ахвердиев**;
кандидат технических наук, доцент кафедры математики Университета управления «ТИСБИ» **Л.Р. Пантелеева**

Зайнуллина Л.Н.
З-17 **Теория вероятностей** [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.Н. Зайнуллина. – Электронные текстовые дан. (1 файл: 1,26 Мб). – Казань: Издательство Казанского университета, 2023. – 65 с. – Системные требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F_1292936281/Teoriya.Veroyatnostei_.pdf. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-00130-771-6

Учебное пособие предназначено для обучающихся 8–9 классов. Учебное пособие содержит теорию, разобранные типовые задачи, вопросы и упражнения для самостоятельного решения по каждой теме, банк заданий по всему предложенному курсу дисциплины «Теория вероятностей».

УДК 519.2(075.3)
ББК 22.171я721

ISBN 978-5-00130-771-6

© Зайнуллина Л.Н., 2023
© Издательство Казанского университета, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

§ 1. Случайные события и вероятность 5

§ 2. Вероятность и частота события 8

§ 3. Противоположные события 12

§ 4. Операции над событиями 14

§ 5. Теоремы сложения для совместных и несовместных событий 16

§ 6. Зависимые и независимые события. Теоремы умножения 21

§ 7. Задачи на теоремы сложения и умножения 24

§ 8. Вероятность наступления хотя бы одного события 26

§ 9. Формула полной вероятности и формула Байеса 28

§ 10. Геометрическая вероятность 31

§ 11. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли 34

§ 12. Случайная величина. Законы распределения случайной величины 37

§ 13. Числовые характеристики случайной величины 42

§ 14. Закон больших чисел 47

Задачи 49

Ответы к задачам 63

Список использованной литературы 64

ВВЕДЕНИЕ

Социальные, биологические, экономические, технические системы окружающего мира подчиняются определенным закономерностям. Существуют два подхода к изучению этих закономерностей: классический и вероятностный. Классический подход выделяет основные факторы, определяющие данное явление, и пренебрегает второстепенными факторами, иначе говоря, элементы системы связаны функциональной зависимостью. Вероятностный подход учитывает не только основные факторы, но множество второстепенных неконтролируемых факторов, которые привносят в систему элемент неопределенности и искажают результаты.

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Здесь под случайными явлениями понимаются явления с неопределенным исходом.

С 1 сентября 2023 года школьники 7–9 классов начнут изучать новый предмет «Вероятность и статистика». Это часть математики, но будет проводится как отдельный урок. На изучение предмета предусмотрен 1 час в неделю – всего 34 часа в год.

При создании настоящего пособия автор ставила перед собой несколько целей: во-первых, дать значительное количество задач (типовых и оригинальных), которые бы достаточно полно отображали суть основных понятий теории вероятностей; во-вторых, обеспечить необходимой теоретической информацией для их решения; в-третьих, по каждой теме привести решение основных типов задач. В начале каждого параграфа содержится необходимый теоретический материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий, в конце некоторых параграфов приведены интересные исторические факты. В конце всех тем приведен банк задач по всем пройденным темам.

В настоящем издании приведено более 200 авторских задач и задач, взятых из открытых источников. К задачам имеются ответы, а к части задач – указания. Пособие предназначено для учеников 8–9 классов общеобразовательных школ и профильных лицеев.

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Попытка объяснить и предсказать случайные события с помощью математических символов привела к появлению такого раздела математики, как теория вероятностей.

В нашей жизни имеют место события, которые никогда не произойдут. Например, в 30-градусный мороз никогда не пойдет дождь или взрослый человек никогда не сможет вновь стать ребенком.

Определение 1. События, которые не произойдут ни при каких условиях, называются ***невозможными.***

В противовес, есть события, про которые известно, что они обязательно произойдут. Например, после зимы всегда наступает весна, за днем следует ночь, снег тает при плюсовой температуре.

Определение 2. События, которые обязательно произойдут при каких условиях, называются ***достоверными.***

Однако существуют и события, которые невозможно точно прогнозировать. Например, перед началом автогонок или лошадиных скачек невозможно точно предсказать, какая машина или лошадь придут первыми. Можно лишь оценить шанс на победу, учитывая успехи в прошлом сезоне. Если рассмотреть прогноз погоды, то нельзя быть точно уверенным, что дождь будет именно в это время и в определенном месте. Поэтому и в метеорологических сводках пишут, что «вероятность дождя 60%», «возможен град» или «прогнозируется усиление ветра». Или, если бросаем игральную кость в игре, нельзя быть уверенным, что выпадет шестерка.

Вышеперечисленные события называются случайными.

Определение 3. События, которые могут как произойти, так и не произойти, называются ***случайными.***

Случайные события связаны с некоторыми условиями. Например, если говорить про победу определенного автомобиля в автогонке, то условие здесь – машина должна принять в ней участие. Или для выпадения «орла»

нужно подбросить монету. Создавая такие условия, мы производим случайный эксперимент.

Определение 4. ***Случайный эксперимент*** – это условия, в которых рассматриваются случайные события.

К случайному эксперименту относятся бросание монеты, бросание игральной кости, выстрелы в тире, сдача экзамена. И, соответственно, как вариант, случайными событиями будут выпадение решки, выпадение тройки, попадание в мишень, сдача экзамена.

Введем еще одно понятие.

Определение 5. События случайного опыта, которые нельзя разделить на более простые, называются ***элементарными событиями***. В каждом опыте можно выделить элементарные события, из которых состоят все остальные события. Например, в результате бросания игральной кости можно говорить о событии «выпадет шестерка» или о событии «выпадет число очков, кратное трем». Последнее событие можно разбить на два события: «выпало три очка», «выпало шесть очков». А событие «выпала шестерка» на более простые события не разделяется.

Рассмотрим случай, когда элементарные события в опыте имеют одинаковые шансы, такие события называются равновозможными. Например, при бросании игрального кубика (кости) выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков имеют одинаковые шансы.

Определение 6. События называются ***равновозможными***, если появление одного из них не является более возможным, чем появление другого.

Определение 7. События называются ***единственно возможными***, если при испытании появление хотя бы одного из них является событием достоверным.

Пример 1. В классе 10.3 всего 10 учеников. Учитель математики во время урока вызывает к доске одного ученика. Данный случайный опыт имеет 10 различных элементарных событий.

Пример 2. Игральную кость бросают 2 раза. В этом опыте $6 \cdot 6 = 36$ элементарных событий. Их наглядно можно представить в виде таблицы, где

в каждой ячейке результат первого броска (первое число) сочетается с результатом второго броска (второе число).

Таблица 1

1; 1	2; 1	3; 1	4; 1	5; 1	6; 1
1; 2	2; 2	3; 2	4; 2	5; 2	6; 2
1; 3	2; 3	3; 3	4; 3	5; 3	6; 3
1; 4	2; 4	3; 4	4; 4	5; 4	6; 4
1; 5	2; 5	3; 5	4; 5	5; 5	6; 5
1; 6	2; 6	3; 6	4; 6	5; 6	6; 6

Обратите внимание, что в данном примере обсуждается опыт с двумя бросаниями кости, поэтому ответом будут два числа.

Вопросы

1. Какие события называются невозможными? Приведите пример.
2. Какие события называются случайными? Приведите пример.
3. Назовите элементарные события, которые возникают при бросании монеты.
4. Что является элементарным событием в опыте, где игральную кость бросают два раза?

Задачи

1. Распишите элементарные события, где игральную кость бросают дважды.
2. Во сколько раз больше число элементарных событий при трёх бросаниях монеты, чем при двух бросаниях монеты?
3. Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпало: а) 3 очка; б) 6 очков; в) 2 очка.

4. Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпало более: а) 17 очков; б) 16 очков.

5. В ящике лежат 2 красных яблока и 1 зеленое. Из ящика наугад извлекают по одному яблоку, пока не извлекут зеленое. Выпишите все элементарные события этого опыта.

Интересный факт

Однажды к Г. Галилею явился солдат и попросил помочь ему в решении вопроса: какая сумма – 9 или 10 очков – при бросании трех костей выпадает чаще?

На первый взгляд, что шансы равны, так как каждая сумма из 9 и 10 очков может быть получена одним их шести способов:

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3;$

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$

Однако с учетом перестановок для суммы 9 очков получается 25 различными способами (по 6 способов для первого, второго, пятого вариантов суммы, по 3 способа для третьего и четвертого вариантов, 1 способ для последнего варианта 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1), а для суммы 10 очков – 27 различными способами (6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3). Как видно, шансы этих случайных событий довольно близки между собой и относятся друг к другу как 25 : 27, что и вызвало затруднения солдата. Но чаще выпадает 10 очков.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТЬ И ЧАСТОТА СОБЫТИЯ

Часто мы не можем сказать, произойдет данное событие или нет, но мы можем оценить шансы данного события. Например, на столе лежат карточки, на обратной стороне которых написаны буквы А, Б, В, Г, Д. Тогда шанс вытащить с первого раза букву Д оценивается как 1 : 5. Таким образом, мы измерили шанс

наступления случайного события. И это число называется вероятностью случайного события.

Введем определение вероятности.

Определение 8. Отношение числа события *M*, благоприятствующих событию *A*, к общему количеству событий *N*, называется классической ***вероятностью*** наступления события *A*.

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{A}) = \frac{M}{N}$$

В предыдущем примере *N* = 5 букв, благоприятствующий исход *M* = 1 буква «Д». Из определения вероятности вытекают следующие ее ***свойства:***

1) вероятность достоверного события равна единице *P (A)* = 1;
2) вероятность невозможного события равна нулю $P\ (\overline{A}) = 0$;
3) вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, 0 < *P (A)* < 0.

Пример 3. На зачет по геометрии вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение: Пусть событие *A* = {выученный вопрос}

Общее число исходов *N* = 60

Количество благоприятствующих событий М = 60 – 6 =54

Вероятность попадания выученного вопроса $\mathrm{P(A)} = \frac{M}{N} = \frac{54}{60} = 0{,}9$

Ответ: *P (A)* = 0,9.

Пример 4. Миша и Амир играют в кости. Каждый бросает кость два раза. Выигрывает тот, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первым бросал кости Миша, и у него выпало 5 очков и 4 очка. Теперь бросает кости Амир. Какова вероятность, что Амир выиграет?

Решение: Для решения данной задачи нам может помочь таблица 1.

Событие *A* = {Амир выиграет}

Общее число исходов *N* = 36

Амир выиграет, если сумма его очков больше 9. Это возможно в случаях: (4; 6), (5; 5), (5; 6), (6; 4), (6; 5), (6; 6). Количество благоприятствующих событий $M = 6$.

Вероятность выигрыша Амира $\mathrm{P}\ (\mathrm{A}) = \frac{M}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Ответ: $P\ (A) = 1/6$.

Рассмотрим случай, когда, например, бросали шарик в лунку 50 раз, и попали в лунку 15 раз. Тогда отношение числа попаданий к общему количеству числу бросков $\frac{15}{50} = 0{,}3$ – есть частота случайного события.

Определение 9. Отношение числа опытов m, в которых событие *A* произошло, к общему количеству проведенных одинаковых опытов *n*, называется ***частотой*** наступления события *A*.

$$w\ (\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$$

Частота наступления случайного события вычисляется после опыта, а вероятность – до опыта.

Пример 5. Вероятность того, что новая «КИА» в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,2. В городе *N* из 400 проданных«КИА» в течение года в гарантийную мастерскую поступил 90 автомобилей. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в городе *N* ?

Решение: *A* = {гарантированный ремонт}

$P\ (A) = 0{,}2$; $n = 400$; $m = 90$;

$$w(\mathrm{A}) = \frac{m}{n} = \frac{90}{400} = 0{,}225$$

Разница между вероятностью и частотой составляет:

$w\ (A) - P\ (A) = 0{,}225 - 0{,}2 = 0{,}025$.

Ответ: 0,025.

Замечание. Если опыт повторять много раз, то частота события приближается к ее вероятности.

Интересный факт

Великий французский философ и математик Жан Лерон Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов.

Задача звучит следующим образом: монетка подбрасывается 2 раза, и какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «герб»?

Решение, предложенное Даламбером: Опыт имеет три равновозможных исхода: обе монеты упали на «орла»; обе монеты упали на «решку»; одна из монет упала на «орла», другая на «решку». Из них благоприятными для нашего события будут два исхода, поэтому искомая вероятность равна 2/3. Даламбер совершил одну из самых распространенных ошибок, допускаемую при вычислении вероятности: он объединил два принципиально разных исхода в один. Чтобы не повторить эту ошибку, помните, что природа различает все предметы, даже если внешне они для нас неотличимы.

Правильное решение: опыт имеет четыре равновозможных исхода: орел – орел, решка – решка, орел – решка, решка – орел. Таким образом, число всех возможных исходов равно 4, а число благоприятных – 3, тогда $P(A) = 3/4$.

Вопросы

1. Что такое вероятность наступления случайного события?
2. Какие значения может принимать вероятность случайного события?
3. В чем состоит отличие частоты от вероятности?
4. Приведите примеры достоверных, невозможных и случайных событий.

Задачи

6. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

7. Команда «Рубин», встречаясь в матче по футболу с командой «Балтика», может проиграть, выиграть или сыграть вничью. Равновозможные ли эти события?

8. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

9. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

10. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

11. В некоторый период времени относительная частота солнечных дней составила 0,6. Сколько дней было пасмурных, если солнечных было 42 дня.

12. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

§ 3. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Рассмотрим какой-нибудь опыт и все элементарные события, которые возникают в данном опыте. Разобьём все эти элементарные события на два множества. Первое множество образует событие A, второе множество образуют элементарные события, благоприятствующие другому событию, и будем обозначать его за $\bar{A}$ и говорить, что оно противоположно событию A.

Соотношения между событиями удобно представить в виде диаграмм Эйлера. Здесь весь эксперимент – это прямоугольник, событие A – круг, а оставшаяся часть – это противоположное событие $\bar{A}$ (рис. 1).

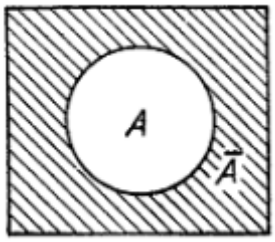

Рис. 1.

Если событие A противоположно событию $\bar{A}$, то событие $\bar{A}$ противоположно событию A, поэтому события A и $\bar{A}$ называют взаимно противоположными. Примеров противоположных событий много. Например, A – {попадание при выстреле} и $\bar{A}$ – {промах}; A – {орел} и $\bar{A}$ – {решка}; A – {сдача экзамена} и $\bar{A}$ – {провал}.

Взаимно противоположные события одновременно произойти не могут, но какое-либо из них обязательно произойдет. Поэтому сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Пример 6. Вероятность заболеть ОРВИ в осенний период равна 0.4. Какова вероятность, что случайно выбранный человек не заболеет?

Решение: событие A – {болен}; $\bar{A}$ – {здоров}

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$, тогда $0{,}4 + P(\overline{A}) = 1$, тогда $P(\overline{A}) = 0{,}6$

Замечание. Достоверное и невозможное события всегда взаимно противоположны.

Вопросы

1. Какие события называются противоположными? Приведите примеры.
2. Сформулируйте свойство вероятностей противоположных событий.
3. Могут ли события A и C быть противоположными, если $P(A) = 0{,}85$, $P(C) = 0{,}15$?
4. Бросили игральную кость. Выпало от 3 до 5 очков. Перечислите элементарные события, благоприятствующие событию $\bar{A}$, и найдите $P(\bar{A})$.

5. В ванной горит 4 лампочки. Опишите словами событие, противоположное событию:

а) в течение года перегорит хотя бы одна лампочка;

б) в течение года перегорит меньше 3 лампочек;

в) в течение года перегорят ровно 2 лампочек.

§ 4. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение 10. ***Суммой (объединением)*** двух событий A и B называется новое событие $A + B$ (или: $A \cup B$), состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B в данном опыте. Например, если из револьвера произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ – попадание хотя бы при одном выстреле (или при первом выстреле, или при втором, или в обоих случаях).

На рис. 2 изображена диаграмма Эйлера – Венна, прямоугольник на которой – это множество всех исходов, кругами представлены события A и B, а заштрихованная часть – сумма этих событий.

Определение 11. ***Произведением (пересечением)*** двух событий A и B называется новое событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), состоящее в совместном появлении A и B в данном опыте (рис. 3). В примере с тем же револьвером $A \cdot B$ – это попадание и при первом, и при втором выстрелах.

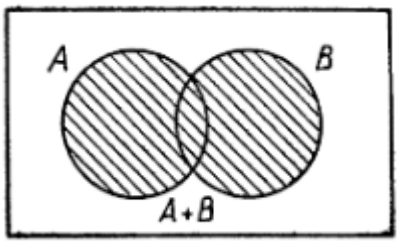

Рис. 2.

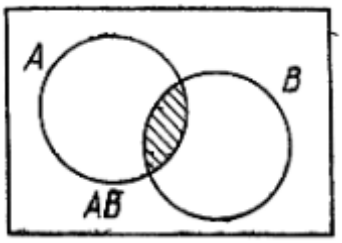

Рис. 3.

Пример 7. Игральную кость бросили дважды. Событие A – при первом броске выпадет 2 очка, событие B – при втором броске 3 очка. Указать в таблице 1 все элементарные исходы, благоприятствующие событию $A \cup B$, и найти вероятность события $A \cup B$.

Решение: в первом случае событие A – это все элементы второго столбца, событие B – все элементы 3-й строки, то $A \cup B$ есть всего 6 + 6 – 1 = 11 исходов и вероятность $P(A \cup B) = 11/36 = 0{,}31$.

$A \cap B$ – это единственный исход (2; 3) и $P(A \cap B) = 1/36 = 0{,}03$.

Ответ: $P(A \cup B) = 0{,}31$ и $P(A \cap B) = 0{,}03$.

Задачи

13. Событию A благоприятствуют 7, а событию B – 8 элементарных событий, из этих 8 – 4 элементарных события благоприятствуют обоим событиям. Нарисуйте в тетради соответствующую диаграмму и ответьте на вопросы:

а) сколько событий благоприятствуют событию A, но не благоприятствуют событию B;

б) сколько событий благоприятствуют событию B, но не благоприятствуют событию A;

в) сколько событий благоприятствуют событию $A \cup B$, а сколько

$A \cap B$?

14. Событию A благоприятствуют 6, а событию B – 10 элементарных событий. При этом 12 элементарных событий благоприятствуют событию $A \cup B$. Нарисуйте в тетради соответствующую диаграмму и ответьте на вопросы:

а) сколько событий благоприятствуют только событию A;

б) сколько событий благоприятствуют только событию B;

в) сколько событий благоприятствуют событию $A \cap B$?

15. Игральную кость бросают дважды. Событие A – выпадет число кратное 3, событие B – выпадет число кратное 3.

а) Выписать все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$, и вычислить $P(A \cup B)$.

б) Выписать все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$, и вычислить $P(A \cap B)$.

16. Запишите формулами события, изображенные на рис. 4 и рис. 5.

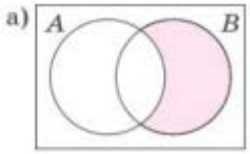

Рис. 4.

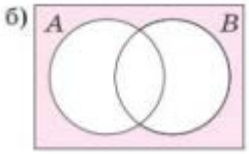

Рис. 5.

Примечание. Далее вероятность произведения двух событий A и B будем обозначать как $P(A \cdot B)$, а вероятность суммы как $P(A + B)$.

§ 5. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ И НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Определение 12. События называются ***несовместными***, если наступление одного из них исключает наступление любого другого в одном и том же испытании.

Определение 13. События называются ***совместными***, если наступление одного из них не исключает наступление любого другого в одном и том же испытании.

Например, получение «5» и «4» одновременно за один и тот же экзамен по математике – события несовместные. А плохое настроение из-за пасмурной погоды и головной боли – события совместные.

Замечание. Несколько событий образуют полную группу, если эти события единственно возможные и попарно несовместные.

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятности этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Пример 8. Игральную кость бросают дважды. Какова вероятность, что оба раза выпало разное число очков?

Решение: событие A состоит в том, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Событие B состоит в том, что во второй раз выпало больше очков, чем в первый.

Выделим в таблице 2 элементарные события, благоприятствующие A (15 штук) розовым цветом, а B (15 штук) – голубым. Общее число элементарных событий 36. $P(A) = P(B) = 15/36$.

$$P(A + B) = \frac{M_1+M_2}{N} = \frac{15+15}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(A + B) = \frac{M_1+M_2}{N} = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} = \frac{15}{36} + \frac{15}{36} = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

Таблица 2

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Следствие: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

В противовес рассмотрим другой пример.

Пример 9. Бросают две правильные игральные кости. Какова вероятность, что на обеих выпало число очков меньше трех?

Решение: событие A – «на первой кости выпало меньше 3 очков», а событие B – «на второй кости выпало меньше 3 очков».

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие A (12 штук) розовым цветом, а B (12 штук) – голубым, а события, благоприятствующие и A, и B (4 штуки), зеленым. Общее число элементарных событий 36.

Таблица 3

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

$P(A) = P(B) = 12/36 = 1/3$, $P(A + B) = 20/36 = 5/9$.Очевидно, что

$P(A + B) \neq P(A) + P(B)$

$1/3 + 1/3 \neq 5/9$, так как события A и B не являются несовместными, у них есть общие элементарные события (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), которые входят и в событие A и в событие B. При этом $P(A \cdot B) = 4/36 = 1/9$.

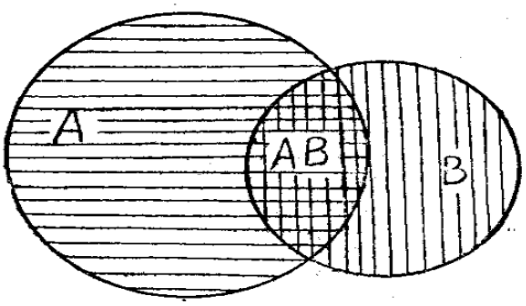

Рис. 6.

Чтобы решить эту задачу, вернемся к диаграмме Эйлера – Венна (рис. 6).

Чтобы найти всю заштрихованную площадь (она соответствует сумме событий $A + B$), необходимо из суммы площадей фигур A и B вычесть площадь

общей зоны (она соответствует произведению событий $A \cdot B$), так как иначе она будет учтена дважды.

Таким образом, теорема сложения для совместных событий.

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их соместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Поэтому в задаче, используя формулу сложения совместных событий, получим: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 1/3 + 1/3 - 1/9 = 5/9$

Замечание. Для трех совместных событий формула сложения вероятностей усложняется:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Вопросы

1. Какие события называются совместными?
2. Какие события называются несовместными?
3. Сформулируйте словами теоремы сложения для совместных и для несовместных событий.
4. Могут ли события быть несовместными, если P(A)=0,5, P(B)=0,6?
5. Могут ли события быть несовместными, если P(A)=0,1, P(B)=0,4?

Задачи

17. Два студента решают задачу. Вероятность того, что первый студент решит задачу (событие A), равна 0,9; вероятность того, что второй студент решит задачу (событие B), равна 0,8. Какова вероятность того, что задача будет решена?

18. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором – 7, в третьем – 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

19. Гражданин Н едет на работу на машине. Вероятность попасть в пробку, равна 0,6, вероятность, что закончится бензин, равна 0,2. Какова вероятность, что он опоздает на работу?

20. В воскресенье друзья собираются либо пойти в лес с вероятностью 0,5, либо сходить в кино с вероятностью 0.2, либо остаться дома. Определить вероятность, что друзья не останутся дома.

21. Вероятность, что на экзамене по математике студент Петров получит оценку «неуд», равна 0.4, вероятность неявки на экзамен составляет 0,1. Какова вероятность, что студенту Петрову придется сдавать математику в дополнительную сессию?

22. Вычислить вероятность пересечения событий A и B, если:

а) $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.6$, $P(A + B) = 0{,}8$.

б) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.9$, $P(A + B) = 0{,}7$.

23. Пользуясь диаграммой Эйлера – Венна, докажите, что события $A \cap B$ и $A \cap \overline{B}$ несовместны.

24. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру:

а) кофе закончится хотя бы в одном автомате;

б) кофе закончится только в одном автомате;

в) кофе останется в обоих автоматах.

§ 6. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Определение 14. События A и B называются ***независимыми***, если вероятность наступления одного события не зависит от появления или непоявления другого события.

Определение 15. События A и B называются ***зависимыми***, если вероятность наступления одного события зависит от появления или непоявления другого события.

Теорема 3. Вероятность наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Пример 10. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что на первой кости выпало более трех очков, а на второй – менее трех?

Таблица 4

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Решение: событие A состоит в том, что «на первой кости выпало более 3 очков», а событие B, что «на второй кости выпало меньше 3 очков».

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие A (18 штук) розовым цветом, а B (12 штук) – голубым, а события, благоприятствующие и A, и B (6 штук), зеленым. Общее число элементарных событий 36.

$P(A) = 18/36 = 1/2$, $P(B) = 12/36 = 1/3$, $P(A \cdot B) = 6/36 = 1/6$

Так как события A и B независимые, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$.

Ответ: $P(A \cdot B) = 1/6$.

Определение 16. Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается $P(B|A)$ или $P_A(B)$.

Теорема 4. Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Замечание. Для трех событий A, B, C имеем:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$$

Пример 11. В классе 15 учеников, из них 6 девочек. Какова вероятность, что на дежурство в столовой сегодня выберут 2 девочек и 1 мальчика.

$N = 15$ человек

$M_1 = 6$ девочек, $M_2 = 9$ мальчиков

Решение: события $A = B$ – {девочка}, C – {мальчик}

$P(A) = \frac{6}{15}$, так как 1 девочка ушла на дежурство, то учеников осталось 14 человек, из них 5 девочек, поэтому $P(B|A) = \frac{5}{14}$.

Учеников осталось 13 человек, из них 4 девочки, тогда $P(C|AB) = \frac{9}{13}$

Тогда вероятность выхода на дежурство 2 девочек и 1 мальчика:

$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = 0{,}099$.

Ответ: $P(A \cdot B \cdot C) = 0{,}099$.

Вопросы

1. Какие события называются независимыми? Приведите пример.
2. Какие события называются зависимыми? Приведите пример.

Задачи

25. Для первого рабочего вероятность выполнить норму выработки равна 0,9, для второго – 0.8. Найти вероятность, что оба рабочих не выполнят норму выработки.

26. В коробке лежат 5 карточек С, С, А, М, А. Определить вероятность, что при последовательном извлечении 5 карточек получится слово МАССА.

27. В городе М 45% населения – люди среднего возраста, из них 20% – госслужащие. Найдите вероятность того, что случайно выбранный житель города М является госслужащим.

28. В пенале лежат 3 красных, 2 зеленых и 2 синих карандаша. Маша, не глядя, достала три карандаша. Какова вероятность, что

А) все три красных; Б) все разного цвета; в) 2 зеленых и 1 синий?

29. Два друга входят в состав различных команд по плаванию, состоящих из 7 спортсменов. Определить вероятность, что оба друга будут выступать под одним и тем же номером.

Интересный факт (Парадокс Монти Холла)

Парадокс назван так в честь ведущего американского телешоу Let’s Make a Deal – Монти Холла. Классическая формулировка звучит так: «Допустим, некоему игроку предложили поучаствовать телешоу, и ему необходимо выбрать одну из трех дверей. За двумя дверьми находятся козы, за одной – главный приз, автомобиль, ведущий знает расположение призов. После того, как игрок делает свой выбор, ведущий открывает одну из оставшихся дверей, за которой находится коза, и предлагает игроку изменить свое решение. Стоит ли игроку согласиться или лучше сохранить свой первоначальный выбор?»

Считается, что после того, как ведущий открыл одну из дверей и показал козу, игроку остается выбрать между двумя дверями. Вероятность угадать машину составляет ½, поэтому нет разницы – менять свой выбор или нет. И тем не менее теория вероятностей гласит, что можно увеличить свои шансы на выигрыш, изменив решение.

Для этого вернемся на шаг назад. В тот момент, когда мы сделали свой изначальный выбор, мы разделили двери на две части: выбранная нами и две остальные. Очевидно, что вероятность того, что автомобиль прячется за «нашей» дверью, составляет ⅓ – соответственно, автомобиль находится за одной из двух оставшихся дверей с вероятностью ⅔. Когда ведущий показывает, что за одной из этих дверей – коза, получается, что эти ⅔ шанса приходятся на вторую дверь. А это сводит выбор игрока к двум дверям, за одной из которых (изначально выбранной) автомобиль находится с вероятностью ⅓, а за другой – с вероятностью ⅔. Выбор становится очевидным. Что, разумеется, не отменяет того факта, что с самого начала игрок мог выбрать дверь с автомобилем.

§ 7. ЗАДАЧИ НА ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Пример 12. Три баскетболиста должны произвести по одному броску мяча. Вероятности попадания в корзину первым, вторым и третьим баскетболистами равны, соответственно, 0,6; 0,7; 0,8. Определить вероятность, что ровно два баскетболиста попадут в корзину.

Решение: обозначим за $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}8$ вероятности попадания, тогда вероятности промаха $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}2$.

Два баскетболиста попадут – это может быть первый и второй, первый и третий, второй и третий, и не забываем, что последний баскетболист в этой тройке промахнется. Таким образом, искомая вероятность $P(A)$ – сумма произведений независимых событий:

$P(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot p_3 \cdot q_2 + p_2 \cdot p_3 \cdot q_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}452$.

Ответ: $P(A) = 0{,}452$.

Пример 13. Из трамвайного депо в случайном порядке выходят 4 трамвая № 5 и 2 трамвая № 7. Определить вероятность, что вторым по счету выйдет трамвай маршрута № 7.

Решение: может быть вариант, когда первым на линию вышел трамвай № 5, а затем № 7, то есть $P(A) = 4/6$; $P(B|A) = 2/5$.

И может быть вариант, когда оба трамвая № 7: $P(B) = 2/6$; $P(B|B) = 1/5$.

Тогда $P(C) = P(A) \cdot P(B|A) + P(B) \cdot P(B|B) = 4/6 \cdot 2/5 + 2/6 \cdot 1/5 = 1/3$

Ответ: 1/3.

Задачи

30. Два мальчика играют в дартс, каждый может произвести по одному метанию. Вероятность попадания в «Яблочко» для первого игрока составляет 0.3, для второго – 0,4. Найти вероятность того, что попадет только один игрок.

31. В южных городах среднее число ясных дней в июне составляет 25. Определить вероятность того, что:

а) первых три дня будут ясными;

б) из первых трех дней только один день будет ясным.

Ответы округлить до третьего знака после запятой.

32. В урне 10 лотерейных билетов, из них 3 выигрышных. Из урны последовательно извлекают 2 билета. Какова вероятность, что первый обязательно выигрышный?

33. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

34. Чтобы поступить в институт на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 67 баллов по каждому из трёх предметов: математике, русскому языку и иностранному языку. Чтобы поступить на специальность «Менеджмент», нужно набрать не менее 67 баллов по каждому из трёх предметов: математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент Т. получит не менее 67 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,5, по иностранному языку – 0,8,

по обществознанию – 0,9. Найдите вероятность того, что Т. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

35. В урну, где есть белый и черный шар, опустили еще один шар (белый или черный). Найти вероятность, что случайно извлеченный шар – белый.

36. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,8, из второго – 0,6. Каждое орудие сделало по одному выстрелу. Найти вероятность, что цель поражена.

§ 8. ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

Пусть в результате испытаний могут наступить n независимых событий A_1, A_2, … , A_n и известны вероятности их наступлений $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, … , $P(A_n) = p_n$. Вероятности противоположных событий, соответственно, равны $P(\overline{A_1}) = q_1$, $P(\overline{A_2}) = q_2$, $P(\overline{A_n}) = q_n$.

Обозначим событие B = появление хотя бы одного из n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$

Теорема 5. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, равна разности между 1 и произведением противоположных событий $\overline{A_1}$, ... , $\overline{A_n}$

$$P(B) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_n$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются равновозможными, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна

$$P(B) = 1 - q^n$$

Пример 14. Четыре электрические лампочки последовательно соединены в цепь. Вероятность, что одна лампочка перегорит, равна 0.2. Определить вероятность, что тока в цепи не будет.

Решение: тока в цепи не будет, если перегорит хотя бы одна лампочка.

За событие A – перегорит одна лампочка, B – перегорит хотя бы одна.

$P(A) = 0{,}2 = p$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $n = 4$.

Тогда по следствию из теоремы 5 получаем: $P(B) = 1 - q^n = 1 - 0{,}8^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

Ответ: $P(B) = 0{,}488$.

Задачи

37. Найти вероятность, что при трехкратном бросании монеты хотя бы один раз выпадет «РЕШКА».

38. Бросают три игральных кубика. Определить вероятность, что хотя бы на одном кубике выпадет 2 очка.

39. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах составляет 0,9984. Определить вероятность промаха при одном выстреле.

40. Вероятность попадания в цель для данного спортсмена равна 0,7. Сколько выстрелов он должен произвести, чтобы с вероятностью 0,973 утверждать, что поразит цель хотя бы один раз?

41. Согласно статистике за 2021 год, вероятность выигрыша по лотерейному билету «Спортлото» составляет 0,2. Некто купил 3 билета. Какова вероятность, что

а) все три билета будут выигрышными;

б) все три проигрышные;

в) хотя бы один выигрышный.

42. В урне имеется 3 белых и 4 черных шара. Из урны вытягиваются 3 шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

Интересный факт

В средние века среди феодальной знати были широко распространены азартные игры. Один французский рыцарь, кавалер де Мере, был страстным игроком в кости. Он всячески старался разбогатеть при помощи игры и для этого придумывал разные усложненные правила, которые, как ему казалось, приведут его к цели. Де Мере предлагал бросить одну кость четыре раза подряд и бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет 6; если же этого не случалось –

ни разу не выпадало 6 очков, – то выигрывал его противник. Де Мере предполагал, что он будет чаще выигрывать, чем проигрывать, но все же в 1654 г. обратился к своему знакомому, Блезу Паскалю, с просьбой рассчитать, какова вероятность выигрыша в придуманной им игре.

Приведем расчет Паскаля. Так как при каждом бросании игральной кости имеется 6 различных возможностей, то при четырех бросаниях кости число различных возможных случаев будет $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$. Среди этих 1296 случаев будет $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ таких, где шестерка не выпадет ни разу.

Вероятность того, что при четырехкратном бросании ни разу не выпадет 6, равна 625/1296. Тогда вероятность того, что шестерка выпадет хотя бы один раз составляет 1 – 625/1296 = 671/1296, что чуть больше 0,5. Следовательно, при каждой игре больше половины шансов было за то, что рыцарь выиграет; при многократном же повторении игры он почти, наверное, оказывался в выигрыше. Действительно, чем больше рыцарь играл, тем больше он выигрывал. Кавалер де Мере был очень доволен и решил, что он открыл верный способ обогащения. Однако постепенно другим игрокам стало ясно, что эта игра для них невыгодна, и они перестали играть с де Мере.

§ 9. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие А может появляться при наступлении одного из событий B_1, B_2 B_n. Которые образуют полную группу событий. События B_1, B_2 B_n называют гипотезами. И пусть известны вероятности событий $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_n)$ и их условные вероятности $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, $P(A|B_n)$. И необходимо найти вероятность наступления события A.

Теорема 6. Вероятность наступления события A, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2 B_n, образующих полную группу, равна сумме произведения вероятностей каждого события на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Данная формула называется ***формулой полной вероятности***.

Замечание. При решении некоторых задач может возникнуть сложность, какие данные взять за $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_n)$, а какие за их условные вероятности $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, $P(A|B_n)$. Достаточно помнить, что события B_1, B_2,..B_n образуют полную группу событий , то есть $P(B_1) + P(B_2) +..+ P(B_n) = 1$.

Пример 15. На сборочный конвейер поступают детали с трех станков. Производительность станков неодинакова. Первый дает 50% всех деталей, второй – 30%, а третий – 20%. Первый станок дает продукцию отличного качества с вероятностью 0.9, второй – с вероятностью 0.75, а третий станок – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Решение: обозначим за событие A – выбрана деталь отличного качества, тогда событие B_1 – деталь изготовлена на 1-м станке, B_2 – деталь изготовлена на 2-м станке, B_3 – деталь изготовлена на 3-м станке.

$P(B_1) = 0{,}5$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}2$

По условию задачи, вероятности производства продукции отличного качества на каждом станке: $P(A|B_1) = 0{,}9$, $P(A|B_2) = 0{,}75$, $P(A|B_n) = 0{,}8$.

Теперь воспользуемся формулой полной вероятности для нахождения искомой вероятности:

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}835$.

Ответ: $P(A) = 0{,}835$.

Пусть событие А может появляться при наступлении одного из событий B_1, B_2 B_n, которые образуют полную группу событий. Предположим, что событие А наступило, и необходимо определить, как изменятся $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_n)$, то есть найдем их условные вероятности $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$,.., $P(B_n|A)$.

Так как события A и B_1, B_2,..,B_n зависимые, то по теореме умножения для зависимых событий получаем:

$P(A \cdot B_1) = P(A) \cdot P(B_1|A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1)$, отсюда $P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}$

Аналогично для $P(A \cdot B_n) = P(A) \cdot P(B_n|A) = P(B_n) \cdot P(A|B_n)$, отсюда $P(B_n|A) = \frac{P(B_n) \cdot P(A|B_n)}{P(A)}$

В общем вид формула имеет вид:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} \quad , i = 1 \ldots n$$

и называется ***формулой Байеса.***

Пример 16. Рассмотрим данные предыдущей задачи. Пусть деталь признана отличного качества. Определить вероятность, что она выполнена на втором станке.

Решение. $P(A) = 0{,}835$

По формуле Байеса имеем $P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}75}{0{,}835} \approx 0{,}27$

Как мы видим, до испытания вероятность гипотезы $P(B_2) = 0{,}3$, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность гипотезы стала 0,27. Использование формулы Байеса позволило переоценить вероятности рассматриваемых гипотез.

Задачи

43. 40% сотрудников фирмы моложе 30 лет. Среди них 55% – высокой квалификации. Среди сотрудников старше 30 лет 80% – высокой квалификации. Случайным образом выбирается один из сотрудников. Какова вероятность того, что этот сотрудник имеет высокую квалификацию.

44. В группе 25 спортсменов по водным видам спорта: 15 пловцов, 6 – по прыжкам в воду, 4 – синхронистки. Вероятность выполнения нормы мастера спорта для пловца равна 0,9, для спортсмена по прыжкам в воду – 0,85, для синхрониста – 0,7. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен выполнит норму мастера спорта.

45. Вероятность, что экскурсия состоится 25 мая, равна 0,6, 26 мая – 0,7, 27 мая – 0,3. Вероятность хорошей погоды 25 мая равна 0,5, 26 мая – 0,6, 27 мая –

0,8. Экскурсия состоялась и погода была хорошая. Найти вероятность, что она была 26 мая.

46. Имеются 3 одинаковые урны с шарами. В первой из них находится 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 чёрных, а в третьей – 10 чёрных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. С какой вероятностью он окажется белым?

47. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

§ 10. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 17. Пусть в квадрат со стороной 4 см вписан круг. Выбираем случайную точку, и какова вероятность, что эта точка попадет в круг. В этой задаче речь идет о геометрической вероятности. Элементарными событиями здесь являются точки квадрата, которых бесконечно много и вероятность выбрать каждую конкретную точку равна нулю. Определить вероятность с помощью суммы элементарных событий не получится.

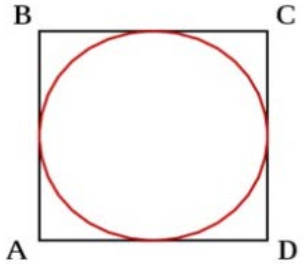

Рис. 7.

Чтобы все точки квадрата имели «равные шансы», мы принимаем следующее правило: вероятность того, что выбранная точка принадлежит кругу прямо пропорционально площади круга и не зависит от его расположения относительно квадрата.

Это правило работает не только для круга, но для любой фигуры любой формы. Получается, что мы **отождествляем случайное событие и геометрическую фигуру.**

Если фигура g составляет часть плоской фигуры G и на фигуру брошена точка, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется как:

$$P(A) = S_g/S_G$$

Поэтому рассмотрим площадь квадрата $S_{ABCD} = 4 \cdot 4 = 16$ см.

$$S_{круга} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$$

$$P(A) = \frac{S_{ABCD}}{S_{\text{круга}}} = \frac{12{,}56}{16} = 0{,}785$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки на отрезок l, являющийся часть отрезка L: $P(A) = \text{Длина}_l / \text{Длина}_L$.

И вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая является частью фигуры V: $P(A) = \text{Объем}_v / \text{Объем}_V$

Пример 18. Найти вероятность того, что точка, случайно выбранная на отрезке [3; 5], принадлежит отрезку [3,5; 4,7].

Решение: Длина отрезка $L = 5 - 3 = 2$, длина отрезка $l = 4{,}7 - 3{,}5 = 1{,}2$;
$P(A) = \text{Длина}_l / \text{Длина}_L = 1{,}2/2 = 0{,}6$.

Ответ: $P(A) = 0{,}6$.

Задачи

48. В отрезке AB длины 3 случайно появляется точка C. Определить вероятность того, что расстояние от точки C до B превосходит 1.

49. Внутри отрезка MN случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что точка X ближе к точке N, чем к M.

50. В прямоугольник со сторонами 8 и 10 см вписаны непересекающиеся квадрат со стороной равной 2 см и круг радиуса 3см. Найти вероятность, что точка, брошенная в прямоугольник, не принадлежит ни одной из вписанных фигур.

51. В круг радиуса 5 помещен меньший круг радиуса 2. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, не попадет в малый круг.

52. В прямоугольный треугольник со сторонами 6 и 8 вписан квадрат со стороной $2{,}5\sqrt{2}$. Найти вероятность того, что точка, брошенная в исходный треугольник: а) не попадет в квадрат; б) попадет в меньший треугольник.

53. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь одного из малых сегментов.

Это интересно (Парадокс Бертрана, 1898 г.)

Задача. В окружности произвольного радиуса случайным образом выбирается хорда. Необходимо вычислить вероятность того, что она длиннее стороны равностороннего треугольника, вписанного в данную окружность**.** Пусть радиус = 1 см.

Парадокс был описан в работе Ж. Бертрана «Исчисление вероятностей» (“Calcul des probabilites”) 1898 года. Задача была предложена в качестве примера того, что вероятность наступления события не может быть чётко определена без выбора первоначальных допущений, служащих отправной точкой рассуждения. Изначально было предложено три метода:

1. (*Метод случайной середины*). Случайным образом в круге выбирается точка, она определяет единственную хорду, серединой которой является (за исключением центра), в этом случае хорда длиннее стороны треугольника, когда эта точка лежит во вписанном в треугольник круге с R=1|2 и с тем же центром. Вероятность попадания произвольной точки в этот круг – отношение площадей меньшего и большего кругов и составляет 1/4 .

2. (Метод случайного радиуса). В случае, если на радиусе произвольно выбирается точка и хорда проводится перпендикулярно радиусу в этой точке, то, так как сторона треугольника делит перпендикулярный ей радиус пополам, вероятность события – 1/2.

3. (*Метод случайных концов*). Если случайным образом на окружности выбирается точка, служащая одним концом хорды и одновременно вершиной треугольника, то хорда будет длиннее стороны треугольника, только если она пересекает противолежащую данной вершине сторону. Вероятность этого определяется длинами дуг, отсекаемых каждой стороной, их три, и они равны между собой, то есть вероятность события 1/3.

Все три случая представлены на рисунке 8.

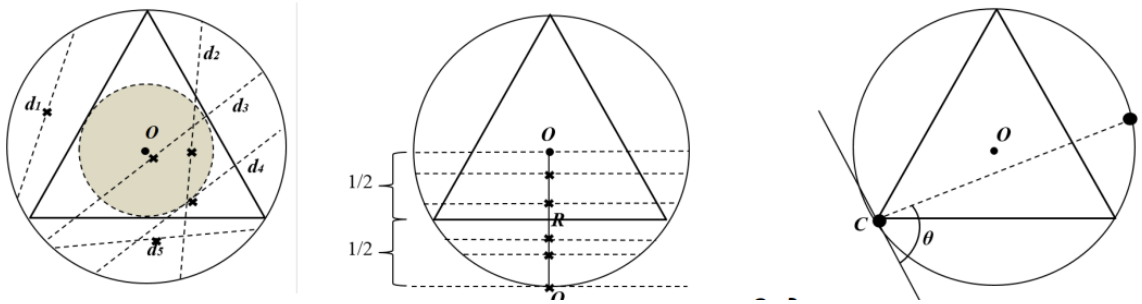

Рис. 8.

Данный парадокс дал начало новому разделу математики – интегральной геометрии, которая позволяет реконструировать исходные объекты по их сечениям или проекциям.

§ 11. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Пусть гражданин Н подкидывает монету 11 раз. При этом орел может появиться с вероятностью p = 0,5 (назовем это успехом) и не появиться с вероятностью q =1 – p = 0,5 (назовем неудачей). Такие испытания носят название повторных.

Определение 17. Испытания, проводящиеся в одних и тех же условиях с одинаковой вероятностью появления события *A* в каждом испытании, называются ***повторными независимыми испытаниями***, или ***схемой Бернулли***.

Вышеприведенный пример с бросанием монеты – это простейшая серия испытаний Бернулли. При этом вероятность выпадения орла 11 раз равна $1/2^{11} = 1/2048$.

Рассмотрим серии испытаний, где вероятности успеха и неудачи не одинаковые. Зададимся вопросом, какова вероятность, что при n повторных независимых испытаниях событие *A* произойдет m раз.

Пример 19. Пусть посажены 4 одинаковых семечка огурца, и какова вероятность, что ровно 3 огурца прорастет?

Решение: так как все четыре семечка растут независимо друг от друга в одних и тех же условиях, то возможны 4 варианта:

ВВВН, ВНВВ, ВВНВ, НВВВ.

Тогда вероятность, что из 4 огурцов три вырастут составит:

$P_{4,3} = 4p^3q$, где 4 – это число элементарных событий , благоприятствующих 3 успехам из 4 испытаний и $4 = C^3_4$

Итак, в общем виде вероятность, что при n испытаниях событие А произойдет m раз, вычисляется по формуле:

$$P_{n,m} = C^m_n p^m q^{n-m}$$

Полученная формула называется ***формулой Бернулли.***

Пример 20. Симметричную монету бросают 7 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет не менее 6 орлов»?

Решение: вероятность выпадения орла при одном броске монеты равна 1/2, то есть $p = 1/2$ и $q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2$.

Тогда по формуле Бернулли вероятность того, что из 7 бросков монеты выпадет ровно 5 орлов:

$$P_{7,5} = C^5_7 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^{7-5} = \frac{7!}{5!2!} \cdot 0{,}5^7 = 21 \cdot 0{,}5^7$$

Вероятность того, что из 7 бросков монеты выпадет не менее 6 орлов:

$P_{7,6} + P_{7,7} = C^6_7 0{,}5^6 \cdot 0{,}5 + C^7_7 0{,}5^7 = \frac{7!}{6!1!} \cdot 0{,}5^7 + \frac{7!}{7!0!} \cdot 0{,}5^7 = 8 \cdot 0{,}5^7$

Отношение $P7{,}5P_{7,6} + P_{7,7} = \frac{21 \cdot 0{,}5^7}{8 \cdot 0{,}5^7} = 2{,}62$

Ответ: 2,62.

Пример 21. В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}4$. Найдите вероятность, что в серии из 4 испытаний хотя бы одна закончится неудачей.

Решение: событие A = {хотя бы одна неудача}

$\overline{A}$ = наступит 0 неудач

$P(\overline{A}) = C^0_4 p^4 q^0 = C^0_4 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^0 = 1 \cdot 0{,}4^4 \cdot 1 = 0{,}0256$

Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$

Ответ: 0,9744.

Задачи

54. На прием к врачу записались 7 человек. Вероятность того, что пациенту понадобится сдать кровь на анализ, равна 0,6. Найти вероятность 4 пациентам, что необходимо сдать кровь.

55. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность, что шесть очков трижды выпадет на верхней грани кубика.

56. Вероятность хотя бы одного попадания равна 0,96. Определить вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

57. Вероятность того, что из двух приобретенных лотерейных билетов оба будут выигрышными, равна 0.09. Определить вероятность того, что из 6 билетов половина билетов будут проигрышные.

§ 12. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 18. Величина, которая в зависимости от результатов испытаний принимает то или иное численное значение, называется ***случайной величиной.***

Примеров случайных величин много: количество бракованных изделий, произведенных за партию определенным заводом-изготовителем; время безотказной работы телевизора; количество дорожно-транспортных происшествий , происходящих в конкретном городе в данный день; количество покупателей , которые входят в магазин в данный день; количество товаров, проданных в магазине в определенный день; число бросаний монеты до первого выпадения решки и т.д.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина может принимать только счетное конечное и бесконечное множество значений, таких как 0, 1, 2, 3, .. n.

Случайные величины обозначаются последними заглавными буквами латинского алфавита. Чтобы описать случайную величину, нужно указать ее возможные значения и их вероятности. Например, если задать случайную величину X, то ее значениями будут $x_1, x_2, .. x_n$, каждое из которых имеет определенную вероятность появления $p_1, p_2, .. p_n$.

Отметим, что все события $x_1, x_2, .. x_n$ несовместны и единственно возможны, поэтому образуют полную группу событий, а значит, сумма вероятностей

$$p_1 + p_2 .. + p_n = 1.$$

Определение 19. ***Законом распределения*** дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениям случайной величины и вероятностями их появления.

Закон распределения можно задать словесно, диаграммой, графиком или таблицей.

Табличная форма, называемая рядом распределения, представляется в виде двух строк (столбцов). В первой строке записываются все возможные значения случайной величины x, в порядке возрастания, во второй – вероятности p_i появления этих значений.

Таблица 5

X	1	2	3	4
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Графическая форма задания закона распределения – это полигон (или многоугольник) распределения вероятностей. Он представляет собой ломаную линию, соединяющую точки (x_i, p_i) прямоугольной системы координат (рис. 9 для таблицы 5).

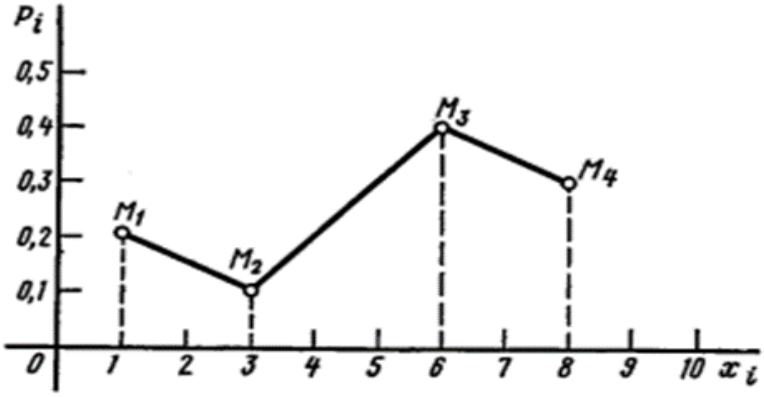

Рис. 9.

При составлении закона распределения значения случайной величины определяются из условия задачи, а вероятности вычисляются либо по классическому определению вероятности, либо по теоремам сложения и умножения вероятностей, либо по формуле Бернулли.

Чаще всего встречаются 4 типа задач на составление закона распределения.

1. Случайная величина – ***число наступления событий с одинаковой вероятностью p*** появления события в отдельно взятом испытании. Значения случайной величины начинаются с нуля, а вероятности высчитываются по формуле Бернулли.

Пример 22. На ОАО «Казанский жировой комбинат» 90% изготавливаемой продукции без брака упаковки. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных упаковок из трех проверенных в партии.

Решение: Пусть X – числа стандартных упаковок

$p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 3$

$x_1 = 0$ (нет стандартных упаковок из 3 проверенных), тогда по формуле Бернулли $p_1 = P_{3,0} = C^0_3 p^0 q^3 = 1 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001$;

$x_2 = 1$ (1 стандартная упаковка из 3), тогда $p_2 = P_{3,1} = C^1_3 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027$;

$x_3 = 2$ (2 стандартные упаковки из 3), тогда $p_3 = P_{3,2} = C^2_3 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243$;

$x_4 = 3$ (3 стандартные упаковки из 3 проверенных), тогда $p_4 = P_{3,3} = C^3_3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 1 = 0{,}729$;

Тогда закон распределения в табличном виде имеет вид:

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}001+0{,}027+0{,}243+0{,}729 = 1$.

2. Случайная величина – ***число испытаний с постоянной вероятностью p*** появления события в отдельно взятом испытании. Значения случайной величины начинаются с единицы.

Пример 23. Спортсмен-новичок на учениях, имеющий 3 патрона, стреляет до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Составить закон распределения случайной величины X – числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3.

Решение: Пусть X – числа израсходованных патронов

$p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$

$x_1 = 1$ (1 патрон), то стрелок попал с первого раза $p_1 = 0.3$;

$x_2 = 2$ (2 патрона), то стрелок вначале промахнулся, затем попал $p_2 = 0{,}7 \cdot 0.3 = 0{,}21$;

$x_3 = 3$ (все три патрона), то стрелок попал с третьего раза ИЛИ совсем не попал $p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0.3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0.7 = 0{,}49$.

Тогда закон распределения в табличном виде имеет вид:

X	1	2	3
P	0,3	0,21	0,49

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}3 + 0{,}21 + 0{,}49 = 1$.

3. Случайная величина – ***число наступления событий с различной вероятностью p*** в каждом испытании. Значения случайной величины начинаются с нуля,

Пример 24. Учитель дает классу решить 3 сложные задачи высокого уровня сложности. Вероятность решить первую $p_1 = 0{,}7$, вторую – $p_2 = 0{,}5$, третью – $p_3 = 0{,}2$. Составить закон распределения случайной величины X – числа задач, верно решенных учениками.

Решение. X = число задач, решенных учениками.

$p_1 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$, $q_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}8$.

$x_1 = 0$ (нет верно решенных задач), $p^*_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}12$;

$x_2 = 1$ (одна верно решенная задача), $p^*_2 = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + p_2 \cdot q_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1 \cdot q_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}43$;

$x_3 = 2$ (две верно решенные задачи), $p^*_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}352$;

$x_4 = 3$ (все задачи решены верно), $p^*_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}07$

Тогда закон распределения в табличном виде имеет вид:

X	0	1	2	3
P	0,12	0,027	0,243	0,07

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}12 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}07 = 1$.

4. Случайная величина – ***число испытаний с различной вероятностью p*** появления события в отдельно взятом испытании. Значения случайной величины начинаются с единицы.

Пример 25. Баба-яга загадала Ивану-царевичу загадку. Вероятность отгадать ее с первой попытки – 0,4, со второй – 0,7, с третьей – 0,9. Составить закон распределения случайной величины X – числа попыток отгадать загадку.

Решение. Пусть X= число попыток отгадать загадку.

$p_1 = 0{,}4$, $q_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}7$, $q_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}9$; $q_3 = 0{,}1$.

$x_1 = 1$ (1 попытка), то есть ответил верно с первой попытки и $p^*_1 = p_1 = 0{,}4$;

$x_2 = 2$ (2 попытки), угадал со второго раза и $p^*_2 = q_1 \cdot p_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$;

$x_3 = 3$ (3 попытки), отгадал загадку с третьей попытки или вообще не отгадал $p^*_3 = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$.

Тогда закон распределения в табличном виде имеет вид:

X	1	2	3
P	0,4	0,42	0,18

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}4 + 0{,}42 + 0{,}18 = 1$.

Вопросы

1. Что называется случайно величиной? Приведите примеры.

2. Что называется дискретной случайной величиной. Приведите примеры.

3. Что называется законом распределения? Какие способы его задания существуют?

Задачи

58. Пусть дан закон распределения. Проверить, что он составлен верно, и построить многоугольник распределения.

X	0	1	2	3
P	0,12	0,027	0,243	0,07

59. Гражданин Н. стреляет в тире на приз за попадание. Вероятность попадания при каждом выстреле составляет 0,4. Разрешается сделать не более трех выстрелов, при этом приз вручается после первого же попадания. Составить закон распределения случайной величины X – числа выстрелов, произведенных стрелком.

60. Вероятность того, что холодильник «Аристон» не потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0.9. На неделе проданы 3 холодильника. Составить закон распределения случайной величины X – числа проданных холодильников, не потребующих гарантийного ремонта.

61. На зачете по геометрии ученику задаются три дополнительных вопроса, но не более трех. Как только ученик верно отвечает на заданный вопрос, экзаменатор прекращает задавать дополнительные вопросы. Вероятность того, что ученик ответит верно на первый вопрос равна 0,5, на второй – 0,6, на третий – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа дополнительных вопросов, заданных ученику.

§ 13. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ УСПЕХА В СЕРИИ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Определение 20. ***Математическим ожиданием M(X)*** дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины x_i, на соответствующие значения вероятностей p_i , (i= 1… n).

$$M(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Математическое ожидание интерпретируется как среднее значение случайной величины, вокруг которого распределены все возможные значения случайной величины. Другими словами, математическое ожидание – это теоретический аналог среднего арифметического числового ряда.

Рассмотрим применение математического ожидания:

Пример 26. Стоимость самого дешевого страхового полиса Сбербанка на страхование квартиры на год составляет 2250 рублей. В случае наступления страхового случая выплата составит до 600 тысяч рублей. Вероятность наступления страхового случая в данной местности для такого типа многоквартирных домов на такую сумму оценивается, как 0,001. Какую прибыль в среднем ожидает получить компания Сбербанк?

Решение: составим закон распределения случайной величины X

X	+2250	-600000
P	0,999	0,001

Математическое ожидание $M(X) = 2250 \cdot 0{,}999 - 600000 \cdot 0{,}001 = 1647{,}75$ Ожидаемая средняя прибыль положительна, что дает возможность страховой компании Сбербанк оставлять резервный капитал для выплаты страховых сумм, производить административные расходы, получать прибыль.

У математического ожидания есть три важных свойства.

Пусть X, $У$ – две случайные величины, C – фиксированное число, тогда:

1. $M(C) = C$;
2. $M(X + У) = M(X) + M(У)$;
3. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
4. $M(X \cdot У) = M(X) \cdot M(У)$.

Пример 27. Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 2 билета с выигрышем в 400 р., 10 билетов с выигрышами по 100 р. и остальные 88 билетов без выигрышей. Наудачу выбирают один билет. Найдем средний выигрыш – математическое ожидание выигрыша.

X	0	100	400
P	0,88	0,1	0,02

$M(X) = 0 \cdot 0{,}88 + 100 \cdot 0{,}1 + 400 \cdot 0{,}02 = 18$ рублей.

Для того чтобы лотерея приносила доход своим учредителям, цена билета должна быть больше, чем средний выигрыш. Если поставить цену в 25 рублей, то, продав все билеты, учредители получат 2500 рублей, на выплату выигрышей будет потрачено 1800 рублей и доход от лотереи составит 700 рублей. Поэтому условие рентабельности любой лотереи: математическое ожидание выигрыша на один билет меньше цены этого билета. Чем больше математическое ожидание выигрыша, тем больше лотерейных билетов требуется продать, чтобы учредитель получил ощутимый доход. Чем меньше математическое ожидание, тем меньше людей привлечет такая игра. Поэтому организаторы лотерей экспериментальным путем определяют наиболее выгодные условия лотереи, придумывают разнообразную рекламу и часто стараются сделать так, чтобы оценить ожидание выигрыша было невозможно.

Определение 21. ***Дисперсией D (X)*** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M[X - M(X)]^2$ или

$$D(X) = \sigma^2(X) = (x_1 - M(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(X))^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 \cdot p_n$$

Чаще применяют другую, более удобную для расчетов формулу дисперсии:

$$D(X) = \sigma^2(X) = x^2_1 \cdot p_1 + x^2_2 \cdot p_2 + \ldots + x^2_n \cdot p_n - (M(X))^2.$$

Вывести ее можно, используя свойства математического ожидания.

Дисперсия случайной величины означает разброс или рассеяние значений случайной величины около ее среднего значения (математического ожидания). По определению, $D(X) \geq 0$. И чем меньше дисперсия, тем менее вероятно, что случайная величина примет значение, далекое от математического ожидания.

У дисперсии есть несколько важных свойств, рассмотрим три из них.

Пусть X, $У$ – две случайные величины, C – фиксированное число, тогда:

1. $D(C) = 0$;
2. $D(X + C) = D(X)$;
3. $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;
4. $D(X + У) = D(X) + D(У)$

Определение 22. ***Средним квадратическим (стандартным) отклонением*** $\sigma(X)$ дискретной случайной величины *X* называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример 28. У инвестора есть 3 альтернативных проекта инвестиций. В таблице обобщены данные об ожидаемой прибыли в этих проектах с соответствующей вероятностью.

Доходность	0	500	1000
ПРОЕКТ 1	0	1	0
ПРОЕКТ 2	0,5	0	0.5
ПРОЕКТ 3	0,25	0,5	0,25

Вычислим математические ожидания трех проектов:

$M_1(X) = 500$; $M_2(X) = 500$; $M_3(X) = 500$

При этом $D_1(X) = 500^2 \cdot 1 - 500^2 = 0$

$D_2(X) = 0 + 500^2 \cdot 0 + 1000^2 \cdot 0{,}5 - 500^2 = 25000$

$б_2(X) = 158$

$D_3(X) = 0 + 500^2 \cdot 0{,}5 + 1000^2 \cdot 0{,}25 - 500^2 = 125000$

$б_3(X) = 354$

У всех альтернатив одинаковы математические ожидания. Это означает, что в долгосрочном периоде инвестор может получить одинаковый доход. Стандартное отклонение можно интерпретировать как единицу измерения риска: чем оно больше, тем больше риск инвестиций. Инвестор, который не желает большого риска, выберет проект 1 с наименьшим стандартным отклонением. Если же инвестор отдаёт предпочтение риску и большим доходам в короткий период, то он выберет третий проект с наибольшим стандартным отклонением.

Теорема 6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, числа появления события А в n независимых испытаниях равны:

$$M(X) = n \cdot p; \;\; D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Пример 29. Вероятность изготовления стандартной детали 0.9. Определить математическое ожидание и дисперсию числа стандартных деталей, если партия деталей составляет 500 штук.

Решение: обозначим вероятность появления стандартной детали p = 0,9, тогда q = 1– p = 0,1, партия n = 500 штук.

$M(X) = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}9 = 450$

$D(X) = n \cdot p \cdot q = 500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 4.$

Вопросы

1. Дать определение математического ожидания.

2. Дать определение дисперсии и среднего квадратического отклонения.

3. Могут ли все значения случайной величины быть положительными, а ее математическое ожидание отрицательным?

4. Может ли математическое ожидание случайной величины быть меньше всех значений этой случайной величины?

Задачи

62. Доказать, что закон распределения составлен правильно. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

x	1	2	3
p	0,2	0,7	0,1

63. Случайная величина X принимает все четные целые значения от – 8 до 8 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

64. Найдите математическое ожидание случайной величины Y, которая равна сумме очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости.

65. Игральную кость бросили 120 раз. Найти математическое ожидание случайной величины – «выпало четное число очков».

§ 14. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В предыдущих параграфах мы предполагали, что значения интересующих нас вероятностей известны. В действительности даже при подбрасывании реального игрового кубика или монеты нельзя с уверенностью сказать, что грани кубика и стороны монеты выпадают равновероятно.

Владельца магазина интересует вероятность того, что покупатель приобретет товар, а покупателя интересует вероятность того, что купленная им вещь прослужит долго. В таких случаях используют оценку вероятности с помощью частоты наступления события. Этот косвенный способ измерения вероятности основан на законе больших чисел.

Пусть дано независимых величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ с одинаковым распределением, и их общее математическое ожидание равно m, а дисперсия – d. Рассмотрим случайную величину $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.

$$M\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)\right)=\frac{1}{n}\cdot nm=m$$

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left(D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot d=\frac{d}{n}$$

Это означает, что при больших n выражение $\frac{d}{n}\to 0$ и значения величины $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ мало отклоняются от m.

Закон больших чисел. Таким образом, среднее значение большого числа случайных величин с одинаковым распределением близко к математическому ожиданию одной из случайных величин.

Пример 30. Проведено 15 опросов населения о доходе. У 10 из респондентов доходы были примерно 30 000 рублей, а у 5 – 150 000 рублей. Следовательно, средний доход будет равен (10 · 30 000 + 5 · 150 000)/15 = 70 000 рублей, что не отражает реальный уровень дохода жителей данной страны. Если рассмотреть 200 наблюдений, в которых у 180 человек доходы будут 20 000, а у 20 – 120 000 рублей, то средний доход будет равен (180 · 20 000 + 20 · 120 000)/200=30 000.

Полученный результат отражает наиболее адекватную картину доходов данной страны. При увеличении числа наблюдений среднее будет стремиться к истинному значению.

Например, если подкидывать монету 200, 500 и продолжать эксперимент 10000, 1000000 раз, то частота проявления каждого события на дистанции стремится к вероятности его появления.

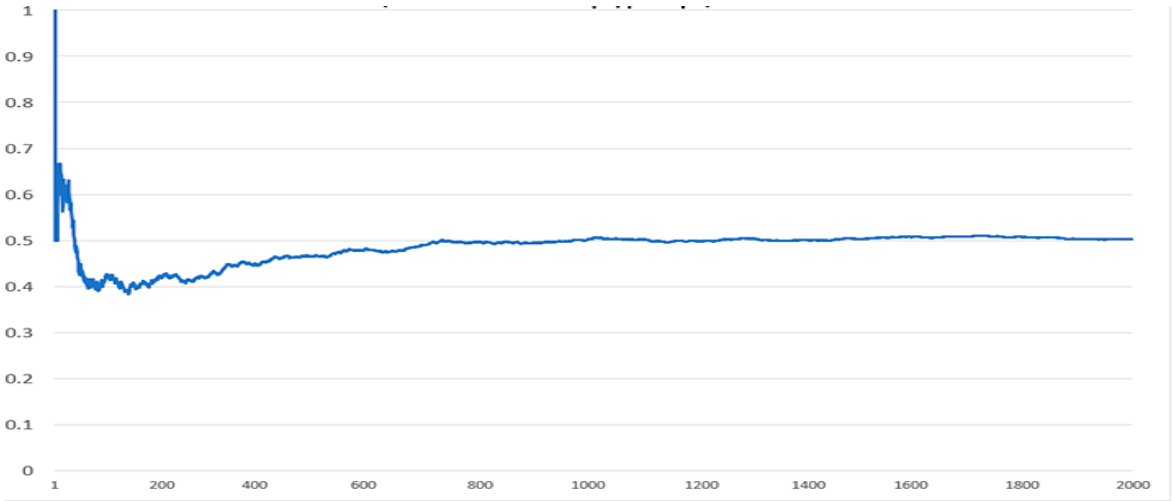

Рис. 10

Закон больших чисел говорит о количественных закономерностях массовых явлений, поэтому используется для объяснения закономерностей в экономике и в социально-экономической статистике.

Интересный факт

Дети, рождающиеся раньше срока, иногда погибают от респираторного дистресс-синдрома, когда легкие не успели достаточно развиться и созреть. В 50-х годах XX века в США погибали 25000 новорожденных в год. В 1980-х годах ученые решили это изменить и проверить гипотезу о том, что кортикостероидная терапия снижает смертность недоношенных детей от респираторных заболеваний. Исследователи предложили вводить кортикостероиды женщинам с высокими рисками преждевременных родов, а затем наблюдать за их детьми. Чтобы подтвердить или опровергнуть эту гипотезу, необходимо провести очень

большое число наблюдений. На то, чтобы собрать это количество данных в одной больнице, ушли бы годы, потому что недоношенные дети рождаются нечасто. Поэтому исследователи провели несколько одинаковых по своей сути исследований в разных больницах. Результаты в каждой больнице были свои, иногда совсем не похожие друг на друга. Причина таких, на первый взгляд, противоречивых результатов в том, что на результат в каждом конкретном случае влияло множество самых разных факторов (от резуса-фактора мамы и срока беременности до температуры в больнице и количества персонала), а младенцев было мало. Поэтому ученые объединили все результаты по всем больницам и анализировали их как единое целое. Согласно закону больших чисел, среднее результатов большого количества исследований приближается к ожидаемому значению. Анализ объединенных данных подтвердил гипотезу и показал, что кортикостероидная терапия снижает смертность недоношенных новорожденных от заболеваний легких. Сегодня в США от респираторного дистресс-синдрома в год умирает менее 500 новорожденных, родившихся раньше срока.

ЗАДАЧИ

В банке заданий для самостоятельного решения приведены как авторские задачи, так и задачи, взятые из открытых источников [2], [3],[6].

66. Монету бросили 4 раза. Используя обозначения О(орёл) и Р(решка), выпишите элементарные исходы, благоприятствующие событию:

а) А – «решка выпала четное количество раз»;

б) В – «орлов выпало столько же, сколько и решек».

67. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма очков не будет равна 4. Выпишите все элементарные события этого случайного опыта.

68. Мужчина стреляет в тире до первого попадания. Выпишите все элементарные исходы для события *A* – «стрелок сделал от трёх до пяти выстрелов».

69. Игральную кость бросили два раза. Обоснуйте, что более вероятно событие *A* – «сумма выпавших очков равна 6» или событие *A* – «произведение выпавших очков равно 6»?

70. Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что выпавшие значения совпадают. Ответ округлите до сотых.

71. У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

72. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

73. Относительная частота попадания у данного стрелка оказалась равной 0,8. Сколько он произвел выстрелов, если промахнулся 10 раз?

74. Из карточной колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. Найти вероятность, что она червонной масти.

75. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

76. Через остановку «РКБ» проходят автобусы № 4, 22, 33, 34, 37, 45. Пассажиру нужно попасть в Парк имени Горького, и ему подходят автобус № 4 или № 22. Определить вероятность, что первый подошедший к остановке будет нужный автобус, если маршрут № 4 обслуживают 15, № 22 – 20 автобусов, № 33 – 22 автобуса, № 34 – 19, № 37 – 24. № 45 – 23 автобуса.

70. В ящике 60 одинаковых жетонов, помеченных номерами от 1 до 60. Найти вероятность того, что сумма цифр наудачу извлеченного жетона равна либо 6, либо 9, либо 13.

71. В группе 9.3 12 учеников. Парты расставлены в 4 ряда. На самостоятельных работах первый вариант пишут те, кто сидит на первом и третьем ряду, считая от окна. Какова вероятность, что двум друзьям Кариму и Илье достанется первый вариант?

72. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

73. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

74. Маркиз де Мере придумал новую игру. Он предложил бросать 2 кости 24 раза и бился об заклад, что сверху, хотя бы один раз, окажутся две пятерки. Де Мере считал, что и в этой игре он будет чаще выигрывать, чем проигрывать. Прав ли был Мере? Удалось ли ему обогатиться при большом количестве игр?

75. Бросают три монеты: рублевую, двухрублевую и пятирублевую. Какова вероятность, что двухрублевая упадет орлом, остальные – решкой?

76. В детском саду на утреннике 12 детей встали в хоровод в случайном порядке. Какова вероятность, что две подружки Маша и Даша окажутся рядом?

77. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

78. В роддоме измеряют рост новорожденных. Вероятность того, что рост новорожденного более 50 см, равна 0.92; вероятность того, что рост более 57 см, равна 0.18. Найти вероятность того, что рост случайно выбранного младенца окажется в пределах от 50 до 57 см.

79. Наташу пригласили на вечеринку. Вероятность того, что у нее много неотложных дел по работе, равна 0,6; вероятность того, что у нее будет плохое настроение, равна 0,3. Найти вероятность того, что Наташа останется дома.

80. В коробке 10 синих и 8 красных карандашей. Алексей извлекает наудачу 2 карандаша. Какова вероятность, что оба карандаша разных цветов?

81. Ребята угадывают день рождения Юли, им известно, что это месяц, состоящий из 30 дней. Найти вероятность правильного ответа, если Юля родилась 13 июня.

82. На фабрике керамической посуды 30% произведѐнных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до тысячных.

83. В банке клиент получил зарплатную карту. Последние 3 цифры номера карты случайны. Какова вероятность того, что число, образованное тремя последними числами, делится нацело на три?

84. В банке клиент получил зарплатную карту. Последние 3 цифры номера карты случайны. Какова вероятность того, что произведение последних трех чисел делится нацело на четыре?

85. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

86. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

87. Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

88. Тест по обществознанию на 4 и 5 сдали 85% учащихся лицея, а по английскому 70% учащихся. Известно, что тест по английскому сдали 78% тех, кто успешно сдал тест по обществознанию. Найдите долю учащихся, кто сдал тест по обществознанию среди тех, кто сдал тест по английскому языку. Ответ округлить до сотых.

89. $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}7$. Найдите $P(A \cap B)$.

90. $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}7$, $P(A \cup B) = 0{,}8$; $P(A \cap B)$?

91. В городе У 52% взрослого населения составляют мужчины, из них 75% работают. Найдите вероятность того, что случайно выбранный житель данного города оказался либо женщиной, либо неработающим мужчиной.

92. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет хотя б один раз.

93. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

94. В салоне работают два мастера ногтевого сервиса. Вероятность, что каждый мастер занят, равна 0,7. Вероятность того, что оба мастера свободны, равна 0,22. Найти вероятность, что оба мастера заняты. При тех же условиях найдите вероятность, что хотя бы один мастер занят.

95. Вероятность пройти собеседование на работу в школе для данного соискателя, равна 0,9, в профильном лицее – 0,6. Найти вероятность, что он пройдет собеседование в оба учебных заведения.

96. В некотором случайном эксперименте события С и Д независимы, при этом вероятность наступления событий Р (С) = 0,3; Р (Д) = 0,65. Найти вероятность: а) оба события наступят; б) наступит только одно событие.

97. В комплекте домино выбирается одна костяшка. Какова вероятность, что она имеет хотя бы одно «пустое» поле?

98. Два программиста работают независимо друг от друга. Вероятность, что первый программист вовремя напишет код, равна 0,85; для второго эта вероятность составляет 0,7. Вычислить вероятность того, что оба программиста опоздают к сроку.

99. В некотором случайном опыте известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}3$, $P(A/B) = 0{,}5$; $P(B/A) = 0{,}7$. Найдите $P(B)$?

100. Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока она не будет поражена. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три выстрела.

101. В коробке пять красных и три синих карандаша. Карандаши вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий карандаш появится третьим по счету?

102. Три баскетболиста по очереди бросают мяч в кольцо до первого попадания. Вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0,8, для второго 0,75, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что только два баскетболиста попали в кольцо.

103. На складе готовой продукции 60% изделий, изготовленных на станках 1-го типа, а остальные изготовлены на станках 2-го типа. Известно, что среди изделий, изготовленных на станках 1-го типа, брак составляет 5%, а на станках 2-го типа – 7%. Наугад извлекается одно изделие. Найти вероятность того, что это изделие – стандартное.

104. В среднем 80% телевизоров марки «Samsung», 85% телевизоров марки «Sony» и 90% телевизоров марки «Toshiba» выдерживают гарантийный срок без поломки. В магазин завезли 12 телевизоров марки «Samsung», 13 – марки «Sony» и 15 – марки «Toshiba». Случайным образом выбирается один из телевизоров. Какова вероятность того, что этому телевизору не потребуется гарантийный ремонт?

105. За одно дежурство инспектор ГИБДД накладывает взыскания в среднем на 10% водителей легковых автомобилей, 15 % водителей грузовиков и 8% водителей других транспортных средств, проходящих мимо поста ГИБДД. Инспектор случайным образом останавливает одну машину. Найти вероятность того, что на ее водителя не будет наложено взыскание, если за одно дежурство мимо инспектора проходят в среднем 800 легковых автомобилей, 500 грузовиков и 300 других транспортных средств.

106. В футбольной команде два лучших пенальтиста. Вероятность забить гол с пенальти для одного из них равна 0,8, а для другого – 0,75. Судья назначил

пенальти и гол был забит. Найти вероятность, что гол забит вторым пенальтистом. Ответ округлить до сотых.

107. В группе 25 студентов, из них 17 девушек и 8 юношей. На занятии по математике преподаватель поочередно вызывает к доске двух студентов. Найти вероятность того, что вторым по счету будет вызван к доске юноша.

108. В первой коробке 8 белых и 7 черных шаров, а во второй 6 белых и 9 черных шаров. Из первой коробки наугад извлекается один шар и перекладывается во вторую, после чего из второй коробки так же наугад берется один шар и перекладывается в первую коробку. Какова вероятность того, что после этого состав шаров в каждой коробке окажется прежним?

109. В одном из отделов магазина продают одежду. Вероятность, что покупатель купит брюки, или рубашку, или свитер, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 7 покупателей покупку совершат 4 человека. Ответ округлить до тысячных.

110. Вероятность попадания в кольцо для данного начинающего баскетболиста равна $p = 0.5$. Найти вероятность того, что из 6 бросков он попадет 4 раза.

111. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничья во во внимание не принимается).

112. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

113. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

114. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события

«стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

115. Клиент получает в банке кредитную карту. Три последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например 876 или 432?

116. Магазин «Glance» продает качественную одежду из Турции. С утра его посетили 3 человека, вероятность покупки для каждого посетителя равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины X – числа покупателей, совершивших покупку.

117. Водитель зимой заводит двигатель до первой успешной попытки. Вероятность, что двигатель включится, равна 0.6. Составить закон распределения случайной величины X – числа попыток завести двигатель.

118. В связке 4 внешне одинаковых ключа. К двери сейфа подходит только один. Составить закон распределения случайной величины X – числа попыток открыть дверь (использованный ключ устраняется).

119. Учитель задает вопрос и проводит фронтальный опрос трех учеников. Вероятность, что первый ученик ответит верно, равна 0,5; что второй – 0.7; что третий – 0,9. Составить закон распределения случайной величины X – числа правильно данных ответов на вопрос.

120. Доказать, что закон распределения составлен правильно. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

x	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

121. Согласно американским статистическим таблицам смертности, вероятность того, что 25-летний человек проживет еще год, равна 0,992 (следовательно, вероятность того, что он умрет, равна 0,008). Страховая компания предлагает такому человеку застраховать свою жизнь на год на сумму 1000$; страховой взнос равен 10$. Найти математическое ожидание прибыли компании.

122. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимают 3 шара. Число белых шаров среди вынутых шаров является дискретной случайной величиной X. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

123. Всхожесть семян некоторого сорта моркови составляет 0,82. Определить математическое ожидание и дисперсию числа всходов, если посажено 100 семян.

124. В тесте 20 вопросов, каждый из них имеет 4 варианта ответа, но только один из их верный. Алексей не готов к тесту и, надеясь на удачу, выбирает ответы наугад. Найдите ожидаемое число правильно угаданных ответов.

125. В равностороннем треугольнике случайным образом выбирают точку. Найти вероятность того, что эта точка не принадлежит кругу, вписанному в этот треугольник.

126. На окружности случайным образом выбирают две точки и соединяют их отрезком. Какова вероятность, что данный отрезок длиннее, чем сторона равностороннего треугольника, вписанного в данную окружность.

127. На отрезке [0;2] выбирают случайным образом точку x. Найдите вероятность того, что $x^2 \leq 0{,}36$.

128. Два автомобиля марки «Газель» приходят на погрузку мебели в промежуток времени от 17.00 до 18.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одному автомобилю придется ждать окончания погрузки другого? Ответ округлить до сотых.

129. В квадрате $VNPQ$ случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что эта точка не принадлежит трапеции $VMPQ$, где M – середина стороны NP.

130. Дано распределение случайной величины. Найти неизвестное значение вероятности p.

x	– 3	– 1	1	3
p	0,3	p	0,25	0,15

131. Даны законы распределения случайной величины X. Найти распределение случайной величины $2X + 1$.

x	0	1	2	3
p	0,3	0,05	0,5	0,15

132. $M(X) = 5$, найти $M(X + 2)$, $M(2X - 3)$.

133. 60 одинаковых по форме лампочек на новогодней гирлянде соединены последовательно. Одна из лампочек перегорела, и гирлянда погасла. Сколько лампочек придется проверить, чтобы найти перегоревшую. (Найти математическое ожидание случайной величины).

134. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет решка. Случайная величина X есть количество бросков. Найдите вероятность события $X = 3$.

135. В билете еженедельной бинго-лотерее «6 из 36» всего 36 пронумерованных ячеек: от 1 до 36. Участник покупает билет. В билетах «6 из 36» одно игровое поле с 36. Шесть чисел в билете уже зачёркнуты – это и есть игровая комбинация. Участник покупает билет с понравившейся комбинацией и дожидается розыгрыша. Во время тиража выбираются 6 случайных выигрышных номеров. Какова вероятность, что 5 номеров выигрышные и участник получит приз в 10000 рублей?

136. Игральную кость бросили несколько раз. Известно, что сумма выпавших очков равна 4. Найдите вероятность того, что было сделано три броска. Результат округлите до сотых.

137. Саша бросает монету $n + 1$ раз, а Алексей n – раз. Какое событие более вероятно: «У Саши и Алексея решки выпадет поровну» или «У Саши выпадет на одну решку больше, чем у Алексея».

138. Треугольник ABC – равносторонний, точки M, P, K – середины сторон AB, BC, AC соответственно. Найти вероятность того, что случайная выбранная в треугольнике ABC точка принадлежит треугольнику MPK.

139. (Задача из сборника Ященко) Иван Иванович обещал зайти к Ивану Никифоровичу домой между 15 : 00 и 16 : 00. Иван Иванович всегда держит свое слово. И Ивану Никифоровичу, который ждал Иван Ивановича, в какой-то момент времени пришлось отлучится ровно на 10 минут, но это случилось до того, как в гости зашел Иван Иванович. Найти вероятность, что Иван Иванович застал Иван Никифоровича дома.

140. Сеть магазинов закупает куриные яйца в двух фермерских хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – отборные яйца категории С0, а из второго хозяйства – 20% яиц категории С0. Всего категорию С0 получают 35% всех яиц. Найдите вероятность того, что яйцо категории С0, купленное у данной сети магазинов, окажется из первого хозяйства.

141. В групповом этапе лиги наций УЕФА, чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. В каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша для данной команды одинаковы и равны 0,4. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований.

142. Даны вертикальные углы AOB и COM. Известно, что точка M принадлежит лучу BO и угол $AOB = 45^0$. На окружности с центром в точке O выбирают случайным образом точку X. Найдите вероятность того, что точка X лежит внутри угла AOM.

143. Таня заметила, что в казино «Подкинем» используют неправильную игральную кость (т.е. не у всех граней вероятности выпадения одинаковы). При этом она установила, что вероятность выпадения чётного числа равна 0,6; вероятность выпадения числа, делящегося на 3, равна 0,3; вероятность того, что выпадет 1 или 5, равна 0,22. Найдите вероятность того, что на этой игральной кости выпадет число 3. Ответ округлите до сотых.

144. Зал в квартире освещается люстрой с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

152. Два стрелка делают по 6 выстрелов. Вероятность промаха у первого стрелка равна 0,65, а вероятность промаха второго стрелка равна 0,35. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение числа попаданий обоих стрелков. Можно ли утверждать, что первый стрелок попадет меньше раз, чем второй?

153. Даны законы распределения случайных величин *X* и *У*. Найти *M (X+У)*

x	1	2	3
p	0,3	0,45	0,25

x	1	2	3
p	0,2	0,4	0,4

154. В санаторий «Сосновый бор» в столовой стоят два автомата с горячим шоколадом. Официант, дежурящий в зале, заметил, что к концу обеда горячий шоколад заканчивается в обоих автоматах с вероятностью 0,2; в первом автомате с вероятностью 0,3, во втором автомате с вероятностью 0,5. Найти вероятность события, что горячий шоколад останется в обоих автоматах.

155. Вероятность ненастной погоды равна 0,8; вероятность получить оценку «неудовлетворительно» по математике равна 0,4. Найти вероятность того, что настроение будет испорчено.

156. Биатлонист стреляет по 5 различным мишеням. Вероятность поражения отдельной мишени равна 0,8 и не зависит от результатов предыдущих выстрелов. Найти вероятность того, что биатлонист поразит более 3 мишеней.

157. Две фирмы изготавливают однотипную продукцию и реализуют ее через одну и ту же торговую точку. 70% продукции первой фирмы и 60% продукции второй фирмы – высшего сорта. Первая фирма поставила в эту торговую точку 18 единиц этой продукции, а вторая фирма поставила 12 единиц. Наугад выбирается одно изделие этого типа. Найти вероятность того, что это изделие – высшего сорта.

158. Пробное ОГЭ по математике сдали 85% учащихся лицея, а по русскому языку 75% учащихся. При этом известно, что пробник по русскому языку сдали 72% тех, кто успешно сдал пробник по математике. Найдите долю тех, кто сдал пробный экзамен по математике среди тех, кто сдал пробник по русскому языку.

159. В группе 16 девушек и 9 юношей. В среднем 12% девушек и 15 % юношей выполняют контрольную работу по математике неудовлетворительно. Наугад извлекается одна работа, и она выполнена на положительную оценку. Найти вероятность того, что эта работа выполнена юношей (ответ округлить до сотых).

160. В лесопосадочной полосе в ряд посажено 7 молодых елочек. Вероятность того, что одна елочка приживется, равна $p = 0.9$. Найти вероятность, что приживутся 5 елочек.

161. Вероятность того, что в составе торта есть сгущенное молоко, равна $p = 0{,}6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа тортов со сгущенкой, если торговой организацией оптом закуплено 150 тортов.

162. Согласно статистическим данным страховых компаний, вероятность того, что произойдет страховой случай в квартире за год (ограбление, потоп, пожар), равна 0,005. Страховая компания предлагает такому человеку застраховать свою квартиру на год на сумму 600000 рублей; страховой взнос равен 3600 рублей. Найти математическое ожидание прибыли компании.

163. Тяжелоатлет имеет три попытки для взятия веса (поднятия штанги). Вероятность взять вес с первой попытки равна 0,8, со второй – 0,9, с третьей – 0,7. Составить закон распределения случайной величины X – числа подходов к штанге.

164. На отрезке [0; 3] выбирают случайным образом точку x. Найдите вероятность того, что $x^2 \leq 0{,}49$.

165. В круг вписан равносторонний треугольник, в который вписан еще один круг. В большой круг бросается точка. Найти вероятность, что она попадет в малый круг. Число π взять равным 3.

166. $M(X) = 10$, найти $M(X + 3)$, $M(2X - 4)$.

167. $D(X) = 2$, найти $D(10)$, $D(X + 5)$, $D(2X - 4)$.

168. В билете еженедельной бинго-лотерее «6 из 36» всего 36 пронумерованных ячеек: от 1 до 36. Участник покупает билет В билетах «6 из 36» одно игровое поле с 36. Шесть чисел в билете уже зачёркнуты – это и есть игровая комбинация. Участник покупает билет с понравившейся комбинацией и дожидается розыгрыша. Во время тиража выбираются 6 случайных выигрышных номеров. Какова вероятность, что 4 номеров выигрышные и участник получит приз в 1000 рублей?

169. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены 3 точки. Какова вероятность, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точке?

170. Для разрушения военного объекта достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность разрушения военного объекта, если сброшены три бомбы с вероятностями попадания 0,4; 0,7 и 0,8.

171. Вероятность попадания в цель для данного охотника равна 0,8. Сколько выстрелов он должен произвести, чтобы с вероятностью 0,9984 утверждать, что поразит цель хотя бы один раз?

172. В некотором случайном опыте известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}8$, $P(A/B) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}7$. Найдите $P(B/A)$?

173. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения случайной величины X – числа элементов, вышедших из строя.

174. $D(X) = 5$, найти $D(X - 2)$, $D(4X + 6)$.

175. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

176. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства –

20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

4.а) 1, **б)** 4; **6**. 0,4; **8**. 0,5; **9**. 0,72; **10.** 12/75; **11.** 28; **12**. 0,36; **17**. 0,98; **18.** 0,504; **19**. 0,68; **20**.0,6; **21**. 0,46; **22**. **а)** 0,5, **б)** 0,7; **24**.а)0,65; б)0,5; в)0,65; **25**. 0,02; **26.** 1/30; **27.** 0,09; **28. а)**1/35, **б)** 2/35, **в)** 2/105; **29.** 1/49; **30.** 0,46; **31.а**) 0,567, **б)** 0,062; **32.** 7/30; **33.** 0,392; **34.** **35.** 0,5; **36.** 0,92; **37.** 7/8; **38.** 91/216; **39**. 0,2; **40.** 3; **41. а)** 0,008, **б)** 0,512, **в)** 0,488; **42.**31/35; **43.** 0,7;**44**. 0,856; **45**. 0,64; **46.** 5/21; **47**. 0,52; **48.** 2/3; **49**. 0,5; **50.** 0, 6125; **51**.21/25; **52 а)** 0,48; **53**. $(\pi - 2/_{4\pi})^3$; **54**. 0, 290304**; 55.** $250/6^5$; **56**. 0,4096; **57**. 0,18522; **59.** Указание: см. 3 тип ; **60.** Указание: см. 1 тип; **61** Указание: см. 4 тип; **62.** M(X)=1,9, D(X)=0,29; **64.** 7; **65**. 30; **70**. 1/6; **71**. 0,1; **72.** 0,25; **73**. 50; **74**. 0,25; **76.** 35/123; **77**. 13/60; **79.** 0,375; **80.** 0,81; **82.** 0,125; **83.** 2/11; **84.** 0,08; **85**. 0,74; **86.** 0,72; **87.** 80/123; **88.** 1/60; **89.** 70/79; **90.** 0,3; **92.** 0.125; **93.** 0,5; **94.** 0,1; **95.** 0,95; **96.** 0,1; **97.** 0.2; **98.** 0,61; **99.** 0,2; **100.** 0,52; **101.а)** 0,62; **102**.0,54; **103. а)**0,195, **б)** 0,56; **104.** 0,25; **105.** 0,045; **106.** 0,42; **107.** 0,063; **108.** 5/28; **109.** 0,375; **110.** 0,942; **111.** 0,85375; **112.** 0,888125; **113**.0,48; **114.** 24/75; **115.** 0,525; **116.** 0,097; **117.** 15/64; **119.** 1,2; **120.** 1,05; **121.** 0,9; **122.** 0,008; **123.** Указание: см. 1 тип задач; **125.** Указание: см. 4 тип задач; **127.** M(X)=3,2, D(X)=0,76; 128.1,92$; **130.** M(X)=82, D(X)=14,76; **131**. M(X)=5; **132**. $1 - \pi/_{3\sqrt{3}}$; **133**. $\sqrt{3}/_2$; **134**.0,3; **135.** 0,26; **136**. 0,25; **137**. 0,3; **139**. 7;7; **140.** 0,75; **141**.0,125; **142.** 2/121737; **143.** 0,05; **145**. 0,25; **146**. 5/6; **147**. 0,75; **148.** 0,32; **149.** 0,375; **150.** 0,18; **151.** 0,992; **152.** M(X)=2,1, M(У)=3,9, σ(У)=σ(X)=1,17; **153.** 4,15; **154.** 0,4; **155.** 0,88; **156.** 0,73728; **157.** 0,66; **158.**0,816; **159.** 0,35; **160.** $0,21\cdot(0,9)^5$; **161.** M(X)=90, D(X)=36; **162**. 582**; 163.** Указание: см. 4 тип задач; **164.** 7/30; **165.** 0,25; **166.** 13;16; **167**. 0;2;8; **168.** 1/3927; **169.** 2/9; **170.** 0,964; **171**. n=4; **172.** 0,4375; **173**. Указание: см. 1 тип задач; **174**. 5; 80; **175.** 0,9; **176.** 0,75.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцова В.Л. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» для организации самостоятельной работы со студентами, обучающимися по направлению 38.03.02 «Менеджмент» / В.Л. Воронцова, Л.Н. Зайнуллина. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – С. 33–45.

2. Высоцкий И.Р. Теория вероятностей и статистика. Учебное пособие для общеобразовательных организаций / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: Просвещение, 2023. – 272 с.

3. Высоцкий И.Р. Математика. Универсальный многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. Учебное пособие для общеобразовательных организаций в 3 ч. – Ч. 3. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. Практические задачи / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: Просвещение, 2020. – 238 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. школа, 1979. – 400 с.

5. Математика для экономических специальностей вузов. Ч. 2 / Под ред. Р.Ш. Марданова. – Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001. – 283 с.

6. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ – Образовательный портал для подготовки к экзаменам / Д. Д. Гущин. 2011–2023. – URL: https://ege.sdamgia.ru/

Электронное учебное издание
сетевого распространения

Зайнуллина Лейсан Наилевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Корректор
Л.И. Хасанова

Компьютерная верстка
А.И. Галиулллина

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано к использованию 23.11.2023.
Гарнитура «Times New Roman».
Заказ 38/10.

Издательство Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 206-52-14 (1705), 206-52-14 (1704)