УДК 519.68

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.П. Гогин, М.М. Карчевский

Аннотация

Получены оценки точности смешанной схемы конечных элементов для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с сильно монотонным и локально липшиц-непрерывным оператором, когда в качестве вспомогательной переменной при построении схемы выбирается градиент искомого решения.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, смешанный метод конечных элементов, оценки погрешности.

Введение

В настоящей работе получены оценки точности в смысле норм соболевских пространств смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, удовлетворяющих условиям сильной монотонности и локальной липшиц-непрерывности в пространстве $W_p^{(1)}(\Omega)$, $p > 1$. В качестве вспомогательной переменной при построении смешанной схемы выбирается градиент искомого решения. Характерная особенность таких схем состоит в возможности их применения для весьма широких классов квазилинейных уравнений, в том числе и для уравнений, допускающих вырождение по градиенту. Слабая сходимость указанных схем для уравнений с монотонными операторами при $p = 2$ изучалась в [1, 2]. Оценки точности схем, рассматриваемых в настоящей работе, в простейшем случае, когда $p = 2$, получены в [3]. Различные вопросы, связанные с итерационными методами решения соответствующих дискретных нелинейных седловых систем уравнений, рассматривались в [2, 4, 5]. Отметим также работы [6–8], посвященные исследованию сходимости и итерационным методам для смешанных схем, основанных на использовании «потока» в качестве вспомогательной переменной.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div} a(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\Omega \subset R^2$ – ограниченная многоугольная область, Γ – граница области Ω, $a(x,\bar\eta) = (a_1(x,\bar\eta),\ a_2(x,\bar\eta))$, $a_0(x,\bar\eta)$ – заданные функции, непрерывные по η, $\bar\eta \in R^3$, для всех $x \in \Omega$. В дальнейшем будем использовать следующую запись: $\bar\eta = (\eta_0,\eta)$, $\eta_0 \in R$, $\eta = (\eta_1,\eta_2) \in R^2$.

Предполагаются выполненными алгебраические условия сильной монотонности и липшиц-непрерывности

$$\big(\bar a(x,\bar\eta)-\bar a(x,\bar\xi)\big)\cdot(\eta-\xi)\cdot(|\eta|+|\xi|)^{2-p}\ge c_0|\eta-\xi|^2\ \ \forall\,\bar\eta,\bar\xi\in R^3,\ \ \eta,\xi\in R^2,\ \ x\in\Omega, \quad (3)$$

$$\big|\bar a(x,\bar\eta)-\bar a(x,\bar\xi)\big|\le c_1|\bar\eta-\bar\xi|^{p-1}\quad \forall\,\bar\eta,\bar\xi\in R^3,\quad x\in\Omega, \quad (4)$$

в случае $1<p<2$ и

$$\big(\bar a(x,\bar\eta)-\bar a(x,\bar\xi)\big)\cdot(\eta-\xi)\ge c_2|\eta-\xi|^p\quad \forall\,\bar\eta,\bar\xi\in R^3,\quad \eta,\xi\in R^2,\quad x\in\Omega, \quad (5)$$

$$\big|\bar a(x,\bar\eta)-\bar a(x,\bar\xi)\big|\le c_3|\bar\eta-\bar\xi|\cdot\big(|\bar\eta|+|\bar\xi|\big)^{p-2}\quad \forall\,\bar\eta,\bar\xi\in R^3,\quad x\in\Omega, \quad (6)$$

в случае $p\ge 2$; $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ – положительные постоянные, а через $\bar a(\cdot)$ обозначена вектор-функция вида $\bar a(\cdot)=(a_0(\cdot),a_1(\cdot),a_2(\cdot))$. Здесь и в дальнейшем точкой обозначаем стандартное скалярное произведение в арифметическом пространстве R^n соответствующей размерности. Не ограничивая общности класса рассматриваемых задач, будем также считать, что

$$a(x,0)=0,\quad a_0(x,0)=0. \quad (7)$$

Принятые нами условия на функции a, a_0 позволяют включить в рассмотрение так называемые отображения двойственности пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$ в пространство в $W_q^{-1}(\Omega)$ (см., например, [9, с. 184]). Отметим, что близкие нелинейные уравнения в связи с задачами теории фильтрации неньютоновских жидкостей изучались в [10].

Хорошо известно, что при выполнении условий (3)–(6) задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$ при любой правой части $f\in L_q(\Omega)$. Здесь и далее через q обозначается сопряженный к p показатель, то есть $1/p+1/q=1$.

2. Смешанная схема конечных элементов

Пусть $\mathcal{T}_h$ – регулярная (см., например, [11]) триангуляция области Ω. Пусть, далее,

$$RT_k(K)=(P_k(K))^2\oplus xP_k(K),\quad x=(x_1,x_2),$$

есть пространство Равьяра – Тома [12]. Поясним, что каждый элемент v из $RT_k(K)$ есть вектор-функция вида

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1+p_3x_1\\ p_2+p_3x_2\end{bmatrix},$$

где $p_i\in P_k(K)$, $i=1,2,3$, $P_k(K)$ – пространство полиномов степени не выше k по совокупности переменных.

Определим, следуя [12], конечноэлементные пространства

$$\begin{aligned}
&N_h=\{q_h\in H_q;\ \ q|_K\in RT_k(K)\ \ \forall\,K\in\mathcal{T}_h\},\\
&M_h=\{v_h\in L_p(\Omega);\ \ v_h|_K\in P_k(K)\ \ \forall\,K\in\mathcal{T}_h\},\\
&X_h=M_h\times N_h.
\end{aligned} \quad (8)$$

Здесь (см., например, [13])

$$H_q=H_q(\mathrm{div},\Omega)=\Big\{j\in(L_q(\Omega))^2\ |\ \mathrm{div}\,j\in L_q(\Omega),\ 0<q<1\Big\}$$

с нормой

$$\|j\|^q_{H_q} = \int\limits_\Omega (|j|^q + |\operatorname{div} j|^q)\, dx\,.$$

Отметим, что принадлежность q_h пространству H_q обеспечивает непрерывность нормальных компонент вектор-функции q_h при переходе через общую границу двух любых соседних элементов триангуляции $\mathcal{T}_h$.

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $(u_h, j_h) \in X_h$ таких, что

$$\int\limits_\Omega (a(x,u_h,j_h(u_h))\cdot j_h(v_h) + a_0(x,u_h,j_h(u_h))v_h)\, dx = \int\limits_\Omega f v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in M_h, \quad (9)$$

где для любого $v_h \in M_h$ функция $j_h(v_h) \in N_h$ определяется как решение уравнения

$$\int\limits_\Omega j_h(v_h)\cdot q_h\, dx + \int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall\, q_h \in N_h. \qquad (10)$$

3. Исследование приближенного метода

При исследовании задачи (9), (10) важную роль играет

Лемма 1. *Существует положительная постоянная c, не зависящая от h, такая, что для любой функции $v_h \in M_h$* [1]

$$\sup_{q_h\in N_h} \frac{\int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h\, dx}{\|q_h\|_H} \ge c\|v_h\|_{L_p(\Omega)}.$$

Доказательство этого утверждения см., например, в [14, 15].

При получении оценок точности метода (9), (10) будем опираться на аппроксимативные свойства пространств M_h, N_h (см. [11, 12]).

Лемма 2. *Пусть u^h – элемент наилучшего приближения к u в пространстве M_h в смысле нормы $L_2(\Omega)$,*

$$u \in W_p^{(k+1)}(\Omega), \quad \nabla u \in \left(W_p^{(k+1)}(\Omega)\right)^2, \qquad (11)$$

$j_h(u^h)$ определяется соотношением

$$\int\limits_\Omega j_h(u^h)\cdot q_h\, dx + \int\limits_\Omega u^h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall\, q_h \in N_h. \qquad (12)$$

Тогда

$$\|u - u^h\|_{L_p(\Omega)} \le ch^{k+1}\|u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}, \qquad (13)$$

$$\|\nabla u - j_h(u^h)\|_{L_p(\Omega)} \le ch^{k+1}\|\nabla u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}. \qquad (14)$$

[1] Всюду в дальнейшем буквой c, возможно, с индексами обозначаются постоянные, не зависящие от h.

Доказательство. Оценка (13) получается как следствие теоремы 3.1.4 [11, с. 24]. При этом надо учесть, что u^h можно строить как элемент наилучшего приближения в пространстве L_2 на каждом конечном элементе триангуляции $\mathcal{T}_h$.

Докажем оценку (14). Так как u^h – элемент наилучшего приближения к u из M_h в смысле нормы пространства $L_2(\Omega)$, то

$$\int\limits_{\Omega} (u - u^h) w_h \, dx = 0 \quad \forall\, w_h \in M_h. \tag{15}$$

Вследствие (12), очевидно, выполнено тождество

$$\int\limits_{\Omega} (j_h(u^h) - \nabla u) \cdot q_h \, dx + \int\limits_{\Omega} \left(u - u^h\right) \operatorname{div} q_h \, dx = 0 \quad \forall\, q_h \in N_h. \tag{16}$$

По определению пространств M_h, N_h справедливо включение $\operatorname{div} q_h \in M_h$, поэтому

$$\int\limits_{\Omega} (j_h(u^h) - \nabla u) \cdot q_h \, dx = 0 \quad \forall\, q_h \in N_h. \tag{17}$$

(последнее равенство означает, что $j_h(u^h)$– элемент наилучшего приближения из N_h к ∇u в смысле нормы пространства $L_2(\Omega)$). Пусть, далее, элемент $r_h \in N_h$ такой, что $\|\nabla u - r_h\|_{L_p(\Omega)} \le Ch^{k+1} \|\nabla u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}$. Элемент r_h с указанным свойством существует (см., например, [12]). Для любого $q_h \in N_h$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} (r_h - j_h(u^h)) \cdot q_h \, dx = \int\limits_{\Omega} (r_h - \nabla u) \cdot q_h \, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla u - j_h(u^h)) \cdot q_h \, dx\,. \tag{18}$$

Как показано выше, второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Таким образом, из равенства (18) следует, что

$$\left| \int\limits_{\Omega} (r_h - j_h(u^h)) \cdot q_h \, dx \right| \le Ch^{k+1} \|\nabla u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} \|q_h\|_{L_q(\Omega)}. \tag{19}$$

Отсюда по лемме 3.3 из [7] имеем $\|r_h - j_h(u^h)\| \le Ch^{k+1} \|\nabla u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}$, следовательно,

$$\|\nabla u - j_h(u^h)\|_{L_p(\Omega)} \le \|\nabla u - r_h\|_{L_p(\Omega)} + \|r_h - j_h(u^h)\|_{L_p(\Omega)} \le Ch^{k+1} \|\nabla u\|_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}.$$

□

В дальнейшем будет существенно использована

Лемма 3. *Существует положительная постоянная c такая, что*

$$\|u_h\|_{L_p(\Omega)} \le c \|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \quad \forall\, u_h \in M_h, \tag{20}$$

где $j_h(u_h)$ определяется как решение уравнения (10).

Доказательство. Из определения $j_h(u_h)$ следует равенство

$$\left| \int\limits_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h \, dx \right| = \left| \int\limits_{\Omega} j_h(u_h) \cdot q_h \, dx \right|.$$

Оценим правую часть этого равенства с помощью неравенства Гельдера:

$$\left|\int\limits_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h\, dx\right| \le \left(\int\limits_{\Omega} |j_h(u_h)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |q_h|^q\, dx\right)^{1/q} = \|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \|q_h\|_{L_q(\Omega)}.$$

Поделим обе части неравенства на $\|q_h\|_{L_q(\Omega)}$, возьмем точную верхнюю грань по всем $q_h \in N_h$. Тогда, используя лемму 1, получим искомую оценку.

□

Лемма 4. *Пусть* u *– решение задачи* (1), (2), $(u_h, j_h(u_h))$ *– решение задачи* (9), (10), *выполнены условия гладкости* (11). *Тогда существует такая постоянная* c, *что*

$$\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} \le c h^{p(k+1)} \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + c\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Доказательство. Поскольку $N_h \subset H_q$, можно написать, что для любых $q_h \in N_h$

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u - j_h(u_h)) \cdot q_h\, dx + \int\limits_{\Omega} (u - u_h) \operatorname{div} q_h\, dx = 0. \tag{21}$$

Обозначим через $\widetilde{u}_h \in M_h$ элемент наилучшего приближения к u в смысле нормы в $L_2(\Omega)$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} (u - \widetilde{u}_h) \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall\, q_h \in N_h. \tag{22}$$

так как $\operatorname{div} q_h \in M_h$. В равенстве (21) к разности $u - u_h$ добавим и вычтем $\widetilde{u}_h$ так, чтобы второе слагаемое можно было представить в виде двух, одно из которых обращается в нуль в соответствии с (22). Получим

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u - j_h(u_h)) \cdot q_h\, dx + \int\limits_{\Omega} (\widetilde{u}_h - u_h) \operatorname{div} q_h\, dx = 0.$$

Из последнего уравнения следует равенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} (\nabla u - j_h(u_h)) \cdot q_h\, dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} (\widetilde{u}_h - u_h) \operatorname{div} q_h\, dx\right|.$$

Очевидно, что

$$\left|\int\limits_{\Omega} (\widetilde{u}_h - u_h) \operatorname{div} q_h\, dx\right| \le \int\limits_{\Omega} |\nabla u - j_h(u_h)|\, |q_h|\, dx \le \|\nabla u - j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \|q_h\|_{L_q(\Omega)}.$$

Поделив обе части неравенства на $\|q_h\|_{L_q(\Omega)}$, взяв точную верхнюю грань по всем $q_h \in N_h$ и использовав лемму 1, получим

$$\|\widetilde{u}_h - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} \le c\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)}. \tag{23}$$

Осталось оценить $\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)}$. Для этого воспользуемся неравенством треугольника, неравенством (23) и затем результатом леммы 2. Получим

$$\|u - u_h + \widetilde{u}_h - \widetilde{u}_h\|^p_{L_p(\Omega)} \le c\left(\|u - \widetilde{u}_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\widetilde{u}_h - u_h\|^p_{L_p(\Omega)}\right) \le$$
$$\le c h^{p(k+1)} \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + c\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

□

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(6). *Тогда при любой правой части* $f \in L_q(\Omega)$ *решение задачи* (9), (10) *существует и единственно. При этом справедлива оценка*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \le c\|f\|_{L_q(\Omega)}. \tag{24}$$

Доказательство. Уравнение (10) – уравнение с положительно определенной матрицей (матрицей масс) относительно $j_h(u_h)$ при заданном u_h. Поэтому на уравнение (9) можно смотреть как на уравнение вида $A_h(u_h) = 0$ относительно u_h. Убедимся, что для конечномерного оператора $A_h(u_h)$ выполнены условия топологической леммы Брауэра (см., например, [16, с. 94]). Вследствие условий (4), (6) функции $a_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$, порождают операторы Немыцкого (см., например, [17, с. 204]), а значит, оператор A_h является непрерывным. Покажем теперь, что

$$A_h(u_h) \cdot u_h = \int\limits_\Omega (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(u_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))u_h)\, dx - \int\limits_\Omega f u_h\, dx \ge 0,$$

если $\|u_h\|_{L_p(\Omega)}$ достаточно велика. В силу условий (3), (5) и (7), а также неравенства Гельдера имеем

$$A_h(u_h) \cdot u_h \ge c_0\|j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} - \|f\|_{L_q(\Omega)}\|u_h\|_{L_p(\Omega)}. \tag{25}$$

По лемме 3

$$A_h(u_h) \cdot u_h \ge \frac{c_0}{c}\, \|u_h\|^p_{L_p(\Omega)} - \|f\|_{L_q(\Omega)}\, \|u_h\|_{L_p(\Omega)}. \tag{26}$$

Из неравенства (26), очевидно, следует, что $A_h(u_h) \cdot u_h \ge 0$, если $\|u_h\|_{L_p(\Omega)} \ge$ $\ge \left(c\|f\|_{L_q(\Omega)}/c_1\right)^{1/(p-1)}$. Отсюда по лемме Брауэра вытекает разрешимость уравнения (9) и априорная оценка (24). Единственность решения нетрудно доказать, опираясь на условия монотонности (3), (5) и лемму 3. □

Оценку точности рассматриваемого нами приближенного метода устанавливает

Теорема 2. *Пусть решение* u *задачи* (1), (2) *удовлетворяет условиям гладкости* (11). *Предположим также, что каждая триангуляция с меньшим шагом строится по триангуляции с большим шагом путем разбиения ее треугольников. Тогда*

$$\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} \le$$
$$\le ch^{(k+1)p/(3-p)} \left(\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} \right) + ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} \tag{27}$$

в случае $1 < p < 2$ *и*

$$\|u_h - u\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j_h(u_h) - \nabla u\|^p_{[L_q(\Omega)]^2} \le$$
$$\le ch^{q(k+1)} \left(\|u\|^q_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + \|\nabla u\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} \right) + ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} \tag{28}$$

в случае $p \ge 2$.

Доказательство. По аналогии с [1, 2] нетрудно доказать, что $a_i(x, u_h, \nabla u_h)$, $i = 0, 1, 2$, сходятся слабо в пространстве $L_q(\Omega)$ при $h \to 0$ к $a_i(x, u, \nabla u)$. Поэтому для любого h выполнено тождество

$$\int\limits_\Omega (a(x, u, \nabla u) \cdot j_h(u_h) + a_0(x, u, \nabla u)v_h)\, dx = \int\limits_\Omega f v_h\, dx \quad \forall\, v_h \in M_h.$$

Применяя хорошо известные в теории проекционных методов преобразования, получим, что

$$\int\limits_\Omega ((a(x,u_h,j_h(u_h)) - a(x,u,\nabla u))\cdot(j_h(u_h)-\nabla u) +$$
$$+ \ (a_0(x,u_h,j_h(u_h)) - a_0(x,u,\nabla u))(u_h-u))\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega ((a(x,v_h,j_h(u_h)) - a(x,u,\nabla u))\cdot(j_h(v_h)-\nabla u) +$$
$$+ \ (a_0(x,v_h,j_h(u_h)) - a_0(x,u,\nabla u))(v_h-u))\,dx, \quad (29)$$

где v_h – произвольный элемент пространства M_h. Оценим теперь левую часть последнего равенства снизу, используя условия (3), (5), а правую – сверху, используя условия (4), (6), и полагая $v_h = u^h$, где u^h в соответствии с леммой 2 есть элемент наилучшего приближения к u в пространстве M_h в смысле нормы $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим сначала случай $p \geq 2$. Используя условия (5), (6), получим

$$c_2 \int\limits_\Omega |\nabla u - j_h(u_h)|^p\,dx \leq c_3 \int\limits_\Omega |\nabla u - j_h(u_h)|\,(|\nabla u| + |j_h(u_h)|)^{p-2}\,|\nabla u - j_h(v_h)|\,dx +$$
$$+ \ c_3 \int\limits_\Omega |u-u_h|\,(|u|+|u_h|)^{p-2}\,|u-v_h|\,dx\,.$$

Далее, по обобщенному неравенству Гельдера

$$c_2 \int\limits_\Omega |\nabla u - j_h(u_h)|^p\,dx \leq c_3 \left(\int\limits_\Omega |\nabla u - j_h(u_h)|^p\,dx\right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int\limits_\Omega (|\nabla u| + |j_h(u_h)|)^p\,dx\right)^{p-2/p} \left(\int\limits_\Omega |\nabla u - j_h(v_h)|^p\,dx\right)^{1/p} +$$
$$+ c_3 \left(\int\limits_\Omega |u-u_h|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega (|u|+|u_h|)^p\,dx\right)^{p-2/p} \left(\int\limits_\Omega |u-v_h|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Откуда в силу леммы 3 и теоремы 1

$$c_2 \|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} \leq$$
$$\leq c_5 \|\nabla u - j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \|\nabla u - j_h(v_h)\|_{L_p(\Omega)} + c_6 \|u-u_h\|_{L_p(\Omega)} \|u-v_h\|_{L_p(\Omega)}.$$

Продолжим оценку с использованием неравенства Юнга:

$$c_2 \|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} \leq$$
$$\leq c_5 \left(\varepsilon_1^p \|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} + \varepsilon_1^{-q} \|\nabla u - j_h(v_h)\|^q_{L_p(\Omega)}\right) +$$
$$+ c_6 \left(\varepsilon_2^p \|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \varepsilon_2^{-q} \|u-v_h\|^q_{L_p(\Omega)}\right),$$

где ε_1, ε_2 – произвольные положительные числа. Теперь воспользуемся оценкой леммы 4, умноженной на некоторое положительное число ε_3, тогда

$$
\begin{gathered}
c_2\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} - \left(c_5\varepsilon_1^p\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} + c_6\varepsilon_2^p\|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)}\right) + \\
+\varepsilon_3\|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)} - \varepsilon_3 c_7\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} \le \\
\le Ch^{q(k+1)}\left(c_5\varepsilon_1^{-q}\|\nabla u\|^q_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + c_6\varepsilon_2^{-q}\|u\|^q_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}\right) + \varepsilon_3 Ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}.
\end{gathered}
$$

Ясно, что в последнем неравенстве можно подобрать ε_1, ε_2 и ε_3 таким образом, что будет выполнено неравенство (28).

Рассмотрим случай $1 < p < 2$. По аналогии со случаем $p \ge 2$ оценим левую часть равенства (29) снизу, а правую – сверху, используя условия (3) и (4), соответственно. Получим, что

$$
\begin{gathered}
c_0\|\nabla u - j_h(u_h)\|^2_{L_p(\Omega)}\left(\|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}\right)^{p-2} \le \\
\le c_1\|\nabla u - j_h(u_h)\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\|\nabla u - j_h(v_h)\|_{L_p(\Omega)} + c_1\|u-u_h\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\|u-v_h\|_{L_p(\Omega)},
\end{gathered}
$$

откуда вследствие леммы 3 и теоремы 1 будем иметь

$$
\begin{gathered}
c_{10}\|\nabla u - j_h(u_h)\|^2_{L_p(\Omega)} \le \\
\le c_1\|\nabla u - j_h(u_h)\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\|\nabla u - j_h(v_h)\|_{L_p(\Omega)} + c_1\|u-u_h\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\|u-v_h\|_{L_p(\Omega)}.
\end{gathered}
$$

Возведем обе части последнего неравенства в степень $p/2$ и продолжим оценку с учетом неравенств Гельдера для сумм и Юнга. Получим

$$
\begin{gathered}
c_{12}\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} \le Ch^{p/2(k+1)}\left(\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} + \|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{(p-1)/2}\times \\
\times\left(\|\nabla u\|^p_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} + \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}\right)^{1/2} \le \\
\le \varepsilon_1^{2/(p-1)}\left(\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} + \|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)}\right) + \\
+ c\frac{1}{\varepsilon_1^{2/(3-p)}}h^{p(k+1)/(3-p)}\left(\|\nabla u\|^p_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} + \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}\right)^{1/(3-p)}.
\end{gathered}
$$

Далее, воспользуемся оценкой леммы 4, умноженной на некоторое число ε_2,. В результате

$$
\begin{gathered}
c_{12}\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} - \varepsilon_1^{2/(p-1)}\left(\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} + \|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)}\right) + \\
+ \varepsilon_2\|u-u_h\|^p_{L_p(\Omega)} - \varepsilon_2 c_{13}\|\nabla u - j_h(u_h)\|^p_{L_p(\Omega)} \le \\
\le c\frac{1}{\varepsilon_1^{2/(3-p)}}h^{p(k+1)/(3-p)}\left(\|\nabla u\|^p_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} + \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}\right)^{1/(3-p)} + \\
+ \varepsilon_2 Ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}.
\end{gathered}
$$

Ясно, что в последнем неравенстве можно подобрать ε_1 и ε_2 так, что будет иметь место искомое неравенство и в случае $1 < p < 2$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-97026).

Summary

A.P. Gogin, M.M. Karchevsky. On Error Estimates for a Variant of the Mixed Finite Element Method.

The mixed finite element method for the second order quasilinear elliptic problems with a strongly monotone and locally Lipschitz continuous operator is investigated. The error estimates are obtained in the case when the gradient of the required solution is chosen as an auxiliary variable in the construction of the mixed finite element method.

Keywords: quasilinear elliptic equation, mixed finite element method, error estimates.

Литература

1. *Карчевский М.М.* Об одном подходе к построению смешанных схем МКЭ для квазилинейных эллиптических уравнений // Материалы Пятого Всерос. семинара «Сеточные методы для краевых задач и их приложения». – Казань: Изд-во Казан. ун-та. 2004. – С. 108–111.
2. *Федотов А.Е.* Смешанный метод конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2007. – 112 с.
3. *Карчевский М.М.* Об оценке погрешности одного варианта смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений // Материалы Девятой Всерос. конф. «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань: Отечество, 2012. – С. 220–222.
4. *Карчевский М.М.* Об итерационных методах численной реализации смешанных схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2004. – Вып. 25. – С. 59–69.
5. *Гогин А.П., Карчевский М.М.* Об итерационных методах для некоторых классов смешанных схем для квазилинейных эллиптических уравнений // Материалы Девятой Всерос. конф. «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань: Отечество, 2012. – С. 90–94.
6. *Карчевский М.М., Федотов А.Е.* Об одном варианте смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 74–80.
7. *Karchevsky M.M., Fedotov A.E.* Error estimates and iterative procedure for mixed finite element solution of second-order quasi-linear elliptic problems // Comput. Meth. Appl. Math. – 2004. – V. 4, No 4. – P. 445–463.
8. *Гогин А.П., Карчевский М.М.* Об одном итерационном методе для смешанных схем конечных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 154, кн. 4. – С. 5–10.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
10. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of an iterative process in a Banach space // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2727–2735.
11. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
12. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – N. Y.: Springer-Verlag, 1991. – 362 p.

13. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

14. *Farhloul M.* A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem// IMA J. Numer. Anal. – 1998. – V. 18, No 1. – P. 121–132.

15. *Farhloul M., Manouzi H.* On a mixed finite element method for the p-Laplacian // Can. Appl. Math. Quart. – V. 8, No 1. – P. 67–78.

16. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

17. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 345 с.

Поступила в редакцию
05.04.13

Гогин Алексей Павлович – аспирант кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*