УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.718

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ БЕСПОВТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

А.А. Вороненко, Д.В. Чистиков

Аннотация

В работе исследуются специальные свойства графов, связанных с бесповторными функциями и их индивидуальным тестированием. Доказана основная теорема, характеризующая множество всевозможных проверяющих тестов, продемонстрировано ее применение к задаче тестирования относительно бесповторной альтернативы в базисе всех функций двух переменных: получены индивидуальные верхние оценки минимальной длины тестов, приведен пример последовательности легко тестируемых функций.

Ключевые слова: бесповторная функция, тест, бесповторная альтернатива, индивидуальное тестирование, несвязный граф.

1. Постановка задачи тестирования относительно бесповторной альтернативы

Пусть B – функциональный базис в P_2. Формула F над B называется *бесповторной*, если символы переменных в F не повторяются. Булева функция называется *бесповторной* в базисе B, если она представима бесповторной формулой над B.

Рассмотрим следующую задачу тестирования. Для бесповторной в B и существенно зависящей от всех своих переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ требуется построить проверяющий тест на множестве всех бесповторных в B функций, зависящих, не обязательно существенным образом, от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Данная задача была названа в [1] тестированием *относительно бесповторной альтернативы.*

Тестом для бесповторной в B функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, естественно в этой постановке называть множество наборов, на котором f отличается от всевозможных бесповторных в B функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$ произвольным образом.

2. ν-графы и их тестирование

Рассмотрим неориентированные графы без петель и кратных ребер с множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством ребер E. Напомним, что *порожденным* подграфом (или, точнее, подграфом, порожденным множеством вершин X') называется подграф с множеством вершин X' и множеством ребер E' – всеми ребрами исходного графа, инцидентными в точности двум вершинам множества X'. Подграф графа G, порожденный множеством вершин X', обозначается символом $G[X']$.

Граф $G = (X, E)$ назовем *наследственно несвязным по дополнению*, или ν*-графом* (ранее [1] использовался термин «связно-несвязный»), если любой его подграф, порожденный произвольным подмножеством из не менее чем двух вершин, либо несвязен, либо имеет несвязное дополнение. Отметим, что граф является

ν-графом тогда и только тогда, когда в нем отсутствует порожденный подграф, изоморфный графу $P_4 = \big(\{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,c),(c,d)\}\big)$. Данный критерий активно используется в работах [2–6].

Рассмотрим корневое дерево D, внутренние вершины которого имеют не менее двух сыновей и раскрашены правильным образом в два цвета: 0 и 1, а листьям приписаны попарно различные элементы множества вершин V (*помеченно-раскрашенное* дерево). Определим отображение φ, действующее по следующему правилу. Для заданного дерева D образ $\varphi(D)$ – это граф с множеством вершин V; ребро (u,v) принадлежит множеству ребер $\varphi(D)$ тогда и только тогда, когда последняя общая вершина на пути из корня дерева в вершины u и v помечена единицей.

Предложение 1 (см., например, [1]). *Отображение φ множества помеченно-раскрашенных деревьев с множеством листьев V на множество ν-графов с множеством вершин V является взаимно-однозначным.*

На части множеств листьев дерева D введем следующее бинарное отношение: назовем пару множеств листьев W_1, W_2 *допустимой*, если W_1 и W_2 являются множествами всех листьев двух поддеревьев, корни которых являются различными сыновьями одной внутренней вершины дерева.

Пусть пара множеств W_1, W_2 допустима, поддерево с множеством листьев W_1 имеет набор корневых поддеревьев с множествами листьев $W_1^1, \ldots, W_1^p$, а поддерево с множеством листьев W_2 – набор корневых поддеревьев с множествами листьев $W_2^1, \ldots, W_2^q$. Если при этом некоторое множество W_i – лист, то считается, что W_i^1 состоит из этого листа.

Пусть, далее, T – произвольный граф на множестве вершин графа $G = \varphi(D)$. Введем в рассмотрение *граф* $\langle T, W_1, W_2\rangle$: множеством его вершин $\{w_1^1, \ldots, w_1^p, w_2^1, \ldots, w_2^q\}$ является множество корней поддеревьев дерева D, множества листьев которых составляют множества $W_1^1, \ldots, W_1^p, W_2^1, \ldots, W_2^q$ соответственно, а ребра есть между теми вершинами w_1^i и w_2^j, для которых в графе T есть хотя бы одно ребро между вершинами множеств W_1^i и W_2^j соответственно, и только между ними. *Образом* пары листьев дерева D (пары вершин графа $\varphi(D)$) в графе $\langle T, W_1, W_2\rangle$ назовем соответствующее ребро этого графа.

Граф T называется *покрывающим* для дерева D (графа $\varphi(D)$), если для любых допустимых пар W_1, W_2 граф $\langle T, W_1, W_2\rangle$ связен. Покрывающий граф T называется *тупиковым*, если никакой его собственный подграф на тех же вершинах не является покрывающим. Отметим, что всякий покрывающий граф является связным по определению.

Пусть $\operatorname{int} D$ – множество внутренних вершин помеченно-раскрашенного дерева D, а $\deg v$ – количество сыновей вершины v (для листа полагаем $\deg v = 1$). Обозначим символом $v{\uparrow}$ множество вершин – сыновей v и положим

$$\nu(D) \;=\; \sum_{v\in \operatorname{int} D}\left(-\binom{\deg v}{2} + (\deg v - 1)\sum_{v_i\in v\uparrow}\deg v_i\right).$$

Лемма 1. *Любой тупиковый покрывающий граф для помеченно-раскрашенного дерева D содержит ровно $\nu(D)$ ребер.*

Доказательство. Пусть T – тупиковый покрывающий граф. Для каждой пары допустимых множеств W_1, W_2 тупиковым связным подграфом в графе $\langle T, W_1, W_2\rangle$ является дерево, содержащее $\deg v_1 + \deg v_2 - 1$ ребро, где v_1, v_2 – корни поддеревьев с множествами листьев W_1, W_2 соответственно. Общее число ребер тупикового покрывающего графа T для всех пар вершин v_1, v_2 – сыновей одной внутренней вершины v равно

$$\sum_{\substack{v_i,v_j\in v\uparrow\\ v_i\neq v_j}}(\deg v_1+\deg v_2-1)=-\binom{\deg v}{2}+(\deg v-1)\sum_{v_i\in v\uparrow}\deg v_i.$$

Пусть x_i, x_j – произвольная пара листьев, v – последняя общая вершина на пути из корня D в x_i и x_j. Заметим, что среди всех пар поддеревьев, имеющих по одному листу из множества $\{x_i,x_j\}$, множества листьев лишь одной образуют допустимую пару (корни соответствующих поддеревьев являются сыновьями v). Поэтому, просуммировав полученную величину по всем внутренним вершинам дерева D, получим утверждение леммы. □

Тест-графом для ν-графа G назовем граф T с тем же множеством вершин такой, что для любого отличного от G ν-графа G' на тех же вершинах в T найдется ребро e, присутствующее ровно в одном из графов G и G'. Тест-граф будем называть *тупиковым*, если при удалении любого ребра он перестает быть тест-графом.

Лемма 2. *Для любого помеченно-раскрашенного дерева D любой покрывающий граф является тест-графом для ν-графа $\varphi(D)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по глубине дерева. Для деревьев глубины 1 покрывающим является лишь полный граф.

Пусть утверждение выполнено для всех деревьев глубины не более $t-1$. Докажем его для произвольного дерева глубины t. Пусть для определенности корень дерева D помечен единицей. Пусть T – покрывающий граф. По предположению индукции информации о наличии ребер между парами вершин, связанных ребрами в T, достаточно для восстановления всех ребер графа $\varphi(D)$ между вершинами из любого одного корневого поддерева дерева D. Пусть W_1, W_2 – произвольная допустимая пара множеств листьев двух корневых поддеревьев дерева D. По условию граф $\langle T,W_1,W_2\rangle$ связен. Для всех пар вершин, образ которых является ребром графа $\langle T,W_1,W_2\rangle$, в графе $\varphi(D)$ имеется ребро. Графы $\varphi(D)[W_1]$ и $\varphi(D)[W_2]$ имеют связное дополнение, а граф $\varphi(D)[W_1\cup W_2]$ связен. Наличие ребер между вершинами прообразов ребер графа $\langle T,W_1,W_2\rangle$ доказывает связность тестируемого подграфа. В силу того что $\varphi(D)$ – ν-граф, в нем имеются ребра, соединяющие каждую вершину множества W_1 со всеми вершинами множества W_2. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если D – помеченно-раскрашенное дерево, то любой тест-граф для ν-графа $\varphi(D)$ является покрывающим для D.*

Доказательство. Пусть некоторый граф $\langle T,W_1,W_2\rangle$ несвязен. Изменим номера его вершин, добавив к ним дополнительный индекс из множества $\{1,2\}$ так, что вершины, помеченные различными индексами, не соединены ребрами, причем каждый индекс приписан хотя бы одной вершине. Кроме того, мы можем предположить, что вершины, помеченные общим дополнительным индексом, идут подряд, то есть новая нумерация имеет вид

$$\{w_{1,1}^1,\ldots,w_{1,1}^{p'},w_{1,2}^{p'+1},\ldots,w_{1,2}^{p},w_{2,1}^1,\ldots,w_{2,1}^{q'},w_{2,2}^{q'+1},\ldots,w_{2,2}^{q}\}.$$

Для сокращения перебора рассмотрим величины $P=p'(p-p')$ и $Q=q'(q-q')$ и предположим, что $P\geqslant Q$. Возможны три случая:

$$1)\ P=0;\quad 2)\ P>0,\ Q=0;\quad 3)\ Q>0.$$

Рассмотрим граф G', получаемый из графа $\varphi(D)$ инверсией всех ребер вида $(w^-_{1,1}, w^-_{2,2})$ и $(w^-_{1,2}, w^-_{2,1})$. Во всех трех случаях граф G' отличен от $\varphi(D)$. Пусть в дереве D вершины w_1 и w_2 – сыновья вершины w – являются корнями поддеревьев с множествами листьев W_1 и W_2 соответственно. Пусть они соединены с вершинами $\{w^1_{1,1}, \ldots, w^{p'}_{1,1}, w^{p'+1}_{1,2}, \ldots, w^p_{1,2}\}$ и $\{w^1_{2,1}, \ldots, w^{q'}_{2,1}, w^{q'+1}_{2,2}, \ldots, w^q_{2,2}\}$ соответственно, являющимися корнями поддеревьев с множествами листьев $W^1_1, \ldots, W^p_1$ и $W^1_2, \ldots, W^q_2$.

Перестроим дерево D в наиболее общем третьем случае (первые два случая рассматриваются аналогично с некоторыми упрощениями). Расщепим вершину w на две: w и w', где w' – сын w. Присоединим к w' в качестве сыновей v_1 и v_2, а к ним – $v_{1,1}$, $v_{2,1}$ и $v_{1,2}$, $v_{2,2}$ соответственно (все – новые). К последним вершинам присоединим в качестве сыновей все корни поддеревьев дерева D с такими же нижними индексами. Раскрасим новое дерево в два цвета, сохранив цвет вершины w. Новое дерево не будет помеченно-раскрашенным, лишь если вершина w в исходном дереве имела ровно двух сыновей. В этом случае удалим вершину w из дерева, склеив вершину w' с ее отцом, если таковой имелся в исходном дереве. Получено дерево D'. Нетрудно убедиться, что $G' = \varphi(D')$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть D – произвольное помеченно-раскрашенное дерево. Тогда:*

(1) *граф G является покрывающим для D тогда и только тогда, когда он является тест-графом для ν-графа $\varphi(D)$;*

(2) *всякий покрывающий (удовлетворяющий условию (1)) граф является тупиковым в том и только в том случае, когда он является тупиковым тест-графом;*

(3) *любой удовлетворяющий условию (2) граф содержит ровно $\nu(D)$ ребер.*

Доказательство вытекает из лемм 1–3.

3. Тестирование в базисе всех функций двух переменных

Обозначим символом B_2 базис всех функций, зависящих от не более чем двух переменных. В [1] доказано, что для всякой бесповторной в B_2 и существенно зависящей от всех своих переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдется тест, состоящий из не более чем $4\binom{n}{2}$ наборов; в [7] эта оценка понижена до $\binom{n}{2}+n+1$, что составляет точное значение длины теста для дизъюнкции $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и, следовательно, соответствующей функции Шеннона. Настоящий раздел посвящен построению индивидуальных тестов относительно бесповторной альтернативы в этом базисе.

Напомним некоторые введенные в [1] понятия.

Каноническим деревом будем называть всякое помеченное корневое дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

1) константой (0 или 1) может быть помечена лишь вершина, являющаяся единственной в дереве;

2) листья дерева помечены переменными или их отрицаниями (литералами), причем различные листья – литералами, соответствующими различным переменным;

3) внутренние вершины помечены либо линейными ($\oplus$, $\overline{\oplus}$), либо нелинейными ($\&$, $\vee$) символами;

4) смежные вершины не могут быть помечены одинаковыми символами, а также различными линейными символами;

5) вершина, лежащая над помеченной линейным символом вершиной и смежная с ней, не может быть помечена символом $\&$ или отрицанием переменной.

Функция, реализуемая каноническим деревом, определяется индуктивно от листьев к корню естественным образом. Нетрудно убедиться, что для произвольной бесповторной в B_2 функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ существует реализующее ее каноническое дерево.

Склейкой канонического дерева будем называть корневое дерево, получаемое из канонического путем последовательного выполнения следующих трех операций:

1) замена всех линейных символов на 0, а всех нелинейных – на 1;

2) стягивание смежных внутренних вершин, помеченных символом 1;

3) замена всех литералов вида $\overline{x}_i$ на литералы x_i.

Множество из четырех наборов аргументов, различающихся только в компонентах с номерами i и j, назовем *квадратом существенности* переменных x_i и x_j функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, если остаточная подфункция на этом множестве существенно зависит от обеих своих переменных. Для всякого же графа $G=(X,E)$ на множестве вершин $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *редуцированным на граф* G *множеством квадратов существенности* функции f назовем произвольное множество наборов, которое для каждой пары переменных (x_i,x_j) из E содержит некоторый квадрат их существенности.

Пусть теперь $f(x_1,\ldots,x_n)$ – произвольная бесповторная в B_2 функция, существенно зависящая от всех своих переменных. Займемся построением индивидуального теста относительно бесповторной альтернативы для f, воспользовавшись схемой рассуждений из [1]. Докажем следующий факт:

Лемма 4 (о склейке). *Склейка $\ddot{D}$ произвольного канонического дерева любой бесповторной в B_2 функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ единственна и однозначно определяется значениями f на произвольном множестве ее квадратов существенности, редуцированном на любой тест-граф для $\varphi(\ddot{D})$.*

Доказательство. Склейка любого канонического дерева единственна и по алгоритму построения является помеченно-раскрашенным деревом. Пусть D_1 – произвольное каноническое дерево f, а $\ddot{D}_1$ – его склейка. Воспользуемся тем фактом, что для всевозможных $\sigma_i,\sigma_j,\sigma\in\{0,1\}$ линейность существенно зависящей от двух переменных функции $\left(x_i^{\sigma_i}\circ x_j^{\sigma_j}\right)^{\sigma}$, где $\circ\in\{\&,\vee,\oplus,\overline{\oplus}\}$, совпадает с линейностью функции $x_i\circ x_j$ (символа $\circ$). Это означает, что ребро (x_i,x_j) принадлежит множеству ребер графа $\varphi(\ddot{D}_1)$ тогда и только тогда, когда на всяком квадрате существенности переменных x_i и x_j реализуется нелинейная подфункция, что и доказывает единственность склейки. Тем самым $\ddot{D}=\ddot{D}_1$, графы $\varphi(\ddot{D})$ и $\varphi(\ddot{D}_1)$ совпадают, поэтому значения f на всяком множестве ее квадратов существенности, редуцированном на любой тест-граф для ν-графа $\varphi(\ddot{D})$, однозначно определяют граф $\varphi(\ddot{D})$ и, в силу предложения 1, саму склейку $\ddot{D}$. Лемма доказана. □

Пусть корневое поддерево D' канонического дерева D удовлетворяет следующим условиям:

1) D' имеет хотя бы одну внутреннюю вершину;

2) либо корень D' совпадает с корнем D, либо смежная с корнем D' и лежащая под ним вершина является линейной;

3) все вершины D' лежат в D над корнем поддерева D';

4) все принадлежащие D' линейные вершины D являются в D' листьями;

5) все принадлежащие D' нелинейные вершины D являются в D' внутренними вершинами.

В этом случае будем называть D' *фрагментом* канонического дерева.

Лемма 5 (о фрагменте). *Пусть известна $\ddot{D}$ – склейка канонического дерева D произвольной бесповторной в B_2 функции f. Пусть помеченная единицей* *вершина v склейки, соответствующая неизвестному фрагменту D' дерева D, не имеет потомков – внутренних вершин $\ddot{D}$. Тогда неизвестный фрагмент D' однозначно определяется значениями f на произвольном множестве ее квадратов существенности, редуцированном на любой тест-граф для ν-графа $\varphi(\widehat{D}')$, если дерево $\widehat{D}'$ получается из D' заменой всех пометок $\&$ на 0 и $\vee$ на 1.*

Доказательство. Восстановление неизвестного фрагмента будем проводить поэтапно. Вначале восстановим, с точностью до двух вариантов, пометки листьев D'. Рассмотрим листья, помеченные литералами $x_i^{\sigma_i}$ и $x_j^{\sigma_j}$ (степени σ_i и σ_j считаем неизвестными). В силу монотонности булевых конъюнкции и дизъюнкции на любом квадрате существенности переменных x_i и x_j в корне фрагмента D' реализуется функция $x_i^{\sigma_i} \circ x_j^{\sigma_j}$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, а в корне дерева D – она же либо ее отрицание. Таким образом, если остаточная подфункция функции f на квадрате существенности x_i и x_j монотонна либо антимонотонна по обеим своим существенным переменным, то необходимо $\sigma_i = \sigma_j$, в противном же случае $\sigma_i = \overline{\sigma}_j$. В силу связности произвольного тест-графа для $\varphi(\widehat{D}')$ получим, рассуждая таким образом, два непротиворечивых варианта пометок листьев D'.

Выберем один из полученных вариантов и восстановим, предполагая его справедливость, весь неизвестный фрагмент. Допустим, что некоторые два листа D' помечены литералами $x_i^{\sigma_i}$ и $x_j^{\sigma_j}$ соответственно. Определим пометку $\circ \in \{\&, \vee\}$ первой общей вершины на пути из этих листьев в корень D (D'). Остаточная подфункция функции f на любом квадрате существенности переменных x_i и x_j в случае $\circ = \&$ выделяет набор (σ_i, σ_j), а в случае $\circ = \vee$ – набор $(\overline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_j)$, что и позволяет восстановить при сделанных предположениях весь неизвестный фрагмент.

Обратим теперь внимание на то, что противоположный набор степеней пометок листьев восстанавливает такое же дерево фрагмента с двойственными пометками. В силу правил де Моргана реализуемые в корне двух вариантов неизвестного фрагмента функции являются отрицаниями друг друга. Если корень D' является также корнем (единственной внутренней вершиной) D, то выбор между этими двумя вариантами определяется значением f на любом наборе. В противном случае корень D', согласно условию 5 из определения канонического дерева, не может быть помечен символом $\&$, а потому один из рассматриваемых вариантов исключается. Лемма доказана. □

Пусть D' – фрагмент канонического дерева D бесповторной в B_2 функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, X' и X – множества листьев D' и D соответственно, X^0 – множество листьев D, лежащих в D над корнем D'. Определим на X^0 *оператор проектирования* ρ, переводящий каждый лист $x \in X^0$ дерева D в лист $\rho(x)$ фрагмента D', лежащий на пути из x в корень D. Пусть теперь E – произвольное множество пар вида (x_i, x_j), где $x_i, x_j \in X$, а множество $\rho(E)$ состоит из всевозможных пар вида $(\rho(x_i), \rho(x_j))$ таких, что $x_i, x_j \in X^0$, $(x_i, x_j) \in E$ и $\rho(x_i) \neq \rho(x_j)$. Пусть, как и раньше, дерево $\widehat{D}'$ получается из D' заменой пометок $\&$ на 0 и $\vee$ на 1. Тогда, в случае если граф $G' = (X', \rho(E))$ является тест-графом для ν-графа $\varphi(\widehat{D}')$, будем называть граф $G = (X, E)$ *тест-графом для фрагмента* D'.

Лемма 6. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ бесповторна в B_2, D – (некоторое) ее каноническое дерево, а $\ddot{D}$ – его склейка, то всякий тест-граф для ν-графа $\varphi(\ddot{D})$ является тест-графом для каждого фрагмента D' дерева D.*

Доказательство. Пусть $T = (X, E)$ – какой-либо тест-граф для ν-графа $\varphi(\ddot{D})$, D' – некоторый фрагмент D, X' – множество листьев D', ρ – определенный выше оператор проектирования. Покажем, что $T' = (X', \rho(E))$ – полный граф на множестве вершин X', тогда условие из определения тест-графа для фрагмента будет выполнено автоматически. Пусть v – соответствующая фрагменту D' вершина склейки. Заметим, что каждый лист D' является вершиной $\ddot{D}$ с родителем v. Поскольку граф T является, по лемме 3, покрывающим для дерева $\ddot{D}$, то для каждой пары $v_1, v_2 \in X'$ в E найдется ребро между множествами листьев поддеревьев $\ddot{D}$ с корнями v_1 и v_2, что и доказывает утверждение леммы. □

Докажем теперь основной результат настоящего раздела:

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная бесповторная в B_2 функция, существенно зависящая от всех своих переменных, D – (некоторое) ее каноническое дерево. Пусть множество наборов M содержит некоторое множество квадратов существенности f, редуцированное на какой-либо тест-граф для ν-графа $\varphi(\ddot{D})$, где $\ddot{D}$ – склейка D. Тогда значения f на наборах из M однозначно определяют каноническое дерево D.*

Доказательство. Сначала по лемме о склейке восстанавливается дерево $\ddot{D}$. После этого для каждой помеченной единицей внутренней вершины склейки, не имеющей потомков – внутренних вершин $\ddot{D}$, применяется лемма о фрагменте (выполнение ее посылок гарантируется утверждением предыдущей леммы). Если после этого в склейке остаются нерассмотренные линейные вершины, то для каждой такой вершины v, в случае если все ее сыновья – листья $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ и (или) уже восстановленные фрагменты, реализующие функции $f_{j_1}, \dots, f_{j_q}$, выполняется замена переменных $x_t = x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_p} \oplus f_{j_1} \oplus \dots \oplus f_{j_q}$ (здесь t – новый для каждой такой вершины номер) и процесс последовательного применения леммы о фрагменте продолжается. Всякий квадрат существенности произвольных переменных x_i и x_j либо «схлопывается» в отрезок и выводится из рассмотрения, либо, в силу явного вида задания функции x_t, индуцирует новый квадрат существенности для полученной в результате замены функции. Если при дальнейшем применении леммы о фрагменте выясняется, что лист x_t должен быть помечен отрицанием переменной, то соответствующая v вершина в D получает пометку $\overline{\oplus}$, иначе – пометку $\oplus$. Если же вершина v – корень дерева $\ddot{D}$, то выбор пометки корня D определяется, как и в доказательстве леммы о фрагменте, значением функции f на любом наборе. Теорема доказана. □

Следствие 1 (см. также [1]). *Каноническое дерево всякой бесповторной в B_2 функции f единственно.*

Следствие 2. *Для минимальной длины $T_{B_2}(f)$ индивидуального теста относительно бесповторной альтернативы в базисе всех функций двух переменных справедлива оценка*

$$T_{B_2}(f) \leqslant 4\,\nu(\ddot{D}),$$

где $\ddot{D}$ – склейка канонического дерева f.

4. Пример последовательности легко тестируемых функций, бесповторных в базисе $\{\oplus, \vee\}$

Напомним некоторые определения и обозначения, введенные в [5]. Функции, выразимые бесповторными формулами в базисе $\{\oplus, \vee\}$, назовем *функциями типа* Σ. Каноническое дерево всякой функции типа Σ не имеет листьев, помеченных отрицаниями переменных, а его внутренние вершины помечены чередующимися символами $\oplus$ и $\vee$.

В [5, 6] показано, что если каноническое дерево функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ типа Σ является бинарным, то для f существует тест относительно бесповторной альтернативы в базисе B_2, имеющий длину $3n-2$. Приведем существенно более короткое доказательство этого факта, использующее технику настоящей работы.

Как и в [5], символом $\mathbf{e}_i$ обозначим набор с единственной единицей в i-й компоненте, а символом $\mathbf{0}$ – нулевой набор. Набор α назовем 0-*изолированным* для функции f, если $f(\alpha)=0$ и при этом $f(\alpha\oplus\mathbf{e}_i)=1$ для всякого допустимого i.

Имеет место следующий факт:

Предложение 2 (Лемма 1 в [5]). *Нулевой набор является 0-изолированным для бесповторной в B_2 функции, существенно зависящей от всех своих переменных, тогда и только тогда, когда функция имеет тип Σ.*

Заметим, что если существенно зависящая от всех своих переменных функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией типа Σ, то для любой пары ее переменных x_i и x_j четверка наборов $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i\oplus\mathbf{e}_j$ образует квадрат существенности. Это дает способ тестирования функций типа Σ в базисе B_2: сначала убедиться при помощи значений на наборах веса ноль и один, что она действительно является функцией типа Σ, а потом добавить к этим наборам множество наборов веса два, соответствующих ребрам какого-нибудь тест-графа для ν-графа $\varphi(D)$, если помеченно-раскрашенное дерево D получается из канонического заменой всех пометок $\oplus$ на 0 и $\vee$ на 1.

Теорема 3. *Пусть существенно зависящая от всех своих переменных функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией типа Σ, а ее каноническое дерево является бинарным. Тогда для f существует тест относительно бесповторной альтернативы в базисе B_2, имеющий длину $3n-2$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы. Построим для нее проверяющий тест относительно бесповторной альтернативы в базисе $\{\oplus,\vee\}$, имеющий длину $2n-3$, тогда утверждение теоремы вытекает из указанного выше способа тестирования в B_2. Пусть дерево D получается из канонического для f заменой всех пометок $\oplus$ на 0 и $\vee$ на 1. Ограничившись рассмотрением наборов второго слоя, получим верхнюю оценку $T_{\{\oplus,\vee\}}(f)\leqslant\nu(D)$ для минимальной длины искомого теста. Поскольку бинарное дерево с n листьями имеет $n-1$ внутреннюю вершину, то

$$\nu(D)=\sum_{v\in\operatorname{int}D}\left(-\binom{2}{2}+(2-1)\sum_{v_i\in v\uparrow}v_i\right)=-(n-1)+\sum_{v_i\in V(D)}\deg v_i-\deg v_0,$$

где $V(D)$ – множество вершин, а v_0 – корень D, причем для всех листьев v' полагается $\deg v'=1$. Отсюда сразу $\nu(D)=-(n-1)+2(n-2)+n=2n-3$, что и дает необходимые значения длин тестов. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00701, 09-01-00817 и 07-01-00444).

Summary

A.A. Voronenko, D.V. Chistikov. Learning Read-Once Functions Individually.

The paper considers special properties of graphs linked to read-once functions and the task of learning them individually. A main theorem characterizing the set of all checking tests is proved; the results are applied to the problem of learning with respect to read-once alternatives in the basis of all two-variable functions. Individual upper bounds for minimal test length are obtained and a sequence of easily learned functions is constructed.

Key words: read-once functions, tests, learning, read-once alternative, individual learning, disconnected graph.

Литература

1. *Вороненко А.А.* О проверяющих тестах для бесповторных функций // Матем. вопр. кибернетики. — М.: Физматлит, 2002. – Вып. 11. – С. 163–176.

2. *Гурвич В.А.* О бесповторных булевых функциях // Усп. матем. наук. – 1977. – Т. 32, № 1. – С. 183–184.

3. *Гурвич В.А.* Критерии бесповторности функций алгебры логики // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, № 3. – С. 532–537.

4. *Golumbic M.C., Mintz A., Rotics U.* Factoring and recognition of read-once functions using cographs and normality and the readability of functions associated with partial k-trees // Discrete Appl. Math. – 2006. – V. 154. – P. 1465–1677.

5. *Вороненко А.А.* Об оценке длины проверяющего теста для некоторых бесповторных функций // Прикл. матем. и информ. – М.: Макс Пресс, 2003. – Т. 15. – С. 85–97.

6. *Вороненко А.А.* Методы представления дискретных функций в задачах подсчета, тестирования и распознавания свойств: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 2007. – 154 с.

7. *Рябец Л.В.* Сложность проверяющих тестов для бесповторных булевых функций / Сер.: Дискретная математика и информатика. Вып. 18. – Иркутск: Изд-во Ирк. гос. пед. ун-та, 2007. – 30 с.

Поступила в редакцию
12.03.09

Вороненко Андрей Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент факультета ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.
E-mail: *mk@cs.msu.su*

Чистиков Дмитрий Викторович – студент факультета ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.
E-mail: *dd1email@gmail.com*