УДК 519.642

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Ю.Р. Агачев, А.И. Леонов, И.П. Семенов

Аннотация

Для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с фиксированными интегрируемыми особенностями в ядре по внутренней и внешней переменным на основе простейшей интервальной квадратурной формулы построены вычислительные схемы метода механических квадратур и дано их теоретико-функциональное обоснование. В частности, доказана сходимость метода в пространстве функций, квадратично-суммируемых на промежутке интегрирования с весом, зависящим от особенностей ядра интегрального оператора. Полученные в одномерном случае результаты распространены также на многомерный случай.

Ключевые слова: интегральное уравнение, фиксированные особенности в ядре, весовое пространство Лебега, интервальная квадратурная формула, метод механических квадратур, сходимость метода.

В работе методом квадратур решаются интегральные уравнения вида

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{+1} \mu(s)h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{1}$$

$$Kx \equiv x(t) + \mu(t)\int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{2}$$

где $\mu \in L_1(-1,1)$, $h(t,s)$, $y(t)$ – данные, $x(t)$ – искомая функции, а также многомерные аналоги уравнений (1), (2).

Обоснование метода механических квадратур для интегральных уравнений Фредгольма второго рода (в одномерном и многомерном случаях) проведено в ряде работ (см., например, [1, 2] и приведенную там библиографию). Как известно, этот метод является одним из наиболее простых прямых методов решения интегральных уравнений. При этом, как правило, вычислительная схема метода строится в предположении непрерывности ядра интегрального оператора и правой части уравнения.

Наиболее общие результаты по методу механических квадратур получены в работах [1, 2]. В них обоснование метода проведено по-существу в случае, когда коэффициенты уравнения R-интегрируемы в своих областях определения. Однако если коэффициенты имеют разрывы второго рода, то результаты из [1, 2] перестают быть справедливыми. Этого в некоторых случаях можно избежать, если в основу метода квадратур положить так называемую интервальную квадратурную формулу (см., например, работы [3, 4] и приведенную там библиографию). Здесь мы воспользуемся наиболее простой интервальной формулой, основанной на сплайн-функциях нулевой степени (кусочно-постоянных функциях).

1. Некоторые вспомогательные результаты

1°. Пусть $\rho(t)$ – фиксированная весовая функция на отрезке $[-1,1]$, $L_{2,\rho} \equiv \equiv L_{2,\rho}(-1,1)$ – пространство квадратично-суммируемых на $[-1,1]$ с весом $\rho(t)$ функций. В случае функции двух переменных, заданной в квадрате $[-1,1]^2$ и квадратично суммируемой на нем с весом $q(t,s)$, соответствующее пространство будем обозначать $L_{2,q}((-1,1)^2)$. Известно, что $L_{2,\rho}$ с нормой

$$\|x\|_{2,\rho} = \left\{ \int_{-1}^{+1} \rho(t)|x(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad x \in L_{2,\rho},$$

является банаховым пространством.

В пространстве $L_{2,\rho}$ введем в рассмотрение интегральный модуль непрерывности:[1]

$$\omega(x;\delta)_{2,\rho} \equiv \sup_{|\eta|\le\delta} \|x(\cdot+\eta) - x(\cdot)\|_{L_{2,\rho}(-1,1)}, \quad x \in L_{2,\rho}.$$

Отметим здесь, что все основные свойства модуля непрерывности выполняются; в частности, $\omega(x;\delta)_{2,\rho} \to 0$ при $\delta \to 0$ для любой функции $x \in L_{2,\rho}$.

2°. На отрезке $[-1,1]$ введем в рассмотрение сетку равноотстоящих узлов

$$\Delta_n : -1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = +1, \quad t_k = \frac{2k}{n} - 1, \quad n-1 \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Пусть $\overline{S}_n^0$ есть оператор, который любой суммируемой на $[-1,1]$ функции $z(t)$ ставит в соответствие «интерполяционный в среднем» сплайн $(\overline{S}_n^0 z)(t)$ нулевой степени на сетке (3), то есть кусочно-постоянную функцию вида

$$(\overline{S}_n^0 z)(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(z)\psi_k(t), \quad \Phi_k(z) = \frac{n}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} z(t)\,dt, \tag{4}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_{k-1}, t_k], \\ 0, & t \notin (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть весовая функция $\rho(t)$ такова, что $1/\rho(t)$ также является весовой. Тогда для любой функции $z \in L_{2,\rho}(-1,+1)$ имеет место неравенство*

$$\|z - \overline{S}_n^0 z\|_{2,\rho} \le \sqrt{2}\,\omega\left(z; \frac{2}{n}\right)_{2,\rho}.$$

Доказательство. Обозначим через δ погрешность аппроксимации, то есть $\delta \equiv \|z - \overline{S}_n^0 z\|_{2,\rho}$. Тогда

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(t)|z(t) - \Phi_k(z)|^2\,dt = \frac{n^2}{4} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(t) \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [z(t) - z(\tau)]\,d\tau \right|^2 dt.$$

[1] Считаем, что функция продолжена вне квадрата $[-1,1]^2$ нулем. В случае периодических функций модуль непрерывности можно ввести по формуле

$$\omega(x;\delta)_{2,\rho} \equiv \sup_{0<\eta\le\delta} \|x(\cdot+\eta) - x(\cdot)\|_{L_{2,\rho}(-1,1-\eta)}.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\delta^2 \le \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(t) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |z(t) - z(\tau)|^2 \, d\tau \, dt.$$

После замены τ на $t+\tau$, изменения порядка интегрирования и последующей замены в первом интеграле τ на $-\tau$ приходим к следующей оценке:

$$\delta^2 \le \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{2/n} d\tau \left\{ \int\limits_{t_{k-1}+\tau}^{t_k} \rho(t)|z(t-\tau) - z(t)|^2 \, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k-\tau} \rho(t)|z(t+\tau) - z(t)|^2 \, dt \right\} \le$$

$$\le 2 \sup_{|\tau| \le 2/n} \int\limits_{-1}^{1} \rho(t)|z(t+\tau) - z(t)|^2 \, dt \equiv 2\, \omega(z; 2/n)^2_{2,\rho},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Следствие. *В условиях леммы* 1 *операторы* $\overline{S}_n^{\,0} : L_{2,\rho} \to L_{2,\rho}$, *задаваемые формулой* (4), *ограничены по норме в совокупности.*

Справедливость следствия вытекает из того, что в условиях леммы 1 операторы $\overline{S}_n^{\,0}$ сильно сходятся к единичному оператору в пространстве $L_{2,\rho}$, и поэтому по теореме Банаха – Штейнхауса (см., например, [5, с. 129]) ограничены по норме в совокупности в указанном пространстве.

Замечание. При $\rho(t) \equiv 1$ утверждение леммы 1 в периодическом случае имеется в работе [6].

3°. Обозначим через H оператор, задаваемый интегралом в левой части уравнения (1), то есть

$$(Hx)(t) \equiv (H(hx))(t) = \int\limits_{-1}^{+1} \mu(s) h(t,s) x(s) \, ds.$$

Лемма 2. *Пусть функция* $\mu \in L_1(-1,1)$, $\rho(t) = |\mu(t)|, -1 \le t \le 1$, *а функция* $h(t,s)$ *удовлетворяет условию*

$$h \in L_{2,q}((-1,1)^2), \quad q(t,s) = \rho(t)\rho(s).$$

Тогда оператор H *действует из пространства* $L_{2,\rho}$ *в* $L_{2,\rho}$ *и является вполне непрерывным.*

Отметим, что этот результат с учетом критерия компактности множества в пространстве $L_{2,\rho}$ вытекает из неравенств для нормы и интегрального модуля непрерывности в соответствующем пространстве:

$$\|Hx\|_{2,\rho} \le \|h\|_{2,q} \cdot \|x\|_{2,\rho}, \quad x \in L_{2,\rho},$$

$$\omega(Hx; \delta)_{2,\rho} \le \omega_t(h; \delta)_{2,q} \cdot \|x\|_{2,\rho}, \quad x \in L_{2,\rho},$$

где $\omega_t(h;\delta)_{2,q}$ – интегральный модуль непрерывности по переменной t функции $h(t,s) \in L_{2,q}((-1,1)^2)$.

Замечание. Лемма 2 фактически означает, что вполне непрерывный в пространстве $L_{2,\rho}$ интегральный оператор H может иметь ядро, содержащее не только фиксированные особенности по внутренней переменной, но и подвижные особенности определенного интегрируемого порядка. Такого свойства у ядра не может быть, если рассматривать интегральный оператор (а следовательно, и уравнение) в пространстве непрерывных функций, как это делается в большинстве работ, посвященных методу квадратур.

2. Метод механических квадратур

1°. Сначала займемся построением вычислительной схемы метода квадратур и ее обоснованием для уравнения (1).

Для интеграла вида

$$\int\limits_{-1}^{+1} \mu(s) z(s)\, ds$$

рассмотрим интервальную квадратурную формулу, полученную заменой функции $z(s)$ на сплайн $(\overline{S}_n^0 z)(t)$:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \mu(s) z(s)\, ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_k(z), \quad A_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \mu(s)\, ds, \tag{5}$$

где функционалы Φ_k определены в (4).

Приближения к решению уравнения (1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \psi_k(t), \tag{6}$$

неизвестные коэффициенты которого найдем из системы

$$c_j + \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_j(\Phi_k^s(h)) c_k = \Phi_j(y), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где Φ_k^s – функционал Φ_k относительно параметра s.

Для вычислительной схемы (6), (7) имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\mu,\ 1/\mu \in L_1(-1,+1)$;

2) $y \in L_{2,\rho}(-1,+1)$, $h \in L_{2,q}((-1,+1)^2)$, $\rho(t) = |\mu(t)|, q(t,s) = \rho(t)\rho(s)$;

3) *уравнение* (1) *имеет единственное решение при любой правой части из* $L_{2,\rho}$.

Тогда система (7) *однозначно разрешима при всех* n, *начиная с некоторого натурального* n_0. *Приближенные решения, построенные по формуле* (6), *сходятся к точному решению уравнения* (1) *в метрике* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y; \frac{1}{n}\right)_{2,\rho} + \omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q} + \omega_s\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q}\right\}.$$

Следствие. *Если в условиях теоремы* 1 *существуют производные* $y' \in L_{2,\rho}$, $h'_t,\ h'_s \in L_{2,q}$, *то скорость сходимости приближенных решений к точному характеризуется порядковой оценкой*

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Будем рассматривать уравнение (1) в пространстве $X = L_{2,\rho}$ (предположения 1) и 2) обеспечивают действие оператора K в пространстве X). Согласно лемме 2 в пространстве X уравнение (1) относится к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Поэтому с учетом теории Фредгольма для таких уравнений из условия 3) теоремы следует существование ограниченного двустороннего обратного оператора $K^{-1} : X \to X$.

Далее, в пространстве X выберем при произвольно фиксированном натуральном n подпространство X_n, состоящее из элементов вида (6). Нетрудно доказать, что система линейных алгебраических уравнений (7) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H P_n^s(hx_n) = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{8}$$

где оператор проектирования $P_n = \overline{S}_n^0$.

Поэтому для доказательства разрешимости уравнения (8) и сходимости приближенных решений (9) к точному решению уравнения (1) мы можем воспользоваться общей теорией приближенных методов функционального анализа (см., например, теорему 7 гл. I монографии [7]). Согласно этой теории нам достаточно показать для указанных уравнений близость правых частей и операторов на подпространстве X_n.

Что касается близости правых частей, то она очевидна, поскольку согласно лемме 1

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_X \le \sqrt{2}\,\omega(y; 2/n)_{2,\rho} \to 0,\ n \to \infty.$$

Для доказательства близости соответствующих операторов уравнений (1) и (8) возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим $v_n \equiv \|Kx_n - K_n x_n\|_X$. С учетом очевидного свойства

$$P_n(uv) = P_n u\, P_n v, \quad u,\, v \in X,$$

и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} v_n = \|Hx_n - P_n H P_n^s(hx_n)\|_X \le \\ \le \|Hx_n - P_n Hx_n\|_X + \|P_n H x_n - P_n H P_n^s(h) x_n\|_X \le \\ \le \sqrt{2}\,\omega(Hx_n; 2/n)_{2,\rho} + \|P_n(H(h - P_n^s(h)) x_n\|_X \le \\ \le \sqrt{2}\,\omega_t(h; 2/n)_{2,q} \cdot \|x_n\|_X + \|P_n\|_{L_{2,\rho}\to L_{2,\rho}} \cdot \|H(h - P_n^s h) x_n\|_X \le \\ \le \sqrt{2}\,\omega_t(h; 2/n)_{2,q} \cdot \|x_n\|_X + \|P_n\|_{L_{2,\rho}\to L_{2,\rho}} \cdot \|h - P_n^s h\|_{2,q} \cdot \|x_n\|_X. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 и ее следствия непосредственно вытекает оценка

$$v_n = O\Big\{\omega_t(h; 1/n)_{2,q} + \omega_s(h; 1/n)_{2,q}\Big\} \cdot \|x_n\|_X.$$

Тем самым нами доказана близость операторов уравнений (1) и (8) на подпространстве X_n:

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} = O\Big\{\omega_t(h; 1/n)_{2,q} + \omega_s(h; 1/n)_{2,q}\Big\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, все предположения теоремы 7 гл. I монографии [7] выполнены. Остальное очевидно. □

2°. Теперь займемся построением вычислительной схемы метода квадратур для уравнения (2).

С этой целью введем в рассмотрение новые функции $z(t)$ и $g(t)$, связанные с искомой функцией и правой частью уравнения (2) соотношениями $x(t) = \mu(t)z(t)$ и $y(t) = \mu(t)g(t)$. Тогда уравнение (2) преобразуется к уравнению

$$Kz \equiv z(t) + \int\limits_{-1}^{+1} \mu(s)h(t,s)z(s)\,ds = g(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{9}$$

являющемуся уравнением вида (1). Поэтому вычислительную схему метода квадратур для уравнения (9) можно построить согласно вышеприведенной схеме.

Приближения к решению уравнения (9) будем искать в виде сплайна

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\psi_k(t), \tag{10}$$

неизвестные коэффициенты которого найдем с учетом интервальной квадратурной формулы (5) из системы

$$c_j + \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_j(\Phi_k^s(h))c_k = \Phi_j(g), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Если система (11) имеет решение, то приближенное решение уравнения (2) восстанавливаем с учетом связи между решениями уравнений (2) и (9):

$$x_n(t) = \mu(t)z_n(t). \tag{12}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения:*
1) $\mu,\ 1/\mu \in L_1(-1,+1)$*;*
2) $y \in L_{2,\rho}(-1,+1)$*,* $h \in L_{2,q}((-1,+1)^2)$*,* $\rho(t) = 1/|\mu(t)|, q(t,s) = 1/(\rho(t)\rho(s))$*;*
3) *однородное уравнение, соответствующее* (2)*, имеет лишь тривиальное решение.*

Тогда для достаточно больших n *система* (11) *однозначно разрешима. Приближенные решения, построенные по формулам* (12)*,* (10*, сходятся к точному решению уравнения* (2) *в метрике* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y/\mu; \frac{1}{n}\right)_{2,1/\rho} + \omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q} + \omega_s\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q}\right\}.$$

Доказательство. Повторяем дословно соответствующее доказательство теоремы 1 о разрешимости системы (11), при этом погрешность приближенных решений (10), построенных для уравнения (9), характеризуется порядковым соотношением

$$\|z - z_n\|_{2,1/\rho} = O\left\{\omega\left(g; \frac{1}{n}\right)_{2,1/\rho} + \omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q} + \omega_s\left(h; \frac{1}{n}\right)_{2,q}\right\}. \tag{13}$$

Учитывая связь между решениями уравнений (2) и (9), находим

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = \|z - z_n\|_{2,1/\rho}.$$

Отсюда и из (13) непосредственно вытекает утверждение теоремы 2. □

3°. Следует отметить, что вычислительную схему метода механических квадратур можно построить непосредственно и для исходного уравнения (2). Для этого введем оператор H_1, задаваемый интегральным слагаемым в левой части этого уравнения, то есть

$$(H_1x)(t) \equiv (H_1(hx))(t) = \mu(t)\int\limits_{-1}^{+1} h(t,s)x(s)\,ds.$$

Оператор H_1 обладает свойствами, аналогичными H.

Лемма 3. *Пусть функции $\mu, 1/\mu \in L_1(-1,1)$, $\rho(t) = 1/|\mu(t)|, -1 \le t \le 1$, а функция $h(t,s)$ удовлетворяет условию*

$$h \in L_{2,q}([-1,1]^2), \quad q(t,s) = |\mu(t)\mu(s)|.$$

Тогда оператор H_1 действует из пространства $L_{2,\rho}$ в $L_{2,\rho}$ и является вполне непрерывным.

Заметим, что ядро интегрального оператора $H_1 : L_{2,\rho} \to L_{2,\rho}$ также может иметь подвижные особенности определенного интегрируемого порядка в силу выбора специальной весовой функции. Кроме того, для интеграла $\int\limits_{-1}^{+1} z(s)\,ds$ имеем равенство

$$\int\limits_{-1}^{+1} z(s)\,ds = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(z).$$

Приближения к решению уравнения (2) будем искать в виде сплайна (6), неизвестные коэффициенты которого найдем из системы

$$c_j + \frac{2}{n}\Phi_j(\mu)\sum_{k=1}^{n}\Phi_j(\Phi_k^s(h))c_k = \Phi_j(y), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения:*
1) $\mu,\ 1/\mu \in L_1(-1,+1)$*;*
2) $y \in L_{2,\rho}(-1,+1)$, $h \in L_{2,q}((-1,+1)^2)$, $\rho(t) = 1/|\mu(t)|, q(t,s) = |\mu(t)\mu(s)|$*;*
3) *уравнение* (2) *имеет единственное решение при любой правой части из* $L_{2,\rho}$.

Тогда система (14) *однозначно разрешима при всех n, хотя бы достаточно больших. Приближенные решения, построенные по формуле* (6), *сходятся к точному решению уравнения* (2) *в метрике $L_{2,\rho}$ со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y;\frac{1}{n}\right)_{2,\rho} + \omega_t\left(h;\frac{1}{n}\right)_{2,q} + \omega_s\left(h;\frac{1}{n}\right)_{2,q}\right\}.$$

Замечание. 1. Обоснованный здесь при минимальных предположениях относительно известных функций метод квадратур является наиболее простым. При этом полученные результаты могут быть применены к уравнениям вида (1) и (2), заданным на произвольном сегменте.

2. Если функции $h(t,s)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[-1,1]$, то из вычислительных схем (6)–(7) и (12), (10), (11) можно получить с обоснованием известные

схемы метода механических квадратур для уравнений вида (1) и (2) (см., например, [1, 2, 8]). Для этого достаточно функционалы Φ_k аппроксимировать хорошо известными интерполяционными квадратурными формулами, в частности малыми формулами прямоугольников и трапеций.

3. В случае уравнений (1) и (2) с гладкими исходными данными построенные вычислительные схемы неэффективны. В этом случае необходимо применять прямые методы, которые не обладают свойством насыщаемости или построены на основе сплайнов высоких степеней. Однако тогда простотой вычислительной схемы метода в определенной степени придется пренебречь.

3. О методе кубатур для многомерных уравнений

Рассмотрим теперь вкратце вопрос о распространении полученных в предыдущем параграфе результатов на случай многомерных уравнений, заданных в областях простой структуры. При этом, без ограничения общности, остановимся на двумерном случае. Итак, рассматриваются уравнения вида

$$x(t,s) + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mu_1(\tau)\mu_2(\sigma)h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma = y(t,s), \quad t,s \in [-1,1], \tag{15}$$

$$x(t,s) + \mu_1(t)\mu_2(s)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma = y(t,s), \quad t,s \in [-1,1]. \tag{16}$$

Предполагается, как и в одномерном случае, что функции μ_i на промежутке $[-1,1]$ имеют особенности интегрируемого порядка.

Для интеграла вида

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mu(\tau,\sigma)z(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma$$

рассмотрим интервальную кубатурную формулу, полученную заменой функции $z(\tau,\sigma)$ на двумерный сплайн нулевой степени $(\overline{S}^{\,0}_{nm}z)(\tau,\sigma) = (\overline{S}^{\,0}_{n\infty}\overline{S}^{\,0}_{\infty m}z)(\tau,\sigma)$, где $\overline{S}^{\,0}_{n\infty}$ и $\overline{S}^{\,0}_{\infty m}$ означают одномерные операторы, построенные в предыдущем пункте, по первому и второму аргументам по равномерным разбиениям сегмента $[-1,1]$ с шагом $2/n$ и $2/m$ соответственно[2]:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mu(\tau,\sigma)z(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{kj}\Phi_{kj}(z), \quad A_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{s_{j-1}}^{s_j} \mu(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma. \tag{17}$$

Здесь $t_k = 2k/n-1$, $s_j = 2j/m-1$, а функционалы Φ_{kj} определены по аналогии с (4):

$$\Phi_{kj}(z) = \frac{nm}{4}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{s_{j-1}}^{s_j} z(t,s)\,dt\,ds.$$

Приближения к решению уравнения (15) будем искать в виде двумерного сплайна

$$x_{nm}(t,s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}\,\psi_{kj}(t,s), \tag{18}$$

где ψ_{kj} есть характеристическая функция прямоугольника $[t_{k-1},t_k]\times[s_{j-1},s_j]$.

[2] Как хорошо известно, в случае прямоугольной области двумерный сплайн может быть построен как суперпозиция двух одномерных сплайнов.

Неизвестные коэффициенты $\{c_{kj}\}$ найдем из системы

$$c_{il} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{kj}\Phi_{il}(\Phi_{kj}^{(\tau,\sigma)}(h))c_{kj} = \Phi_{il}(y), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad l=1,2,\ldots,m, \tag{19}$$

где $\Phi_{kj}^{(\tau,\sigma)}$ – функционал Φ_{kj} по параметрам $\tau,\ \sigma$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\mu_1,\ 1/\mu_1,\ \mu_2,\ 1/\mu_2 \in L_1(-1,+1)$;

2) $y \in L_{2,\rho}((-1,+1)^2) \equiv L_{2,\rho}$, $h \in L_{2,q}((-1,+1)^4)$, $\rho(t,s) = |\mu_1(t)\mu_2(s)|$, $q(t,s,\tau,\sigma) = \rho(t,s)\rho(\tau,\sigma)$;

3) *уравнение* (15) *имеет единственное решение при любой правой части из* $L_{2,\rho}$.

Тогда система (19) *однозначно разрешима при всех* n, m, *хотя бы достаточно больших. Приближенные решения, построенные по формуле* (18), *сходятся к точному решению уравнения* (15) *в метрике* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x - x_{nm}\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y;\frac{1}{N}\right)_{2,\rho} + \omega_{ts}\left(h;\frac{1}{N}\right)_{2,q} + \omega_{\tau,\sigma}\left(h;\frac{1}{N}\right)_{2,q}\right\},$$

где $N = \min(n,m)$, *а* $\omega_{ts}(h;\delta)_{2,q}$ *есть модуль непрерывности функции* h *по переменным* (t,s), *вычисленный в точке* δ.

Доказательство теоремы может быть проведено по аналогии с доказательством соответствующей теоремы 1 в одномерном случае, при этом используется двумерный аналог леммы 1.

Лемма 4. *Пусть весовая функция* $\rho(t,s)$ *такова, что* $1/\rho(t,s)$ *также является весовой. Тогда для любой функции* $z \in L_{2,\rho}((-1,+1)^2)$ *имеет место неравенство*

$$\|z - \overline{S}_{nm}^{\,0} z\|_{2,\rho} \le 2\,\omega\left(z;\frac{2}{N}\right)_{2,\rho}.$$

Вычислительную схему метода кубатур для уравнения (16) можно построить точно так же, как это было сделано в одномерном случае. Введем в рассмотрение новые функции $z(t,s)$ и $g(t,s)$, связанные с искомой функцией и правой частью уравнения (16) соотношениями $x(t,s) = \mu_1(t)\mu_2(s)z(t,s)$ и $y(t,s) = \mu_1(t)\mu_2(s)g(t,s)$. Тогда уравнение (16) преобразуется к уравнению

$$Kz \equiv z(t,s) + \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \mu_1(\tau)\mu_2(\sigma)h(t,s,\tau,\sigma)z(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma = g(t,s), \quad -1 \le t,s \le 1, \tag{20}$$

являющемуся уравнением вида (15). Поэтому вычислительную схему метода кубатур для уравнения (20) можно построить согласно вышеприведенной схеме.

Приближения к решению уравнения (20) будем искать в виде двумерного сплайна

$$z_{nm}(t,s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}\,\psi_{kj}(t,s), \tag{21}$$

неизвестные коэффициенты которого найдем с учетом интервальной кубатурной формулы (17) из системы

$$c_{il} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{kj}\Phi_{il}(\Phi_{kj}^{(\tau,\sigma)}(h))c_{kj} = \Phi_{il}(g), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad l=1,2,\ldots,m. \tag{22}$$

Если система (22) имеет решение, то приближенное решение уравнения (16) восстанавливаем с учетом связи между решениями уравнений (16) и (20):

$$x_{nm}(t,s) = \mu_1(t)\mu_2(s)z_{nm}(t,s). \tag{23}$$

Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\mu_1,\ 1/\mu_1,\ \mu_2,\ 1/\mu_2 \in L_1(-1,+1)$*;*

2) $y \in L_{2,\rho}((-1,+1)^2)$*,* $h \in L_{2,q}((-1,+1)^4)$*,* $\rho(t,s) = 1/|\mu_1(t)\mu_2(s)|,\ q(t,s,\tau,\sigma) = 1/(\rho(t,s)\rho(\tau,\sigma))$*;*

3) *однородное уравнение, соответствующее* (16)*, имеет лишь нулевое решение.*

Тогда система (22) *однозначно разрешима при всех* n, m *достаточно больших. Приближенные решения, построенные по формулам* (23), (21)*, сходятся к точному решению уравнения* (16) *в метрике* $L_{2,\rho}$ *со скоростью*

$$\|x - x_{nm}\|_{2,\rho} = O\left\{\omega\left(y/\mu;\frac{1}{N}\right)_{2,1/\rho} + \omega_{ts}\left(h;\frac{1}{N}\right)_{2,q} + \omega_{\tau\sigma}\left(h;\frac{1}{N}\right)_{2,q}\right\}.$$

Замечание. Вычислительные схемы в общем m-мерном случае для уравнений вида (1) и (2), заданных в параллелепипедальной области, строятся на основе m-мерных сплайнов нулевой степени, представляющих собой суперпозицию m одномерных сплайнов нулевой степени. При этом обоснование методов проводится с использованием m-мерного аналога леммы 4 с постоянной 2^m при модуле непрерывности.

Summary

Yu.R. Agachev, A.I. Leonov, I.P. Semenov. Solution of a Class of Integral Equations with Fixed Singularities in the Kernel by the Mechanical Quadrature Method.

Computational schemes for the mechanical quadrature method were constructed on the basis of a simplest interval quadrature formula for Fredholm integral equations of the second kind with fixed integrable singularities in the kernel on the internal and external variables. The theoretical and functional justification of these schemes was given. In particular, the convergence of the method in the space of functions square-integrable in the interval of integration with a weight depending on the characteristics of the integral operator's kernel was proved. The results obtained for the one-dimensional case were also extended to the multidimensional case.

Keywords: integral equation, fixed singularities in the kernel, weighted Lebesgue space, interval quadrature formula, method of mechanical quadratures, convergence of a method.

Литература

1. *Вайникко Г.М.* О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. XII, № 1. – С. 40–53.

2. *Габдулхаев Б.Г.* К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 12. – С. 23–39.

3. *Шарипов Р.Н.* Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица // Конструктивная теория функций и функциональный анализ: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. – Вып. 4. – С. 124–132.

4. *Milovanović G.V., Cvetković A.S.* Nonstandard Gaussian quadrature formulae based on operator values // Adv. Comput. Math. – 2010. – V. 32, No 4. – P. 431–486. – doi: 10.1007/s10444-009-9114-y.

5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

6. *Габдулхаев Б.Г.* Сплайн-методы решения одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С 14–24.

7. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Поступила в редакцию
28.03.14

Агачев Юрий Романович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *jagachev@gmail.com*

Леонов Александр Иванович – доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Семенов Иван Петрович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.