УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 519.6

КОМБИНАТОРНАЯ ЛЕММА ДЛЯ РАЗБИЕНИЯ ЛЕБЕГА – БРАУЭРА КУБА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р.Р. Шагидуллин

Аннотация

В статье излагается комбинаторная лемма для разбиения куба 3-мерного пространства 3-мерными замкнутыми прямоугольниками, при котором ни одна точка куба не принадлежит более чем $3+1$ прямоугольнику (разбиение Лебега – Брауэра). Как следствие можно получить некоторый вариант теоремы Брауэра о неподвижной точке, приближенный метод нахождения этой точки, или обобщение игры «гекс» на n игроков. Литературой, посвященной этой игре, и подсказана эта лемма. Выявляются основные идеи, необходимые для обобщения леммы и проведения соответствующих доказательств на n-мерный случай.

Ключевые слова: комбинаторная лемма, неподвижная точка.

Изложение проведем для трехмерного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром единичной длины. Пусть ребро AB направлено по оси x_1, AD – по оси x_2, AA_1 – по оси x_3. Первый слой прямоугольников разбиения покрывает основание $ABCD$ как на рис. 1. Часть проекции второго слоя на $ABCD$ показана пунктирной линией, проекция третьего слоя совпадает с проекцией первого и т. д.

Пусть две противоположные грани куба, перпендикулярные оси x_1, помечены числом 1; две другие перпендикулярные к оси x_2 – числом 2; остальные – числом 3. Пусть множество прямоугольников, покрывающих куб, разбито на три непересекающихся класса, помеченных числами 1, 2, 3.

Лемма 1. *При любом разбиении существует лента, состоящая только из прямоугольников одного класса и соединяющая грани куба, помеченные тем же числом, что и класс.*

Под лентой понимаем последовательность прямоугольников из разбиения куба: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, где соседние прямоугольники Π_i, Π_{i+1} пересекаются по невырожденному прямоугольнику меньшей размерности, принадлежащему их граням.

Доказательство. Рассмотрим граф G, к вершинам которого отнесем точки пересечения ребер прямоугольников, а к ребрам — возникающие на сторонах прямоугольников отрезки, соединяющие вершины.

Начнем движение по ребрам этого графа, начиная от точки A и соблюдая следующее условие. Мы движемся по ребру PE от P к E (рис. 2), если обход вокруг PE, совершаемый против часовой стрелки (если смотреть с конца вектора движения по ребру), в плоскости, перпендикулярной PE, вблизи PE дает следующую последовательность номеров примыкающих прямоугольников: 1, 2, 3 или их четную перестановку. Если движение происходит по грани, помеченной i, полагаем, что с внешней стороны куба примыкает область, помеченная тоже числом i. Аналогичное соглашение формулируем для ребер куба.

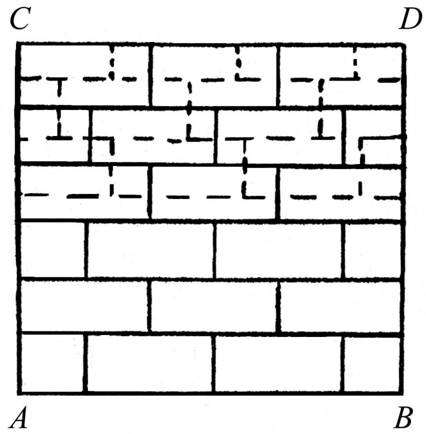

Рис. 1

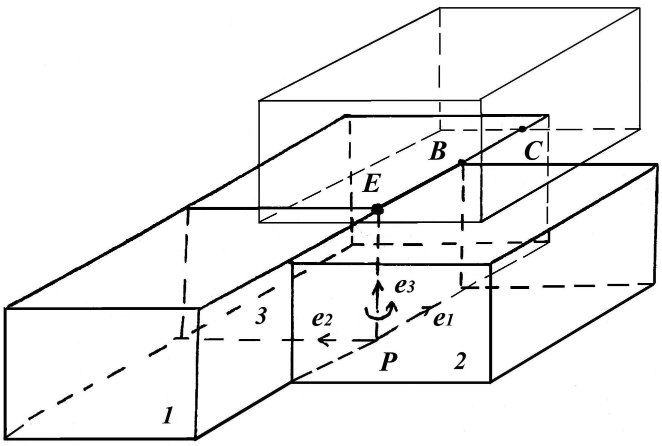

Рис. 2

Первое наблюдение. Движение не может остановиться на внутренней вершине. Ибо, если мы попали в точку E, то как легко усматривается из рис. 2 путем перебора номеров «кирпича», покрывающего E, движение может быть однозначно продолжено с соблюдением нашего условия. Вообще при произвольном подходе к точке E возможны две конфигурации исходящих из E ребер. Будем ребра представлять векторами с началом в точке E и выражающимися через единичные вектора e_1, e_2, e_3 координатных осей (рис. 2).

Рассмотрим первую конфигурацию $\{-e_1, e_1, e_2\}$ исходящих из E векторов, представленную на рис. 2. Пусть прямоугольник, накрывающий точку E, относится к классу x. Пусть области вокруг «подводящего» ребра помечены как на рисунке (любой циклический сдвиг номеров не меняет рассуждения).

Если выходим из точки E в направлении e_2, то получаем обход примыкающих областей в порядке $(1, x, 3)$. Если выходим в направлении $-e_1$, то последовательность номеров классов областей, обходимых против часовой стрелки вокруг соответствующего ребра, есть $(1, 2, x)$. Наконец, направление e_1 дает соответствующую последовательность $(x, 2, 3)$. Конкретному значению x, таким образом, соответствует одно и только одно направление возможного движения. Случай, когда вместо тройки $\{-e_1, e_1, e_2\}$ стоит тройка $\{-e_1, e_1, -e_2\}$, разбирается аналогично.

Рассмотрим вторую возможную конфигурацию. Она возникает, например, когда приходим в точку E, двигаясь в направлении e_1. Исходящие из E вектора, определяющие направления возможного движения, есть $\{e_1, e_2, -e_3\}$. При подходе к E области примыкают друг к другу при обходе против часовой стрелки в порядке: 1 (как на рис. 2), 2, 3 (вместо 2 на рис. 2). Возможным направлениям выхода из E соответствуют последовательности номеров областей: $e_1 \to (x, 2, 3)$; $e_2 \to (1, 2, x)$; $-e_3 \to (1, x, 3)$. Снова заключаем, что движение однозначно продолжимо.

В вершинах другого типа, чем E, примыкающие ребра лежат в одной плоскости. Рассмотрение этой ситуации аналогично вышеизложенному. Отметим, что в этом случае можно также воспользоваться индукционным предположением о верности леммы в пространстве размерности 2. Необходимо только все номера x в окрестности рассматриваемой вершины, совпадающие с номером «накрывающего» упомянутые ребра прямоугольника, заменить на предшествующий номер в цикле: 1, 2, 3.

Второе наблюдение. Тот же перебор возможностей дает, что траектория движения не может замкнуться на внутренней точке E или выйти на граничную точку, внутреннюю для грани куба.

Поскольку ребер конечное число, наш путь обязательно закончится, при этом в точке D, B или A_1. Если он заканчивается в точке D, то прямоугольники класса 2 соединят грани 2. Если он заканчивается в точке B, то прямоугольники класса 1 соединяют грани 1, если он заканчивается в A_1, грани 3 соединяет лента из прямоугольников класса 3. Лемма доказана. □

Значение леммы проиллюстрируем выводом из нее вариации на тему теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки у непрерывного отображения. Пусть дано непрерывное отображение $\varphi(x)$ точек x куба в евклидово пространство, в котором куб находится. При этом считается, что скалярное произведение перемещения $\varphi(x) - x$ точек x поверхности куба на соответствующую внутреннюю нормаль к поверхности положительно.

Произведем покрытие типа, рассмотренного в лемме, куба прямоугольниками, диаметр которых меньше заданного числа δ_n, $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Полагаем, что $\lim \delta_n = 0$ при $n \to \infty$.

Будем считать, что вектор перемещения $\varphi(p) - p$ не параллелен осям координат x_1, x_2, x_3 в узлах разбиения, изменяя, если необходимо, $\varphi(p)$ произвольно мало на этом дискретном множестве узлов. Точке p припишем упорядоченную тройку знаков $+, -$ по следующему правилу. Если $[\varphi(p) - p]_1 > 0$, $[\varphi(p) - p]_2 > 0$ и $[\varphi(p) - - p]_3 > 0$, то приписываем тройку $(+, +, +)$. В этом случае координаты x_1, x_2 и x_3 точки p увеличиваются при отображении φ .

Из аналогичных соображений приписываются остальные тройки знаков: $(-, -, -)$, $(+, +, -)$ и т. д. На рис. 3 показаны последовательности знаков у вершин куба.

В дальнейшем, знак "?" означает, что на месте этого знака может быть как "+", так и "–".

Произведем разбиение прямоугольников на три класса. Прямоугольник включаем в первый класс, если первые знаки вершин графа G на этом прямоугольнике представлены либо только знаком "+", либо только знаком "–" . Ко второму классу отнесем прямоугольники, среди первых знаков вершин которых встречаются как

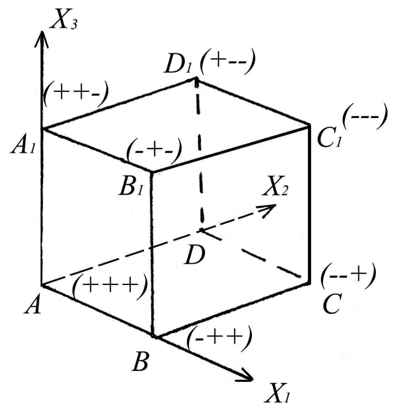

Рис. 3

“+”, так и “–”, но вторые знаки представлены только “+” или только “–”. Оставшиеся прямоугольники образуют третий класс. Грани куба классифицируем как в лемме.

Согласно лемме существует лента из прямоугольников одного класса, соединяющая «свои» грани. Предположим, что есть такая лента для первого класса прямоугольников. Легко заметить, что все вершины ленты имеют тройки знаков только вида $(+,?,?)$ или только вида $(-,?,?)$. Достаточно рассмотреть два соседних прямоугольника ленты. Но это ведет к противоречию, ибо вершины, лежащие на гранях ADA_1D_1 и CBC_1B_1 имеют разные первые знаки. Аналогичные рассуждения проводим для ленты, состоящей из прямоугольников второго класса. В итоге приходим к выводу: грани DCD_1C_1 и ABA_1B_1 соединяет лента из прямоугольников третьего класса. Для каждого такого прямоугольника, если взять первые или вторые знаки их вершин, получим полный набор: $\{+,-\}$. Поскольку у вершин «на пути» от грани ABA_1B_1 до грани DCD_1C_1 обязательно произойдет перемена третьего знака, то найдется прямоугольник, третьи знаки вершин которого дают набор $\{+,-\}$.

Итак, мы доказали, что найдутся шесть точек A_n^i, $i=1,\dots,6$ (возможно совпадающие), что, во-первых, попарное расстояние между ними меньше δ_n. Во-вторых,

$$\left(\varphi\left(A_n^i\right)-A_n^i\right)_i \geq 0, \quad \left(\varphi\left(A_n^{i+3}\right)-A_n^{i+3}\right)_i \leq 0, \quad i=1,2,3. \tag{1}$$

Знак равенства появляется, поскольку мы возвращаемся к исходному, «неисправленному» отображению φ.

Используя условие $\lim \delta_n = 0$ и меняя в случае необходимости нумерацию, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n^i = P, \quad i=1,\dots,6.$$

Переходя к пределу в неравенствах (1), получаем

$$\varphi\left(P\right) = P.$$

Итак, из наших рассуждений следует известная теорема Брауэра в следующей форме:

Теорема 1. *Пусть дано непрерывное отображение $\varphi(x)$ замкнутого куба в евклидово пространство E_3, где куб находится. Пусть во внутренних точках x*

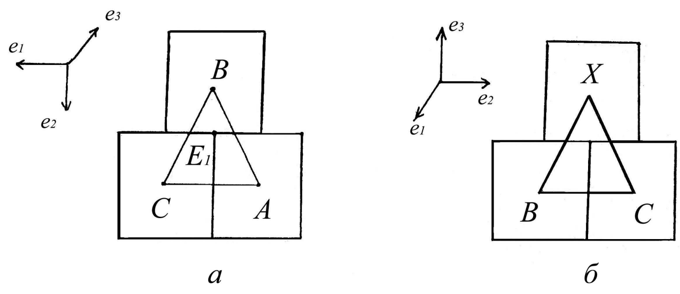

Рис. 4

граней проекция вектора перемещения $\varphi(x) - x$ на направление внутренней нормали к границе куба в точке x неотрицательна. Тогда в кубе существует неподвижная точка отображения φ.

В книге [1] излагаются классические варианты доказательства теоремы Брауэра.

Закончим статью следующими короткими замечаниями.

1. Проинтерпретируем проведенные в доказательстве леммы рассуждения, чтобы выявить «алгебру», необходимую для перехода к пространствам E_n, $n > 3$. Анализ показывает, что используемое разбиение Лебега – Брауэра обладает двумя замечательными особенностями.

Рассмотрим конфигурацию проекций прямоугольников, получаемую при сечении перпендикулярном к PE в точке E_1 близком к E (рис. 2, 4, *а*).

Первая особенность: сечение вблизи E плоскостью, перпендикулярной к любому другому ребру l, выходящему из E, в окрестности l дает ту же конфигурацию проекций прямоугольников, примыкающих к E. В общем случае $n > 3$ это утверждение легко доказывается индукцией по n. Обсуждаемая конфигурация вообще не зависит ни от выбора вершины, ни от выбора ребра. Для $n = 4$ конфигурация сечения определяется рис. 2.

Вторая особенность: построим правильный двумерный симплекс Σ_2 (треугольник) ABC (рис. 4, *а*). Симплекс ориентирован вектором e_3, и пусть классы прямоугольников маркируются вершинами треугольника. В общем случае $n > 3$ рассматриваем соответствующий $(n-1)$-мерный симплекс Σ_{n-1}. Пусть он ориентирован так, что индуцируемый порядок на единственную грань, перпендикулярную к одному из базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$, совпадает с уже выделенным, согласно индукционному предположению, порядком в E_{n-1}. По определению положим, что так определенная ориентация и соответствующая нумерация определяют движение в направлении e_k, где e_k определяется условием перпендикулярности к одной из граней симплекса Σ_{n-1}. И теперь главное: *группа вращений симплекса Σ_{n-1} однозначно определяет маркировку всех сечений для ребер, выходящих из рассматриваемой вершины E.* Так, например, сечение, перпендикулярное к e_1 вблизи E (для $n = 3$) имеет маркировку, указанную на рис. 4, *б*, то есть получается вращением симплекса ABC на $120°$.

После установления этих двух свойств разбиения Лебега – Брауэра доказательство леммы не составляет труда и в общем случае пространства любой размерности.

2. Лемма может быть полезной не только в исследовании неподвижных точек отображения. Рассмотрим, например, «плоский» квадрат $(n = 2)$. Следуя доказательству леммы, можно получить следующий результат: если перемещение точек

границы, вызываемое отображением φ, меняет через шаг h по границе знак проекции на нормаль и при этом в вершинах квадрата (для всех граней) знак неположителен, то существует прямоугольник разбиения диаметра не превосходящего $4h$, при движении по границе которого вектор перемещения представлен направлениями из любого квадранта фиксированной декартовой системы координат. Этот результат может быть использован при исследовании периодических структур в механике сплошной среды.

Summary

R.R. Shagidullin. Combinatorial Lemma for Lebesgue – Brouwer Partition of Cube on Euclidean Space.

The purpose of this article is to present a new combinatorial lemma that can be used in fixed point theorem, for example, to prove Brouwer theorem. Partition of a three-dimensional cube used by Lebesgue and Brouwer in dimension theory is taken into consideration. Explanation is given for generalization of the lemma on Euclidean n-space, $n > 3$.

Key words: combinatorial lemma, fixed point theorem.

Литература

1. *Прасолов В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004. – 352 с.

Поступила в редакцию
26.10.07
Переработанный вариант
17.01.08

Шагидуллин Ростем Рифгатович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Rostem.Shagidullin@ksu.ru*