

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ И НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

*М.А. Игнатъева, А.В. Лапин*

### Аннотация

Для одного класса вариационных неравенств с ограничениями на решение, для которых а priori известна подобласть, содержащая свободную границу, построены конечно-разностные аппроксимации и итерационные методы их решения. При аппроксимации использован метод декомпозиции области и различные сетки в подобластях. Для сеточных задач исследованы итерационные методы расщепления и Удзавы. Проведено численное сравнение их эффективности.

**Ключевые слова:** вариационные неравенства, конечно-разностная аппроксимация, декомпозиция области, несогласованные сетки, итерационные методы.

### Введение

Задачи со свободными границами возникают при моделировании задач нелинейной фильтрации жидкости с предельным градиентом, в задаче Стефана, упруго-пластических и контактных задачах механики и др. [1, 2]. Как правило, в окрестности свободных границ градиенты (потoki) искомых решений характеризуются разрывами первого рода. Наличие таких особенностей создает трудности численного моделирования, при том что определение свободной границы и решения задачи в ее окрестности является наиболее важной проблемой моделирования соответствующих процессов.

Наиболее распространенными методами численного решения задач математической физики являются сеточные методы, к которым относятся разнообразные варианты метода конечных элементов [3], методы конечных разностей и конечных объемов [4]. Для точного определения свободных границ требуется построение аппроксимаций высокой точности, что в большинстве сеточных методов равносильно использованию мелких сеток. Однако использование мелкой сетки во всей расчетной области, особенно при решении физически трехмерных задач, приводит к дискретной задаче чрезвычайно высокой алгебраической размерности и, как следствие, к большому времени вычислений. Одним из известных способов сокращения вычислительных ресурсов при сохранении точности решения является использование неравномерных сеток, сгущающихся вблизи свободной границы. Естественно, что для использования этого подхода требуется информация о ее локализации. При решении нестационарных задач сеточными методами с дискретизацией по времени такую информацию на расчетном временном слое получают по результатам расчетов на предыдущем слое. Если решается стационарная задача, то априорную информацию об особенностях решения, включая примерное местоположение свободной границы, в ряде случаев можно получить на основе анализа входных данных задачи. Другой, более общий, но и более трудоемкий вариант получения

предварительной информации о решении – это использование блока апостериорной оценки в предварительных расчетах и последующая адаптация сетки.

Построение разномасштабных сеток в области, разделенной на подобласти, может быть произведено двумя способами. Это может быть либо «непрерывное» сгущение сетки в выбранной подобласти, согласованное с сеткой в оставшейся части области, либо использование произвольных сеток в различных подобластях, не совпадающих на общих границах подобластей. Первый способ можно использовать при решении задачи методом конечных элементов с треугольными (симплициальными) элементами, диаметры которых могут непрерывно и монотонно меняться как функция расстояния от общей границы подобластей. Второй способ более универсален, в частности, он позволяет аппроксимировать задачи в подобластях разными сеточными методами. Вопросы построения таких аппроксимаций, исследование их точности для линейных краевых задач, итерационные методы решения хорошо изучены [5–7].

В настоящей работе решена задача минимизации функционала, содержащего квадратичное слагаемое и выпуклую, недифференцируемую часть. В зависимости от выбора этой недифференцируемой части мы получаем математические модели различных процессов со свободными границами. Входные данные задачи таковы, что нам а priori известна подобласть, содержащая свободную границу. Задача аппроксимирована конечно-разностной схемой. Сетка в подобласти со свободной границей выбрана в несколько раз мельче, чем в остальной области. На границе, разделяющей подобласти, сетки не совпадают, а условие сопряжения решений из подобластей обеспечивается с помощью введения множителей Лагранжа. Основным результатом работы является сравнительный численный анализ итерационных методов решения построенной дискретной модели. В качестве таких итерационных методов рассмотрены методы расщепления и Удзавы. Отметим, что различные варианты метода расщепления для подобной сеточной задачи исследованы в работе [8]. Предложенные в настоящей статье итерационные методы могут быть использованы и для решения других сеточных задач, построенных любым из перечисленных выше сеточных методов. Это обусловлено тем, что сходимость и эффективность итерационных методов определяются лишь свойствами матриц и операторов дискретной задачи, которые могут быть подобными для различных дифференциальных задач и различных аппроксимаций.

### 1. Постановка задачи и ее аппроксимация

Пусть  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Будем рассматривать следующую задачу: найти  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$J(u) = \min_{\eta \in H_0^1(\Omega)} J(\eta), \quad J(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx - \int_{\Omega} f \eta dx + \psi(\eta), \quad (1)$$

где  $f \in L_2(\Omega)$ , а  $\psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция. Задача (1) имеет единственное решение (см., например, [1, 9, 10]).

В дальнейшем считаем, что  $\Omega$  представлена в виде объединения  $\Omega_1$  и  $\Omega_2 = (x_1^1, x_1^2) \times (0, 1)$  с фиксированными  $0 < x_1^1 < x_1^2 < 1$  и границы  $S = \{x_1 = x_1^1 \text{ и } x_1 = x_1^2, 0 < x_2 < 1\}$ , разделяющей эти подобласти. Пусть  $V_i = \{u \in H^1(\Omega_i) : u = 0 \text{ на } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}$ ,  $i = 1, 2$ . В качестве примеров задачи (1) будем рассматривать два варианта, определяемые функцией  $\psi$ :

$$1) \psi(u) = \int_{\Omega_2} |u(x)| dx;$$

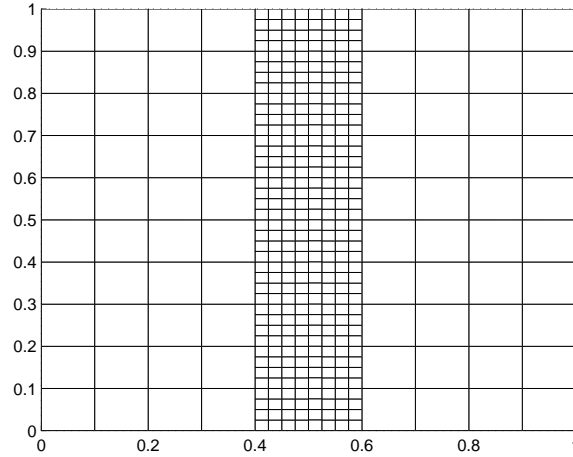


Рис. 1. Расчетная сетка

2)  $\psi(u) = \{0, \text{ если } u \in K; +\infty, \text{ если } u \notin K\}$  – индикаторная функция выпуклого и замкнутого множества  $K = \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x) \geq 0 \text{ в } \Omega_2\}$ .

Для обеих задач свободная граница лежит в подобласти  $\Omega_2$ .

Пусть  $M = \{(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 : u_1(x) = u_2(x) \text{ на } S\}$ . Заменяем (1) эквивалентной задачей

$$I(u_1, u_2) = \min_{(\eta_1, \eta_2) \in M} I(\eta_1, \eta_2),$$

$$I(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla \eta_i|^2 dx - \int_{\Omega_i} f \eta_i dx \right) + \psi(\eta_2). \quad (2)$$

Задачи (1) и (2) эквивалентны в том смысле, что сужения на  $\Omega_i$  решения  $u$  задачи (1) совпадают с компонентами  $u_i$  решения задачи (2).

Построим конечно-разностную аппроксимацию задачи (2) на сетке, равномерной в каждой из подобластей. Будем считать для простоты, что  $f(x)$  – непрерывная в  $\Omega$  функция.

Пусть в  $\bar{\Omega}_1$  построена квадратная сетка  $\bar{\omega}_1$  с шагом  $h_1$ , а в  $\bar{\Omega}_2$  – квадратная сетка  $\bar{\omega}_2$  с шагом  $h_2 = h_1/m$ , где  $m > 0$  – фиксированное целое число (см. рис. 1). Обозначим через  $\omega_i$  множества внутренних узлов сеток  $\bar{\omega}_i$ , через  $\partial\omega_i$  – множества граничных узлов, состоящие из  $\partial_0\omega_i = \{x \in \partial\omega_i : x \in \partial\Omega\}$  и  $s_i = \{x \in \partial\omega_i : x \in S\}$ . Будем обозначать через  $V_{hi}$ ,  $i = 1, 2$ , пространства сеточных функций, определенных на  $\bar{\omega}_i$  и равных нулю на  $\partial_0\omega_i$ , а через  $W_{hi}$  – пространства их следов на  $S$ , иными словами, пространства сеточных функций, определенных на  $s_i$ .

Для функции  $y_1 \in V_{h1}$  определим конечно-разностные производные  $\partial_1 y_1(x) = h_1^{-1}(y(x_1+h_1, x_2) - y(x_1, x_2))$  и  $\bar{\partial}_1 y_1(x) = h_1^{-1}(y(x_1, x_2) - y(x_1-h_1, x_2))$ , аппроксимирующие частные производные по  $x_1$ . Таким же образом определим разностные производные  $\partial_2 y_1(x)$  и  $\bar{\partial}_2 y_1(x)$  по  $x_2$ . Обозначим через  $\bar{\nabla}_h y_1 = (\bar{\partial}_1 y_1, \bar{\partial}_2 y_1)$  сеточный градиент, через  $\Delta_h y_1 = \partial_1 \bar{\partial}_1 y_1 + \partial_2 \bar{\partial}_2 y_1$  сеточный оператор Лапласа. Аналогично определим разностные производные, сеточный градиент  $\bar{\nabla}_h y_2$  и сеточный оператор Лапласа  $\Delta_h$  на сетке с шагом  $h_2$  для функции  $y_2 \in V_{h2}$ . Пусть  $\mathbf{n}_i$  – единичный вектор нормали к  $S$ , внешний для  $\Omega_i$ , тогда  $\partial_{n_i} y_i = h_i^{-1}(y(x) - y(x - \mathbf{n}_i h_i))$  – аппроксимация нормальной производной в точках  $s_i$ .

Пусть  $\omega_1^+ = \{x \in \bar{\omega}_1 : (x_1 - h_1, x_2) \in \bar{\omega}_1 \text{ и } (x_1, x_2 - h_1) \in \bar{\omega}_1\}$ , то есть в точках сеточного множества  $\omega_1^+$  можно определить сеточный градиент  $\bar{\nabla}_h y_1$  для функций из  $V_{h1}$ . Аналогично,  $\omega_2^+ \subset \bar{\omega}_2$  – множество, где определен сеточный градиент  $\bar{\nabla}_h y_2$  для функций из  $V_{h2}$ .

Поставим в соответствие функциям из  $V_{ih}$  векторы их узловых параметров, сохранив за ними прежние обозначения. Именно, если  $y_i \in V_{ih}$ , то соответствующий вектор узловых параметров  $y_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ , где  $N_i$  равно числу точек множества  $\omega_i \cup s_i$ . Сеточной функции  $\lambda(x) \in W_{h2}$  поставим в соответствие вектор  $\lambda \in \mathbb{R}^{N_\lambda}$ ,  $N_\lambda$  равно числу точек  $s_2$ . Пусть, наконец, для  $z \in W_{h1}$  сеточная функция  $Pz$  определена в точках  $s_2$  с помощью линейной интерполяции по значениям  $z(x)$  в точках более грубой сетки  $s_1$ .

Через  $(\cdot, \cdot)_i$ ,  $\|\cdot\|_i$  обозначим евклидово скалярное произведение и норму в  $\mathbb{R}^{N_i}$ , через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{s_2}$ . Определим матрицы  $A_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ ,  $F_i^T \in \mathbb{R}^{N_i \times N_\lambda}$  и векторы  $f_i \in \mathbb{R}^{N_i}$  следующими равенствами:

$$\begin{aligned} (A_i y_i, z_i)_i &= h_i^2 \sum_{x \in \omega_i^+} \bar{\partial}_1 y_i(x) \bar{\partial}_1 z_i(x) + \bar{\partial}_2 y_i(x) \bar{\partial}_2 z_i(x) \quad \forall y_i(x), z_i(x) \in V_{hi}, \\ (f_i, z_i)_i &= h_i^2 \sum_{x \in \omega_i} f(x) z_i(x) + h_i^2/2 \sum_{x \in s_i} f(x) z_i(x) \quad \forall z_i(x) \in V_{hi}, \\ (z_1, F_1 \lambda)_1 &= \langle F_1^T z_1, \lambda \rangle = h_2 \sum_{x \in s_2} P z_1(x) \lambda(x) \quad \forall z_1(x) \in V_{h1}, \quad \forall \lambda \in W_{h2}, \\ (z_2, F_2 \lambda)_2 &= \langle F_2^T z_2, \lambda \rangle = h_2 \sum_{x \in s_2} z_2(x) \lambda(x) \quad \forall z_2(x) \in V_{h2}, \quad \forall \lambda \in W_{h2}. \end{aligned}$$

Матрица  $F_2$  соответствует оператору продолжения нулем сеточной функции  $\lambda(x)$  с  $s_2$  на  $\omega_2$ , а матрица  $F_1$  – оператору продолжения сеточной функции

$$P^* \lambda(x) = \frac{1}{m} \left( \lambda(x) + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda(x - jh) + \lambda(x + jh)) (1 - j/m) \right),$$

определенной на  $s_1$ , нулем на  $\omega_1$ .

В случае, когда в исходной задаче  $\psi(u) = \int_{\Omega_2} |u(x)| dx$ , соответствующую функцию в сеточной задаче определим равенством

$$\psi(y_2) = h_2^2 \sum_{x \in \omega_2} |y_2(x)| + h_2^2/2 \sum_{x \in s_2} |y_2(x)|.$$

Во втором варианте аппроксимируем множество  $K$  множеством  $K_h = \{y : y(x) \geq 0 \text{ при } x \in \omega_2\}$  и сохраним обозначение  $\psi$  для его индикаторной функции. Множество  $M$  аппроксимируем множеством сеточных функций  $\{(y_1, y_2) \in V_{1h} \times V_{2h} : Py_1(x) = y_2(x), x \in s_2\}$ . В терминах векторов это множество имеет вид

$$M_h = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} : F_1^T y_1 = F_2^T y_2\}.$$

Теперь можно определить конечно-разностную аппроксимацию задачи (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{найти пару } (y_1, y_2) \in M_h, \text{ доставляющую минимум функции} \\ I_h(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} (A_i y_i, y_i)_i - (f_i, y_i)_i \right) + \psi(y_2). \end{array} \right. \quad (3)$$

Задача (3) имеет единственное решение, так как это задача минимизации строго выпуклой, коэрцитивной и непрерывной функции на выпуклом замкнутом множестве  $M_h$ .

Построим функцию Лагранжа для задачи (3):

$$L(y_1, y_2, \lambda) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} (A_i y_i, y_i)_i - (f_i, y_i)_i \right) + \psi(y_2) + (y_1, F_1 \lambda)_1 - (y_2, F_2 \lambda)_2. \quad (4)$$

Седловая точка  $(y_1, y_2, \lambda) \in V_{h_1} \times V_{h_2} \times W_{h_2}$  функции Лагранжа (4) существует и единственна. Она является решением следующей седловой задачи с ограничениями

$$\begin{cases} A_1 y_1 + F_1 \lambda = f_1, \\ A_2 y_2 + \partial \psi(y_2) - F_2 \lambda \ni f_2, \\ F_1^T y_1 - F_2^T y_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Явный вид системы уравнений и включений, которым удовлетворяют сеточные функции  $(y_1, y_2, \lambda)$  после масштабирования будет следующим:

$$\begin{aligned} -\Delta_h y_1 = f_1 \quad \text{при } x \in \omega_1, \quad y_1 = 0 \quad \text{при } x \in \partial_0 \omega_1, \\ \frac{1}{h_1} \partial_{n_1} y_1 - \frac{1}{2} \partial_2 \bar{\partial}_2 y_1 = -\frac{1}{h_1} P^* \lambda + \frac{1}{2} f_1 \quad \text{при } x \in s_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_h y_2 + \partial \psi(y_2) \ni f_2 \quad \text{при } x \in \omega_2, \quad y_2 = 0 \quad \text{при } x \in \partial_0 \omega_2, \\ \frac{1}{h_2} \partial_{n_2} y_2 - \frac{1}{2} \partial_2 \bar{\partial}_2 y_2 + \frac{1}{2} \partial \psi(y_2) \ni \frac{1}{h_2} \lambda + \frac{1}{2} f_2 \quad \text{при } x \in s_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$P y_1 - y_2 = 0 \quad \text{при } x \in s_2. \quad (8)$$

## 2. Итерационные методы

Для решения системы (5) применим два итерационных метода: метод расщепления (обобщенный метод Дугласа–Рэкфорда) [11–13] и обобщенный метод Удзавы [9], [13–16]. В дальнейшем мы будем использовать известные результаты, приведенные ниже.

**Теорема 1 [15].** Пусть выполнены условия

- матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  положительно определена,
- матрица  $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$  имеет полный ранг:  $\text{rank } B = l \leq m$ ,

- $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – выпуклая собственная и полунепрерывная снизу функция,
- $\{y \in \mathbb{R}^m : B y = 0\} \cap \text{int dom } \psi \neq \emptyset$ .

Тогда задача

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial \psi(y) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

имеет непустое множество решений  $X = \{(y, \lambda)\}$ , причем определяется однозначно.

**Теорема 2 [14].** Пусть выполнены условия (9), (10). Если

$$(A y, y) \geq \frac{(1 + \varepsilon) \tau}{2} (D^{-1} B y, B y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (12)$$

с некоторым  $\varepsilon > 0$  и с симметричной и положительно определенной матрицей  $D$ , то итерационный метод

$$\begin{aligned} Ay^{k+1} + \partial\psi(y^{k+1}) &\ni -B^T \lambda^k + f, \\ \frac{1}{\tau} D(\lambda^{k+1} - \lambda^k) - By^{k+1} &= 0, \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

сходится для любого начального приближения  $\lambda^0: (y^k, \lambda^k) \rightarrow (y^*, \lambda^*) \in X$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Теорема 3 [13, теорема 4.10].** Пусть матрица  $\mathcal{A}$  положительно полуопределена:  $(\mathcal{A}z, z) \geq 0$  для всех  $z$ ,  $\mathcal{P}$  – максимально монотонный оператор и включение

$$\mathcal{A}z + \mathcal{P}(z) \ni 0 \quad (14)$$

имеет решение. Тогда итерации обобщенного метода Дугласа – Рэкфорда

$$\begin{aligned} D \frac{z^{k+1/2} - z^k}{\tau} + \mathcal{A}z^k + \mathcal{P}(z^{k+1/2}) &\ni 0, \\ D \frac{z^{k+1} - z^{k+1/2}}{\tau} + \mathcal{A}(z^{k+1} - z^k) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

с симметричным и положительно определенным предобусловливателем  $D$  сходятся при любом итерационном параметре  $\tau > 0$  к некоторому решению (14).

**Метод Удзавы для задачи (5)**

Введем векторы  $y = (y_1, y_2)^T$ ,  $f = (f_1, f_2)^T$ , и пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = (F_1^T, -F_2^T), \quad \partial\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\psi(y_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (5) может быть записана в виде (11).

Все условия (9), (10) для нее выполнены. Действительно, матрица  $A = \text{diag}(A_1, A_2)$  положительно определена в силу положительной определенности сеточных операторов Лапласа в задачах (6), (7). Ранг матрицы  $B$  равен рангу матрицы  $F_2$ :  $\text{rang } B = \text{card } s_2$ , так что  $B$  имеет полный столбцовый ранг. Наконец, нулевой вектор принадлежит множеству  $\{y \in \mathbb{R}^m : By = 0\} \cap \text{int dom } \psi$ . Таким образом, в силу теоремы 1 задача (5) имеет решение с единственными компонентами  $(y_1, y_2)$ .

Далее используем следующее неравенство (сеточный аналог вложения пространства  $V_i(\Omega_i)$  в  $L_2(S)$ ):

$$h_i \sum_{x \in s_i} y_i^2(x) \leq c_0 h_i^2 \sum_{x \in \omega^+_i} (\bar{\partial}_1 y_i(x))^2 + (\bar{\partial}_2 y_i(x))^2 \quad (16)$$

с постоянной  $c_0$ , не зависящей от шагов сетки. Из определения матриц следует, что

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \sum_{i=1}^2 \left( h_i^2 \sum_{x \in \omega^+_i} (\bar{\partial}_1 y_i(x))^2 + (\bar{\partial}_2 y_i(x))^2 \right), \\ \|By\|^2 &= \langle F_1^T y_1, F_1^T y_1 \rangle + \langle F_2^T y_2, F_2^T y_2 \rangle. \end{aligned}$$

В силу неравенства (16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\langle F_2^T y_2, \lambda \rangle| &\leq \left( h_2 \sum_{x \in s_2} y_2^2(x) \right)^{1/2} \left( h_2 \sum_{x \in s_2} \lambda_2^2(x) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( c_0 h_2^2 \sum_{x \in \omega^{+2}} (\bar{\partial}_1 y_2(x))^2 + (\bar{\partial}_2 y_2(x))^2 \right)^{1/2} \left( h_2 \sum_{x \in s_2} \lambda_2^2(x) \right)^{1/2} \quad \forall \lambda \in W_{h_2}. \end{aligned}$$

Из этой оценки получаем неравенство  $|\langle F_2^T y_2, \lambda \rangle| \leq h_2^{1/2} (c_0 (A_2 y_2, y_2)_2)^{1/2} \langle \lambda, \lambda \rangle^{1/2}$ , откуда

$$\langle F_2^T y_2, F_2^T y_2 \rangle \leq h_2 c_0 (A_2 y_2, y_2)_2.$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$\langle F_1^T y_1, F_1^T y_1 \rangle \leq h_1 c_1 (A_1 y_1, y_1)_1$$

с постоянной, не зависящей от шагов сетки. Таким образом,

$$(Ay, y) \geq h_2^{-1} \min \left\{ \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \right\} \|By\|^2. \quad (17)$$

Выберем в качестве  $D$  в методе (13) для решения задачи (5) матрицу  $D = h_2 E$ , где  $E$  – единичная  $s_2 \times s_2$  матрица. Неравенство (12), являющееся достаточным условием сходимости итерационного метода (13), приобретает вид

$$(Ay, y) \geq \frac{(1 + \varepsilon)\tau}{2h_2} \|By\|^2.$$

В силу (17) это условие выполнено, если  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1)$  – постоянная, не зависящая от шагов сетки.

*Алгоритм реализации метода Удзавы.*

Задается начальное приближение  $\lambda^0$ . Для известного  $\lambda^n$  сначала находим векторы  $y_1^{n+1}$  и  $y_2^{n+1}$ , решая системы уравнений

$$A_1 y_1^{n+1} = f_1 - F_1 \lambda^n, \quad (18)$$

$$A_2 y_2^{n+1} + \partial\psi(y_2^{n+1}) \ni f_2 + F_2^T \lambda^n, \quad (19)$$

или, в терминах сеточных функций, решая системы (6) и (7). Отметим, что задачи для  $y_1^{n+1}$  и  $y_2^{n+1}$  независимы. Решение (19) с симметричной и положительно определенной матрицей  $A_2$  и диагональным оператором  $\partial\psi$  эффективно осуществляется методом верхней релаксации [13].

На втором шаге метода Удзавы определяется вектор  $\lambda^{n+1}$  по явным формулам

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \tau h_2^{-1} (F_1(y_1^{n+1}) - F_2(y_2^{n+1})),$$

то есть

$$\lambda^{n+1}(x) = \lambda^n(x) - \tau (P y_1(x) - y_2(x)) \quad x \in s_2.$$

**Метод расщепления для задачи (5)**

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}(z) = \begin{pmatrix} \partial\psi(y) - f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (11) может быть записана в виде (14) с положительно полуопределенной матрицей  $\mathcal{A}$  и максимально монотонным оператором  $\mathcal{P}$ . Как было установлено выше, эта задача имеет решение. В силу теоремы (3) при любом  $D = D^T > 0$  и любом итерационном параметре  $\tau > 0$  к нему сходится последовательность итераций метода (15).

*Алгоритм реализации метода Дугласа – Рэкфорда.*

Задаются начальные приближения  $(y_1^0, y_2^0, \lambda^0)$ . Для известных  $(y_1^n, y_2^n, \lambda^n)$  значения  $(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \lambda^{n+1})$  находятся в два шага:

$$\begin{cases} y_1^{n+1/2} = y_1^n + \tau_1(f_1 - A_1 y_1^n - F_1^T \lambda^n), \\ y_2^{n+1/2} + \tau_2 \partial \psi(y_2^{n+1/2}) \ni y_2^n + \tau_2(f_2 - A_2 y_2^n + F_2^T \lambda^n), \\ \lambda^{n+1/2} = \lambda^n + \tau_3(F_1 y_1^n - F_2 y_2^n), \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_1^{-1} E_1 + A_1 & 0 & F_1^T \\ 0 & \tau_2^{-1} E_2 + A_2 & -F_2^T \\ -F_1 & F_2 & \tau_3^{-1} E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \\ \lambda^{n+1} - \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^{-1}(y_1^{n+1/2} - y_1^n) \\ \tau_2^{-1}(y_2^{n+1/2} - y_2^n) \\ \tau_3^{-1}(\lambda^{n+1/2} - \lambda^n) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь  $\tau_i > 0$  – итерационные параметры,  $E_i$  – единичные матрицы соответствующих размеров. Метод (20), (21) является частным случаем (15) с  $\tau = \tau_1$  и предобусловителем

$$D = \text{diag}\left(E_1, \frac{\tau_1}{\tau_2} E_2, \frac{\tau_1}{\tau_3} E_3\right).$$

Как видно из (20), векторы  $y_1^{n+1/2}$  и  $\lambda^{n+1/2}$  находятся по явным формулам, а для отыскания  $y_2^{n+1/2}$  требуется решить систему нелинейных уравнений. Но нелинейный оператор  $\mathcal{P}$  является диагональным, поэтому система распадается на независимые скалярные уравнения относительно координат вектора  $y_2^{n+1/2}$ . Более того, для рассматриваемых в статье задач решения этих уравнений выписываются в явном виде. Второй шаг метода состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений относительно векторов  $y_1^{n+1} - y_1^n$ ,  $y_2^{n+1} - y_2^n$ ,  $\lambda^{n+1} - \lambda^n$ . Матрицей этой системы является седловая матрица. Для решения систем уравнений с седловыми матрицами разработаны эффективные итерационные методы [17].

Другой вариант метода расщепления состоит из шага (20) и решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \tau_1^{-1} E_1 + A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2^{-1} E_2 + A_2 & 0 \\ -F_1 & F_2 & \tau_3^{-1} E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \\ \lambda^{n+1} - \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^{-1}(y_1^{n+1/2} - y_1^n) \\ \tau_2^{-1}(y_2^{n+1/2} - y_2^n) \\ \tau_3^{-1}(\lambda^{n+1/2} - \lambda^n) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Основным преимуществом метода (20), (22) по сравнению с методом (20), (21) является то, что система (22) расщепляется на независимые системы уравнений для векторов  $y_1^{n+1}$  и  $y_2^{n+1}$ , которые могут решаться параллельно. При этом  $\lambda^{n+1}$  находится по явным формулам.

### 3. Вычислительные эксперименты

Был проведен ряд вычислительных экспериментов, в которых сеточная схема (6)–(8) решалась методом Удзавы и методом расщепления.

В качестве подобласти  $\Omega_2$ , содержащей свободную границу, выбирался прямоугольник  $(0.4, 0.6) \times (0, 1)$ . В тестовой задаче с функцией  $\psi(u) = \int_{\Omega_2} |u(x)| dx$  (будем



Табл. 1

Число итераций при  $m = 2$ 

$h_2 = h_1/2$	$h_1$			
	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Число итераций в задаче 1				
Метод расщепления ( $\tau = 10$ )	80	155	324	696
Метод Удзавы ( $\tau = 1.5$ )	301	462	629	642
Число итераций в задаче 2				
Метод расщепления ( $\tau = 10$ )	115	178	288	502
Метод Удзавы ( $\tau = 4.7$ )	91	119	132	129

Табл. 2

Число итераций при  $m = 4$ 

$h_2 = h_1/4$	$h_1$			
	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Число итераций в задаче 1				
Метод расщепления ( $\tau = 10$ )	148	308	641	1217
Метод Удзавы ( $\tau = 1.5$ )	463	669	869	881
Число итераций в задаче 2				
Метод расщепления ( $\tau = 10$ )	176	269	495	741
Метод Удзавы ( $\tau = 5$ )	122	154	175	180

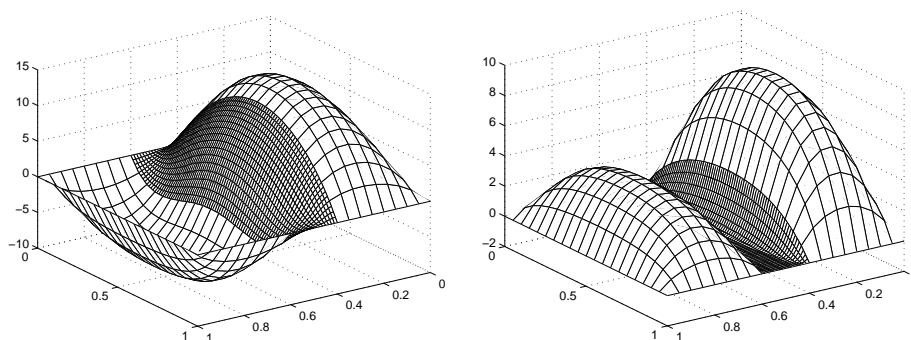


Рис. 2. Слева – решение задачи 1, справа - задачи 2

далее называть ее задачей 1) правая часть выбиралась в виде

$$f(x_1, x_2) = \{400, \text{ если } x_1 < 0.57 - 0.6(x_2 - 0.5)^2; -450, \text{ в противном случае}\}.$$

В тестовой задаче о препятствии (задача 2) правая часть имела вид

$$f(x_1, x_2) = \{400, \text{ если } x_1 \leq 0.4; -750, \text{ если } 0.4 < x_1 < 0.6; 200, \text{ если } x_1 \geq 0.6\}.$$

В области  $\Omega_1$  была построена квадратная сетка с шагом  $h_1$ , в области  $\Omega_2$  шаг сетки полагался равным  $h_2 = h_1/m$ , в расчетах выбирались значения  $m = 2$  и  $m = 4$ .

При практическом использовании рассматриваемых здесь методов критерием точности является оценка нормы невязки в сеточных уравнениях. Этот критерий особенно прост в использовании при решении дискретной задачи методом Удзавы, поскольку задачи для  $y_1$  и  $y_2$  на каждой итерации решаются точно и требуется

контролировать лишь их разность на общей границе подобластей – в точках сетки на  $S$ . В проведенных экспериментах вычисления проводились, пока  $L_2$ -норма невязки схемы (7) не станет меньше  $\varepsilon = 0.01$ . Начальное приближение  $y_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ . В методе расщепления параметры  $\tau_1$  и  $\tau_2$  выбраны как теоретически оптимальные [13]; итерационный параметр  $\tau_3$  подбирался численно. В методе Удзавы при расчетах использован параметр, также найденный в ходе вычислительных экспериментов. Вычисления показали, что  $\tau_3$  и  $\tau$  практически не зависят от шага сетки. Результаты вычислений представлены в табл. 1, 2; полученные решения показаны на рис. 2.

На основании проведенных тестов можно утверждать, что скорость сходимости непередобусловленного метода Удзавы значительно менее чувствительна к измельчению шагов четки, чем скорость сходимости метода расщепления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00368).

### Summary

*M.A. Ignatieva, A.V. Lapin.* Using Domain Decomposition Method and Non-Matching Grids for Solving Some Variational Inequalities.

Finite difference approximations and iterative solution methods are constructed for a class of variational inequalities with constraints imposed on the solution and a priori known subdomain containing a free boundary. Domain decomposition method and non-matching grids are used for the approximation. Splitting and Uzawa-type iterative methods are investigated for solving the approximated problems. Numerical comparison of their efficiency is carried out.

**Keywords:** variational inequalities, finite difference approximation, domain decomposition, non-matching grids, iterative methods.

### Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Crank J. Free and moving boundary problems. – Oxford: Calderon Press, 1987. – 436 p.
3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
4. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. – 345 с.
5. Агошков В. И. Методы разделения области в задачах математической физики // Вычисл. процессы и системы. – М.: Наука, 1991. – Вып. 8. – С. 4–51.
6. Le Tallec P. Domain decomposition methods in computational mechanics // Comput. Mech. Adv. – 1994. – V. 1, No 2. – P. 121–220.
7. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. – 450 p.
8. Игнатъева М.А., Лапин А.В. Решение задачи о препятствии методом декомпозиции области // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 112–126.
9. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

11. *Lions P.L., Mercier B.* Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16, No 6. – P. 964–979.
12. *Glowinski R., LeTallec P.* Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. – Philadelphia, PA: SIAM, 1989. – 302 p.
13. *Лапин А.В.* Итерационные методы решения сеточных вариационных неравенств. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 132 с.
14. *Lapin A.* Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, No 4. – P. 309–322.
15. *Laitinen E., Lapin A., Lapin S.* Iterative solution methods for variational inequalities with nonlinear main operator and constraints to gradient of solution // Lobachevskii J. Math. – 2012. – V. 33, No 4. – P. 364–371.
16. *Laitinen E., Lapin A.* Iterative Solution Methods for the Large-Scale Constrained Saddle-Point Problems // Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems (Comp. Meth. Appl. Sci. V. 27). – 2013. – P. 19–39.
17. *Быченко Ю., Чижонков Е.В.* Итерационные методы решения седловых задач. – М.: Бином, 2010. – 349 с.

Поступила в редакцию  
11.03.15

---

**Игнатъева Марина Александровна** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *ettercap@mail.ru*

**Лапин Александр Васильевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *avlapine@mail.ru*