

УДК 535.32/58

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПРЕЛОМЛЕНИЕМ

*С.О. Елютин, А.И. Маймистов*

### Аннотация

Теоретически рассмотрено распространение импульсов накачки и ее второй гармоники в квадратично нелинейной метасреде при условии, что линейные свойства материала характеризуются отрицательным показателем преломления на частоте накачки и положительным показателем преломления на частоте гармоники. Получены аналитические решения в виде периодических кноидальных волн и связанных уединенных волн накачки и гармоники – симултонов. Численно исследована полная система уравнений модели, включающей такие факторы, как дисперсия групповых скоростей второго порядка, эффект разбегания импульсов накачки и гармоники из-за различия направлений их групповых скоростей. Получен аналог соотношения Мэнли – Роу для параметрических процессов в метасредах.

**Ключевые слова:** отрицательный показатель преломления, вторая гармоника, импульс, дисперсия, модуляция, солитон, эффект разбегания.

### Введение

Развитие нанотехнологий за последнее время привело к созданию новых материалов с необычными свойствами – метаматериалов. Метаматериалы представляют собой периодические плазмонные структуры с пространственными параметрами порядка длины волны видимого или ближнего ИК-диапазона, размещенные в диэлектрической среде. В оптическом диапазоне эти структуры как некоторый квазинепрерывный материал демонстрируют сильную дисперсию. Метаматериалы могут вести себя как среда с отрицательным показателем преломления (ОПП) вследствие отрицательности как эффективной диэлектрической проницаемости материала, так и его магнитной проницаемости [1]. В этом случае электрическое поле, магнитное поле и волновой вектор составляют левую тройку векторов, для которой вектор Пойнтинга потока энергии и волновой вектор антипараллельны [2]. При этом метаматериалы называют левыми средами, или в английской транскрипции “left-handed materials” (ЛНМ). В ЛНМ падающий и преломленный лучи лежат по одну сторону от нормали к границе преломления [3].

Необычные свойства сред с ОПП ярко проявляются, когда показатель преломления в одной спектральной области может быть положительным, в другой спектральной области он отрицателен. Импульсная генерация второй гармоники (ГВГ) [4] представляет собой один из примеров процесса, когда можно смоделировать взаимодействие волновых пакетов, несущие частоты которых лежат в различных спектральных областях, в которых показатель преломления имеет различные знаки. ОПП здесь выявляется в форме пространственного распределения интенсивностей взаимодействующих волн [5–7]: излучение гармоники происходит навстречу волне основной частоты. Квадратично нелинейная метасреда действует как распределенное брэгговское зеркало. Недавние спектральные измерения в метаматериалах с различной структурой элементарных ячеек надежно зафиксировали отклики на удвоенной и утроенной частотах возбуждения [8, 9]. Особенностью

параметрических процессов в отрицательно-положительных метасредах является не исчезающий эффект разбегания (walk-off effect) импульсов накачки и гармоники из-за различия направлений их групповых скоростей. Совокупное действие механизмов нелинейностей и дисперсии групповых скоростей делает динамическую картину распространения параметрически связанных волн довольно сложной.

Целью настоящей статьи является моделирование процесса трехволнового смешения в специфических условиях, когда для волны фундаментальной частоты среда является «левой», тогда как для гармоники – «правой». Далее в работе вслед за формулировкой основных уравнений рассмотрены случаи, где возможны аналитические решения модели. В предельном случае непрерывных волн получаются выражения, являющиеся аналогом соотношения Мэнли–Роу, но в применении к исследуемой «правой-левой» среде. Численными методами исследованы переходные процессы формирования импульсов второй гармоники в метасреде с учетом процессов разбегания импульсов и дисперсии групповых скоростей взаимодействующих волн.

### 1. Основные уравнения модели

Генерация второй гармоники (ГВГ) есть трехволновое взаимодействие по схеме  $(\omega_1 + \omega_1 \rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega)$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – несущие частоты накачки и гармоники) в квадратично-нелинейной среде. В квазигармоническом приближении медленных амплитуд и для случая коллинеарного распространения волн гармоники ( $\mathcal{E}_2$ ) и накачки ( $\mathcal{E}_1$ ) уравнения нестационарной ГВГ выглядят следующим образом [10]:

$$i \left( s_1 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{g,1}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_1 - \frac{D_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}_1 = - \frac{2\pi\omega_1^2 \mu(\omega_1)}{c^2 k_1} \chi_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^* e^{iz(k_2 - 2k_1)}, \quad (1)$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{g,2}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_2 - \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}_2 = - \frac{2\pi\omega_2^2 \mu(\omega_2)}{c^2 k_2} \chi_2 \mathcal{E}_1^2 e^{-iz(k_2 - 2k_1)}, \quad (2)$$

где  $v_{g,1}$ ,  $v_{g,2}$  – групповые скорости волновых пакетов, представляющих импульсы накачки и гармоники;  $k_j^2 = (\omega_j/c)^2 \varepsilon(\omega_j) \mu(\omega_j)$ ;  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\chi_1 = \chi^{(2)}(\omega_1; \omega_2, -\omega_1)$ ,  $\chi_2 = \chi^{(2)}(\omega_2; \omega_1, \omega_1)$  (здесь  $\chi^{(2)}$  – нелинейная восприимчивость второго порядка). Коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  определяют дисперсию групповых скоростей на фундаментальной частоте и частоте гармоник. Направление распространения взаимодействующих волн, тем самым, определяется параметром  $s_j$  – знаком квадратного корня из  $k_j^2$ .

Из условия коллинеарного синхронизма  $\Delta k = 0$  следует, что волновой вектор гармоники  $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1$ . Если среда характеризуется положительным показателем преломления, то векторы  $\mathbf{k}_{1,2}$  и векторы Пойнтинга взаимодействующих волн направлены одинаково. Однако вектор волны с несущей частотой в спектральной области отрицательного преломления ( $s_1 = -1$ ) и соответствующий ей вектор Пойнтинга направлены в противоположных направлениях. Если допустить, что на частоте второй гармоники среда дает положительное преломление, то импульс накачки, на частоте которой коэффициент преломления среды отрицателен, вызовет волну гармоники с противоположным по отношению к падающей волне накачки направлением фазовой скорости и, соответственно, излучение на удвоенной частоте во встречном направлении. Для такой схемы взаимодействующих волн уравнения ГВГ (1), (2) с учетом выражений для поляризации переписутся в нормализованном виде:

$$\frac{\partial e_1}{\partial \zeta} = i \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 e_1}{\partial \tau^2} + i e_1 - i e_1^* e_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial \zeta} = -i \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 e_2}{\partial \tau^2} - i \gamma e_2 - \delta \frac{\partial e_2}{\partial \tau} + i \frac{\theta}{2} e_1^2. \quad (4)$$

В (3), (4) произведена замена переменных и введены обозначения:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 e_1(\zeta, \tau) \exp(-i\zeta), \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 e_2(\zeta, \tau) \exp(i\Delta\zeta - 2i\zeta), \quad z = L\zeta,$$

$$t = \frac{L}{c} \tau + (-1)\zeta \frac{L}{v_{g,1}}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

$$L = (c/2\pi\omega) \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} (\mathcal{E}_0 \chi_1)^{-1} = \lambda \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} (4\pi^2 \mathcal{E}_0 \chi_1)^{-1},$$

$$\sigma = \frac{D_1 L}{L^2/c^2}, \quad \beta = \frac{D_2 L}{L^2/c^2}, \quad \mu_{1,2} = \mu(\omega_{1,2}),$$

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon(\omega_{1,2}), \quad \gamma = \Delta - 2, \quad \Delta = L\Delta k, \quad 2\chi_2 = \chi_1,$$

$$\theta = 2 \frac{\omega_2 \chi_2}{\omega_1 \chi_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_2}}, \quad \delta = \left( \frac{c}{v_{g,1}} + \frac{c}{v_{g,1}} \right),$$

где величина  $L$  имеет смысл характерной длины, на которой происходит эффективное преобразование накачки в гармонику. Огибающие импульсов взаимодействующих волн нормированы на  $\mathcal{E}_0$ . В уравнениях (3), (4) считается, что ось  $z$  направлена против направления групповой скорости импульса накачки. Импульс поля фундаментальной частоты падает навстречу оси  $z$  на заднюю грань образца метаматериала. Импульс гармоники распространяется вдоль оси  $z$ , формируясь у передней плоскости с координатой  $z = 0$ .

Параметр  $\delta$  учитывает эффект разбегания (walk-off effect) импульсов фундаментальной волны и гармоники из-за различия их групповых скоростей. Тем самым  $\delta$  есть мера нарушения группового синхронизма, который характерен для взаимодействия уединенных волн, дополнительно к фазовому синхронизму. В отличие от стандартной ГВГ, когда при малой разнице между групповыми скоростями накачки и гармоники эффект разбегания мал, в нашем случае, как минимум,  $\delta > 2$  и эффект разбегания всегда присутствует.

Из уравнений модели (3), (4) с учетом граничных и начальных условий:  $|e_{1,2}(\zeta = 0, \tau)|^2 \rightarrow |e_{10,20}(\tau)|^2$  и  $|e_{1,2}|^2 \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , получаем интеграл движения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( |e_2|^2 - \frac{\theta}{2} |e_1|^2 \right) d\tau = \text{const}. \quad (5)$$

Для непрерывного излучения отсюда вытекает соотношение, аналогичное соотношению Мэнли–Роу. Соотношение Мэнли–Роу отражает новый тип фазового синхронизма, который в [6] был назван «обратным синхронизмом». Это принципиальное отличие параметрического взаимодействия волн в средах с отрицательным преломлением.

Для рассмотрения возможных аналитических решений перейдем к действительным переменным в системе уравнений модели (3), (4):  $e_1 = a \exp(i\varphi_1)$ ,  $e_2 = b \exp(i\varphi_2)$ . Получим:

$$\frac{\partial a}{\partial \zeta} + \frac{\sigma}{2} \left( 2 \frac{\partial a}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} \right) = ab \sin \Phi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial \zeta} + \delta \frac{\partial b}{\partial \tau} - \frac{\beta}{2} \left( 2 \frac{\partial b}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} + b \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} \right) = \frac{\theta}{2} a^2 \sin \Phi, \quad (7)$$

$$a \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} - \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \right) = -ab \cos \Phi, \quad (8)$$

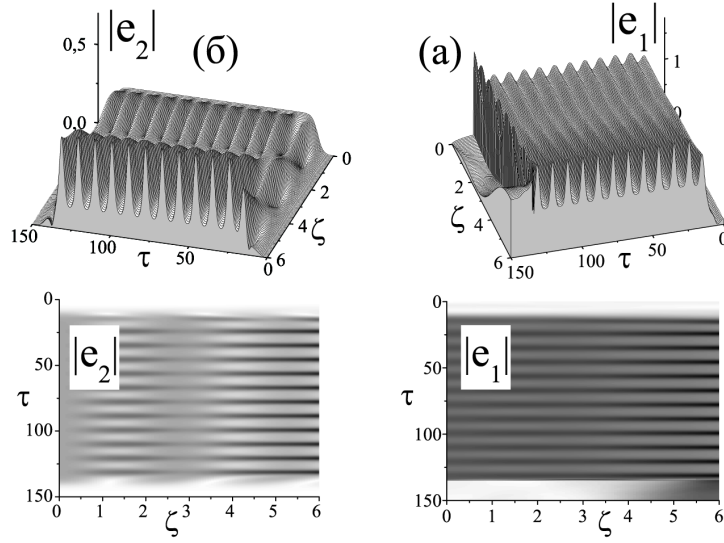


Рис. 1. Амплитудно-модуляционная неустойчивость конденсатного решения: (а) накачка, (б) гармоника. Параметры  $a_0 = 1.12$ ,  $b_0 = 0.25$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\gamma = 1.0$ ,  $\theta = 1.0$ ,  $\delta_{NRI} = 1.0$ ,  $\sigma = \beta = -1$ , амплитуда модуляции  $= 0.1$ ,  $\omega_{\text{mod}} = 0.5$ .

$$a \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} + \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right) + \frac{\beta}{2} \left( \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right) + \Delta b = \frac{\theta}{2} a^2 \cos \Phi, \quad (9)$$

где  $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ .

## 2. Аналитические решения: волны без фазовой модуляции

Класс решений уравнений модели (6)–(9) определяется условием отсутствия временной или обеих, и временной и пространственной, фазовых модуляций (чирпа фазы), то есть  $\partial \varphi_{1,2} / \partial \tau = \Omega_{1,2}$ , и/или  $\partial \varphi_{1,2} / \partial \zeta = \kappa_{1,2}$  являются константами, в частности нулями.

**2.1. Конденсатные решения.** Рассмотрим решения системы (6)–(9), где амплитуды волн являются константами:  $a = a_0$  и  $b = b_0$  при условии отсутствия временного чирпа фазы:  $\Omega_{1,2} = 0$ . Тогда из (6) следует, что  $\Phi = 0$  или  $\Phi = m\pi$ , и уравнения (7) для  $\Phi = 0$  дают:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} = 1 - b_0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} = -\gamma + \frac{\theta}{2} a_0^2 b_0^{-1}, \quad (10)$$

$$b_0 (\Delta - 2b_0) = \frac{\theta}{2} a_0^2.$$

Решение (10) аналогично «конденсатному» решению нелинейного уравнения Шредингера, которое при определенных условиях проявляет модуляционную неустойчивость. Численный пример модуляционной нестабильности решения (10) представлен на рис. 1. Под воздействием слабого гармонического возмущения конденсатного решения для поля накачки (рис. 1 а) формируется развитая модуляционная структура кноидальных волн в поле гармоники (рис. 1, б).

**2.2. Генерация второй гармоники в непрерывном излучении.** В случае непрерывной накачки и при выполнении условия фазового синхронизма ( $\Delta = 0$ )

система уравнений (6)–(9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \zeta} &= ab \sin \Phi, & \frac{\partial b}{\partial \zeta} &= \frac{\theta}{2} a^2 \sin \Phi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= \left( 2b + \frac{\theta}{2b} a^2 \right) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Первые два уравнения системы (11) имеют первый интеграл в форме соотношения Мэнли–Роу:

$$\frac{\theta}{2} a^2 - b^2 = c_0^2 = \text{const}. \quad (12)$$

Для слоя нелинейного материала толщиной  $l$  краевое условие записывается как

$$a(\zeta = l) = a_0, \quad b(\zeta = 0) = 0. \quad (13)$$

При выборе постоянной разности фаз  $\Phi = \pi/2$  решения системы (11) выглядят следующим образом

$$b^2 = c_0^2 \text{tg}^2(c_0 \zeta), \quad a^2 = 2c_0^2 \theta^{-1} \cos^{-2}(c_0 \zeta), \quad (14)$$

где константа  $c_0$  определяется из уравнения:

$$\cos(c_0 l) = \sqrt{\frac{2}{\theta}} \frac{c_0}{a_0}.$$

При увеличении  $l$  параметр  $c_0$  как первый корень трансцендентного уравнения стремится к нулю. Показатель эффективности ГВГ определен следующим выражением

$$r = \frac{|b(\zeta = l)|^2}{|a_0|^2} = \frac{\theta}{2} \left( 1 - \frac{2c_0^2}{\theta a_0^2} \right),$$

и  $r \rightarrow \theta/2$  при  $l \rightarrow \infty$ .

**2.3. Примеры стационарных волн в процессе ГВГ в ЛНМ.** Пусть условие фазового синхронизма  $\Phi = 0$  выполнено, тогда  $\Omega_2 = 2\Omega_1 = 2\Omega$ . Считая величины  $\kappa_2 = 2\kappa_1 = 2\kappa$  постоянными, можно определить фазы взаимодействующих волн

$$\varphi_1 = \kappa \zeta + \Omega \tau, \quad \varphi_2 = 2\kappa \zeta + 2\Omega \tau. \quad (15)$$

Стационарные волны на обеих частотах должны распространяться как единое целое с одинаковыми скоростями, то есть решения системы (6) должны быть функциями общей переменной  $y = \tau - \zeta/V$ ,

$$a = a(\tau - \zeta/V), \quad b = b(\tau - \zeta/V),$$

где, как это можно получить из (6),

$$V^{-1} = \sigma \Omega = \delta - 2\beta \Omega.$$

Это выражение определяет параметр «мгновенной скорости»  $\Omega = \delta/(\sigma + 2\beta)$ . Все стационарные волны распространяются с абсолютной скоростью

$$\frac{1}{V_s} = \frac{1}{\sigma + 2\beta} \left( \frac{\sigma}{v_{g,2}} - \frac{2\beta}{v_{g,1}} \right) = \frac{1}{D_1 + 2D_2} \left( \frac{D_1}{v_{g,2}} - \frac{2D_2}{v_{g,1}} \right).$$

В принятых выше допущениях простейший класс решений модели (6)–(9) получается в предположении пропорциональности решений для накачки и гармоника

$$b = fa.$$

Принимая такую связь, из (6) можно получить определения:

$$f = (\theta/2|\beta|)^{1/2}, \quad \kappa = \frac{3\beta\Omega^2 - 4\delta\Omega - 2\Delta}{2\sigma(2\sigma + \beta)}.$$

Функция  $a(y)$  определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \left( \frac{2\kappa}{\sigma} + \Omega^2 \right) a + \frac{2f}{\sigma} a^2. \quad (16)$$

1. Граничные условия для решения в виде уединенной волны  $a \rightarrow a_0$  и  $da/dy \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Пусть дисперсионный параметр  $\sigma = -1$  и  $\theta > 0$ , тогда параметр  $\beta$  будет также отрицательным. В принятых предположениях стационарные решения уравнений (11), или уравнения (16), соответствующие яркому солитону, задаются выражением

$$a(y) = \frac{(3p/4)\sqrt{2|\beta|}}{\cosh^2[\sqrt{p}(y - y_0)/2]}, \quad (17)$$

$$b(y) = \frac{(3p/4)}{\cosh^2[\sqrt{p}(y - y_0)/2]}, \quad (18)$$

где  $p = (\Omega^2 - 2\kappa)$  должен быть положителен для принятых граничных условиях. Физически решения (17), (18) означают захват одной волны другой с образованием связанного состояния двух волн – квадратичного симултона.

2. Периодические решения уравнения (16) в виде кноидальных волн на пьедестале соответствуют выбору параметра граничных условий:  $0 < a_0 < 3p/4f$ .

Если  $0 < a_0 < p/4f$ , то решение уравнения (16) может быть получено после ряда вычислений в следующем виде:

$$a(y) = a_0 + (3/2f) [\varrho + (p - 4fa_0)] \operatorname{cn}^2 \left[ \left( \frac{2p\varrho}{\varrho + 3(p + 4fa_0)} \right)^{1/2} (y - y_0), m^+ \right]. \quad (19)$$

Если  $p/4f < a_0 < 2p/4f$ , то решение уравнения (16) есть

$$a(y) = a_0 + (3/2f) [\rho - (p - 4fa_0)] \operatorname{cn}^2 \left[ \left( \frac{\rho}{12} \right)^{1/2} (y - y_0), m^- \right]. \quad (20)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$m^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{3(p - 4fa_0)}{\sqrt{3(p + 4fa_0)(3p - 4fa_0)}} \right), \quad \varrho = \sqrt{3(p + 4fa_0)(3p - 4fa_0)},$$

$\operatorname{cn}(z, m^\pm)$  – эллиптическая функция Якоби модуля  $m^\pm$  и аргумента  $z$ .

### 3. Моделирование нестационарной ГВГ в ЛНМ-РНМ

Объектом численного моделирования является полная система уравнений (6)–(9), описывающая ГВГ в ЛНМ-РНМ с учетом дефектов фазового ( $\Delta$ ) и группового ( $\delta$ ) синхронизмов, дисперсии групповых скоростей волн накачки и гармоника ( $\sigma, \beta$ ). Принципиальным отличием эффектов генерации гармоник в ЛНМ

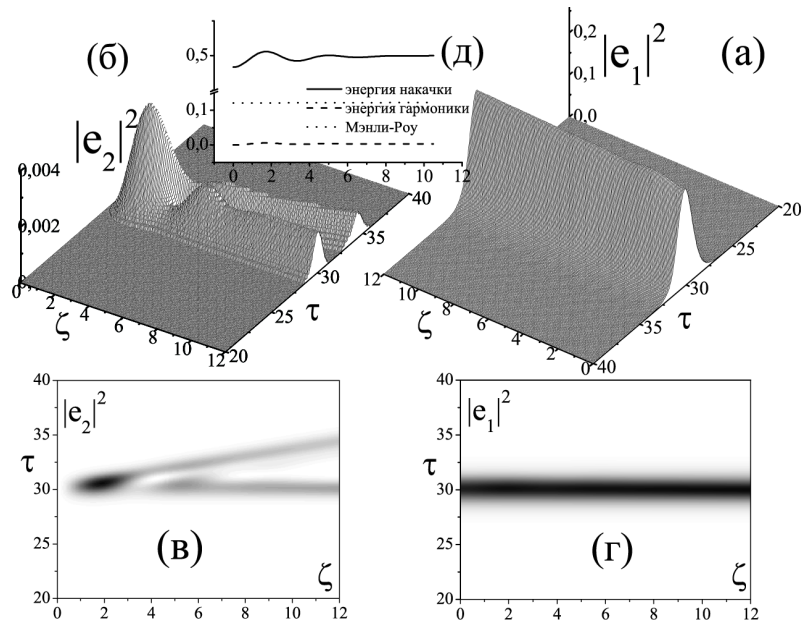


Рис. 2. Распространение импульсов накачки (а, з) и гармоники (б, в) в протяженном ЛНМ-образце без дисперсии групповых скоростей. Параметры:  $\Delta = 2$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma = 0.0$ ,  $\beta = 0.0$ ,  $\delta = 7.5$ ,  $\tau_{\text{pulse}} = 1$ . На вставке (д) пространственное изменение энергий накачки и гармоники в сравнении с уровнем, задаваемым модифицированным соотношением Мэнли – Роу

от соответствующих параметрических процессов в традиционных средах является взаимодействие волновых пакетов накачки и гармоники на встречных направлениях. Лишь в некоторых специальных случаях (см. выше аналитический пример 1) стационарных волн происходит захват гармоники уединенной волной накачки и образование связанного состояния двух солитонов.

На задней грани образца задано краевое условие в виде падающего импульса накачки. Для гармоники задано краевое условие на входной плоскости ЛНМ-образца с координатой  $z = 0$ . Поскольку через переднюю грань нет потока энергии на высокой частоте, то из физических соображений правильным будет выбрать граничное условие для гармоники нулевым.

В примере, представленном на рис. 2, присутствует конечная отстройка от условия фазового синхронизма, вследствие чего эффективность преобразования в гармонику невелика (рис. 2, б) и волна накачки практически не истощается (рис. 2, а). В пространственно-временном поведении волны гармоники в отсутствие дисперсии групповых скоростей наблюдается два характерных эффекта. Во-первых, наблюдается несколько периодов пространственной модуляции амплитуды импульса гармоники ввиду конечной длины когерентности ( $\Delta = 2$ ) (рис. 2, б, д), во-вторых, что характерно именно для ГВГ в лево-правой метасреде, отчетливо наблюдается эффект разбегания импульсов фундаментальной волны и гармоники из-за различия их групповых скоростей (walk-off effect) (рис. 2, б, в). Часть энергии гармоники (рис. 2, б) в результате взаимодействия с накачкой распространяется по той же характеристике, что и волна низкой частоты. Однако из области, где вследствие модуляции интенсивность гармоники резко уменьшилась (рис. 2, б), возникает излучение линейной слабой волны вдоль характеристики второй гармоники (рис. 2, в). В результате профиль волны гармоники расщепляется – эффект,

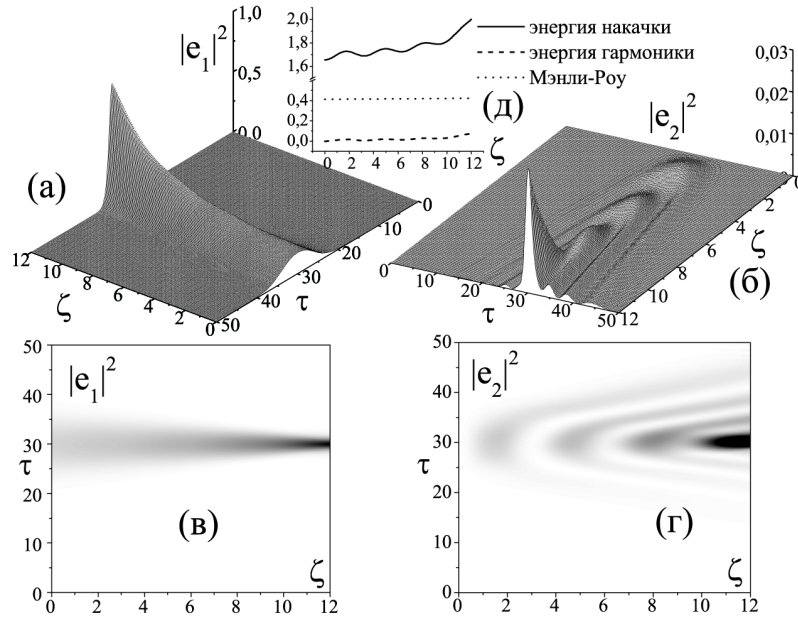


Рис. 3. Распространение импульсов накачки (а, в) и гармоники (б, г) в протяженном ЛНМ-образце при учете дисперсии среды. Параметры:  $\Delta = -2$ ,  $\gamma = -4$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma = -0.5$ ,  $\beta = -0.4$ ,  $\delta = 5.0$ ,  $\tau_{\text{pulse}} = 1$ . На вставке (д) пространственное изменение энергий накачки и гармоники в с уровнем, задаваемым модифицированным соотношением Мэнли-Роу

характерный именно для обсуждаемой модели ГВГ, когда эффектом “walk-off” пренебречь принципиально нельзя.

Быстрый спад амплитуды волны накачки по трассе распространения (рис. 3, а) обусловлен распылением временного контура уединенной волны (рис. 3, а). Из-за малости интенсивности фундаментальной волны в глубине метаматериала интенсивность гармоники у передней грани образца также мала (рис. 3, б). Как и в предыдущем, бездисперсионном случае, из области, совпадающей с характеристикой волны накачки, вследствие эффекта “walk-off” возникает излучение вдоль характеристики второй гармоники. Эта особенность хорошо заметна на карте в градациях серого как асимметрия волнового процесса (рис. 3, г). Замечательно, что выраженная дисперсионная модуляция поля излучения (рис. 3, б) имеет неосцилляторный характер, что можно было бы ожидать при дополнительном учете дисперсии групповых скоростей. На пространственно-временной карте процесса ГВГ (рис. 3, г) видно, что поле излучения разбивается на последовательность уединенных волн, стартующих из области распространения основного импульса гармоники, причем длительность формируемых слабых сигналов и их скважность убывают к задней границе среды. Как видно по временному контуру импульса второй гармоники, вышедшему на заднюю грань метасреды, эти сигналы имеют правильную колоколообразную форму. При увеличении толщины образца всплески на контуре разовьются в отдельные импульсы. Возникновение волн пространственной модуляции, начинающихся на разных участках временного профиля входного импульса накачки, есть признак нелинейных изменений фаз взаимодействующих волн. В результате временная форма выходного импульса накачки оказывается изрезанной двумя и возможно большим числом максимумов (рис. 3, б). Однако интеграл движения в виде модифицированного закона Мэнли-Роу (5) остался неизменным (рис. 3, д).



### Заключение

В работе аналитически и методами численного анализа исследована нестационарная ГВГ в искусственной среде, электромагнитные свойства которой допускают изменение знака коэффициента рефракции для волн разной частоты. Аналитически показана возможность возникновения связанного состояния фундаментальной волны и волны гармоники в виде уединенных импульсов. Отличительной особенностью рассмотренной модели от процессов ГВГ в средах с положительным преломлением является наличие неисчезающего эффекта разбегания импульсов фундаментальной волны и гармоники из-за различия их групповых скоростей. Этот эффект хорошо заметен в численном анализе переходных процессов ГВГ на встречных направлениях групповых скоростей параметрически связанных волн. Совокупное действие нелинейностей, дисперсии групповых скоростей и эффекта “walk-off” определило богатую динамику процесса ГВГ, включая формирование во временной шкале цуга хорошо выраженных импульсов, излучаемых из области формирования импульса гармоники.

Нам доставляет удовольствие поблагодарить А.М. Башарова и И.Р. Габитова за полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-02-00701-а, 09-07-12144-офи) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

### Summary

*S. O. Elyutin, A. I. Maimistov. Nonstationary Parametric Processes in Negative Refraction Media.*

The article gives theoretical analysis of propagation of the fundamental wave and the second harmonic wave in quadratic nonlinear metamedia. The linear properties of metamaterial are characterised by a negative refraction index at the fundamental frequency and a positive refraction index at the second harmonic frequency. The analytical solutions in the form of periodic cnoidal waves and the coupled pump and harmonic waves – solitons, are obtained. The complete model, which includes the factors of dispersion of the second order group velocities and the pulse walk-off effect, is numerically investigated. A relation similar to the Manley – Rowe law is obtained for parametric processes in metamaterials.

**Key words:** negative refraction index, second harmonic, optical pulse, dispersion, modulation, soliton, walk-off effect.

### Литература

1. *Shelby R., Smith D.R., Schultz S.* Experimental Verification of a Negative Index of Refraction // *Science*. – 2001. – V. 292. – P. 77–79.
2. *Веселаго В.Г.* Электродинамика материалов с отрицательным показателем преломления // *Усп. физ. наук*. – 2003. – Т. 173, № 7. – С. 790–794.
3. *Pendry J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – V. 85, No 18. – P. 3966–3969.
4. *Scalora M., D’Aguanno G., Bloemer M. et al* Dynamics of short pulses and phase matched second harmonic generation in negative material // *Opt. Expr.* – 2006. – V. 14, No 14. – P. 4746–4756.
5. *Shadrivov I.V., Zharov A.A., Kivshar Yu.S.* Second harmonic generation in nonlinear left-handed metamaterials // *J. Opt. Soc. Amer. B*. – 2006. – V. 23, No 3. – P. 529–534.

6. *Popov A.K., Slabko V.V., Shalaev V.M.* Second harmonic generation in left-handed metamaterials // *Laser Phys. Lett.* – 2006. – V. 3, No 6. – P. 293–297.
7. *Maimistov A.I., Gabitov I.R., Kazantseva E.V.* Quadratic solitons in media with negative refractive index // *Optics and Spectr.* – 2007. – V. 102, No 1. – P. 90–102.
8. *Kim Evgenia, Wang F., Wu W. et al* Nonlinear optical spectroscopy of photonic metamaterials // *Phys. Rev. B.* – 2008. – V. 78, No 11. – P. 113102-1–113102-5.
9. *Klein M. W., Wegener M., Feth N. et al* Experiments on second- and third-harmonic generation from magnetic metamaterials // *Opt. Expr.* – 2007. – V. 15, No 8. – P. 5238–5247.
10. *Maimistov A.I., Gabitov I.R.* Nonlinear optical effects in artificial materials // *Eur. Phys. J. Special Topics.* – 2007. – V. 147. – P. 265– 86.

Поступила в редакцию  
22.12.09

---

**Елютин Сергей Олегович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (Московского инженерно-физического института).

E-mail: [elyutin@mail.ru](mailto:elyutin@mail.ru)

**Маймистов Андрей Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела и наносистем Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (Московский инженерно-физический институт), профессор Московского физико-технического института (государственного университета).

E-mail: [maimistov@pico.mephi.ru](mailto:maimistov@pico.mephi.ru)