УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.63

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Н.Г. Абрашина-Жадаева, Н.С. Романова

Аннотация

Для численного моделирования двумерного дифференциального уравнения в частных производных дробных порядков в конечной области предлагаются схемы приближенной факторизации и векторно-аддитивные. Доказана устойчивость этих схем. Теоретические результаты подтверждены численным примером.

Ключевые слова: частные производные дробного порядка, задача Дирихле, конечная область, аддитивные и векторно–аддитивные схемы, безусловная устойчивость.

Введение

В настоящее время возрос интерес к уравнениям в частных производных дробных порядков. Это связано с появлением физических, биохимических, геофизических и других моделей [1–7], описывающих жизненно важные процессы существования человека и окружающей среды, основанные на аномальной диффузии, субдиффузии и супердиффузии.

Примеры [1–7] показали, что время распространения загрязняющих веществ в подземных водах (сильно неоднородных средах) оказалось много больше значения, описанного классическим уравнением диффузии (второй закон Фика). Предложенная модификация классического уравнения диффузии позволила впоследствии получать временной промежуток обновления среды после разрушающего действия экологических катастроф, выбросов химической промышленности. Кроме того, была сформулирована теория, в основу которой был положен эффект скачкообразного блуждания частицы с независимыми временами ожиданий и анализ отличий между классической и аномальной диффузией, исследованы эффекты системной памяти на моделях действия загрязняющих веществ в сильно неоднородных фармациях в течение длительного промежутка времени, и установлена необходимость замены классического уравнения диффузии дробной версией. В [4] был представлен субдиффузийный феномен в диффундирующем движении протеинов через клеточную мембрану. Вместе с печатной версией был опубликован видеоматериал свободного скачкообразного блуждания частиц за длительный временной период, описание которого выходит за рамки классического броуновского движения. Кроме того, в [5] содержатся результаты наблюдения субдиффузии в флуктуирующих протеин-системах, в которых расстояние между донором и акцептантом с одноклеточным протеином постоянно меняется. Используя электронтрансфер реакцию, им удалось установить происходящую смену расстояния в действительном времени. Полученный результат значительно отличался от поведения частиц, описанного броуновским движением. В [6] представлен ряд физических моделей (субдиффузия в среде с резким контрастом характеристик, флуктуационные

аспекты в транспорте примеси в сильно неупорядоченной среде, стохастическая адвекция во фрактальной среде), в которых усредненная концентрация примеси удовлетворяет не классическому уравнению адвекции-диффузии, а дифференциальному уравнению дробного порядка.

Актуальность практических приложений вызвала необходимость совершенствования математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка, научный вклад в развитие которого был сделан такими выдающимися учеными, как П. Лаплас (P.S. Laplace, 1812), Ж.Б. Фурье (J.B. Fourier, 1822), Н.Х. Абель (N.H. Abel, 1823–1826), Ж. Лиувилль (J. Liouville, 1832-1873), Б. Риман (B. Riemann, 1847) и др. (см. [8, 9]).

Несмотря на долгую историю развития математического аппарата дробного интегро-дифференцирования, аналитические методы для решения таких начально-краевых задач малоэффективны. В настоящее время появился ряд статей о численном их решении. Данная статья посвящена обзору некоторых результатов [10–13] и является продолжением исследований, начатых в работах [14–16]. Результаты докладывались на 7-м Всероссийском семинаре «Сеточные методы и их приложения» при Казанском государственном университете, а также на международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двустороннее дробное уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^1\left[(1-p_1)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^1)^\alpha} + p_1\frac{\partial^\alpha u}{\partial(x^1)^\alpha}\right] + c^2\left[(1-p_2)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^2)^\beta} + p_2\frac{\partial^\beta u}{\partial(x^2)^\beta}\right] + f, \quad (1)$$

где $u = u(x,t)$, $x = (x^1, x^2) \in P = \{x_l^1 \le x^1 \le x_k^1, x_l^2 \le x^2 \le x_k^2\}$, $0 \le t \le T$, $c^i = c^i(x) > 0$, $i = 1, 2$, $f = f(x,t)$, $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial(-x^1)^\alpha}$, $\dfrac{\partial^\beta u}{\partial(-x^2)^\beta}$ – отрицательные дробные производные с весами $p_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$. Однородное уравнение (1) с постоянными коэффициентами определяет переходящие плотности оператора устойчивости Леви процессов [10] с независимой устойчивостью компонент порядка α, β асимметрично определенными весами p_1, p_2. Такой процесс является стохастической моделью [10] для аномальной диффузии, когда происходит скопление независимых случайных прыжков в каждой координате. Веса p_1, p_2 являются вероятностями прыжка в положительных x^1, x^2 направлениях соответственно, а $1-p_1$ и $1-p_2$ – в отрицательных.

Пусть заданы нулевые граничные условия Дирихле на всех четырех сторонах прямоугольника P и начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x). \quad (2)$$

Заметим, что существует несколько подходов к определению дробной производной [8, 9]. В настоящей статье для (1) будем использовать левостороннюю и правостороннюю дробные производные Римана–Лиувилля, которые для порядка α имеют вид

$$(D_{L+}^\alpha u)(x,t) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_L^x \frac{u(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}, \quad (3)$$

$$(D^{\alpha}_{R-}u)(x,t) = \frac{\partial^{\alpha}u}{\partial_{-}x^{\alpha}} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_x^R \frac{u(\xi,t)\,d\xi}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}}, \tag{4}$$

где $n-1<\alpha\le n$, n – целое, $\Gamma(p)$ – гамма-функция.

2. Схемы приближенной факторизации

Введем пространственную сетку на прямоугольнике P с шагами $h_i = \dfrac{x^i_k - x^i_{l_i}}{N_i}$, $i=1,2$, и на отрезке $0\le t\le T$ с равномерным шагом $\tau>0$ определим $t_n = n\tau$. Обозначим $x^1_i = x^1_{l_1} + ih_1$, $x^2_j = x^2_{l_1} + jh_2$, $i=1,\dots,N_1$, $j=1,\dots,N_1$, $y^n = y^n_{ij} = y(x_{ij},t_n) = y(x^1_i,x^2_j,t_n)$, $c^k_{ij} = c^k(x_{ij})$, $k=1,2$, $f^n = f^n_{ij} = f(x_{ij},t_n)$ – функции дискретного аргумента. Для аппроксимации дробных производных будем использовать предложенную в [11] смещенную формулу Грюнвальда–Летникова, а именно:

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\lim_{N_1\to\infty}\sum_{k=0}^{N_1}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)}\,u(x^1-(k-1)h_1,x^2,t), \tag{5}$$

аналогично и для (4). При этом (5) определяет следующую оценку для (3):

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{h_1^{\alpha}}\sum_{k=1}^{N_1} g_{\alpha k}\,u(x^1-(k-1)h_1,x^2,t) + O(h_1). \tag{6}$$

Здесь

$$g_{\alpha k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = (-1)^k\binom{\alpha}{k}.$$

Определим конечно-разностные операторы

$$A_1y^n_{ij} = \frac{c^1_{ij}}{h_1^{\alpha}}\left[(1-p_1)\sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha k}y^n_{i-k+1j} + p_1\sum_{k=0}^{N_1-i+1} g_{\alpha k}y^n_{i+k-1j}\right],$$

$$A_2y^n_{ij} = \frac{c^2_{ij}}{h_2^{\beta}}\left[(1-p_2)\sum_{k=0}^{j+1} g_{\beta k}y^n_{ij-k+1} + p_2\sum_{k=0}^{N_2-j+1} g_{\beta k}y^n_{ij+k-1}\right]$$

и воспользуемся двухслойными разностными аппроксимациями исходной задачи (1), (2). Запишем разностную схему в общепринятом [17–19] каноническом виде

$$B\,\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} = Ay^n + f, \tag{7}$$

где $B=(E-\tau A)$, $A=A_1+A_2$. Предполагая (как в классическом случае), что решение $u\in W^{r,1}(R^2)$ достаточно гладко, из (7) имеем локальную вычислительную погрешность $O(\tau)+O(h_1)+O(h_2)$. Согласовано аппроксимируются граничные и начальные условия (2). Найти для (7) приемлемый алгоритм вычисления y^{n+1} сложно. Это характерно и при решении задач с частными производными, когда $\alpha = \beta = 2$. Поэтому, принимая во внимание, что для смешанной дробной производной

имеет место оценка вида [11]

$$\frac{\partial^\beta}{\partial {x^2}^\beta}\frac{\partial^\alpha u(x^1,x^2,t)}{\partial {x^1}^\alpha} =$$

$$= h_1^{-\alpha}h_2^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{(k+l)}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{l}u(x^1-(k-1)h_1, x^2-(l-1)h_2, t)+$$

$$+ O(h_1+h_2), \quad u\in W^{r,1}(R^2), \quad (x^1,x^2)\in R^2, \quad r>\alpha+\beta+3, \quad (8)$$

можно заменить оператор B в (7) на факторизованный оператор

$$\widetilde{B} = B + \tau^2 A_1 A_2 = (E-\tau A_1)(E-\tau A_2).$$

Очевидно, замена в (7) оператора B на $\widetilde{B}$ порядка аппроксимации $O(\tau)+O(h_1)+O(h_2)$ не меняет в силу оценки (8). Можно повысить точность по t за счет симметризации. Это известный факт из общей теории разностных схем [17–20]. Если провести приближенную факторизацию на верхнем и нижнем слоях, получим

$$\left(E-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E-\frac{\tau}{2}A_2\right)y^{n+1} = \left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)y^n + \tau f^n, \quad (9)$$

где $f^n = f + O(\tau^2+h_1+h_2)$. Учитывая, что $\tau^2 A_1A_2(u^{n+1}-u^n)$ есть величина порядка $O(\tau^2)+O(h_1)+O(h_2)$, получим, что схема (9) имеет второй порядок точности по времени и первый – по пространству. Представим (9) в виде [13]

$$\left(E-\frac{\tau}{2}A_1\right)y^{n+1/2} = \left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)y^n + \frac{\tau}{2}f^n, \quad (10)$$

$$\left(E-\frac{\tau}{2}A_2\right)y^{n+1} = \left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)y^{n+1/2} + \frac{\tau}{2}f^n, \quad (11)$$

где $y^0=\varphi_{ij}$, $y^{n+1/2}|_{\partial P}=0$, $i=1,\dots,N_1-1$, $j=1,\dots,N_2-1$. Обычно схему вида (9) называют производящей, и при исследовании устойчивости имеют дело именно с ней, не обращая внимания на способ реализации.

Прежде чем перейти к исследованию устойчивости, перепишем (10), (11) в матричной форме. Для этого, не ограничивая общности, для простоты изложения положим $p_1=p_2=1/2$, $c^1_{ij}=\dfrac{c^1_{ij}\tau}{2h_1^\alpha}$, $c^2_{ij}=\dfrac{c^2_{ij}\tau}{2h_2^\beta}$. Используя явный вид A_1, A_2, уравнение (10) представим следующим образом:

$$-c^1_{ij}(g_{\alpha0}+g_{\alpha2})\,y^{n+1/2}_{i-1} + (1-2\,c^1_{ij}\,g_{\alpha1})\,y^{n+1/2}_{ij} - c^1_{ij}(g_{\alpha2}+g_{\alpha0})\,y^{n+1/2}_{i+1j} -$$

$$- c^1_{ij}\sum_{k=3}^{i+1} g_{\alpha k}\,y^{n+1/2}_{i-k+1j} - c^1_{ij}\sum_{k=3}^{N_1-i+1} g_{\alpha k}\,y^{n+1/2}_{i+k-1j} = y^n_{ij} +$$

$$+ c^2_{ij}\sum_{l=0}^{j+1} g_{\beta l}\,y^n_{ij-l+1} - c^2_{ij}\sum_{l=3}^{N_2-j+1} g_{\beta l}\,y^n_{ij+l-1} + \frac{\tau}{2}f^n_{ij}, \quad (12)$$

где $i=1,\dots,N_1-1$, $j=1,\dots,N_1-2$.

Введем следующие обозначения:

$$Y^n = \left[y^n_{11},\, y^n_{21},\dots,y^n_{N_1-11},\, y^n_{12},\, y^n_{22},\,\dots,\, y^n_{1N_2-1},\, y^n_{2N_2-1},\,\dots,\, y^n_{N_1-1N_2-1}\right]^{\mathrm{T}},$$

$A_1^{j_0} = (a_{im}^1)$ – матрица размера $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$, j_0 фиксировано, $j_0 \in [1, N_2]$, где элементы матрицы имеют вид

$$a_{im}^1 = \begin{cases} 2c_{ij_0}^1 g_{\alpha 1}, & m = i, \\ -c_{ij_0}^1 (g_{\alpha 2} + g_{\alpha 0}), & m = i - 1, \\ -c_{ij_0}^1 (g_{\alpha 0} + g_{\alpha 2}), & m = i + 1, \\ -c_{ij_0}^1 g_{\alpha i - m + 1}, & m < i - 1, \\ -c_{ij_0}^1 g_{\alpha m - i + 1}, & m > i + 1, \end{cases} \tag{13}$$

причем $a_{00}^1 = 1, a_{0m}^1 = 0$ при $m = 1, \ldots, N_1$, $a_{N_1 N_1}^1 = 1, a_{N_1 m}^1 = 0$ при $m = 0, \ldots, N_1 - 1$. $A^1 = \operatorname{diag}(A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{N_2 - 1}^1)$ – блочно-диагональная матрица, блоки которой есть квадраты размера $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$ матрицы $A_{j_0}^1$, $j_0 = 1, \ldots, N_2 - 1$. Так же определяется и A^2, при этом уравнение (9) запишется в матричной форме вида

$$(E - A^1)(E - A^2)\, Y^{n+1} = (E + A^1)(E + A^2)\, Y^n + F^{n+1}, \tag{14}$$

где F^{n+1} явно выражается через значения функции f и граничных условий.

Лемма 1. *Каждое собственное значение матриц A^1, A^2 имеет отрицательную действительную часть.*

Доказательство. В силу (13) для каждого i, $i = 1, \ldots, (N_1 - 1)(N_2 - 1)$, диагональный элемент A^1 в случае, когда $m = \left[\dfrac{i-1}{N_1 - 1} + 1\right]$, $l = i - (m-1)(N_1 - 1)$ и $2\, c_{lm}^1 = C$, выражается следующим образом: $\widetilde{a}_{ii}^{\,1} = C g_{\alpha 1}$. Принимая во внимание разработанную методику в [11], воспользуемся известным результатом:

$$(1 + z)^\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\gamma}{m} z^m, \quad \|z\| \le 1, \quad \gamma > 0.$$

Полагая $z = -1$ и учитывая представление для $g_{\alpha k}$, будем иметь $\sum\limits_{m=0}^{\infty} g_{\alpha m} = 0$. Следовательно, справедливы следующие оценки $g_{\alpha 1} = -\alpha$, причем $g_{\alpha i} > 0$ для $1 < \alpha < 2$, $i \ne 1$, и $\sum\limits_{m=0, m \ne 1}^{N} g_{\alpha m} < -g_{\alpha 1}$ для всех $N > 1$. Тогда

$$\widetilde{a}_{ii}^{\,1} = -C\alpha. \tag{15}$$

Теперь, рассматривая сумму абсолютных значений внедиагональных элементов матрицы на той же i-й строке и оценивая их с помощью неравенств, выписанных выше, получим

$$\sum_{k=0, k \ne 1}^{N_1 - 1} \widetilde{a}_{lm} = \sum_{k=0, k \ne 1}^{m} c_{lm}^1\, g_{\alpha k} + \sum_{k=0, k \ne 1}^{N_1 - i + 1} c_{lm}^1\, g_{\alpha k} < C\alpha. \tag{16}$$

Воспользуемся оценкой границ спектра, которую дает теорема Гершгорина [18, с. 26]: каждое собственное значение произвольной матрицы A порядка n с элементами a_{ki} принадлежит объединению кругов $|z - a_{kk}| \le r_k$, $k = 1, \ldots, n$, где

$r_k = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ki}|$. Кроме того, для спектрального радиуса матрицы справедлива оценка $\rho(A) \leq \max\limits_{k} \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ki}|$.

Таким образом, из оценок (15), (16) следует, что каждое собственное значение матрицы A^1 имеет отрицательные действительные части. Аналогичное утверждение справедливо и для A^2. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Каждое собственное значение матриц* $(E - A^1)$ *и* $(E - A^2)$ *по модулю больше единицы. Таким образом,* $\det(E - A^i) \neq 0$, $i = 1, 2$, *и матрицы обратимы.*

Следствие 2. *Каждое собственное значение матриц* $(E - A^1)^{-1}(E + A^1)$ *и* $(E - A^2)^{-1}(E + A^2)$ *по модулю меньше единицы.*

Теорема 1. *Метод приближенной факторизации* (9) *для* $1 < \alpha, \beta < 2$ *при условии коммутативности операторов* A_1 *и* A_2 (матриц A^1, A^2) является безусловно устойчивым.

Доказательство. Пусть δ^0 – погрешность в Y^0 для системы уравнений (14), тогда погрешность в момент времени t_n в Y^n выражается в виде

$$\delta^n = [(E - A^2)^{-1}(E - A^1)^{-1}(E + A^1)(E + A^2)]^n \delta^0.$$

Поэтому если выполнено требование коммутативности матриц, то из последнего равенства имеем

$$\delta^n = [(E - A^1)^{-1}(E + A^1)]^n [(E - A^2)^{-1}(E + A^2)]^n \delta^0.$$

Известно (см. [21, с. 136]), что $A^n \to O$, где O – нулевая матрица, тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы. На основании этого утверждения и следствия 2 заключаем, что

$$[(E - A^i)^{-1}(E + A^i)]^n \to 0, \quad n \to \infty, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда сразу же следует утверждение теоремы. □

Замечание 1. Условие коммутативности матриц A^1, A^2 предполагает выполнения этого условия для операторов $\left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right)$ и $\left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right)$. Это условие естественно для метода приближенной факторизации для уравнения диффузии при $\alpha = \beta = 2$.

Теорема 2. *Приближенный метод* (9) *сходится к решению исходной задачи со скоростью* $O(\tau^2) + O(h_1) + O(h_2)$.

Доказательство утверждения теоремы является следствием аппроксимации и устойчивости алгоритма.

Замечание 2. Из леммы 1 заключаем, что матрицы $\left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right)$ и $\left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right)$ имеют диагональное преобладание. Поэтому при решении (10), (11) (см. (14)) предлагается главную диагональ и два прилегающих к ней коэффициента дискретного оператора $\left(E - \frac{\tau}{2} A_i\right)$, $i = 1, 2$, вынести на новый временной слой, оставляя остальные на слое ниже. Получающаяся при этом система линейных уравнений решается методом трехточечной прогонки. Теоретический анализ и тестовые расчеты показывают, что такой алгоритм является безусловно устойчивым и сохраняет порядок аппроксимации.

Замечание 3. При построении численного алгоритма возможно значения концентраций отнести к узлам сетки, а значения потоков – к центрам ячеек расчетной сетки.

3. Векторно-аддитивные схемы

Рассмотрим исходную задачу в случае, когда право-сторонняя и лево-сторонняя производные совпадают [11]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^1(x^1,x^2)D^{\alpha}_{x^1}u + c^2(x^1,x^2)D^{\beta}_{x^2}u + f(x^1,x^2,t), \tag{17}$$

где $u = u(x^1,x^2,t)$, $c^i = c^i(x^1,x^2)$, $c^i > 0$, $1 < \alpha \le 2$, $1 < \beta \le 2$.

Будем считать, что (17) имеет единственное решение при следующих начальных и граничных условиях: $u(x^1,x^2,0) = \varphi(x^1,x^2)$ для всех $x^i_H < x^i < x^i_k$ и $u(x^1,x^2,t) = Q(x^1,x^2,t)$ на границе прямоугольной области P, при этом $Q(x^1_l,x^2,t) = Q(x^1,x^2_l,t) = 0$.

На интервале $t^n < t < t^{n+1}$, принимая за приближенное решение вектор $y = (y^1,y^2)$, рассмотрим модифицированный вариант векторно-аддитивной схемы [22, 23]:

$$\frac{{y^1}^{n+1}_{ij} - \widetilde{y}_{ij}}{\tau} = A_1{y^1}^{n+1}_{ij} + A_2{y^2}^{n}_{ij} + f^{n+1/2}_{ij}, \qquad {y^1}^{0}_{ij} = \varphi_{ij}, \tag{18}$$

$$\frac{{y^2}^{n+1}_{ij} - \widetilde{y}_{ij}}{\tau} = A_2{y^2}^{n+1}_{ij} + A_1{y^1}^{n}_{ij} + f^{n+1/2}_{ij}, \qquad {y^2}^{0}_{ij} = \varphi_{ij}, \tag{19}$$

$$\widetilde{y}_{ij} = \frac{1}{2}({y^1}^{n}_{ij} + {y^2}^{n}_{ij}), \quad \varphi_{ij} = \varphi(x^1_i,x^2_j), \quad i = 1,\dots,N_1-1, \quad j = 1,\dots,N_2-1.$$

Представим (18) (аналогично и (19)) в виде, удобном для реализации вычислительных процедур, а именно:

$${y^1}^{n+1}_{ij} - \frac{\tau c^1_{ij}}{h^{\alpha}_1}\sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha k}\,{y^1}^{n+1}_{i-k+1j} = \widetilde{y}_{ij} + \frac{\tau c^2_{ij}}{h^{\beta}_2}\sum_{m=0}^{j+1} g_{\beta m}\,{y^2}^{n}_{ij-m+1} + f^{n+1/2}_{ij}, \tag{20}$$

или

$$\left(1 - \frac{\tau c^1_{ij}}{h^{\alpha}_1}g_{\alpha 1}\right){y^1}^{n+1}_{ij} - \frac{\tau c^1_{ij}}{h^{\alpha}_1}g_{\alpha 0}\,{y^1}^{n+1}_{i+1j} - \frac{\tau c^1_{ij}}{h^{\alpha}_1}g_{\alpha 2}\,{y^1}^{n+1}_{i-1j} - \sum_{k=3}^{i+1} g_{\alpha k}\,{y^1}^{n+1}_{i-k+1j} =$$

$$= \widetilde{y}_{ij} + \frac{\tau c^2_{ij}}{h^{\beta}_2}\sum_{m=0}^{j+1} g_{\beta m}\,{y^2}^{n}_{ij-m+1} + \tau f^{n+1/2}_{ij},\ i = 1,\dots,N_1-1,\ j = 1,\dots,N_2-1$$

с соответствующей аппроксимацией граничных и начального условий. При каждом фиксированном $j = j_0$, $j = 1,\dots,N_2-1$, составим, исходя из (20), матрицу-столбец $[y_{1j_0},\dots,y_{N_1-1j_0}]^T$ и матрицу A_{j_0} с элементами A^i_l, где верхний индекс – номер строки, а нижний – номер столбца.

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{N_1-1}_1 & A^{N_1-1}_2 & A^{N_1-1}_3 & A^{N_1-1}_4 & \cdots & A^{N_1-1}_{N_1-1} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$A^i_l = \delta^i_l - \frac{\tau c^1_{il}}{h^{\alpha}_1}g_{\alpha i-l+1}, \quad i = 1,\dots,N_1-1, \quad l = 1,\dots,N_2-1,$$

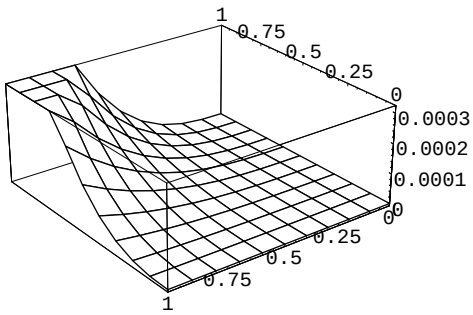

Рис. 1. $\tau = 0.1,\ h = 0.1$

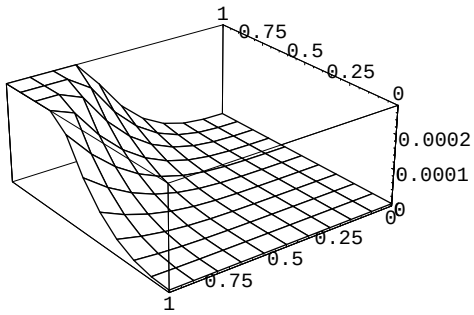

Рис. 2. $\tau = 0.1,\ h = 0.1$

δ_l^i – символ Кронеккера. Вообще говоря, систему уравнений (18) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{i+1} A_k^i y_{kj_0}^{1n+1} = \widetilde{y}_{ij_0} + \tau F_{j_0}^i, \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1, \quad j = 1, \ldots, N_2. \tag{22}$$

Здесь F_k^i для каждого $x_{j_0}^2$ определяется для $i = 1, \ldots, N_1 - 1,\ k = 0, \ldots, j_0 + 1$ из двух последних выражений правой части (18) и граничных условий.

Замечание 4. Если использовать для решения задачи схему (9), то для реализации можно предложить, как известно, различные варианты, а именно (10), (11) или, например,

$$\left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right) w_{ij}^{n+1/2} = A_1 y_{ij}^n + A_2 y_{ij}^n + f_{ij}^{n+1/2},$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right) w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^{n+1/2}, \quad y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau w^{n+1}.$$

Если приближенное решение находить с помощью одной из предложенных выше схем, то граничные условия для промежуточной функции определяются из системы так, чтобы сохранить второй порядок точности по τ (см. [17–20]). Для производящей схемы (9) верна теорема о безусловной устойчивости и сходимости со скоростью $O(\tau^2) + O(h_1) + O(h_2)$.

Замечание 5. Векторно-аддитивные схемы можно адаптировать к более общей задаче с распределенными производными дробного порядка (смешанными дробными производными [8]), например, применяя алгоритмы из [24, 25].

4. Численный пример

Рассмотрим исходное уравнение (17) при $\alpha = 1.9$, $\beta = 1.6$ с переменными коэффициентами

$$c_1 = \frac{x_1^3 x_2^{1.4}}{\Gamma(3.9)}, \quad c_2 = \frac{x_1^{1.1} x_2^3}{\Gamma(3.6)},$$

начальным $u(x^1, x^2, 0) = (x^1)^2.9(x^2)^2.6$ и граничными $u(x^1, 0, t) = u(0, x^2, t) = 0$, $u(1, x^2, t) = (x^2)^2.6e^{-t}, u(x^1, 1, t) = (x^1)^2.9e^{-t}$ условиями для $t \geq 0$, $f(x_1, x_2, t) = -$ $-(1 + 2x_1^{1.1} x_2^{1.4})e^{-t} x_1^{2.9} x_2^{2.6}$.

На рис. 1 и 2 представлены для сравнения графики приближенного решения, полученного векторно-аддитивным методом и точного решения $u = x_1^{2.9} x_2^{2.6} e^{-t}$. Рис. 3 и 4 демонстрируют соответствие приближенного решения характерному

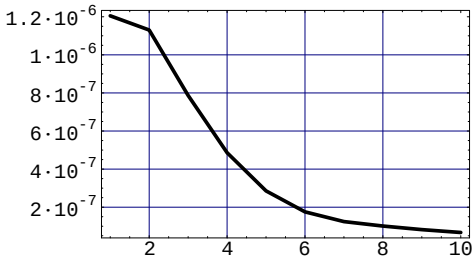

Рис. 3. $\tau = 0.1,\ h = 0.1$

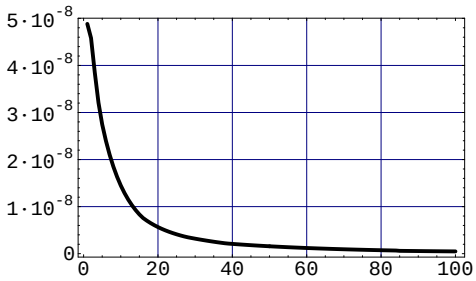

Рис. 4. $\tau = 0.01,\ h = 0.1$

свойству модифицированных алгоритмов $\|y_1^{n+1} - y_2^{n+1}\| \to 0$ при $t \to \infty$, причем на рис. 3 отображена разность компонент приближенного решения при использовании достаточно крупной сетки, а на рис. 4 – при достаточно мелкой по времени. Задача численно решалось с помощью версии системы Mathematica 5.1 корпорации Wolfram Research; компиляция осуществлялась на компьютере вида Dell Pentium PC.

Summary

N.G. Abrashina-Zhadaeva, N.S. Romanova. Approximate Factorization Method for Two-dimensional Equations in Partial Fractional Derivatives on Finite Domain.

Approximate factorization schemes and vector-additive algorithms are offered for numerical modelling of two-dimensional differential equations in partial derivatives of fractional orders on finite domain. The stability of these schemes is proved. Theoretical results are validated by a numerical example.

Key words: fractional order partial derivatives, Dirichlet problem, finite domain, additive and vector-additive methods, unconditional stability.

Литература

1. *Kirchner J.W., Feng X.H., Neal C.* Fractal stream chemistry and its implications for contaminant transport in catchments // Nature. – 2000. – V. 403. – P. 524–527.
2. *Klafter J., Sokolov I.M.* Anomalous Diffusion Spreads Its Wings // Physics Word. Features. – 2005. – V. 18, No 8. – P. 29–32.
3. *Dentz M., Cortis A., Sher H., Berkowitz B.* Time behavior of solute transport in heterogeneous media: transition from anomalous to normal transport // Adv. Water Res. – 2004. – V. 27, No 2. – P. 155–173.
4. *Fujiwara T., Ritchie K., Murakoshi H., K. Jacobson, Kusumi A.* Phospholipids undergo hop diffusion in compartmentalized cell membrane // J. Cell Biol. – 2002. – V. 157, No 6. – P. 1071–1081.
5. *Min W., English B.P., Luo G., Cherayil B.J., Kou S.C., Xie X.S.* Fluctuating Enzymes: Lessons from Single-Molecule Studies // Accounts Chem. Res. – 2005. – V. 38. – P. 923–931.
6. *Большов Л.А., Головизнин В.М., Дыхне А.М., Киселев В.П., Кондратенко П.С., Семенов В.Н.* Новые подходы к оценке безопасности захоронений радиоактивных отходов // Изв. РАН. Сер. Энергетика. – 2004. – Вып. 4. – С. 99–108.

7. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: Recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A. – 2004. – V. 37, No 31. – P. R161–R208.

8. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

9. *Miller K., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. – N. Y.: Wiley, 1993. – 384 p.

10. *Schumer R., Benson D.A., Meerschaert M.M., Wheatcraft S.W.* Eulerian derivation of the fractional advection-dispersion equation // J. Contam. Hydrol. – 2001. – V. 48. – P. 69–88.

11. *Meerschaert M.M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – V. 172. – P. 65–77.

12. *Meerschaert M.M., Scheffer H., Tadjeran C.* Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation // J. Comput. Phys. – 2006. – V. 211, No 2. – P. 249–261.

13. Meerschaert M.M., Mortensen J., Scheffler H.-P. Vector Grünwald formula for fractional derivatives // J. Fract. Calc. Appl. Anal. – 2004. – No 7. – P. 61–81.

14. *Abrashina-Zhadaeva N., Romanova N.* A Splitting Type Algorithm for Numerical Solution of PDEs of Fractional Order. // Math. Model. Anal. – 2007. – V. 12, No 4. – P. 399–408.

15. *Abrashina-Zhadaeva N., Romanova N.* Vector Additive Decomposition for 2D Fractional Diffusion Equation // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. – 2008. – V. 13, No 2. – P. 137–143.

16. *Абрашина-Жадаева Н.Г., Романова Н.С.* Многокомпонентные схемы векторного расщепления для решения многомерных задач математической физики // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 7.- С. 883–894.

17. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

18. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

19. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

20. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.

21. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. – 734 с.

22. *Жадаева Н.Г.* Многокомпонентный вариант метода переменных направлений для эволюционных задач. II // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 7. – С. 998–1000.

23. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* Об одном методе композиции построения итерационных алгоритмов решения стационарных задач математической физики. // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 7. – С. 948–957.

24. *Гордезиани Д.Г.* Об одной аддитивной модели для параболических уравнений со смешанными производными // Совр. проблемы матем. физики и вычисл. матем. – М.: Наука, 1982. – С. 128–137.

25. *Жадаева Н.Г.* Многокомпонентный метод переменных направлений решения многомерных задач для эллиптических уравнений со смешанными производными // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 948–957.

Поступила в редакцию
23.07.08
Переработанный вариант
12.12.08

Абрашина-Жадаева Наталья Георгиевна – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, г. Минск.

E-mail: *Zhadaeva@bsu.by*

Романова Наталья Серафимовна – старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, г. Минск.

E-mail: *Natalaromanova@mail.ru*