

УДК 517.544

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ  
С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

И.Г. Салехова, М.М. Яхина

## Аннотация

Решена смешанная задача для плоскости  $u^+(t) = f^+(t)$ ,  $v^-(t) = g^-(t)$ ,  $t \in L$ , где  $L$  – объединение конечного или счётного числа отрезков (расположенных в том числе периодически) с точкой сгущения на бесконечности. Для счётного множества отрезков решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана в случае счётного множества контуров, в частности периодического расположения контуров.

**Ключевые слова:** смешанная задача для плоскости, задача Римана, однопериодическое расположение отрезков, однопериодическая функция, двоякопериодическое расположение отрезков, эллиптическая функция, квазиэллиптическая функция.

## Введение

Смешанная задача для плоскости в случае конечного числа отрезков рассматривалась в статье [1]. К этой задаче сводится основная смешанная задача теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами в случае, когда на верхних краях щелей задаются внешние напряжения, а на нижних краях – смещения. Метод, предложенный в [1], довольно сложный и содержит некоторые неточности. В настоящей работе для решения этой задачи применяется другой метод, позволяющий свести решение задачи к решению задачи Римана и упростить решение задачи. С учётом результатов решения задачи Римана в случае счётного множества контуров [2, с. 236–275] дано обобщение задачи на случай счётного множества отрезков, в частности, на случай периодического расположения отрезков и периодических данных [3, 4]. Предложенный аппарат позволяет исследовать задачу для непериодических данных.

## 1. Случай конечного числа интервалов

**1.1. Постановка задачи.** Пусть  $S$  обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков  $L_k = (a_k, b_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  действительной оси, причём  $a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$ . Обозначим  $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$ .

Требуется найти кусочно-голоморфную в  $S$  функцию

$$\Phi(z) = u(z) + iv(z),$$

исчезающую на бесконечности, по заданным граничным значениям вещественной и мнимой части

$$\begin{cases} u^+(t) = f^+(t), \\ v^-(t) = g^-(t), \end{cases} \quad t \in L, \quad (1)$$

где  $f^+(t)$ ,  $g^-(t)$  – заданные действительные функции, принадлежащие классу  $H_\lambda(\overline{L})$ .

Введём вспомогательные функции

$$\Omega(z) = \frac{\Phi(z) + i\bar{\Phi}(z)}{2}, \quad \Psi(z) = \frac{\Phi(z) - i\bar{\Phi}(z)}{2}, \quad \text{где } \bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})},$$

обладающие свойствами

$$\bar{\Omega}(z) = -i\Omega(z), \quad (2)$$

$$\bar{\Psi}(z) = i\Psi(z). \quad (3)$$

Учитывая, что

$$u^+(t) = \frac{\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)}}{2}, \quad v^-(t) = \frac{\Phi^-(t) - \overline{\Phi^-(t)}}{2i},$$

получим, что граничное условие (1) сведётся к следующим:

$$\Omega^+(t) - i\Omega^-(t) = f(t), \quad (4)$$

$$\Psi^+(t) + i\Psi^-(t) = g(t), \quad (5)$$

где  $t \in L$ , то есть к двум задачам Римана (4), (5) в классе функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2), (3), причём  $f(t) = f^+(t) + g^-(t)$ ,  $g(t) = f^+(t) - g^-(t)$ .

Очевидно, что решение задачи (1) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z). \quad (6)$$

Решение поставленной задачи получено в классах  $h(b_k)$ ,  $h(a_k)$ ,  $h(a_k, b_k)$ ,  $h_0$ ,  $h(c_q)$ . Под классом  $h(b_k)$  будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности концов  $b_k$ , а на остальных концах имеющих бесконечность порядка не выше единицы.

**1.2. Решение задачи в классе  $h(b_k)$ .** Под классом  $h(b_k)$  будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности концов  $b_k$ , а в остальных концах имеющих бесконечность порядка не выше единицы.

Остановимся на задаче (4).

Рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\Omega_0^+(t) - i\Omega_0^-(t) = 0. \quad (7)$$

Для решения задачи построим каноническую функцию  $\mathcal{X}_b^\Omega(z) \in h(b_k)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1.  $\mathcal{X}_b^+(t) - i\mathcal{X}_b^-(t) = 0$ ,
  2.  $\mathcal{X}_b^+(t) \neq 0$ ,  $\mathcal{X}_b^-(t) \neq 0$ ,  $t \in L$ ,
  3.  $\mathcal{X}_b(z) \in h(b_k)$ .
- (8)

С этой целью рассмотрим функцию  $\gamma^\Omega(z)$ , которая является решением задачи о скачке  $\gamma^{\Omega^+}(t) - \gamma^{\Omega^-}(t) = \ln G(t)$ . Учитывая, что в нашем случае  $G(t) \equiv i$ , и выбирая  $\ln(i) = i(\pi/2)$ , получим

$$\gamma^\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln(i)}{\tau - z} d\tau = \ln \prod_{k=1}^n \left( \frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^{1/4}.$$

Тогда

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z) = e^{\gamma^\Omega(z)} = \prod_{k=1}^n \left( \frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^{1/4}.$$

Учитывая (8), перепишем (7) в виде  $\frac{\Omega_0^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(t)} = \frac{\Omega_0^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^-}(t)}$ ,  $t \in L$ , откуда следует,

что функция  $f(z) = \frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$  принадлежит  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$  и обращается в нуль на бесконечности. Тогда на основании теоремы Лиувилля  $f(z) \equiv 0$ , то есть  $\Omega_0(z) \equiv 0$ . Имея  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$ , перепишем (4) в виде  $\frac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(t)} - \frac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^-}(t)} = \frac{f(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(t)}$ , то есть функция  $\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$  является частным решением задачи о скачке и обращается в нуль на бесконечности.

Таким образом,

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)(\tau - z)} d\tau.$$

Поскольку  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$  симметрична, то есть  $\overline{\mathcal{X}_b^\Omega(z)} = \mathcal{X}_b^\Omega(z)$ , функция  $\Omega(z)$  удовлетворяет условию (2).

Рассуждая аналогичным образом для задачи (5) и учитывая, что

$$\chi_b^\Psi(z) = \prod_{k=0}^n \left( \frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^{3/4},$$

получим

$$\Psi(z) = \frac{\chi_b^\Psi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)(\tau - z)} d\tau.$$

Итак, согласно (6) общее решение задачи (1) в классе  $h(b_k)$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Omega(z) + \Psi(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \mathcal{X}_b^\Omega(z) \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)(\tau - z)} d\tau + \chi_b^\Psi(z) \int_L \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)(\tau - z)} d\tau \right]. \end{aligned}$$

**1.3. Решение задачи в классе  $h(c_q)$ .** Через  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  обозначим концы  $a_k, b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , взятые в каком-нибудь порядке. Предположим, что количество  $a$ -точек и  $b$ -точек равно  $q_1$  и  $q_2$  соответственно, причём  $q = q_1 + q_2$ . Под классом  $h(c_q)$  понимается класс функций, ограниченных в некоторых заранее заданных концах  $c_1, c_2, \dots, c_q$ . Класс, соответствующий  $q = 0$ , мы будем обозначать  $h_0$ . Если  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = n$ , то соответствующий класс будем обозначать  $h(b_k)$ , если же  $q_1 = n$ ,  $q_2 = 0$ , то имеем класс  $h(a_k)$ . Если же  $q = 2n$ , то получаем класс  $h(a_k, b_k)$ .

Тогда канонические функции в этом классе запишем в виде

$$\mathcal{X}_q^\Omega(z) = \left( \frac{\prod_{k=1}^q (z - c_k)}{\prod_{k=q+1}^{2n} (z - c_k)} \right)^{1/4}, \quad \mathcal{X}_q^\Psi(z) = \left( \frac{\prod_{k=1}^q (z - c_k)}{\prod_{k=q+1}^{2n} (z - c_k)} \right)^{3/4}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

1) при  $q < n$  решение задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z) = & \frac{\mathcal{X}_q^\Omega(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)} d\tau + \mathcal{X}_q^\Omega(z) P_{n-q-1}^\Omega(z) + \\ & + \frac{\mathcal{X}_q^\Psi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)} d\tau + \mathcal{X}_q^\Psi(z) P_{n-q-1}^\Psi(z), \quad (9) \end{aligned}$$

где в силу (2) и (3) многочлены  $P_{n-q-1}^\Omega(z)$ ,  $P_{n-q-1}^\Psi(z)$  удовлетворяют условиям

$$\overline{P}_{n-q-1}^\Omega(z) = -iP_{n-q-1}^\Omega(z), \quad \overline{P}_{n-q-1}^\Psi(z) = iP_{n-q-1}^\Psi(z);$$

2) при  $q = n$  задача (1) имеет единственное решение

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_q^\Omega(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)} d\tau + \frac{\mathcal{X}_q^\Psi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)} d\tau;$$

3) при  $q > n$  задача (1) имеет единственное решение

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_q^\Omega(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)} d\tau + \frac{\mathcal{X}_q^\Psi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)} d\tau$$

при выполнении условий разрешимости

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^j}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)} d\tau = 0, \quad \int_L \frac{g(\tau)\tau^j}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)} d\tau = 0, \quad j = 0, 1, \dots, q - n - 1.$$

При  $q \geq n$  в формуле (9) надо положить  $P_{n-q-1}(z) \equiv 0$ .

## 2. Структура решения задачи Римана в случае счётного множества интервалов

**2.1. Постановка задачи.** Пусть  $S$  обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков  $L_k = (a_k, b_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , действительной оси, причём  $a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k < \dots$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ . Обозначим  $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ .

Требуется найти кусочно-голоморфную в  $S$  функцию

$$\Phi(z) = u(z) + iv(z),$$

удовлетворяющую условию (1).

Можно записать структуру решения задачи в классах  $h(a_k)$ ,  $h(b_k)$ ,  $h(a_k, b_k)$ ,  $h_0$ ,  $h(c_{k_n})$ .

Остановимся на классе  $h(b_k)$ .

**2.2. Структура решений в классе  $h(b_k)$ .** На основании результатов по решению задачи Римана в случае счётного множества гладких разомкнутых дуг [3] задача о скачке

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad g(t) = g_k(t), \quad t \in L_k, \quad L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \quad (10)$$

имеет частное решение

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)}, \quad (11)$$

где последовательность целых чисел  $\{n_k\}$  подобрана так, что ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Учитывая, что в нашем случае  $g(t) = \ln G(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \gamma^{\Omega}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{i\pi}{2} \frac{d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} = \frac{1}{4} \int_{L_k} \left[ \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} - \frac{z^2}{\tau^3} - \dots - \frac{z^{n_k-1}}{\tau^{n_k}} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_{L_k} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{4} \int_{L_k} \frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int_{L_k} \frac{z^j}{\tau^{j+1}} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{b_k - z}{a_k - z} - \frac{1}{4} \ln \frac{b_k}{a_k} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{z^j}{j b_k^j} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{z^j}{j a_k^j} = \ln \left( \frac{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_k}, n_k - 1\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, n_k - 1\right)} \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

где под  $\ln \frac{b_k - z}{a_k - z}$  понимается однозначная ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль  $L_k$  плоскости и исчезающая на бесконечности, а под  $\ln \frac{b_k}{a_k}$  — вполне определённое фиксированное значение этого выражения в точке  $z = 0$ ,  $E(u, q) = (1 - u) \exp\left(\sum_{p=1}^q \frac{u^p}{p}\right)$  — первичный множитель Вейерштрасса,

$$\gamma^{\Psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \left(-\frac{i\pi}{2}\right) \frac{d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} = \ln \left( \frac{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_k}, n_k - 1\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, n_k - 1\right)} \right)^{3/4}.$$

Канонические функции соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_b^{\Omega}(z) &= \exp(\gamma^{\Omega}(z)) = \left( \frac{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_k}, n_k - 1\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, n_k - 1\right)} \right)^{1/4}, \\ \mathcal{X}_b^{\Psi}(z) &= \exp(\gamma^{\Psi}(z)) = \left( \frac{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_k}, n_k - 1\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, n_k - 1\right)} \right)^{3/4}. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \mathcal{X}_b^{\Omega}(z) P^{\Omega}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z) z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{f(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau) \tau^{n_k}(\tau - z)} + \\ &+ \mathcal{X}_b^{\Psi}(z) P^{\Psi}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z) z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau) \tau^{n_k}(\tau - z)}, \end{aligned}$$

где  $P^\Omega(z)$  и  $P^\Psi(z)$  – целые функции, удовлетворяющие условиям

$$\overline{P}^\Omega(z) = -iP^\Omega(z), \quad \overline{P}^\Psi(z) = iP^\Psi(z).$$

Аналогично можно записать структуру решения в других классах.

### 3. Случай однопериодического расположения контуров

Пусть дан отрезок  $L_0 = (a_0, b_0)$  в полосе  $0 < \operatorname{Re} z \leq 2\pi$ . Обозначим  $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$ , где  $L_k$  получены из  $L_0$  преобразованиями однопериодической группы  $z + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

На основании вышеизложенного  $\gamma(z)$  имеет вид (11). Можно конкретизировать набор целых чисел  $n_k$  при построении частного решения (11). Справедлива [3]

**Теорема 1.** *Если  $n > 0$  есть целое число, при котором ряд*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (R_k)^{-(n+1)}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |g_k(\tau)| |d\tau|, \quad R_k = \min |\tau|, \quad \tau \in L_k \quad (12)$$

*сходится, то ряд (11) при всех  $n_k = n$  сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров  $L_k$  (после отбрасывания соответствующего числа членов).*

Задача (10) в этом случае имеет частное решение

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^n (\tau - z)}. \quad (13)$$

Предположим, что выполняется условие

$$g_0(t) = g_k(t + 2\pi k), \quad t \in \overline{L_0}, \quad (14)$$

тогда  $A_k = A_0$ , и сходимость ряда (13) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} R_k^{-(n+1)} + R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)},$$

где  $R_0 = a_0$ ,  $R_k = a_0 + 2\pi k$ ,  $k > 0$ ,  $R_k = |b_{-1} + 2\pi k|$ ,  $k < 0$ .

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)}$  можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a_0 + 2\pi k)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1} \left(\frac{a_0}{k} + 2\pi\right)^{n+1}}. \quad (15)$$

Учитывая, что  $(a_0/k + 2\pi) \rightarrow 2\pi$  при  $k \rightarrow \infty$  имеем, что сходимость ряда (15) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}. \quad (16)$$

Известно, что наименьшее  $n$ , при котором сходится ряд (16), будет равно 1.

Итак, задача (10) имеет частное решение

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} = \\
&= \frac{z}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_0(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{z}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} + \frac{z}{2\pi i} \int_{L_{-k}} \frac{g_{-k}(\tau) d\tau}{\tau(\tau-z)} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{\tau} \right] d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-z+2\pi k} - \frac{1}{\tau+2\pi k} \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-z-2\pi k} - \frac{1}{\tau-2\pi k} \right] d\tau \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left\{ \left[ \frac{1}{\tau-z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\tau-z+2\pi k} + \frac{1}{\tau-z-2\pi k} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\tau+2\pi k} + \frac{1}{\tau-2\pi k} \right) \right] \right\} d\tau = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\tau-z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau,
\end{aligned}$$

при этом мы учли (14) и разложение  $\operatorname{ctg} z$  на простейшие дроби.

Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого получен однопериодический аналог интеграла типа Коши [2, с. 201].

#### 4. Случай двоякопериодического расположения интервалов

Пусть отрезок  $L_0 = (a_0, b_0)$  лежит в  $R$ , где  $R$  – прямоугольник с вершинами  $-\frac{i\tilde{\omega}_2}{2}, \omega_1 - \frac{i\tilde{\omega}_2}{2}, \omega_1 + \frac{i\tilde{\omega}_2}{2}, i\frac{\tilde{\omega}_2}{2}, \omega_1, \tilde{\omega}_2 \in \mathbb{R}, \omega_2 = i\tilde{\omega}_2$ . Обозначим  $L = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$ , где  $L_k$  получены из  $L_0$  преобразованиями двоякопериодической группы  $z + \omega, \omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Пусть в задаче о скачке (10) функции  $g_k(\tau)$  удовлетворяют условию

$$g_0(t) = g_k(t + \omega), \quad t \in \bar{L}_0. \quad (17)$$

В данном случае в силу (17) сходимость ряда (13) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{-(n+1)}, \quad R_k = |\tau + \omega|. \quad (18)$$

Ряд (18) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^{-(n+1)} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau + \omega|^{n+1}} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|^{n+1} \left| \frac{\tau}{\omega} + 1 \right|^{n+1}}.$$

Учитывая, что  $|\tau/\omega + 1|^{n+1} \rightarrow 1$  при  $k_1, k_2 \rightarrow \pm\infty$  имеем, что сходимость ряда (18) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|^{n+1}}. \quad (19)$$

Из теории двоякопериодических функций [2, с. 212] известно, что наименьшее  $n$ , при котором сходится ряд (19), будет равно 2.

Таким образом, задача (1) имеет частное решение

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^2(\tau - z)}. \quad (20)$$

Суммируя ряд (20) с учётом (17), получим [4]

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)] d\tau + \frac{z}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{u - \omega} + \frac{u}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right)$ ,  $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ , есть дзета-функция Вейерштрасса.

Очевидно, что скачок, равный  $g_0(t)$  на  $L_0$ , имеет каждая функция однопериметрического семейства  $\gamma_1(z) = \tilde{\gamma}(z) + Az$ .

Если отыскивать двоякопериодические решения задачи (10) с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и учитывать, что условие  $\int_{L_0} g_0(\tau) d\tau = 0$  [4] является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи, то получим

$$\gamma_1(z + \omega_k) = \gamma_1(z) + \frac{\omega_k}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau + A\omega_k, \quad k = 1, 2,$$

откуда  $A = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) \zeta'(\tau) d\tau$ .

Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого получен двоякопериодический аналог интеграла типа Коши [2, с. 217]  $\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau) [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)] d\tau$ .

## 5. Решение задачи в случае однопериодического расположения интервалов

**5.1. Постановка задачи.** Пусть отрезки  $L_k = (a_k, b_k)$  расположены так, как указано в п. 3.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию  $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$ , ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую условию (1), где функции  $f^+(t) = f_k^+(t)$ ,  $g^-(t) = g_k^-(t)$ ,  $t \in \bar{L}_k$  удовлетворяют условиям  $f_0^+(t) = f_k^+(t + 2\pi k)$ ,  $g_0^-(t) = g_k^-(t + 2\pi k)$ ,  $t \in \bar{L}_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f_0^+(t), g_0^-(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0)$ .

Поставленная задача равносильна задаче нахождения периодической с периодом  $2\pi$  функции  $\Phi(z)$  с линией скачков  $L_0$  по условию

$$\begin{cases} u^+(t) = f^+(t), \\ v^-(t) = g^-(t), \end{cases} \quad t \in L_0,$$

где  $f^+(t)$ ,  $g^-(t)$  – заданные функции класса Гёльдера  $H_\lambda(\bar{L}_0)$ .

Решение задачи отыскивается в классе функций, ограниченных на верхнем и нижнем концах полосы периода.



**5.2. Решение задачи в классе  $h(b_0)$ .** На основании вышеизложенного имеем

$$\gamma^\Omega(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau = \ln \left( \frac{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}}{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}} \right)^{1/4},$$

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z) = \left( \frac{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}}{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}} \right)^{1/4}, \quad (22)$$

причём  $\mathcal{X}_b^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z + 2\pi)$ ,  $\overline{\mathcal{X}_b^\Omega(z)} = \mathcal{X}_b^\Omega(z)$ .

Функция  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$  ограничена на концах полосы периода, так как при  $z \rightarrow x \pm \infty$  она стремится к конечным пределам [2, с. 201].

С помощью канонической функции задача сводится к задаче о скачке в классе функций, ограниченных на концах полосы периода

$$\frac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(t)} - \frac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^-}(t)} = \frac{f(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(t)}, \quad t \in L_0,$$

откуда

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)} \left[ \operatorname{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + c_b^\Omega \mathcal{X}_b^\Omega(z),$$

где

$$c_b^\Omega = b(1 + i), \quad b = \operatorname{const}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\mathcal{X}_b^\Psi(z) = \left( \frac{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}}{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}} \right)^{3/4}, \quad (24)$$

причём  $\mathcal{X}_b^\Psi(z) = \mathcal{X}_b^\Psi(z + 2\pi)$ ,  $\overline{\mathcal{X}_b^\Psi(z)} = \mathcal{X}_b^\Psi(z)$ . Функция  $\mathcal{X}_b^\Psi(z)$  ограничена на концах полосы периода.

Рассуждая, как и выше, получим

$$\Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Psi(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)} \left[ \operatorname{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + c_b^\Psi \mathcal{X}_b^\Psi(z),$$

где

$$c_b^\Psi = a(1 - i) \quad a = \operatorname{const}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Тогда решение задачи (1) в классе  $h(b_0)$  запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)} \left[ \operatorname{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + c_b^\Omega \mathcal{X}_b^\Omega +$$

$$+ \frac{\mathcal{X}_b^\Psi(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)} \left[ \operatorname{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + c_b^\Psi \mathcal{X}_b^\Psi,$$

где  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$ ,  $\mathcal{X}_b^\Psi(z)$ ,  $c_b^\Omega$ ,  $c_b^\Psi$  определяются соответственно формулами (22), (24), (23), (25).

Аналогичным образом можно записать решение в классе  $h(a_0)$ .

**5.3. Решение задачи в классе  $h(a_0, b_0)$ .** Остановимся сначала на задаче для  $\Omega(z)$ .

Построим каноническую функцию  $\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)$ :

$$\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z) \frac{\sin((a_0 - z)/2)}{\sin((\theta - z)/2)},$$

где  $\theta \notin \bar{L}_0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Поведение  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$  нами было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции  $f(z) = \frac{\sin((a_0 - z)/2)}{\sin((\theta - z)/2)}$ .

1. Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену  $e^{iz} = t$  [2, с. 201], тогда

$$f(z) = \frac{\sin((a_0 - z)/2)}{\sin((\theta - z)/2)} = \frac{e^{i(a_0 - z)/2} - e^{-i(a_0 - z)/2}}{e^{i(\theta - z)/2} - e^{-i(\theta - z)/2}} = \frac{e^{ia_0} - e^{iz}}{e^{i\theta} - e^{iz}} = \frac{e^{ia_0} - t}{e^{i\theta} - t}.$$

Пусть  $z \rightarrow x + i\infty$ , тогда  $t \rightarrow 0$ , и  $\lim_{z \rightarrow x + i\infty} f(z) = e^{ia_0}/e^{i\theta}$ . Таким образом,  $f(z)$  ограничена на верхнем конце полосы периода.

2. Если же положить  $e^{-iz} = t$ , то

$$f(z) = \frac{e^{ia_0} - 1/t}{e^{i\theta} - 1/t} = \frac{te^{ia_0} - 1}{te^{i\theta} - 1}.$$

Если  $z \rightarrow x - i\infty$ ,  $t \rightarrow 0$ , то  $\lim_{z \rightarrow x - i\infty} f(z) = 1$ , и поэтому функция  $f(z)$  ограничена на нижнем конце полосы периода.

Имея  $\mathcal{X}_{ab}(z)$ , перепишем однородное граничное условие в виде

$$\frac{\Omega_0^+(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^+}(t)} = \frac{\Omega_0^-(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^-}(t)}$$

Таким образом,  $\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}$  является периодической функцией, ограниченной на верхнем и нижнем концах полосы периода, а значит,  $\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)} \equiv C$ , где  $C = \text{const}$ .

Но, так как функция  $\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}$  обращается в нуль в точках  $z_k = \theta - 2\pi k$ , то  $C = 0$ . Таким образом, соответствующая однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Единственное решение задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z) &= \frac{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(\tau)} \left[ \text{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \text{ctg} \left( \frac{\tau - \theta}{2} \right) \right] d\tau + \\ &+ \frac{\mathcal{X}_{ab}^\Psi(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^\Psi(\tau)} \left[ \text{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \text{ctg} \left( \frac{\tau - \theta}{2} \right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

**5.4. Решение задачи в классе  $h_0$ .** Каноническая функция будет иметь вид

$$\mathcal{X}_0^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z) \frac{1}{\sin((b_0 - z)/2) \sin((\theta - z)/2)}, \quad \theta \notin \bar{L}_0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Поведение  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$  нами было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции  $F(z) = \frac{1}{\sin((b_0 - z)/2) \sin((\theta - z)/2)}$ .

1. Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену  $e^{iz} = t$ , тогда

$$F(z) = \frac{-4}{e^{i(b_0+\theta)/2}/t + e^{-i(b_0+\theta)/2}t}.$$

Пусть  $z \rightarrow x + i\infty$ , тогда  $t \rightarrow 0$ , поэтому функция  $F(z)$  на верхнем конце полосы периода имеет нуль первого порядка.

2. Если же положить  $e^{-iz} = t$ , то

$$F(z) = \frac{-4}{e^{i(b_0+\theta)/2}t + e^{-i(b_0+\theta)/2}/t},$$

поэтому функция  $F(z)$  и на нижнем конце полосы периода имеет нуль первого порядка.

Рассмотрим функцию  $\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_0^\Omega(z)}$ , которая будет периодической, имеющей полюсы первого порядка на верхнем и нижнем концах полосы периода. Тогда на основании [2, с. 204] имеем

$$\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_0^\Omega(z)} = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikz},$$

где  $c_k = \text{const}$ ,  $k = -1, 0, 1$ .

Таким образом,

$$\Omega_0(z) = \mathcal{X}_0^\Omega(z)(c_{-1}e^{-iz} + c_0 + c_1e^{iz}) = \mathcal{X}_0^\Omega(z)(\tilde{c}_1 \cos z + \tilde{c}_2 \sin z + c_0).$$

Функция  $\mathcal{X}_0(z)$  в точках  $z_k = \theta - 2\pi k$  имеет полюсы первого порядка, поэтому для ограниченности решения в точках  $z_k$  необходимо, чтобы  $c_0 = -\tilde{c}_1 \cos \theta - \tilde{c}_2 \sin \theta$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_0(z) &= \mathcal{X}_0^\Omega(z)(\tilde{c}_1 \cos z + \tilde{c}_2 \sin z - \tilde{c}_1 \cos \theta - \tilde{c}_2 \sin \theta) = \\ &= \mathcal{X}_0^\Omega(z)[\tilde{c}_1(\cos z - \cos \theta) + \tilde{c}_2(\sin z - \sin \theta)]. \end{aligned}$$

Тогда общее решение задачи в классе  $h_0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^\Omega(\tau)} \left[ \text{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \text{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + \\ &\quad + \mathcal{X}_0^\Omega(z) [\tilde{c}_1(\cos z - \cos \theta) + \tilde{c}_2(\sin z - \sin \theta)] + \\ &\quad + \frac{\mathcal{X}_b^\Psi(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^\Psi(\tau)} \left[ \text{ctg} \left( \frac{\tau - z}{2} \right) - \text{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau + \\ &\quad + \mathcal{X}_0^\Psi(z) [\tilde{\tilde{c}}_1(\cos z - \cos \theta) + \tilde{\tilde{c}}_2(\sin z - \sin \theta)], \end{aligned}$$

где  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{\tilde{c}}_1, \tilde{\tilde{c}}_2$  имеют соответственно вид (23), (25).

## 6. Решение задачи в случае двоякопериодического расположения интервалов

**6.1.** Пусть отрезки  $L_k = (a_k, b_k)$  расположены так, как указано в п. 4. Требуется найти функцию  $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$ , ограниченную на бесконечности, удовлетворяющую условию (1), где функции  $f^+(t) = f_k^+(t)$ ,  $g^-(t) = g_k^-(t)$ ,

$t \in L_k$ , удовлетворяют условиям  $f_0^+(t) = f_k^+(t + \omega)$ ,  $g_0^-(t) = g_k^-(t + \omega)$ ,  $t \in L_0$ ,  $f_0(t), g_0(t) \in H_\lambda(\bar{L}_0)$ .

Поставленная задача равносильна задаче нахождения двоякопериодической эллиптической кусочно-голоморфной функции, ограниченной в параллелограмме периодов [4] с линией скачков  $L_0$  по краевому условию

$$u^+(t) = f^+(t), \quad v^-(t) = g^-(t), \quad t \in L_0, \quad (26)$$

где  $f^+(t)$ ,  $g^-(t)$  – заданные функции,  $f^+(t), g^-(t) \in H_\lambda(L_0)$ .

Решение задачи получено в классах  $h(b_0)$ ,  $h(a_0)$ ,  $h_0$ ,  $h(a_0, b_0)$ .

**6.2. Решение задачи в классе  $h(b_0)$ .** На основании вышеизложенного имеем

$$\gamma^\Omega(z) = \frac{1}{4} \int_{L_0} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)] d\tau = \frac{1}{4} \ln \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)},$$

где

$$\sigma(u) = u \prod'_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0,$$

– сигма-функция Вейерштрасса, при этом  $\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$ .

Тогда

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z) = \exp(\gamma^\Omega(z)) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)} \right]^{1/4}, \quad \bar{\mathcal{X}}_b^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z).$$

Функция  $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$  является квазиэллиптической [4], то есть

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z + \omega_k) = \mathcal{X}_b^\Omega(z) \exp(-\eta_k \alpha), \quad k = 1, 2, \quad \eta_k = 2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\pi i}{2} d\tau = \frac{1}{4}(b_0 - a_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Остановимся на решении однородной задачи (7). Рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$ , которая является квазиэллиптической с условием

$$f(z + \omega_k) = f(z) \exp(\eta_k \alpha). \quad (28)$$

Таким образом, получили задачу построения квазиэллиптической функции, удовлетворяющей условию (28). Однако критерием существования квазиэллиптической голоморфной функции  $f(z) \not\equiv 0$ , удовлетворяющей условию (28), является условие  $\alpha(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = 2\pi i\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  [5]. Но в силу соотношения Лежандра, связывающего основные периоды и величины  $\eta_1, \eta_2$  имеем  $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ , откуда  $\alpha = \tilde{\omega}$ .

В нашем случае  $\alpha$ , определяемая формулой (27), не может быть периодом, поэтому  $f(z) \equiv 0$ .

Таким образом, задача (7) не имеет отличных от нуля решений.

Для решения неоднородной задачи (4) будем использовать квазипериодический аналог ядра Коши [5]

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau - z)},$$

причём  $A(\tau, z + \omega_k) = A(\tau, z) \exp(\alpha\eta_k)$ .

Единственным решением задачи (4) будет функция

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{f(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)},$$

причём функция удовлетворяет условию (2).

Рассуждая аналогично, получим

$$\Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Psi(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{A_1(\tau, z)g(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)}, \quad \mathcal{X}_b^\Psi(z) = \left[ \frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)} \right]^{3/4},$$

где  $A_1(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau-z-\alpha_1)}{\sigma(-\alpha_1)\sigma(\tau-z)}$ ,  $\alpha_1 = \frac{3}{4}(b_0 - a_0)$ .

Решение задачи (1) представимо в виде (6).

Решение в классе  $h(a_0)$  запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_a^\Psi(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{A(\tau, z)f(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_a^{\Psi^+}(\tau)} + \frac{\mathcal{X}_a^\Omega(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{A_1(\tau, z)g(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_a^{\Omega^+}(\tau)},$$

где  $\mathcal{X}_a^\Psi(z) = \left[ \frac{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)} \right]^{1/4}$ ,  $\mathcal{X}_a^\Omega(z) = \left[ \frac{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)} \right]^{3/4}$ .

**6.3. Решение задачи в классе  $h(a_0, b_0)$ .** Каноническая функция будет иметь вид

$$\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z) = \left[ \frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)} \right]^{1/4} \frac{\sigma(z-a_0)}{\sigma(z-\theta)}, \quad \theta \notin \bar{L}_0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Функция  $\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)$  удовлетворяет условию  $\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z + \omega_k) = \mathcal{X}_{ab}^\Omega(z) \exp(\beta \eta_k)$ , где  $\beta = -\alpha + \theta - a_0$  и  $\beta$  не равно периоду. Тогда квазиэллиптическая функция  $f(z) = \frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}$  тождественно равна нулю, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Для решения неоднородной задачи возьмём  $\theta = a_0 + \alpha$ , тогда  $\beta = 0$  и  $\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z + \omega_k) = \mathcal{X}_{ab}^\omega(z)$ ,  $k = 1, 2$ .

Имея  $\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)$ , перепишем краевое условие (4) в виде

$$\frac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^+}(t)} - \frac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^-}(t)} = \frac{f(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^+}(t)}, \quad t \in L_0,$$

Таким образом, функция  $\frac{\Omega(z)}{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}$  является решением задачи о скачке в классе двоякопериодических функций. На основании известных результатов [4] имеем, что необходимым условием разрешимости получившейся задачи является равенство  $\int_{L_0} \frac{f(\tau) d\tau}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^+}(\tau)} = 0$ . Решение задачи имеет вид

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_{ab}^\Omega(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega^+}(\tau)} [\zeta(\tau-z) - \zeta(\tau-a_0-\alpha)] d\tau.$$

Аналогично запишем

$$\Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_{ab}^\Psi(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Psi+}(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - a_0 - \alpha_1)] d\tau,$$

где  $\mathcal{X}_{ab}^\Psi(z) = \mathcal{X}_b^\Psi(z) \frac{\sigma(z - a_0)}{\sigma(z - \theta_1)}$ ,  $\theta_1 \notin \bar{L}_0$ ,  $\theta_1 \in \mathbb{R}$ .

**6.4. Решение задачи в классе  $h_0$ .** Каноническая функция задачи имеет вид

$$\mathcal{X}_0^\Omega(z) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)} \right]^{1/4} \frac{\sigma(z - \theta_2)}{\sigma(z - b_0)}, \quad \theta_2 \notin \bar{L}_0, \quad \theta_2 \in \mathbb{R},$$

причём  $\mathcal{X}_0^\Omega(z + \omega_k) = \mathcal{X}_0^\Omega(z) e^{-\eta_k \beta_1}$ ,  $\beta_1 = \theta_2 + \alpha - b_0$  и  $\beta_1$  не равно периоду.

Рассмотрим функцию  $F_3(z) = \frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_0^\Omega(z)}$ , которая является квазиэллиптической с условием

$$F_3(z + \omega_k) = F_3(z) \exp(\eta_k \beta_1).$$

Кроме того, функция  $F_3(z)$  имеет в точке  $\theta_2$  полюс первого порядка. На основании известных свойств квазиэллиптических функций [5, с. 8], функция  $F_3(z)$  должна иметь нуль первого порядка в точке  $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ , причём имеет место равенство

$$\theta_2 - \tilde{\theta} = \beta_1(\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1) / 2\pi i = \beta_1,$$

при этом мы учли соотношение Лежандра. Функция  $F_3(z)$  тогда имеет вид

$$F_3(z) = C \frac{\sigma(z + \alpha - b_0)}{\sigma(z - \theta_2)}.$$

Итак,  $\Omega_0(z) = C \mathcal{X}_0^\Omega(z) \frac{\sigma(z + \alpha - b_0)}{\sigma(z - \theta)}$ , где  $C = (1 + i)C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ .

Таким образом,

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_0^\Omega(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A_2(\tau, z) \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_0^{\Omega+}(\tau)} d\tau + \Omega_0(z), \quad A_2(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \beta_1)}{\sigma(-\beta_1)\sigma(\tau - z)}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим

$$\mathcal{X}_0^\Psi(z) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)} \right]^{3/4} \frac{\sigma(z - \theta_3)}{\sigma(z - b_0)}, \quad \theta_3 \notin \bar{L}_0, \quad \theta_3 \in \mathbb{R},$$

$$\Psi(z) = \tilde{C} \mathcal{X}_0^\Psi(z) \frac{\sigma(z + \alpha_1 - b_0)}{\sigma(z - \theta_3)} + \frac{\mathcal{X}_0^\Psi(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A_3(\tau, z) \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_0^{\Psi+}(\tau)} d\tau,$$

$$A_3(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \beta_2)}{\sigma(-\beta_2)\sigma(\tau - z)}, \quad \beta_2 = \theta_3 + \alpha_1 - b_0, \quad \tilde{C} = (1 - i)C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

### Summary

*I.G. Salekhova, M.M. Yakhina.* A Mixed Problem for a Plane with Rectilinear Cuts.

We solve a mixed problem for a plane  $u^+(t) = f^+(t)$ ,  $v^-(t) = g^-(t)$ ,  $t \in L$ , where  $L$  is the union of a finite or denumerable set of segments (including those arranged periodically) with an accumulation point at infinity. For a denumerable set of segments, the problem is solved

by the reduction to the corresponding Riemann problem in the case of a denumerable set of circuits, including those arranged periodically.

**Keywords:** mixed problem for a plane, Riemann problem, singly periodic arrangement of segments, singly periodic function, doubly periodic arrangement of segments, elliptic function, quasi-elliptic function.

#### Литература

1. *Шерман Д.И.* Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // Докл. АН СССР. – 1940. – Т. 27, № 4. – С. 330–334.
2. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 302 с.
3. *Салехова И.Г.* Однородная задача Римана в случае счётного множества разомкнутых дуг // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 124–135.
4. *Аксентьева Е.П., Салехова И.Г.* Задача Римана в случае дwoякопериодического расположения дуг // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 66–79.
5. *Аксентьева Е.П.* Функции Вейерштрасса в краевых задачах. Методическая разработка к специальному курсу. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 42 с.

Поступила в редакцию  
12.03.13

---

**Салехова Илюся Гаруновна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [Ilysia.Salekhova@kpfu.ru](mailto:Ilysia.Salekhova@kpfu.ru)

**Яхина Мария Миргасимовна** – магистрант кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [husainovam@bk.ru](mailto:husainovam@bk.ru)