Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения»

Сборник материалов

(*24 – 28 августа 2020 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2020

Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения»: сборник материалов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2020. – 36 с.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области комплексного анализа.

Материалы печатаются в авторской редакции.

Оглавление

Hardy type inequalities

Avkhadiev F.G.[1]

For an open subset of the Euclidean space of dimension n we consider interior and exterior approximations by sequences of open sets. We prove convergence everywhere of the corresponding sequences of distance functions from boundary as well as convergence almost everywhere for their gradients. As applications we obtain several new Hardy-type inequalities that contain the scalar product of gradients of test functions and the gradient of the distance function from the boundary of an open subset of the Euclidean space.

Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces

Baranov A.D.[2]

We study the structure of the backward shift-invariant and nearly invariant subspaces in weighted Fock-type spaces whose weight is not necessarily radial. We show that in the spaces which contain polynomials as a dense subset (in particular, in the radial case) any nontrivial backward shift-invariant subspace coincides with a finite dimensional subspace consisting of polynomials up to a certain degree. In general, the structure of nearly invariant subspaces is more complicated. In the case of spaces of slow growth (up to zero exponential type) we establish an analogue of de Branges' Ordering Theorem. This is a joint work with Alexandru Aleman, Yurii Belov, and Haakan Hedenmalm.

Planar orthogonal polynomials and related determinantal processes

Hedenmalm H. [3]

The orthogonal polynomials in $L^2(\mathbb{C},\mu)$ is a sequence of polynomial $p_0, p_1, p_2 \dots$ such that p_j has degree j, belongs to $L^2(\mathbb{C},\mu)$ and $p_j \perp p_k$ for $j \neq k$. They are unique up to a unimodular constant multiple.

If $p_0, p_1, p_2 \dots$ are the orthogonal polynomials of $L^2(\mathbb{C},\mu)$, then we call

$$|p_n|^2 d\mu$$

the *probability density* associated with the orthogonal polynomial p_n.

In this talk we will discuss a number of results considering the above concepts and see some applications.

One of the most important issues is to study the boundary behavior of the eigenvalues in the random normal matrix model. This problem is resolved by obtaining an asymptotic expansion of the corresponding orthogonal polynomials.

---

[1] Kazan Federal University

[2] Saint Petersburg State University

[3] Royal Institute Technology, Stockholm

A determinant problem for a third order ODE

Hinkkanen A.[4]

We solve a determinant problem related to a third order complex linear differential equation studied by Chiang, Laine and Wang. As a consequence, a simple procedure to explicit determination of the corresponding solutions is presented.

Kernels of Toeplitz operators and rational interpolation

Kapustin V.V. [5]

The kernel of a Toeplitz operator on the Hardy class H^2 in the unit disk is a nearly invariant subspace of the backward shift operator, and, by D. Hitt's result, it has the form $g \cdot K_\omega$, where ω is an inner function, $K\omega = H^2 \ominus \omega H^2$, and g is an isometric multiplier on $K\omega$. We describe the functions ω and g for the kernel of the Toeplitz operator with symbol $\overline{\theta}\Delta$, where θ is an inner function and Δ is a finite Blaschke product.

Volumes of two-bridge knots in spaces of constant curvature

Mednykh A.D. [6]

We investigate the existence of hyperbolic, spherical or Euclidean structure on cone manifolds whose underlying space is the three-dimensional sphere and singular set is a given two-bridge knot. For two-bridge knots with not more than 7 crossings we present trigonometrical identities involving the lengths of singular geodesics and cone angles of such cone manifolds. Then these identities are used to produce exact integral formulae for volume of the corresponding cone manifold modeled in the hyperbolic, spherical and Euclidean geometries.

---

[4] University of Illinois at Urbana-Champaign

[5] Steklov Institute of Mathematics, St. Petersburg

[6] Novosibirsk State University

Hardy operator on the bi-tree and some unexpected combinatorial properties of planar measures

Mozolyako P.A. [7]

We consider embeddings of various spaces of analytic functions in polydisc into Lebesgue spaces with respect to a measure in the polydisc. These problems can be often moved to a discrete setting, by considering weighted Dirichlet spaces on (poly-) trees and weighted dyadic multi-parameter Hardy operator. We find the necessary and sufficient condition for this operator to be bounded in n-parameter case, when n is 1, 2, or 3. The answer is quite unexpected—it is a certain combinatorial property of all measures in dimension 2 and 3 — and seemingly goes against the well known difference between box and Chang–Fefferman condition that was given by Carleson quilts example of 1974.

Dirac inner functions

Poltoratski A. [8]

In this work we consider Dirac inner functions. The applications of these functions in mathematical physics and complex analysis are demonstrated.

Exact Loewner-Kufarev evolutions

Prokhorov D.V. [9]

The Loewner-Kufarev evolution produces asymptotics for mappings onto domains close the unit disk D or the exterior of D. We deduce variational formulae which lead to the asymptotic conformal welding for such domains. The comparison of mappings onto bounded and unbounded components of the Jordan curve establishes an asymptotic connection between driving functions in both versions of the Loewner-Kufarev equation and conformal radii of the two domains.

---

[7] St-Petersburg State University

[8] University of Wisconsin–Madison

[9] Saratov State University

Монотонная линейная связность множеств в линейных нормированных пространствах и ее приложения

Алимов А.Р. [10]

Установлено, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных) ограниченно компактное m-связное (связное по Менгеру) множество монотонно линейно связно и является солнцем. Показано, что пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного (m-связного) множества с замкнутым шаром клеточноподобно (имеет шейп точки), в частности ациклично (в конечномерном случае – стягиваемо), и является солнцем и что ограниченно слабо компактное m-связное множество монотонно линейно связно. Попутно теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей распространяется на случай сходимости относительно ассоциированной (по Брауну) нормы.

Некоторые применения диссимметризации

Дубинин В.Н.[11]

Рассматриваются применения диссимметризации множеств, функций и конденсаторов в геометрической теории функций комплексного перемен-ного и смежных областях [1-4]. Доклад включает также новые применения диссимметризации, выполненные недавно при финансовой поддержке РФФИ, грант 20-01-00018.

[1] A. Baernstein II, Dubinin’s symmetrization theorem. Pages 23–30 of: Complex Analysis, I (College Park, Md., 1985–86). Lecture Notes in Mathematics, 1987, vol. 1275. Berlin: Springer.

[2] K. Haliste, On an extremal configuration for capacity, Arkiv for Mat.,1989, no. 1, 97–104.

[3] A. Yu. Solynin, Isoperimetric inequalities for polygons and dissymetrization, Algebra i Analiz, 4:2 (1992), 210–234; St. Petersburg Math.J., 4:2 (1993), 377–396.

[4] V. N. Dubinin, Condenser capacities and symmetrization in geometricfunction theory, Basel: Birkhauser / Springer, 2014.

---

[10] Московский государственный университет

[11] Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

УДК: 517.53

Экстремальные задачи в теории центрального индекса Вимана-Валирона

Малютин К.Г.,[12] **Ревенко А.А.**[13]

Аннотация. Рассмотрены некоторые свойства центрального индекса в теории Вимана- Валирона. Изучены две экстремальные задачи в классе функций с заданным центральным индексом. Получено выражение максимума модуля экстремальной функции через ее центральный индекс.

Ключевые слова: целая функция, максимальный член, центральный индекс, определяющая последовательность, выпуклая регуляризация, экстремальная задача.

Гипотеза о якобиане и условия инъективности отображений

Старков В.В. [14]

Гипотеза о якобиане в современной трактовке предполагает инъективность полиномиального отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ при условии, что якобиан $J_f \equiv const \neq 0$. В этой работе исследуется вопрос о структуре полиномиальных отображений f, для которых $J_f \equiv const \neq 0$. Также рассматриваются некоторые достаточные условия инъективности неполиномиальных отображений.

Распределение нулей голоморфных и целых функций: приложения к аппроксимации экспоненциальными системами

Хабибуллин Б.Н. [15]

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $f-$ ненулевая целая функция конечного типа σ при конечном порядке ρ такая, что $f = 0$ на Λ. Получены оценки сверху на тип канонического произведения Вейерштрасса–Адамара порядка ρ, построенного по последовательности Λ. Аналогичные оценки выведены и для мероморфных функций. Эти результаты использованы для оценок радиуса полноты системы экспонент в $\mathbb{C}$.

---

[12] Курский государственный университет, Юго-Западный государственный университет

[13] Курский государственный университет

[14] Петрозаводский государственный университет

[15] Башкирский государственный университет

On the Bernstein type inegualities for algebraic polynomials in the complex plane

Abdullayev F.G.

Kyrgyz-Turkish Manas University

On the Cauchy problem for the Helmholtz equation in an unbounded domain R^2

Juraev D.A.[16]

In this paper, the problem of continuation of the solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in in a two-dimensional unbounded domain is studied. It is assumed that the solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established, as well as a regularization formula for the case when, under the indicated conditions, instead of the Cauchy data, their continuous approximations with a given error in the uniform metric are given. A stability estimate for the solution of the Cauchy problem in the classical sense is obtained.

The construction of the Carleman matrix for elliptic systems was carried out by: Sh. Yarmukhamedov, N.N. Tarkhanov, A.A. Shlapunov, I.E. Niyozov, D.A. Juraev and others. The system considered in this paper was introduced by N.N. Tarkhanov. For this system, he studied correct boundary value problems and found an analogue of the Cauchy integral formula in a bounded domain. The system considered in this paper was introduced by N.N. Tarkhanov. For this system, he studied correct boundary value problems and found an analogue of the Cauchy integral formula in a bounded domain.

In many well-posed problems for systems of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients that factorize the Helmholtz operator, it is not possible to calculate the values of the vector function on the entire boundary. Therefore, the problem of reconstructing the solution of systems of equations of first order elliptic type with constant coefficients, factorizing the Helmholtz operator, is one of the topical problems in the theory of differential equations.

---

[16] Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan

Correct Boundary Value Problems for Singular Generalized Analytic Functions

Makatsaria G. [17] **Manjavidze N.,**[18]

In the present work sufficiently wide class of the generalized analytic functions with the inner polar singularities is studied; general representation formula is obtained; correct setting of the Riemann-Hilbert type boundary value problem is given and in some sense complete investigation of this problem is obtained as well.

Acknowledgements. This work is supported by Shota Rustaveli National Science Foundation Grant 17-96.

Устойчивость(бес)конечности избытка систем экспоненциальных одночленов в пространствах $C[a;b]$, $L_p(a;b)$ при возмущении показателей

Абузярова Н.Ф.[19]

В докладе будет рассмотрена система экспоненциальных одночленов, построенная по последовательности кратных точек комплексной плоскости, имеющей конечную плотность Берлинга-Мальявена a.

Если экспоненциальная система полна в пространстве $L_p(-a;a)$ или в пространтсве $C[-a;a]$, то ее избытком называется неотрицательная целочисленная величина m (которая может быть и бесконечной) такая, что, в случае конечного m, система, полученная удалением m элементов из исходной, полна в соответствующем пространстве, а полученная удалением $(m+1)$ элемента - уже нет; избыток экспоненциальной системы равен $+\infty$, если после удаления любого конечного числа элементов оставшаяся система полна. Для неполной в одном из указанных выше пространств экспоненциалной системы ее избытком называется отрицательная целочисленная величина m (которая может быть и бесконечной) такая, что после добавления $(-m-1)$ элемента к исходной системе, полученная система еще неполна, а последобавления $(-m)$ элементов - полна в соответствующем пространстве; избыток неполной системы равен $-\infty$, если в результате добавления к ней любого конечного числа элементов получаем снова неполную систему.

Мы установили, что, при некоторых ограничениях на распределение последовательности показателей экспоненциальной системы, свойство ее избытка быть конечным числом или бесконечностью определенного знака сохраняется при возмущении последовательности показателей любой последовательностью комплексных чисел, вещественные части которых ограничены, а мнимые части огрничены по сравнению с логарифмами их модулей. Оказалось также, что эти условия в определенном смысле неулучшаемы.

---

[17] Business and Technology University

[18] Ilia State University

[19] Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений

Алдашев С.А.,[20] **Канапьянова З.Н.**[20]

Аннотация. Известно что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве, характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений хорошо изучены. Эта задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций ранее рассмотрены в работах различных авторов. В статьях профессора С.А.Алдашева доказана однозначная разрешимость смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Насколько известно автором, смешанные задачи для многомерных гиперболо-параболических уравнений исследованы мало. В данной работе найден новый класс вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений для которых смешанная задача однозначна разрешима и приведен явный вид классического решения.

Ключевые слова: Корректность, смешанная задача, цилиндрическая область, вырождение, гиперболо-параболическое уравнение, функция Бесселя.

Литература

1. Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб.,1959, т.49(91). с.29- 84.
2. Aldashev S.A. Well Posedness of The Mixed Problem For Degenerate Multi dimensional Hyperbolic Eguationz // материалы конференций "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methodsand information Киев, КНУим.Т.Шевченко, 2018, с.14-15. //
3. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Журнал «Вычислительной и прикладной математики», Киев: КНУ им.Т.Г. Шевченко, 2019, №2 (131)-с. 5-14 //
4. Канапьянова З.Н. Смешанная задача для вырождающегося трехмерного гиперболического уравнения// Вестник КазНПУ им.Абая, сер. физ-мат 2019, №1, (65)-с. 45-48.//

---

[20] г. Алматы, Казахстан, Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая

Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений

Алдашев С.А.,[21] **Казез Е.**[21]

Аннотация.

Основная смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо изучены. В работах доказана корректность этой задачи и получен явный вид классического решения.

Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах исследованы [1,2]. В [3,4] доказана корректность этой задачи и получен явный вид классического решения.

Насколько известно, эти вопросы для вырождающихся многомерных гиперболо- параболических уравнений не изучены.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получено явное представление классического решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений.

Ключевые слова: корректность, смешанная задача,вырождающегося уравнения, цилиндрическая область, функция Бесселя.

Литература

1. Барановский Ф.Т.Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости // Ученые записки Ленингр. пед. института, 1958, т. 183 - с. 23-58
2. Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб., 1959, т. 49(91) -с. 29-84
3. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений //
4. Aldashev S.A. Well Posedness of The Mixed Problem For Degenerate Multi dimensional Hyperbolic Eguationz // материалы конференций "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methodsand information Киев, КНУим.Т.Шевченко, 2018, с.14-15.

Гамильтоновы системы и теория функций многих комплексных переменных

Алексеева Е.С.,[22] **Рассадин А.Э.**[22]

Рассмотрим вполне интегрируемую гамильтонову систему с степенями свободы. В переменных действие-угол её уравнения движения имеют вид [1]:

---

[21] г. Алматы, Казахстан, Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая

[22] Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

$$\dot{I}_j = 0, \qquad \dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}(I_1, \ldots I_n), \qquad j = \overline{1, n}.$$

Это означает, что фазовое пространство такой системы представляет собой прямое произведение n полуполос Π_j вида: $\Pi_j = \{0 < \theta_j < 2\Pi, \quad 0 < I_j < +\infty\}$. После введения комплексных переменных $\zeta_j = \theta_j + i \cdot I_j$ каждую область Π_j можно конформно отобразить на единичный круг, тем самым, фазовым пространством исходной гамильтоновой системы можно считать поликруг $U_n = \{z \in C^n : |z_j| = 1\}$, для которого можно ввести и кернфункцию, и метрику Бергмана [2].

В докладе эта процедура применена к кеплеровой задаче и к изотропному гармоническому осциллятору. Эти гамильтоновы системы выделены как теоремой Бертрана, так и теоремой Болина [1]. Связь автоморфизмов поликруга с их группами симметрии также обсуждена.

[1] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.

[2] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1961.

Улучшенная версия классического неравенства Бора с фиксированным нулевым коэффициентом

Алхалифах С.А.

Казанский Федеральный Университет

Системы уравнений Гельфанда-Капранова-Зелевинского и их антисимметризации

Артамонов Д.В.[23]

Теория гипергеометрических функций одной переменной важна как с точки зрения комплексного анализа, аналитической теории дифференциальных уравнений (так как доставляет нетривиальные, но все-еще до конца понятные примеры рядов, уравнений), так и с точки зрения приложений. Создание "правильного"обобщения этой теории на случай многих переменных долго представляло из себя трудную задачу. В 80-е годы Гельфанд, Капранов, Зелевинский и Граев построили теорию обобщенных гипергеометрических функций многих переменных. Ими были исследованы области сходимости этих рядов, определены обобщенные гипергеометрические ряды, построены системы дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют - система ГКЗ.

В докладе по системе ГКЗ будет построена некоторая другая система. Она будет получена путем антисимметризации дифференциальных операторов системы ГКЗ

---

[23] МГУ имени М.В. Ломоносова

по входящим в нее переменным. Для этой новой системы будут описано пространство решений (также в виде рядов). Эта антисимметризованная система естественно возникает в следующей задаче в теории представлений. Нам необходимо построить явную реализацию конечномерного представления полной линейной группы. В 60-х годах пошлого века было открыто, что в случаем полной линейной группы размера 3 существует явная реализация в некотором пространстве функций, при этом базисные векторы представления выражаются через гипергеометрические функции Гаусса. При обобщении этой конструкции на группы большего размера возникают антисимметризованные системы ГКЗ и их решения.

Об орбитах в C^4 разложимых 7-мерных алгебр Ли

Атанов А.В.[24]

Опыт построения классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в C3 стимулирует интерес к некоторым классам алгебр Ли, которые могут иметь Леви-невырожденные орбиты в многомерных комплексных пространствах. Например, наличие «больших» по размерности абелевых идеалов в алгебре Ли приводит к вырождению всех орбит такой алгебры при ее голоморфной реализации или к трубчатой структуре этих орбит.

В докладе обсуждаются семимерные алгебры Ли, являющиеся суммами трехмерного и четырехмерного слагаемых и содержащие абелевы идеалы лишь «малых» размерностей. При реализации таких алгебр в виде алгебр голоморфных векторных полей на однородных многообразиях применяется техника совместного «выпрямления» векторных полей. Последующее интегрирование упрощенных алгебр Ли позволило получить примеры восьми новых семейств голоморфно однородных Леви-невырожденных гиперповерхностей в четырёхмерном комплексном пространстве. Часть этих примеров не сводится к трубкам.

О применении метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила

Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А.

МБОУ 'Средняя общеобразовательная школа №45' г.Калуги

---

[24] Воронежский государственный университет

Конструкции решений для некоторых модельных краевых задач

Васильев В.Б.[25]

Мы изучаем разрешимость линейного однородного уравнения

$$(Au)(x) = 0, \qquad x \in C_+^a \tag{1}$$

в пространстве Соболева-Слободецкого $H^s(C_+^a)$, где A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка α, C_+^a – конус в m-мерном пространстве вида $C_+^a = \{x \in R^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$.

При дополнительных предположениях о структуре символа оператора оказывается возможным описать общее решение уравнения (1) и получить интегральные авления решений некоторых краевых задач для уравнения (1).

Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя плоскостями изменения типа

Гималтдинова А.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет

Динамика квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Шредингера

Грехнева А.Д.[26]

Изучается преобразование пространства начальных данных уравнения Шрёдингера, порождаемое нелинейным оператором Шрёдингера на отрезке $[-\pi, \pi]$ с однородным условиями Дирихле на границе отрезка.

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}u(t) \equiv \Delta u(t) + \mathbf{G}u(t), \quad t \in (0, T);$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2([-\pi, \pi]).$$

Нелинейная зависимость потенциала от неизвестной функции является степенной с показателем $p \geq 0$. Исследуются эффекты глобального существования решения задачи Коши при $p \in [0, 4)$ и возникновения эффекта градиентного взрыва

---

[25] Белгородский государственный национальный исследовательский университет

[26] ЛИИ им. Громова, ведущий инженер по экспериментальным работам и летным испытаниям систем воздушных судов 2 класса

решения за конечное время при $p \in [4, +\infty)$. В случае возникновения градиентного взрыва решения за конечное время при $p \geq 4$ исследованы качественные свойства решения при приближении к границе промежутка существования и определено продолжение решения задачи Коши через момент градиентного взрыва. В условиях глобального существования решений исследуется динамическая система на пространстве Соболева, инвариантные подпространства, законы сохранения и гамильтонова структура.

Для того, чтобы определить продолжение решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера через момент градиентного взрыва рассматривается задача Коши совместно с её энергетической регуляризацией. Определяются понятия самофокусировки и слабой сходимости задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера.

О внутреннем радиусе многосвязных областей

Казанцев А.В., Киндер М.И.

Пусть D — ограниченная n-связная плоская область, $G(z, w)$ — функция Грина области D. *Внутренним радиусом* области D в точке w называется функция

$$R(w) = e^{g(w,w)}, \tag{2}$$

где $g(w, w) = \lim_{z\to w}\left[G(z, w) + \ln|z - w|\right]$ — постоянная Робэна области D относительно точки w [1].

В случае односвязной гиперболической области D её внутренний радиус $R(w)$ в точке $w \in D$ совпадает с её конформным радиусом. Систематическое исследование функции (2) для односвязных областей было начато в работе Х. Хиги [2]; в частности, там было доказано, что для выпуклых областей, отличных от полосы, $R(w)$ имеет в точности одну критическую точку, которая оказывается её точкой максимума.

Внутренний радиус играет существенную роль в обратных краевых задачах (ОКЗ). Ф.Д. Гахов получил условие разрешимости внешней ОКЗ в виде уравнения для определения стационарной точки некоторой вещественной поверхности. Как заметил Аксентьев Л.А. [4], эта поверхность совпадает с поверхностью $\Psi = R(w)$. В односвязном случае связь с внутренним радиусом стимулировала накопление признаков единственности решения внешней ОКЗ. В многосвязном случае в работах Киндера М.И. (см. [5]) была установлена классификация изолированных критических точек внутреннего радиуса области по значению их индексов; в частности, было доказано, что поверхность $\Psi = R(w)$ в окрестности таких точек имеет выпуклое, седлообразное или полуседлообразное строение.

В докладе изучается вопрос о числе стационарных точек (2) для случая произвольной конечносвязной области. Метод исследования состоит в изучении вращения векторного поля, связанного с функцией $R(w)$, и позволяет не только доказать существование критических точек (2), но и оценить снизу их число.

Основной результат. *Поверхность внутреннего радиуса $\Psi = R(w)$ в случае n-связной ограниченной области D имеет не менее n стационарных точек.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

Литература

[1] Szegö G. On the capacity of the condenser, Bull. Amer. Math. Soc. **51**(5) (1945), 325–350.

[2] Haegi H. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen, Compositio math., **8**(2) (1950), 81–111.

[3] Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах, Учен. зап. Казан. ун-та., **113**(10) (1953), 9–20.

[4] Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области, Изв. вузов. Матем., **2** (1984), 3–11.

[5] Киндер М.И. О числе решений уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязной области, Изв. вузов. Матем., **8** (1984), 69–72.

О неравенствах бернштейновского и марковского типов

Калмыков С.И.[27]

В докладе будут рассмотрены асимптотически точные неравенства бернштейновского и марковского типов для полиномов и рациональных функций на кривых Жордана(см.[1]). Также будет уделено внимание неравенствам для старших производных тригонометрических полиномов (см. [2,3]).

Результаты сформулированы в терминах теории потенциала, в частности, в оценках присутствуют нормальные производные функций Грина и плотности гармонических мер. Ключевую роль также играют теория конформных отображений и быстро убывающие многочлены.

Основано на совместных работах с В. Тотиком и Б. Надем.

[1] Kalmykov S.I., Nagy B., Totik V. Bernstein- and Markov-type inequalities for rational functions // Acta Math. 2017. V. 219(1), PP. 21–63.

[2] Kalmykov S.I., Nagy B. Higher Markov and Bernstein inequalities and fast decreasing polynomials with prescribed zeros // Journal of Approximation Theory. 2018. V. 226. PP. 34–59.

[3] Калмыков С.И., Об асимптотически точном неравенстве марковского типа для тригонометрических и алгебраических многочленов // Матем.заметки. 2015. т.98, No 2, С. 303–307.

---

[27] Shanghai Jiao Tong University, China; Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Россия

Вариационный подход к описанию структуры множества триангуляций

Клячин В.А., Григорьева Е.Г., Яковлева Е.В.

Волгоградский государственный университет

О разрешимости задачи Дирихле в пространстве Гельдера с весом

Ковалева Л.А., Ковалев А.В.

НИУ 'БелГУ'

Оценка затрат напора на привод двухконтурного мембранного насоса

Левцев А.П., Лапин Е.С.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

УДК: 517.958:531.12; 534.11

Исследование частот поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении

Литвинов В.Л.[28]

Аннотация. В статье исследуются колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. Задача при наличии сопротивления среды решалась методом Канторовича-Галеркина. Полученное уравнение позволяет найти приближённые значения двух первых собственных частот. Решение произведено в среде Matlab безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

---

[28] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва,119991; Самарский государственный технический университет, г.Самара, 443100

Об аффинной однородности оснований голоморфно однородных трубок

Лобода А.В.,[29] **Суковых В.И.**[29]

Недавно Doubrov-Medvedev-The обнаружили в C^3 достаточно большое количество Леви-невырожденных голоморфно однородных трубчатых вещественных гиперповерхностей, основания которых НЕ являются голоморфно однородными.

Доклад связан с обсуждением гипотезы (подтвержденной в 2-мерных и 3-мерных пространствах) о невозможности такой ситуации в случае строго псевдовыпуклых «просто однородных» гиперповерхностей. Для проверки гипотезы и решения близких задач авторами развивается коэффициентный подход. Всякая голоморфно однородная Леви-невырожденная гиперповерхность в C^n однозначно определяется конечным (но достаточно большим) набором коэффициентов из канонического (нормального) уравнения такой поверхности. Для трубчатых поверхностей такой набор содержит значительно меньше опорных коэффициентов по сравнению с общей ситуацией.

Предложен способ формирования систем полиномиальных соотношений (не более чем третьей степени) на эти коэффициенты. Решение таких систем (с привлечением пакетов символьной математики) позволяет получать желаемые выводы, связанные с гипотезой. Разрабатываемая техника подробно иллюстрируется в докладе на примере трубчатых гиперповерхностей пространства C^3, но основной целью является ее применение в более высоких размерностях.

Отметим также, что полные описания однородных гиперповерхностей в C^2 и C^3 были получены с использованием списков 3-мерных и 5-мерных алгебр Ли. При $n > 3$ аналогичных полных списков алгебр Ли размерностей $(2n-1)$ пока не существует. Поэтому является вполне оправданным исследование отдельных классов однородных гиперповерхностей в C^n и общих свойств этих классов.

Геометрический критерий интерполяционности дивизора в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости

Малютин К.Г.,[30] **Кабанко М.В.**[31]

Целью данной работы является исследование задачи кратной интерполяции в классе аналитических функций конечного порядка больше первого в полуплоскости. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах неванлинновской меры, определяемой узлам интерполяции.

Ключевые слова: кратная интерполяция, дивизор, мера Неванлинны, функция плотности.

---

[29] Воронежский государственный технический университет

[30] Курский государственный университет, Юго-Западный государственный университет

[31] Курский государственный университетт

О непрерывности отображения с s-усредненной характеристикой

Малютина А.Н.,[32] **Новик Н.**

Теорема 1. Если функция $f : G \to R^n$, где $G \in R^n$ ограниченная область и $f \in W_n^1(G)$ имеет в G обобщенные частные производные первого порядка, и удовлетворяет условию

$$\int\limits_G \left(\frac{\left|\nabla f(x)\right|^n}{J(x,f)} \right)^s k(|x-z|)d\sigma_x < K, \tag{3}$$

здесь $\frac{1}{n-1} < s < n$, $k(t)$ - положительная убывающая функция на $(0,\infty)$, где $s > \frac{1}{n-1}$ такая, для которой существует число β, $\beta < \frac{1-s}{s}$, такое, что функция $g(t) = k(t)\,t^{n-1-\beta}$ убывает на $(0,\infty)$, то для точек x, y, для которых шар $B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}|x-y|\right) \subset G$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y| K^*_{I,s} \left(\frac{M}{k(|x-y|)|x-y|^n} \right) \tag{4}$$

где M зависит от s, λ, n, K.

Лемма 1. Пусть G_1 - открытое множество, $\overline{G} \subset G$, и пусть $f \in W^1_{n,loc}(G,K)$. Тогда для $\epsilon < \epsilon_0$, $\epsilon_0 = \rho(\Gamma G, \Gamma G_1), f_s \in W^1_{n,loc}(G_1,K_1)$, где $K_1 = K_1(M,\lambda,s)$.

Список литературы

1.Никольский С.М. Приближение функции многих переменных и теоремы вложения.- М.:Наука, 1969.-480 с.

2.Малютина А.Н., Никулина Н.Г. Экстремальные задачи теории функций: Сборник статей под ред. В.В. Черникова.- Томск. Ун-та, 1984.

УДК: 517.982.26 + 517.538

Дискретное равновесие плоского компакта

Марковский А.Н.[33]

Рассматривается задача экстремального распределения точечных зарядов на плоском компакте; варьируются заряды и их интенсивности. Распределениям соответствуют комплексные произведения с неалгебраическими особенностями. Доказывается равномерная сходимость последовательности таких произведений и исследуются свойства предельногораспределения, в частности, доказывается равенство предельной константы емкости компакта и представление функции Грина. Изучается связь предельного распределения с некоторыми классическими экстремальными задачами геометрической теории функций комплексного переменного.

---

[32] НИТГУ

[33] Кубанский государственный университет

О разложении мероморфных функций на простейшие дроби с помощью преобразования Лапласа

Марусеев И.А.,[34] **Рассадин А.Э.**[34]

В докладе описан метод получения разложений на элементарный дроби для широкого класса мероморфных функций, альтернативный классическому способу получения таких разложений с помощью теоремы Коши. В качестве примера применения метода рассмотрим процедуру нахождения следующего разложения:

$$\frac{sh(a\cdot p)}{p\cdot sh(p)}=\frac{a}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin(\pi\cdot n\cdot a)}{\pi\cdot n}\cdot\frac{2\cdot p}{p^2+\pi^2n^2},\qquad a\geq 0. \tag{5}$$

В основе метода лежит интерпретация левой части формулы (1) как изображения некоего оригинала, найденного с помощью преобразования Лапласа, нахождения этого оригинала по известному изображению с помощью обратного преобразования Лапласа и последующему определению прямого преобразования Лапласа от этого оригинала.

То обстоятельство, что в правую часть формулы (1) входят тригонометрические функции, позволяет считать эту сумму рядом Фурье по параметру a и применить к нему равенство Парсеваля-Стеклова. Устранение таким образом параметра a даёт ещё одно новое разложение новой мероморфной функции на простейшие дроби.

В докладе приведены и другие примеры применения описанного выше метода. Также обсуждена связь некоторых из этих примеров с решениями начально-краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов.

Матричная Формула Карлемана в областях Зигеля

Матякубов З.К., Рахмонов У.С.

Ургенчский государственный университет

---

[34] Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Выметание мер относительно классов тестовых субгармонических функций и распределение нулей голоморфных функций

Меньшикова Э.Б.,[35] **Хабибуллин Б.Н.**[35]

Ряд задач теории голоморфных и мероморфных функций в субгармоническом об- рамлении можно свести к следующей задаче, формулируемой здесь для простоты для областей D на комплексной плоскости. Пусть ν и μ - положительные борелевские меры на D. При каких соотношениях между ν и μ для любой субгармонической функции M с мерой Рисса μ существует субгармоническая функция u с мерой Рисса ν, мажорируемая функцией M во всех точках области D? В определенной степени законченный результат, полностью решающий эту задачу, недавно был получен в наших работах

[1] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прил., 53:1 (2019), 8487.

[2] Э. Б. Меньшикова, Б. Н. Хабибуллин, Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост // Изв. вузов. Матем., 2020, № 5, 5561.

Пусть на границе D имеется связная компонента с не менее чем двумя точками. Для некоторого произвольного фиксированного компакта в D рассмотрим класс ограниченных сверху единицей субгармонических функций в дополнении этого компакта до D, где каждая из этих функций тождественно равна нулю вне некоторого своего компакта из D. Эти функции называем тестовыми. Ответ на поставленный выше вопрос - существует, если и только если найдется действительное число C, для которого каждый интеграл от произвольной тестовой функции по мере ν не превышает суммы интеграла от той же тестовой функции по мере μ с этим числом C [1, Теорема 1] и [2, Теоремы 2 и 3]. На основе этого в [2, Теорема 1] для произвольной непрерывной субгармонической функции M на конечносвязной области D с внешней точкой установлен критерий распределения последовательности точек в D, для которой существует ненулевая голоморфная функция с нулевым множеством, совпадающим с этой последовательностью, логарифм модуля которой не превышает функцию M в каждой точке области D.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ, проект № 19-31-90007.

---

[35] РФ, Уфа, БашГУ

Об одном соотношении квазинорм производной рациональной функции

Мисюк В.Р.[36]

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг в комплексной плоскости C. Через $\mathscr{R}_n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, обозначаем множество рациональных функций степени не выше n с полюсами вне замыкания D. Для $0 < p \leq \infty$ через $L_p(D)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на D относительно плоской меры m_2 с обычной квазинормой $||f||_{L_p(D)}$. Известно, что для $r \in \mathscr{R}_n \cap L_\infty(D)$ имеет место соотношение $||r||_{L_2(D)} \leq \sqrt{\pi n}||r||_{L_\infty(D)}$, полученное Е.П. Долженко. Ранее автором были приведены обобщения этого результата на пространства $L_p(D)$, на высшие производные и на производные дробного порядка. Доклад посвящён ещё одному такому аналогу этого неравенства.

Полнота систем экспонент в пространствах голоморфных функций, p-тригонометрическая и p-степенная выпуклость и смешанные площади

Мурясов Р.Р.,[37] **Хабибуллин Б.Н.**[37]

Система экспонент $Exp^Z := \{z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longrightarrow} e^{z_j z}\}_{j=1,2,\ldots}$ с последовательностью показателей $Z := (z_j)_{j=1,2,\ldots}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ полна в пространстве $Hol(D)$ голоморфных функций на области $D \subset C$, снабженном топологией равномерной сходимости на компактах, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с $Hol(D)$. Для произвольных показателей Z и любой неограниченной выпуклой области D критерий полноты системы Exp^Z в пространстве $Hol(D)$ был установлен в Б.Н.Хабибуллин, О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем. сб., 180:5 (1989); Math. USSR-Sb., 67:1 (1990), 149–163 [Теорема 2] исключительно в терминах соотношений между верхней плотностью и так называемой логарифмической блок-плотностью последовательности Z с одной стороны и наименьшей шириной выпуклой области D с другой. До настоящего времени ни для какой ограниченной выпуклой области D в случае произвольных показателей Z такого критерия известно не было, хотя даже для круга $D := z \in \mathbb{C} : |z| < 1$ эта проблема как исключительно трудная отмечалась П.Мальявеном и Л.А.Рубелом и др. еще в 1960-е гг. Мы предлагаем критерий полноты системы Exp^Z в пространстве $Hol(D)$ для произвольных показателей Z и любой ограниченной выпуклой области D, который формулируется исключительно в терминах соотношений между специальными плотностями распределения последовательности показателей Z, построенными с помощью 2π-периодических p-тригонометрически выпуклых и введенныхнами p-степенно выпуклых функций на положительной полуоси функций, с одной стороны и различными смешанными площадями для выпуклой области D с другой.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ, проект № 18-11-00002.

---

[36] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

[37] РФ, Уфа, БашГУ

Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба

Насибуллин Р.Г.

Казанский федеральный университет

О свойствах траекторий одного квадратичного дифференциала на трехлистном торе

Насыров С.Р.

Казанский федеральный университет

УДК: 517.983

Двумерное интегральное преобразование с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре и интегральное уравнение первого рода в пространстве суммируемых функций

Папкович М.В.,[38] Скоромник О.В.[38]

Рассматривается двумерное интегральное преобразование с функцией Бесселя-Клиффордав ядре в пространстве интегрируемых функций в области $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R^1 \times R^1 = R^2$ плоскости. Применяя технику обобщенного преобразования Лапласа,вработе даются условия ограниченности, описание образа изучаемого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя-Клиффордав ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают известные результаты для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода.

Ключевые слова: интегральное преобразование, интегральное уравнение,функция Бесселя-Клиффорда, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные, обобщенное преобразование Лапласа.

О неустойчивости экстремальной гиперповерхности

Полубоярова Н.М.

Волгоградский государственный университет

---

[38] Полоцкий государственный университет

О p-гармоническом радиусе Робена

Прилепкина Е.Г.[39]

Задачи об экстремальном разбиении плоских областей имеют богатую историю и тесно связаны с различными аспектами геометрической теории функций. В классической постановке речь идет о нахождении такого разбиения области D на две непересекающиеся подобласти, в котором достигается максимум произведения конформных (внутренних) радиусов. Несмотря на долгую историю, задачи об экстремальном разбиении областей на комплексной плоскости продолжают интересовать специалистов и в настоящее время [1]. Дубининым В.Н. было дано определение радиуса Робена плоских областей (конформный радиус является частным случаем радиуса Робена) и доказаны некоторые теоремы об экстремальном разбиении [2]. Для областей размерности $n \geq 2$ и $p > 1$ Левицкий Б.Е. ввел понятие p-гармонического радиуса, которое в случае плоской области и $p = 2$ совпадает с конформным радиусом [3]. В [4] мы рассмотрели понятие радиуса Робена пространственной области, которое включает в себя понятия конформного радиуса, радиуса Робена плоских областей и p–гармонического радиуса в евклидовом пространстве. В настоящем докладе мы обсуждаем теоремы об экстремальном разбиении пространственных областей, касающиеся p-гармонических радиусов Робена. В некоторых случаях нам удалось ослабить классические условия неналегания областей. Для доказательств используются метод модулей семейств кривых и методы симметризации. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20-01-00018.

[1] Bakhtin A. K., Denega I. V. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. Probl. Anal. Issues Anal., 2019, vol. 8(26), no. 1, pp. 17–31.

[2] Dubinin V. N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhauser/Springer, Basel, 2014.

[3] Левицкий Б.Е., Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус. Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 812–815.

[4] Калмыков С.И., Прилепкина Е.Г. О p-гармоническом радиусе Робена в евклидовом пространстве, Аналитическая теория чисел и теория функций. 32, Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 449, ПОМИ, СПб., 2016, С. 196–213

О некоторых свойствах аналитических в круге функций из плоских классов И.И. Привалова

Родикова Е.Г.[40]

Вводится в рассмотрение класс И. И. Привалова по площади, являющийся обобщением хорошо известного в научной литературе плоского класса Р. Неванлинны. Обсуждается его место в структуре известных классов. Исследуются свойства аналитических в круге функций из плоского класса И. И. Привалова: доказывается аналог классической теоремы С. Н. Мерегеляна об оценке коэффициентов разложения

---

[39] Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия, pril-elena@yandex.ru

[40] Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского

в ряд Тейлора функций из плоского класса Привалова, описываются коэффициентные мультипликаторы, действующие из этого класса в классы Харди и Неванлинны, обсуждаются свойства корневых множеств функций из этого класса.

Вычисление интеграла Мартинелли - Бохнера в полупространстве

Рустамова М.С.

Каршинский государственный университет

Рост субгармонических или целых функций экспоненциального типа вдоль прямой и распределение их мер Рисса или нулей

Салимова А.Е.,[41] Хабибуллин Б.Н.[41]

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ - две субгармонические функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с мерами Рисса соответственно ν и μ. Предположим, что рост функции u вдоль некоторой прямой $L \subset \mathbb{C}$ мажорируется функцией M или, более общо, некоторыми усреднениями функции M по окружностям с центрами на L, к тому же с определенными аддитивными добавками-функциями к M, а также не всюду на L, а вне некоторого исключительного множества $E \subset L$. Естественно ожидать,что мера Рисса ν тоже должна в каком-то смысле мажорироваться мерой Рисса μ в увязке с радиусами усредняющих окружностей, с интегральными/дифференциальными характеристиками поведения аддитивных добавок вдоль L и степенью малости исключительного множества E. Наша рассматриваемая *основная проблема* - дать количественные характеристики такого мажорирования меры ν мерой μ в терминах специальных "логарифмических" характеристик/плотностей распределениямер ν и μ, которая в значительной мере решена в статье

[1] А.Е.Салимова, Б.Н.Хабибуллин, Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфимский математический журнал, 12:2 (2020), 35–48.

Полученный в этом направлении основной результат из [1;Теорема 1] новый и при специальном виде $u = ln|f|$ и $M = ln|g|$ в случае целых функций экспоненциального типа $f \neq 0$ и $g \neq 0$, когда в роли мер Рисса ν и μ выступают последовательности нулей, или корней, соответственно функций f и g. В частности, для таких функций из [1; Теоремы 1, 2] выводится новая теорема единственности [1; Теорема 3] в терминах ограничений сверху на рост целой функции экспоненциального типа вдоль мнимой оси и логарифмической блок-плотности распределения последовательности ее нулей.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ, проект № 18-11-00002.

---

[41] РФ, Уфа, БашГУ

Теорема Мальявена-Рубела о малости роста целых функций экспоненциального типа с заданными нулями: 60 лет спустя

Салимова А.Е.,[42] Хабибуллин Б.Н.[42]

Яркий результат теории целых функций - Теорема Мальявена - Рубела из [M-R1961] P. Malliavin, L.A. Rubel, On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France, 89:2 (1961), 175–201 [Theorem 4.1].

Он вошел как одна из основных глав в монографию [RC1996] L.A. Rubel (with J.E. Colliander), Entire and Meromorphic Functions, Verlag, NY–Berlin–Heidelberg, 1996 [Chapter 22].

Известны многочисленные применения его к полноте систем функций, аналитическому продолжению, сверткам мер, спектральному анализу-синтезу и проч. Он, исключительно в терминах так называемых логарифмических характеристик распределения двух последовательностей положительных чисел Z и W, дает законченное описание условий, при которых для любой ненулевой целой функции экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) g, обращающейся в нуль на W, найдется такая ненулевая ц.ф.э.т. f, обращающаяся в нуль на Z, что $|g|$ мажорирует $|f|$ всюду на мнимой оси. Начиная с наших работ конца 1980-х гг., эти результаты в той или иной степени общности переносились на комплексные последовательности Z и W. Так, на этом пути нами был получен критерий полноты произвольной экспоненциальной системы в пространствах функций, голоморфных в неограниченной выпуклой области, исключительно в терминах логарифмической характеристики последовательности показателей системы и в терминах ширины области в направлении. К 2020г. можно сказать, что этот цикл исследований в значительной мере завершен в текущем году:

[KhS2020] Б.Н.Хабибуллин, А.Е.Салимова, Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. III. К теореме Мальявена - Рубела о малости роста целых функций экспоненциального типа // Алгебра и анализ, 2020 (направлено в журнал)

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ, проект № 18-11-00002.

Периодические метааналитические функции второго порядка со многими комплексными переменными

Сафаров Д.С.,[43] Мухаммадали Дж.[43]

В пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$ -комплексная плоскость, рассмотрим систему уравнений в частных производных вида

$$L_j w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}_j} + a_j \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j} + b_j w = f_j, j = 1, 2, \cdots, n, \qquad (1)$$

$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $z_j = x_j + i y_j$, $2\partial_{\bar{z}_j} = \partial_{x_j} + i\partial_{y_j}$ -дифференциальный оператор Коши-Римана, $f_j(z)$ -заданные функции, $w(z)$ -искомая функция. Предполагается, что

---

[42] РФ, Уфа, БашГУ

[43] Бохтарский государственный университет (БГУ) им. Носира Хусрава

система (1) разрешимо, то есть скобка Пуассона

$$L_jL_k - L_kL_j \equiv 0,$$

или f_j удовлетворяют систему уравнений

$$L_jf_k = L_kf_j,\ k \neq j,\ k,j = 1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

Рассматривается задачи нахождения двоякопериодических решений системы (1), по каждому переменному при фиксировании остальных переменных

$$w(z_1,z_2,\cdots,z_j+h_j^k,\cdots,z_n) = w(z_1,z_2,\cdots,z_j,\cdots,z_n),\ k=1,2.,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

постоянные h_j^1, h_j^2 - такие, что $Im(h_j^2/h_j^1) \neq 0,\ j = 1,2,\cdots,n$.

Предполагается, что f_j удовлетворяют условиями (2). Когда в (1) $a_j,\ b_j$ - постоянные, в зависимости от свойства корней уравнении

$$\lambda_j^2 + a_j\lambda_j + b_j = 0,\ j = 1,2,\cdots,n,$$

решение задачи (1), (2) найдены с помощью интегральных операторов с ядром эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z_j), \sigma(z_j)$, построенные на периодах $h_j^1, h_j^2,\ j = 1,2,\cdots,n$. Установлены условной и безусловной разрешимости задачи (1), (3).

Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах

Собиров З.,[44] Эшимбетов М.[44]

Пусть $\Gamma = E \cup V$ - связанный метрический граф, где $E = \{b_j\}_{j=1}^n$ - множество ребер, а $V = \{v_j\}_{j=1}^m$ - множество вершин графа [2]. Определяем координаты x_j на ребрах графа с помощью изометрического отображения этих ребер на интервалы $(0, L_j)$, $j = 1,2,...,n$.

Мы будем говорит, что вершина v соприкасается ребра b_j, если это вершина является концом данного ребра и обозначаем это как $b_j \sim v$. Количество элементов множества $\{b : b \sim v, b \in E\}$ назовем валентностью вершины v. Если валентность вершины равна единице, то она называется граничным. Пусть $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ - граничные вершины графа. Далее, не нарушая общности, мы будем использовать x вместо x_j.

В каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности [3-4]

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t), x \in b_j, t > 0,\ j = 1,2,...,n. \tag{6}$$

Потребуем, что бы решение уравнения (6) удовлетворяло начальному условию

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x),\ j = 1,2,...,n. \tag{7}$$

---

[44] Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан

В точках разветвление (т.е. в не граничных вершинах) графа решение должна удовлетворит следующим условиям склеивания

а) значения на вершине v всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim v$, одинаковы;

б) сумма односторонных производных на каждом вершине v всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim v$, равна нулю:

$$\sum_{b_j \sim v} \left. \frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x} \right|_v = 0, v \in V \backslash \partial \Gamma,\ t \in [0,\, T]. \tag{8}$$

Первое из этих условий называется условием непрерывности решения на вершине, а второе условием сохранения потока. Эти условия ещё называются условиями Кирхгоффа, а иногда условиями типа δ на вершине.

На граничных вершинах графа потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$u^{(j)}(x,t)|_v = g_0^{(j)}(t) \text{ если } x_j = 0 \text{ на вершине } v,$$

$$u^{(j)}(x,t)|_v = h_0^{(j)}(t), \text{ если } x_j = L_j \text{ на вершине } v, b_j \sim v. \tag{9}$$

Начальные данные $u_0^{(j)}, j = \overline{1,n}$, удовлетворяют условиям склеивания на не граничных вершинах графа и условиям согласования на граничных вершинах.

В этом случае количество ребер $n = 6$, а количество вершин $m = 6$. Мы здесь будем излагать метод построения более подробно.

Теорема. Решение начально-краевой задачи на Γ_1 имеет вид

$$\begin{gathered} u^{(j)}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - wt} \widehat{u}_0^{(j)}(k) dk - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{ikx - ikL_j - wt} \left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t) + ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t) \right) dk - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - wt} \left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t) + ik\widehat{g}_0^{(j)}(w,t) \right) dk,\ (j = 1,2,\dots,6). \end{gathered} \tag{10}$$

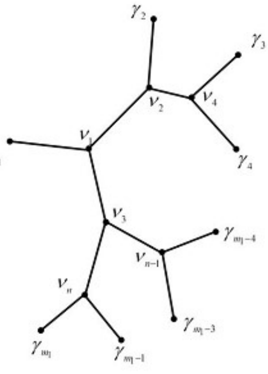

Рис. 1. Г метрический граф

где $G^{(j)}(k,t)=\widehat{u}_0^{(j)}(k)+(e^{-ikL_j}-1)ik\widehat{h}_0^{(j)}(w,t)$, $j=1,2,\ldots,6$, $\widehat{g}_0^{(1)}(w,t),\widehat{h}_0^{(5)}(w,t),\widehat{h}_0^{(6)}(w,t)$ — известные функции, которые выражаются через граничные данные по формулам (9)

$$\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(G^{(j)}(k,t)-G^{(j)}(-k,t)\right), \tag{11}$$

$$\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(e^{ikL_j}G^{(j)}(k,t)-e^{-ikL_j}G^{(j)}(-k,t)\right), \tag{12}$$

$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j}$, $B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j}$, $j=1,2,\ldots,6$, $\left(\tilde{h}_0^{(1)}(w,t),\tilde{h}_0^{(2)}(w,t),\tilde{h}_0^{(3)}(w,t)\right)^T=(M(k))^{-1}(N_1(k)\cdot\widehat{U}_0(k)+N_2(k)\cdot\widehat{U}_0(-k))$.

Решение задачи построена так называемым методом Фокаса, которое является обобщением метода преобразования Фурье. При этом, задача сведена к системе алгебраических уравнений, относительно преобразования Фурье неизвестных значений решения в вершинах графа [1,5]. Доказана однозначная разрешимость полученной системы уравнений.

References

[1] Fokas A.S., A Unified Approach to Boundary Value Problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics.* 2008. Pp. 352.

[2] Berkolaiko G., An elementary introduction to quantum graphs. *arXiv:1603.07356v2 [math-ph] 17 Dec 2016.*

[3] Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R., Unified transform (Fokas) method for the Schrodinger equation on simple metric graph. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2019 12(4), 412-420.

[4] Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R., The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. *Uzbek Mathematical Journal.,* 2019. № 1., Pp. 73–81.

[5] Sheils N.E., Interface Problems using the Fokas Method. *A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.University of Washington* 2015. Pp. 210.

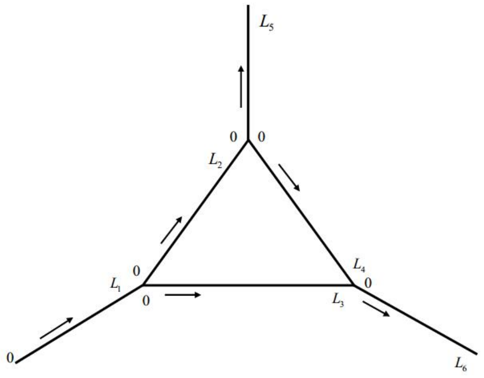

Рис. 2. Γ_1 метрический граф

О приближенных решениях некоторых краевых задач

Тарасова О.А.[45]

Нахождение приближенных решений краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в полупространстве осуществляется с помощью специальных дискретных операторов и дискретных краевых задач. Исследование разрешимости этих задач основано на специальном представлении (факторизации) символа эллиптического псевдодифференциального оператора. Благодаря этому появляется возможность описать разрешимость данных краевых задач и провести сравнение между дискретными и непрерывными решениями.

Мы рассматриваем следующую краевую задачу

$$\begin{cases}(Au)(x)=0, & x\in R^m_+,\\ & (Bu)|_{\partial D}=g\end{cases}$$

где A, B - простейшие эллиптические псевдодифференциальные операторы с символами $A(\xi)$, $B(\xi)$, действующие в пространствах Соболева – Слободецкого, g - заданная функция, и проводим сравнение между решениями этой краевой задачи и ее дискретным аналогом с оценкой погрешности в подходящих дискретных функциональных пространствах.

Некоторые свойства матричного шара второго типа

Худайберганов Г.,[46] **Абдуллаев Ж.Ш.**[46]

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое через $\mathbb{C}^{m^2}$. В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m\times m]$ - матриц, т.е. в виде $Z=(z_{ij})^m_{i,j=1}$. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m\times m]$. Прямое произведение $\underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times\cdots\times\mathbb{C}[m\times m]}_{n}$ n экземпляров пространств $[m\times m]$ - матриц обозначим $\mathbb{C}^n[m\times m]$.

Пусть $Z=(Z_1,Z_2,...,Z_n)$- вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m, рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z- элемент множества $\mathbb{C}^n[m\times m]\cong\mathbb{C}^{nm^2}$.

Матричное «скалярное» произведение:

$$\langle Z,W\rangle=Z_1W_1^*+Z_2W_2^*+...+Z_nW_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j.

---

[45] Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, Белгород

[46] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, механико-математический факультет, Ташкент

Известно (см. напр. [4]), что матричные шары $B^{(1)}_{m,n}$, $B^{(2)}_{m,n}$ и $B^{(3)}_{m,n}$ первого, второго и третьего типов, соответственно, имеют вид:

$$B^{(1)}_{m,n} = \left\{(Z_1,\dots,Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I - \langle Z,Z\rangle > 0\right\},$$

$$B^{(2)}_{m,n} = \left\{Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I - \langle Z,Z\rangle > 0,\ \ \forall Z'{}_{v} = Z_\nu,\ \nu = 1,\dots,n\right\}$$

и

$$B^{(3)}_{m,n} = \left\{(Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I + \langle Z,Z\rangle > 0,\ \forall\, Z'_\nu = -Z_\nu,\ \ \nu = 1,\dots,n\right\}.$$

Остовы (границы Шилова) матричных шаров $B^{(k)}_{m,n}$, обозначим через $X^{(k)}_{m,n}$, $k = 1,2,3$, т.е.,

$$X^{(1)}_{m,n} = \left\{Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : \langle Z,Z\rangle = I\right\},$$

$$X^{(2)}_{m,n} = \left\{Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : \langle Z,Z\rangle = I,\ \ Z'{}_{v} = Z_\nu,\ \nu = 1,2,\dots,n\right\},$$

$$X^{(3)}_{m,n} = \left\{Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I + \langle Z,Z\rangle = 0,\ \ Z'_\nu = -Z_\nu,\ \ \nu = 1,2,\dots,n\right\}$$

. Заметим, что $B^{(1)}_{1,1}$, $B^{(2)}_{1,1}$ и $B^{(3)}_{2,1}$- единичные круги, а $X^{(1)}_{1,1}$, $X^{(2)}_{1,1}$, и $X^{(3)}_{2,1}$- единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n = 1, m > 1$, то $B^{(k)}_{m,1}$, $k = 1,2,3$ - классические области первого, второго и третьего типа (по классификации Э.Картана (см. [1]), а остовы $X^{(1)}_{m,1}$, $X^{(2)}_{m,1}$, и $X^{(3)}_{m,1}$ - унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

Первый тип матричного шара рассматривали А. Г. Сергеев, Г. Худайберганов [3], [4]. В работе [5] вычислены объемы матричного шара второго и третьего типа. Полные объемы этих областей необходимы для нахождения ядер интегральных формул для этих областей (ядра Бергмана, Коши–Сегё, Пуассона и т. д. (см. [6])). В этой работе мы опишем автоморфизмы матричного шара $B^{(2)}_{m,n}$, ассоциированных с классическими областями второго типа, также изучаем некоторые свойства матричного шара второго типа.

Пусть $B^{(2)}_{m,n}$ матричный шар второго типа и $X^{(2)}_{m,n}$ его остов.

Лемма 1. *Матричный шар $B^{(2)}_{m,n}$ обладает следующими свойствами:*

1) *$B^{(2)}_{m,n}$ ограниченная область;*

2) *$B^{(2)}_{m,n}$ полная круговая область;*

3) *Область $B^{(2)}_{m,n}$ и ее остов $X^{(2)}_{m,n}$ инвариантны относительно унитарных преобразований;*

4) *$B^{(2)}_{m,n}$ выпуклая область.*

Наша цель найти автоморфизмы для матричного шара второго типа. Искомый автоморфизм ищем в виде

$$W_k = \left(A_{00} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{j0}\right)^{-1}\left(A_{0k} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{jk}\right),\ k = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Надо найти коэффициенты A_{ij} так, чтобы отображение (1) было автоморфизмом матричного шара второго типа.

Введем следующие обозначения

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} & A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I^{(m)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I^{(m)} \end{pmatrix}$$

блочные квадратные матрицы порядка $n+1$, а A_{ij} - квадратные матрицы порядка m.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Отображение (1) является автоморфизмом матричного шара* $B^{(2)}_{m,n}$ *тогда и только тогда, когда коэффициенты* $A_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, *удовлетворяют соотношениям*

$$AHA^* = H, \ A_{sk}A'_{j0} = A_{j0}A'_{jk}, \ s = 0, \dots, n, \ j = 0, \dots, n. \tag{2}$$

Теперь вычислим объем остова $X^{(2)}_{m,n}$ матричного шара второго типа $B^{(2)}_{m,n}$.

Лемма 2. *Объем остова матричного шара второго типа вычисляется по следующей формуле:*

$$V\left(X^{(2)}_{m.n}\right) = \frac{2^{\frac{mn(m+1)}{2}} \pi^{\frac{mn(m+3)}{4}}}{\left(\prod\limits_{\nu=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{m-\nu+1}{2}\right)\right)^n}.$$

Отметим, что при $n = 1$ следует формула для остова классической области второго типа (см. [2]).

Список литературы

[1] E. Cartan, *Sur les domaines bornes homogenes de l 'espace de variables complexes*, // Abh. Math. Sern. Univ. Hamburg 11(1935),116-162.

[2] L.K.Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables, in classical domains*, Moscow, IL, 1963 (in Russian)

[3] A. G. Sergeev, *On matrix and Reinhardt domains*, Preprint, Inst. Mittag-Leffler, Stockholm, 1988 , 7 pp.

[4] G.Khudayberganov, A.M.Kytmanov, B.A.Shaimkulov, Analysis in matrix domains, *Monograph. Krasnoyarsk: Siberian Federal University*, 2017. p. 296 (Russian).

[5] U.S.Rakhmonov, J.Sh.Abdullayev, On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* 2019, vol. **29**, issue 4, pp. 548-557.

[6] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, Z.Q.Matyakubov, Integral formulas for some matrix domains , *Contemporary Mathematics, AMS*, Volume **662**(2016), pp. 89-95.

Задача линейного сопряжения для эллиптических систем

Чернова О.В.[47]

На комплексной плоскости рассматривается ляпуновский контур. Множество, которое является дополнением к контуру разбивается на два открытых множества, причем одно из них является окрестностью бесконечно удаленной точки, а их границы совпадают с самим контуром. Далее вводится пространство Гельдера, которое состоит из функций удовлетворяющих условию Гельдера на любой конечной подобласти дополнения к контуру. Аналогичным образом вводится соответствующее пространство дифференцируемых функций. Рассматриваются две эллиптические системы с комплексными и вещественными коэффициентами. Для них ставится задача линейного сопряжения. Предполагая, что кусочно-непрерывные матричные коэффициенты систем принадлежат специальному пространству Гельдера в работе сформулированы теоремы о фредгольмовости этих систем. Применяя результаты классической теории сингулярных операторов и ряд вспомогательных утверждений теоремы доказаны и найдены формулы для их поставленных задач.

Задача Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций

Шабалин П.Л. [48]

Для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной линией рассмотрена краевая задача Гильберта с непрерывными коэффициентами и краевым условием на единичной окружности. Получена формула общего решения обобщенной системы, с использованием которой краевая задача Гильберта приведена к аналогичной задаче для аналитических функций но уже с бесконечным индексом. Паталогия индекса возникла из-за бесконечного завихрения в двух точках пересечения сингулярной линии с единичной окружностью. Выведена формула общего решения однородной задачи Гильберта, проведено полное исследование картины разрешимости этой задачи в классе ограниченных аналитических в круге функций. Получено общее решение неоднородной задачи Гильберта с бесконечным индексом. Последнее применено при нахождении общего решения краевой задачи Гильберта для обобщенной системы Коши-Римана.

---

[47] Белгородский государственный национальный исследовательский университет

[48] КазГАСУ